



PROYECTO FIN DE GRADO

GEOMETRÍA MUDÉJAR EN EL PATIO DE LAS DONCELLAS

Autora: María Gutiérrez Estudillo

Tutores: Dra. María José Chávez de Diego

Dr. Raúl Falcón Ganfornina

Junio 2017



GEOMETRÍA MUDÉJAR EN EL PATIO DE LAS DONCELLAS.

Proyecto de Fin de Grado presentado por María Gutiérrez Estudillo, siendo los tutores del mismo la Doctora María José Chávez de Diego y el Doctor D. Raúl Manuel Falcón Ganfornina.

Vº. Bº. de los Tutores:

Dra. Dª. María José Chávez de Diego

Dr. D. Raúl Manuel Falcón Ganfornina.

Alumna:

Dª. María Gutiérrez Estudillo.

Sevilla, Junio 2017

2

María Gutiérrez Estudillo



Índice General

AGRADECIMIENTOS	6
TRIBUNAL	7
SUPLENTES	7
RESUMEN	8
ABSTRACT	9
I. INTRODUCCIÓN	10
II. ESTADO DE LA CUESTION O ESTADO DEL ARTE	12
A. CONTEXTO HISTORICO:	12
B. PATRONES DECORATIVOS (LABOR DE LAZO)	16
III. MATERIALES DE LA DECORACIÓN DEL PATIO DE LAS DONCELLAS	24
A. LA CERÁMICA: ALICATADOS	24
B. LA YESERIA	26
C. LA MADERA	27
IV. JUSTIFICACIÓN Y OBJETIVO	29
A. JUSTIFICACIÓN	29
B. OBJETIVOS	29
C. COMPETENCIAS	30
V. METODOLOGÍA Y ESTUDIO DE CASOS	31
A. TEORÍA DE LA SIMETRIA	33
B. LAS ISOMETRÍAS DEL PLANO	34
C. TECNICAS COMPUTACIONALES: GEOGEBRA	85
CONCLUSIONES Y PROSPECTIVA	135
INDICE DE ILUSTRACIONES	136
ÍNDICE DE PLANOS	141
INDICE DE FOTOS	141



REFERENCIAS	142
CITADA	142
CONSULTADA	143

Agradecimientos

A mi tutora: Doctora María José Chávez, por confiar en mí y por ser tan paciente.

A mi familia por ayudarme a conseguir este gran objetivo en mi vida.

Al Doctor. Raúl Falcón por sus enseñanzas con el programa GeoGebra.

A Pilar López por su ayuda en campo y por motivarme durante todo este tiempo.

Al Doctor Miguel Ángel Tabales por ayudarme a conocer un poco más el Real Alcázar desde otro punto de vista.

A Esther Pineda por su ayudarme en el trabajo de campo.

A Nacho García por su ayuda con el inglés.

A Isabel Rodríguez por dejar la entrada al Real Alcázar para la investigación en campo y Manuel Hurtado por coordinarlo.



Tribunal

Juan Carlos Pérez Pedraza

Humberto Ortega López

Ana Márquez de la Plata Cuevas

Suplentes

Pedro Barreo Ortega

Fernando Rico Delgado

Rafael Llacer Pantion

Resumen

Desde hace varios siglos, Sevilla se caracteriza por sus patios llenos de zócalos de cerámica, lo que caracteriza su estética y arquitectura popular. Muchos de esos revestimientos tienen un diseño análogo a los paños de alicatados del Real Alcázar de Sevilla, en los que se observa la repetición armoniosa de un motivo mediante “*traslaciones, rotaciones, reflexiones y deslizamientos*”.

Este trabajo se centra en el estudio de la ornamentación del Patio de las Doncellas situado en el Palacio mudéjar de Pedro I dentro del Real Alcázar de Sevilla, mediante el análisis de las estructuras geométricas que presenta.

Este análisis requiere conocer la estructura y la clasificación de los *Grupos de Simetría* de una parte del plano: rosetones, frisos y mosaicos. La teoría matemática de la Simetría nos permite clasificar los paños decorativos, así como restaurarlos aunque se encuentre muy dañados, pues basta con tener una Región Mínima.

En este trabajo se ha catalogado según los Grupos de Simetría la decoración mudéjar de la cerámica, madera y yeserías del Patio de las Doncellas. Algunos de ellos se han reproducido a través del programa GeoGebra.

Abstract

For several centuries, one of the main esthetics and popular architecture characteristics of Seville's building are their courtyards that are full of ceramic sockets. Many of these coatings have a design analogous to the tiling cloths of the Real Alcázar of Seville, in which the harmonious repetition of a motive is observed through "translations, rotations, reflections and slides".

This study analyses the geometric structures of the ornamentation of the "Doncellas" courtyard located in the Mudéjar Palace of Pedro I inside the Real Alcázar of Seville.

This analysis requires knowing the structure and classification of the symmetry groups of a part of the plane: rosettes, friezes and mosaics. The mathematical theory of the Symmetry allows us to classify the decorative cloths, as well as to restore them even if they are very damaged, as it is sufficient to have a Minimum Region of it.

As a result, the Mudejar decoration of the ceramics, wood and plasterwork of the "Doncellas" Courtyard has been cataloged according to the symmetry groups. Some of them have been reproduced using the GeoGebra software.

I. INTRODUCCIÓN

Este proyecto se centra en la clasificación y estudio mediante técnicas matemáticas (Simetría) de la decoración geométrica del Patio de las Doncellas del Real Alcázar de Sevilla.

El objetivo es estudiar la *Simetría* de los paños de los alicatados, cenefas de yeserías, puertas y contraventanas. Partiendo de una Región Unidad correspondiente, generar gráficamente el paño decorativo. Este proceso se Realiza mediante el software GeoGebra.

Para ello antes se realiza un análisis, en el cual se determina qué tipo de *Grupo de Simetría*¹ presenta: Grupo de Simetría lineal (Friso), Grupo Plano (Mosaico) o Grupo Puntual (Leonardo). Se visualiza los paneles de alicatados uno a uno y se aplica un algoritmo que va identificando las *traslaciones*, los *rotaciones* y *reflexiones* para catalogarlos adecuadamente. En caso de duda, se aplica otro algoritmo alternativo con la misma finalidad y así se puede determinar exactamente a qué grupo pertenece.

Una vez que ya está identificado el Grupo de Simetría, se halla la Región Unidad, a continuación su Región Mínima y se pasa a la fase de generación del paño decorativo con el programa GeoGebra. En primer lugar se importa una foto del panel de alicatado, yesería o elemento en madera, y según el tipo de Grupo de Simetría, se le aplican las transformaciones geométricas (reflexiones, rotaciones, deslizamientos y traslaciones) al Región Mínima. Por ejemplo si el grupo es un C_4 de Leonardo, la Región Mínima es un cuadrado que se dibuja encima de la foto línea a línea, al que se le aplica 4 rotaciones sucesivas de 90° y de centro un vértice del cuadrado, generando así, el paralelogramo fundamental (en este caso un cuadrado).

- Ejemplo de Región Mínima en el interfaz generado en el programa GeoGebra véase Ilustración1.

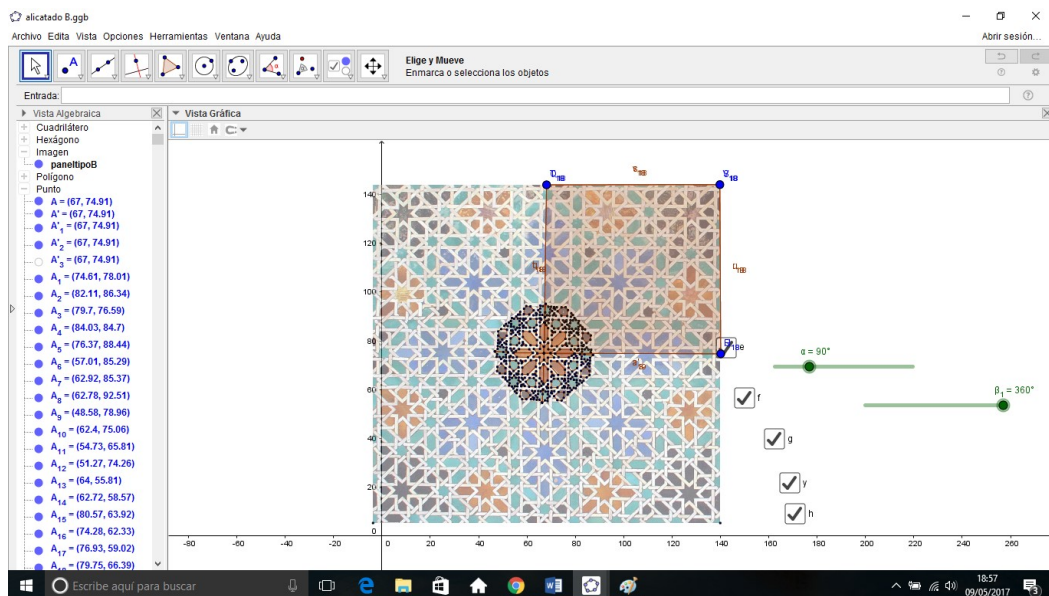


Ilustración 1. Ejemplo de Región Mínima. (La autora, 2017)

¹ Grupo de Simetría: es un grupo de operaciones o transformaciones geométricas que deja invariante cierta entidad geométrica o entidad física.

Siempre, aunque tenga definido qué grupo es, vuelvo a comprobar en el GeoGebra que se verifica, con esto quiero decir que en la *Ilustración 1* compruebo si se puede hacer alguna traslación o reflexión, una vez que compruebo que no, ya doy por hecho que está bien definido. Así lo vuelvo a repetir con cada uno de los elementos elegidos.

¿Qué es GeoGebra?

GeoGebra es un software libre de Geometría Dinámica, que se ha convertido en una herramienta indispensable en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas haciendo que las clases sean muy atractivas y dinámicas. Al ser una herramienta gratuita, suficientemente potente y en continuo desarrollo, en los últimos años este programa ha ido adquiriendo una importancia vital en el aula de Matemáticas, debido a que permite al alumnado interactuar de forma dinámica con distintos campos como son la Geometría, el Álgebra, el Cálculo o la Estadística. Su éxito radica en la facilidad de generar plantillas muy versátiles por parte del profesorado, las cuales puede exportar fácilmente a HTML y llevar al aula.

II. ESTADO DE LA CUESTION O ESTADO DEL ARTE

A. CONTEXTO HISTORICO:

REAL ALCÁZAR DE SEVILLA

El Real Alcázar de Sevilla tiene su origen en el siglo X, cuando reinaba el Califa de Córdoba Abderrahman III an-Násir, ordenó en el año 913 el primer recinto perteneciente a su gobierno en Sevilla, la Dar al-Imara, en las afueras de Sevilla.

Aunque ahora sea el centro de Sevilla, en su pasado era las afueras, esto es debido y ocasionado por la evolución del cauce del río Guadalquivir, que ha ido decreciendo hasta hoy en día. Por ello la ciudad ha ido creciendo hacia el río.

El primer recinto del Real Alcázar estaba situado donde se encuentra el Patio de banderas, el cual no pertenece al Real Alcázar en este momento. Anteriormente a esta construcción los Romanos ya habían ocupado esta zona y habían construido una muralla, la cual usan los musulmanes parte de ella para construir su propia muralla de su recinto. Esto se sabe a partir de los estudios del profesor Miguel Ángel Tabales (Tabales, Escavaciones Arqueologicas en el Patio de Banderas; Real Alcázar de Sevilla, 2009)

Al Palacio del siglo X, se le añade posteriormente el Alcázar Nuevo de los Abbâdies, los nuevos gobernantes de Sevilla. Este Palacio de al-Mubarak fue el centro de su vida oficial, aunque su gobierno fueron acogidos en las casas Sevillanas, por su cultura no encajaron muy bien en la ciudad y tuvieron que construir más casas en el interior del recinto para poder vivir. Los Almohades en el siglo XII, completarían las obras de época árabe, de las cuales no quedan restos.

En 1248-49 hubo la conquista castellana de la ciudad de Sevilla, ocupándose el recinto del Real Alcázar. Bajo la corona de Castilla se construyeron el palacio Gótico S.XIII y el palacio Mudéjar de Pedro I de mitad del siglo XIV. El palacio Mudéjar fue construido cuando el rey don Pedro I de Castilla estaba en el mandato, entre 1364 y 1366.

EL PALACIO MUDÉJAR DE PEDRO I

Palacio mudéjar levantado sobre construcciones árabes altomedievales en torno a un patio central, que aglutina el espacio oficial del edificio y uno secundario, que articula el espacio privado, sobre una superficie total aproximada de 2.550 m².

El rey Pedro I de Castilla (Burgos 1334- Montiel 1369) levantó el “Alcázar Nuevo” de Sevilla en el periodo más tranquilo y próspero de su reinado, comenzado a suceder a su padre Alfonso XI en el 1350. El canciller Pero López de Ayala, el cronista que adjudicó al rey castellano el sobrenombre de Cruel antes de que siglos más tarde Felipe II lo reivindicara con el de Justiciero, nos señala que Pedro I residía antes de su construcción en el Palacio del Yeso. Contiguo a éste Alfonso XI había levantado la Sala de la Justicia. El monarca castellano no pudo disfrutar mucho tiempo del Alcázar Nuevo. Tres años después de su terminación los enfrentamientos internos acabarían con su asesinato. (Cómez, 1996)

Para la construcción de su palacio, el rey don Pedro empleó tanto a profesionales en construcciones y artesanía constructiva de Sevilla, como de Toledo y Granada. Siendo Granada todavía un reino islámico, los artesanos granadinos fueron mandados a Sevilla por el rey nazarita Muhammad V. Las obras de aquellos se veía sobre todo en los aplicados azulejos blancos y azules. Don Pedro residió en ese palacio de una manera relativamente familiar, acompañados de un conjunto de personas privadas, guerreros y palatinos. El palacio, y así también el Patio de las Doncellas, iban a ser usados posteriormente de otra forma, al ser elegidos por el emperador Carlos V para celebrar allí su boda con Isabel de Portugal.

El interior se estructura en torno a dos núcleos, uno dedicado a la vida oficial que se sitúa alrededor del Patio de las Doncellas y otro a la privada en torno al Patio de las Muñecas. Caminando a lo largo de las galerías y salas decoradas con bellos azulejos y admirando los preciosos techos mudéjares, desde el vestíbulo se llega al Patio de las Doncellas, patio principal, una obra maestra del arte mudéjar andaluz. Desde la entrada al Patio de las Doncellas nos encontramos a la derecha la Alcoba Real también denominado Dormitorio de los Reyes Moros, enfrente se halla el Salón de Embajadores y a la izquierda el Salón del Techo de Carlos V.

Los Reyes Católicos también tuvieron una importante intervención en el Palacio Mudéjar, sobre todo en el piso superior, que terminaron de construir y acondicionaron confortablemente para estancias invernales. La planta superior del palacio alberga los apartamentos Reales, redecorados en el siglo XVIII.

EL PATIO DE LAS DONCELLAS: Historia y descripción

El así llamado “Patio de las Doncellas” es el primer patio en el famoso conjunto arquitectónico del “Palacio de Pedro I”, implicado como uno de los monumentos individuales más notables en el Real Alcázar de Sevilla. Esta residencia Real, entre todas las que han sido mantenidas en España, destaca por la gran variedad de estilos artísticos y reflejos de épocas culturales tanto como de niveles y evoluciones de la construcción. Los edificios y patios ofrecen una mirada diversificada a palacios y jardines, patios y columnas. El Patio de las Doncellas cumple todas estas características.

El Patio de las Doncellas es una pieza cuadrangular, rodeado por una galería de arcos separados por elegantes columnas de mármol. Estas columnas sustituyen las originales de ladrillo y fueron colocados tras una reforma general, tanto como se rehízo partes de los ornamentos de yesería en el siglo XVI. Otra renovación se Realizó en los techos de las cuatro galerías en la época de los reyes católicos.

En la primera planta el uso de columnas se ve repetido, siendo nombrado la evidente diferencia de que en la planta baja los arcos se ven apoyado por pares de columnas, mientras que los de la primera planta en la mayoría solo son aguantados por una sola. Esta balaustrada fue añadida a mitades del siglo XVI bajo el reino del emperador Carlos V, siendo una obra del arquitecto Luis de Vega.

Además se reconoce que los ornamentos decorativos de los arcos rodeando el patio son mucho más detallistas que los más modestos una planta más arriba. En cada uno de los cuatro lados del patio las línea de columnas está interrumpida por un arco de casi la doble altura y relativamente más anchura. Los ornamentos ya mencionados son una obra altamente geométrica de la yesería y el complejo arquitectónico en sí, un elemento de notable Simetría. Desde el Patio de las Doncellas hay la posibilidad de acceder a tres siguientes salones del palacio, llamados el salón del Dormitorio, de Carlos V y de los Embajadores que está equipado con elementos que muestran medallas y escudos imperiales. (Romero Murube, 1977) (Tabales Rodriguez, 2010)

Siguiendo las enseñanzas del profesor Miguel Ángel Tabales (Tabales, 2009-2014), en las excavaciones que se realizaron en el Patio de las Doncellas en el año 2002, se descubrió que para la construcción del nuevo palacio los previos edificios islámicos fueron demolidos de manera muy completa. Llama la atención que para las nuevas construcciones no se aprovechaba de casi ninguna manera de las estructuras preexistentes, siendo una sola muralla de tapial del siglo XII el único elemento constructivo mantenido en las nuevas obras. Otro resultado de las mismas excavaciones es, que las obras para demoler previas construcciones fueron procedidas hasta la máxima profundidad, siendo rellenados los así creados espacios con el propósito de la nivelación con tierras primorosamente escogidas. Así se explica la falta de fragmentos de construcciones anteriores en el Patio de las Doncellas.

El espacio central del Patio de las Doncellas está dedicado a un tipo de jardín que cumple características imprescindibles de un jardín islámico, implicando la posibilidad de plantar flora aromática y un tipo de corriente para que el sonido del agua interrumpa el silencio predominante. El estanque rectangular se encuentra con el resto del jardín en un nivel aproximadamente cuarenta centímetros más bajo de la galería principal del patio, los bordes fueron construidos con ladrillos. En el patio de la doncella están combinados de una manera armónica los conceptos de un palacio castellano y de la estética y privacidad islámica.

Durante la época de Felipe II, el centro del patio fue dominado por una fuente posteriormente colocada. La recuperación del diseño más o menos original del Patio de las Doncellas surgió reciente, habiéndose renovado también la implantación de una alberca en el centro del jardín, recorriendo casi la entera dimensión del eje longitudinal. Entre las atracciones que ofrece el Real Alcázar de Sevilla, el Patio de las Doncellas es una de las más apreciadas. Ese detalle arquitectónico representa de una forma inimitable las características del entero complejo. El resultado que vemos hoy en día demuestra la colaboración de los mejores artesanos de España, la combinación exitosa y estética de elementos islámicos y cristianos y un símbolo histórico que ha sobrevivido siglos de cambios y modificaciones.

B. PATRONES DECORATIVOS (LABOR DE LAZO)

Según Carpintería de lo Blanco (Albendea Ruz, 2011) en el arte islámico no se copia a la naturaleza totalmente, ya que se piensa que es un acto de infidelidad a su Dios. Los patrones decorativos se obtienen repitiendo elementos simples, en muchas ocasiones superpuestos o entrelazados. Estos patrones sometidos al orden de la geometría y Simetría provocan un efecto dinámico y armonioso. Existe mucho equilibrio entre los motivos y muchas reiteraciones. Cada pieza se debe al conjunto y este se genera por repetición modular.

La geometría es más intelectual que emocional por su base matemática. Se utiliza aplicándola a un patrón que permite crear otros motivos por medio de repetición simétrica, multiplicación o subdivisión. Por eso, más importante que la propia lacería de estrellas, son las ruedas que engendran el desarrollo de éstas. Las estrellas se pueden generar a partir de un primer sistema de cruces de líneas, de un segundo cruce o bien de un tercero, dando lugar en este caso último a la rueda o flor de lazo.

El “lazo” es la cinta que dibuja los trazos geométricos, y a partir de ahí se sacan las diferentes formas geométricas.

La labor de lazo consiste en un entrelazado geométrico realizado mediante cintas o lazos que van pasando alternativamente unas encima de otras, formando determinados trazados geométricos, sin aparente solución de continuidad, siempre describiendo líneas rectas, y con la particularidad que los quiebros de las cintas no coinciden nunca con las puntas de entrecruzamiento de las mismas.

El trazado de lacería es muy particular de la ornamentación musulmana y muy apreciado por los artesanos, dadas las posibilidades de formas que se obtienen y la gran variedad de dibujos². Véase Ilustración 2.

² BOQUILLA: caja, hueco o abertura con forma de boca, que se abre en una pieza de madera, rebajándola, para ensamblar o clavar en ella la pieza o piezas correspondientes. (en alicatados no hay boquilla).

HALIBA: En labor de lacería, una de las piezas componentes de la rueda de lazo, contigua a signos, azafates y almendrillas. Su forma recuerda la del pez halibut.

COSTADILLOS: son los lados paralelos del azafate inmediatos a la espilla y que limitan por el otro extremo con los que forman la punta del azafate.

ASPILLA: Es una pieza en forma de cruz de San Andrés que remata la cabeza de los azafates en una rueda de lazo. El cruce oblicuo de las dos piezas que rematan por la parte exterior el azafate.

SINO, SINOS O SIGNOS: Polígono regular estrellado con distinto número de puntas que da nombre a cada tipo de lazo. Centro y origen de cada rueda. La estrella es una de las figuras con geometría polar más fáciles de crear. Posee un claro significado de unidad y es susceptible de relacionarse con otras estrellas, situadas sobre una trama preestablecida mediante prolongación de sus brazos, construyendo una suma de pequeñas unidades. La pieza que conforma el sino es por lo general una estrella cóncava y gallonada, que en muchas ocasiones se ve sustituida por piñas o cubos mocárabes.

ALMEDRILLA: figura plana con forma romboidal que en la labor de lacería se forma entre las puntas del sino y los costadillos de los azafates.

AZAFATE O ZAFATE: figura que se forma alrededor del sino en las labores de lazo, limitada por los costadillos y las aspillas. Pueden ser: redondos, si tienen forma hexagonal irregular; harpados, si modifican esta figura para tomar la forma de arpón que les da nombre. Legítimos, cuando la longitud del costadillo es igual a la de la mitad del brazo de la espilla; y no legítimos, cuando el costadillo y la mitad del brazo de la espilla tienen longitudes diferentes. La tarabea es el conjunto de dos azafates de estrellas

Ejemplo de lazo y partes que lo forman.

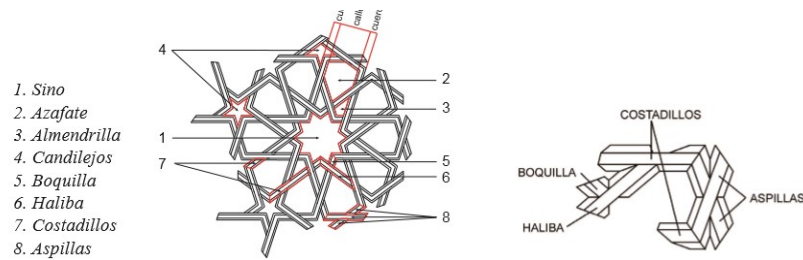


Ilustración 2. Izq. Miembros de la rueda de lazo; Dcha. Taujeles de la labor del lazo. (Albendea Ruz, 2011)

La decoración del lazo, además del agramilado, consiste en la policromía con colores planos de los diferentes **filetes**.³ El colorido es muy básico, y se alternan el rojo, azul, amarillo y blanco. Siendo siempre el blanco el color del filete central que destaca el entretejido del lazo.

CARTABONES DE LAZO

Históricamente las técnicas empleadas para su construcción era los cartabones de lazo, conocimiento de las propiedades geométricas del triángulo, el método requería mucho trabajo y era muy lento. A lo largo de la historia y las tecnologías cambian y facilitan gradualmente el proceso. Con el fin de contrastar eso, se explica en los siguientes párrafos la antigua técnica: el uso de los cartabones, para que se vea que con una metodología como la que se usa en este trabajo, es más rápido y eficaz, pero siempre por la mediación de la matemática aplicada a la geometría.

Una vez adoptadas las trazas islámicas, se produce el verdadero esplendor del arte mudéjar con la adopción de la rueda de lazo como tema regulador. La gran virtud de la rueda de lazo es que sean cuantos sean su número de brazos, la forma de trazarla siempre es la misma. Cada rueda genera otra dependiente de ella con la que se pueden realizar trazas, que aunque en un principio parecería monótono, pero permite variaciones que dan bastante riqueza a los trazados. (Albendea Ruz, 2011).

El trazado resulta de la división de la semicircunferencia en partes iguales siendo trazados geoméricamente.

El único útil necesario para trazar distintos tipos de ruedas de lazo son los juegos de cartabones que no necesitan estar a una escala determinada por que no transportan medidas, simplemente transportan ángulos.

Los lazos más comunes son de 6, 8, 9, 10, 12, 14, 16, 20.

distintas que se reúnen por una aspilla común. La tarabea solemos encontrarla como elemento de enlace entre ruedas diferentes.

CANDILEJO: estrella de cinco puntas, generalmente irregular que en la labor de lacería se forma ente las aspillas y cabezas de los azafates.

³ Un filete es cada una de las partes separadas por las canaladuras Realizadas por el gramil.

Diferentes tipos de cartabones usados para realizar la lacería típica de la ornamentación del Real Alcázar. Véase Ilustración 3.

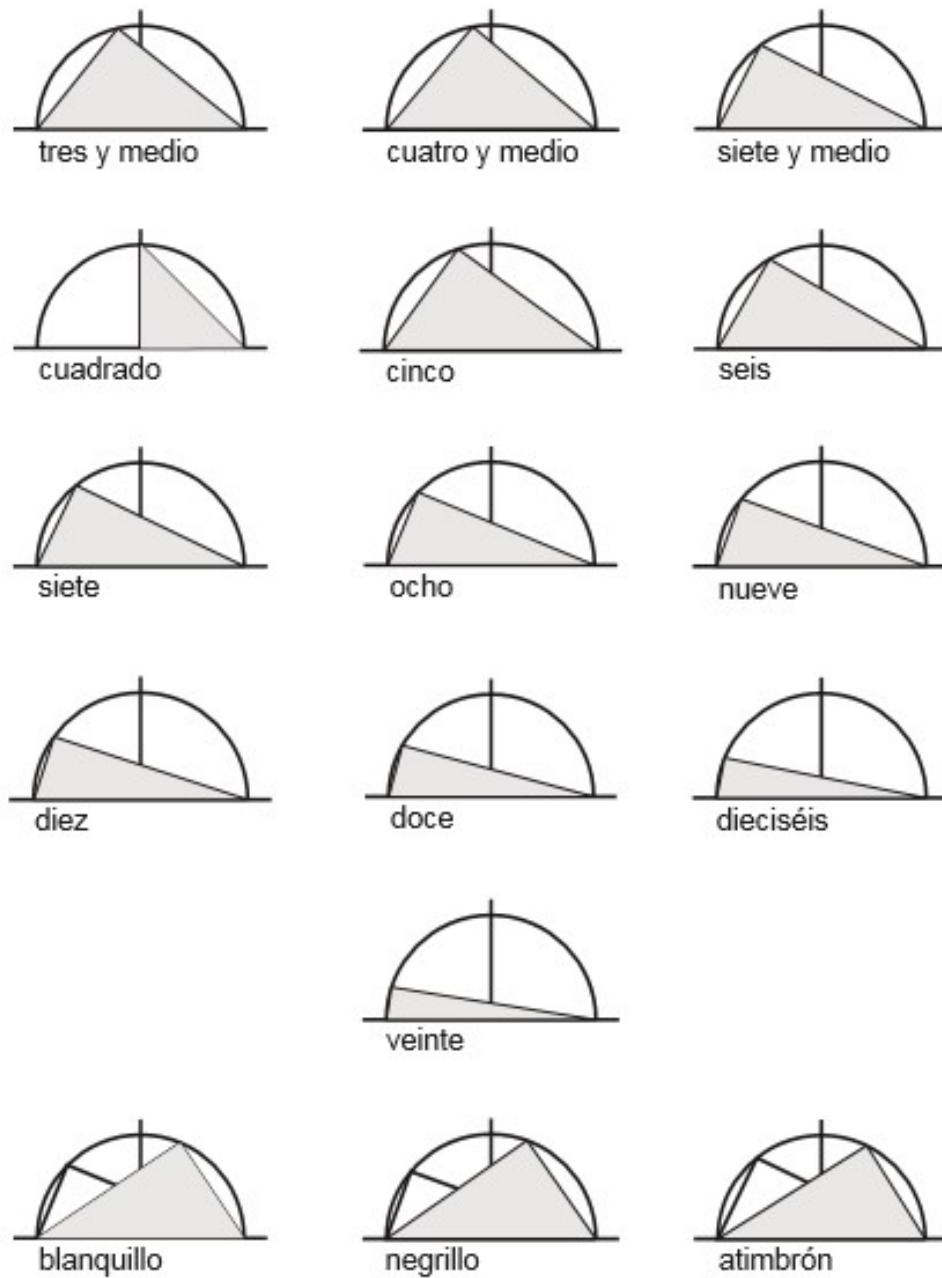


Ilustración 3. Juego de cartabones de lazo. (Albendea Ruz, 2011)

LOS CARTABONES PARA LAS RUEDAS DE 8

Para trazar ruedas de 8 se necesita el cartabón de ocho, el cuadrado y el blanquillo. Véase Ilustración 4.

El trazado del cartabón cuadrado es muy sencillo. Basta con unir los extremos de la cambiña con el punto donde la circunferencia corta la perpendicular al centro.

El cartabón de ocho se halla trazando la bisectriz de la cola de cuadrado. El cartabón blanquillo sale trazando la bisectriz de la cabeza del de ocho.



Ilustración 4. Cartabones para las ruedas de 8. (Albendea Ruz, 2011)

LOS CARTABONES PARA LAS RUEDAS DE 9

Para la estrellas de 9 son necesarios los cartabones de cuatro y medio, el nueve y el negrillo. Véase Ilustración 5.

El cartabón de cuatro y medio es ligeramente incorrecto y hay que ajustarlo mediante cepillado. El cartabón de nueve se obtiene a partir de la bisectriz de la cola del cartabón de cuatro y medio. El cartabón negrillo se obtiene hallando la bisectriz de la cabeza de 9.



Ilustración 5. Cartabones para las rueda de 9. (Albendea Ruz, 2011)

LOS CARTABONES PARA LAS RUEDAS DE 10

Para la rueda de 10 se precisan dos cartabones, el de cinco y el de diez, dado que su ataperfiles coincide con el cartabón de cinco, véase Ilustración 6. El cartabón de diez se saca por la cola del cartabón de cinco.

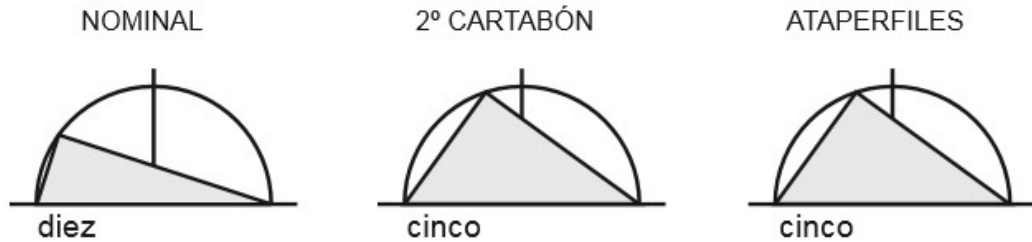


Ilustración 6. Cartabones para las rueda de 10. (Albendea Ruz, 2011)

LOS CARTABONES PARA LAS RUEDAS DE 12

El cartabón de doce sale por la cola del cartabón de seis, véase Ilustración 7. Las ruedas de 12 desculatan en las de 9, por ello, para su traza y construcción se necesita el cartabón de seis como primer cartabón y el de doce como segundo cartabón, cuyo trazado resulta muy sencillo. Para el trazado de la aspilla de la rueda de 12 nos servimos del cartabón de nueve y el negrillo.

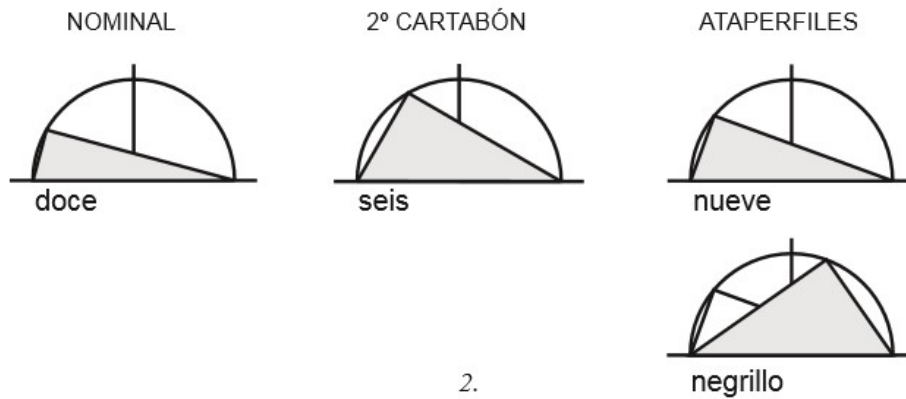


Ilustración 7. Cartabones para la rueda de 12. (Albendea Ruz, 2011)

LOS CARTABONES PARA LAS RUEDAS DE 16

El cartabón de dieciséis se halla trazando la bisectriz de la cola de ocho, véase Ilustración 8. Para la rueda de 16, son necesarios el cartabón de ocho y el de dieciséis y para su aspilla se toman prestados los de la rueda de 8, el cuadrado y el blanquillo.

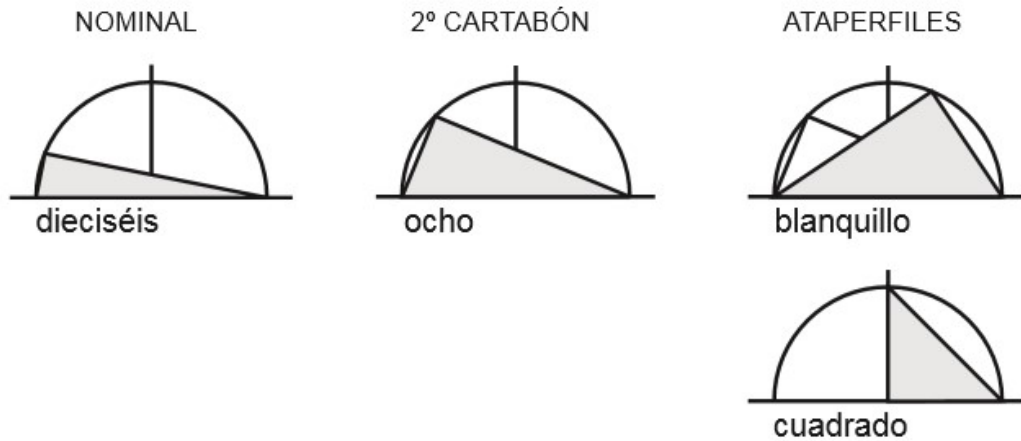


Ilustración 8. Cartabones para la rueda de 16. (Albendea Ruz, 2011)

DESARROLLO GRÁFICO DE LA RUEDA DE LAZO

En la Ilustración 9 se muestra el desarrollo tan minucioso de la rueda de 8, para formar azafate la de pasos a seguir hasta formar la rueda con su estrella.

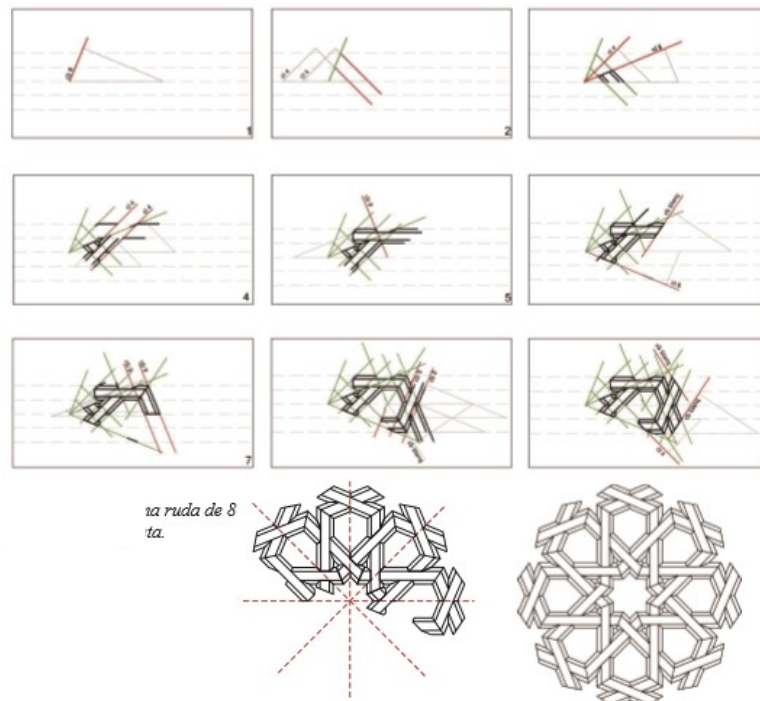
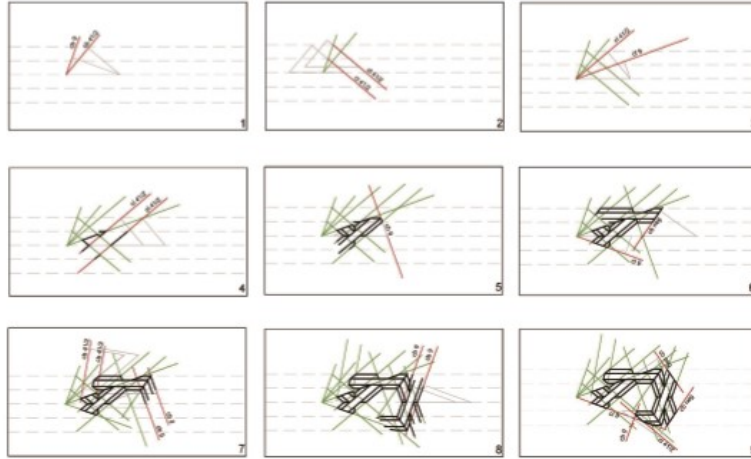


Ilustración 9. Desarrollo de rueda de 8. (Albendea Ruz, 2011)

DESARROLLO GRÁFICO DE LA RUEDA DE 9

En la *Ilustración 10* se muestra el desarrollo tan minucioso de la rueda de 9, para formar azafate la de pasos a seguir hasta formar la rueda con su estrella.



76. Desarrollo de una rueda de 9 y rueda de 9 completa.

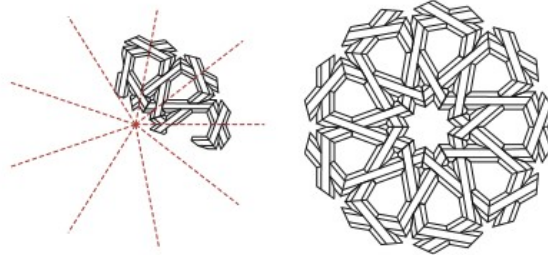


Ilustración 10. Desarrollo de la rueda de 9. (Albendea Ruz, 2011)

PECULIARIDADES EN LAS RUEDAS DE LAZO

Unas de la peculiaridades de la ruedas de lazo es que se pueden hacer fuera de calle y cuerda o a calle y cuerda, véase *Ilustración 11*. Esta manera de ejecutar los lazos le hacen parecer distintos, poder jugar con luces y sombra y diferentes colores, así aunque la rueda sea de 8, al tener el lazo diferente, serían muy similares pero con esta pequeña diferencia que a la vista se hace diferente.

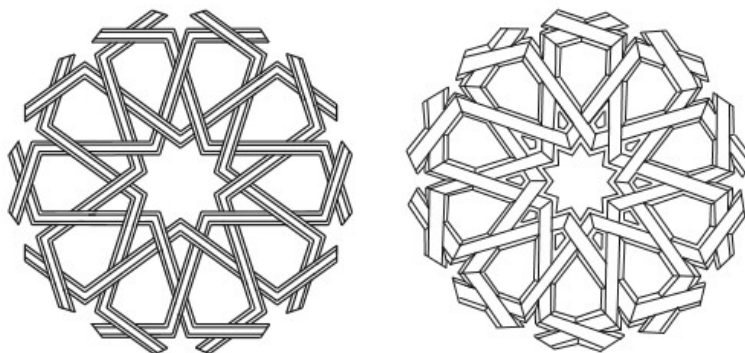


Ilustración 11. Izq. Rueda de 10 fuera de calle y cuerda; Dcha. Rueda de 10 a calle y cuerda

Otra de sus peculiaridades es formar una rueda de 9 y unirse con una de 12. Véase Ilustración 12, esto no da mucho juego a la hora de que no sea tan repetitiva la misma rueda, y aunque siga siendo ruedas, poder formar otras estrellas, incluso poder cambiar de forma del lazo. Véase Ilustración 11.

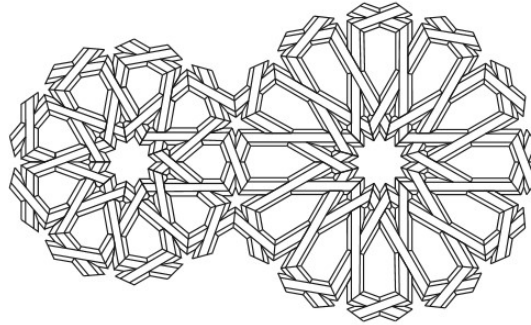


Ilustración 12. Descúlate de rueda de 9 en otra de 12. (Albendea Ruz, 2011)

III. MATERIALES DE LA DECORACIÓN DEL PATIO DE LAS DONCELLAS

A. LA CERÁMICA: Alicatados

La cerámica tan importante en la ciudad de Sevilla, empieza a usarse en el siglo III a.C por los Partos al este de Siria losetas de barro cocido **vidriadas**⁴ verdes que se incrustaban en las paredes.

Esta costumbre procedente Persia y Mesopotamia, llega a España entre el siglo X hasta mediados de siglo XII, y es en este siglo cuando tiene su mayor uso, se empiezan a incrustar trozos de cerámica en la pared formando dibujos geométricos.

El uso del vidriado en la cara vista de la pieza, que permite decorar los materiales cerámicos, debió conocerse desde época califal, aunque los ejemplos más antiguos en Sevilla datan de los siglos XII y XIII. Según Gestoso (Pérez, 1995) “la Torre del Oro y la Giralda entre los primeros conservados. Las Torres de Santa Catalina, San Marco y las Cúpulas de Santa Marina o San Esteban, serían el correlato mudéjar de esta tradición islámica”

La producción Mudéjar y Nazarí se desarrolla simultáneamente. La cerámica arquitectónica mudéjar responde a tres tipos según Torres Baldás: el andaluz que afecta también a Castilla y que emplea como técnica preferente el alicatado; el aragonés, donde la técnica del alicatado es pobre, cuya aportación principal es el empleo de discos circulares empotrados en los muros y finalmente el valenciano con centro en Manises donde predomina la técnica del azulejo pintado empleado en solería y zócalos. (Torres Balbás, 1949)

En el que nos vamos a centrar es en el primero de estos que es el más aplicado en Sevilla y por supuesto en el Real Alcázar. Toman mucho el color de las obras Nazarís donde aparecen el blanco, verde, melado⁵ y negro. La gran variedad de producción de barro vidriados sevillanos utilizados en los revestimientos de zócalos nos hace confundir alicatado y azulejo. El alicatado o mosaico es un conjunto de piezas que forman un dibujo, la utilización de pequeñas piezas de distintas formas y colores, mientras que el azulejo es una baldosa vidriada de mayor dimensión – normalmente decorada – de forma cuadrada o rectangular y con motivos repetitivos.

LA TÉCNICA DEL ALICATADO

La técnica del alicatado consiste en cortar de piezas mayores, unas pequeñas piezas con una técnica llamado “a pico”, para así formar mosaicos en las paredes. La fabricación de las piezas grandes se Realiza aplicando un barniz de plomo más el óxido colorante elegido al barro previamente cocido. Estas piezas o alizares reciben después una segunda cocción y finalmente son recortadas y encajadas unas con otras sobre el muro o pavimento. Según las Ordenanzas del Gremio de Sevilla de 1527 cada alarife debía conocer los cartabones, véase *Ilustración 3* y su manejo para el corte de las distintas piezas. (Ramírez, 1995)

El proceso de elaboración de un alicatado consistía en colocar las piezas, una vez cortadas, sobre un panel donde previamente se había dibujado la composición, con la superficie barnizada hacia abajo. Si la superficie era grande la operación se efectuaba por partes en superficies equivalentes a medio metro cuadrado. Luego se vertía por encima de las piezas una

⁴ El vidriado plúmbeo transparente, verde o melado “Vidrio” es una de las innovaciones del islam (S.VIII) con la que se conseguía la impermeabilización de los objetos cerámicos.

⁵ Adj. Dicho de un color: Amarillo como el de la miel.

capa de mortero de cal, si el alicatado había asentarse en pavimento; y de yeso, si se había de fijar en pared. Para aumentar la consistencia de los paneles y facilitar su transporte hasta el lugar de su colocación se adhería al mortero de yeso todavía blanco unas cañas dispuestas en forma de cruz. Por último se colocaba mortero de cal en el hueco previsto para su instalación y sobre éste se asentaba el panel del alicatado. La dificultad de esta técnica hizo que a partir del siglo XV se empleasen moldes para fabricarlas pero la calidad de estos alicatados no es comparable a la de los anteriores porque destacan las aristas de unión entre las piezas. (Pérez, 1995), (Fuentes, 2015).

En la *Ilustración 13* se muestra el interfaz del programa GeoGebra con un despiece de una roseta de alicatados.

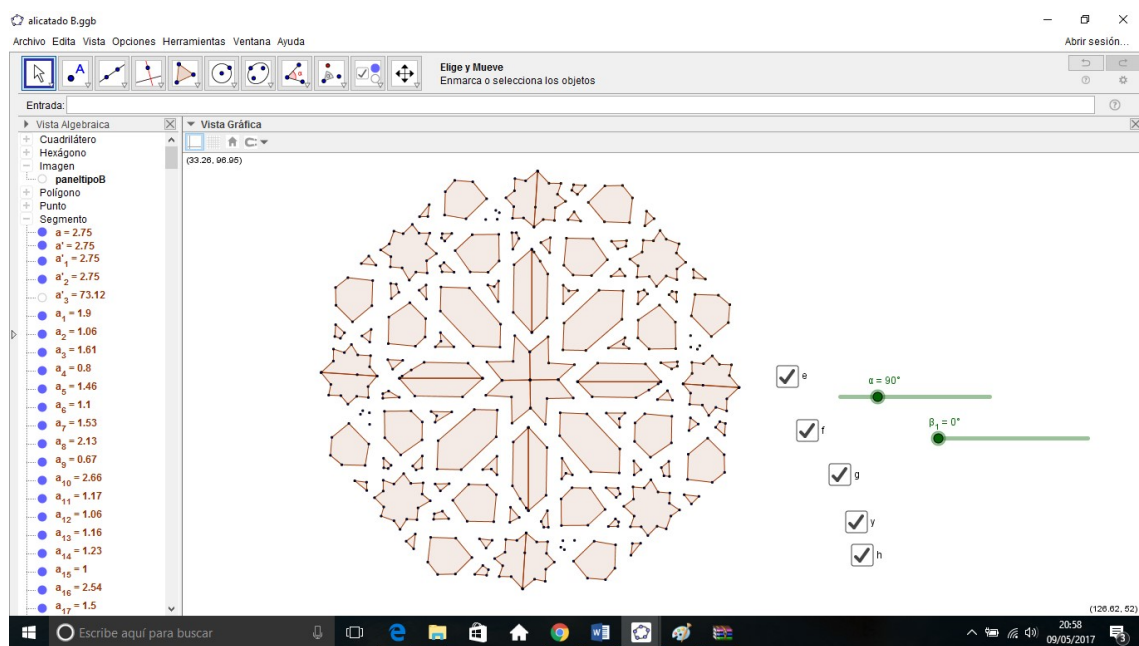


Ilustración 13. Despiece de los alicatados con GeoGebra. (Gutiérrez, 2017)

B. LA YESERÍA

A continuación se expone de manera resumida los trabajos de los profesores Dres. Fco. Javier Blasco y Fco. Javier Alejandro (Blasco, 2010). El yeso, tiene su origen en Oriente, coincidiendo en él, su aparente fragilidad y pobreza externa, con sus grandes posibilidades decorativas. La técnica de este material fue importada de Mesopotamia, siendo los artesanos musulmanes maestros en el uso del mismo como decoración, aplicándolo en los paramentos de mezquitas y palacios, donde en forma de pasta, mortero de yeso o mortero constituidos por yeso y cal se usaba, tanto al exterior como al interior, permitiéndoles obtener de esta forma diversos tipos de revestimientos y decoraciones, componiendo unidades bien distribuidas en paneles.

Las yeserías, se aplicarían como ornamento que tiende a cubrir grandes superficies, para ocultar el adobe o ladrillo, en series ilimitadas de motivos repetitivos, pero con un significado dependiente del monumento al que se aplica, “el arte islámico ante la limitación que suponía el prescindir de los motivos figurativos que tienen un significado iconográfico propio, se volcó en la creación de formas, cuya presencia no afectase al significado del monumento” (LÓPEZ, 2007-2009)

Las yeserías, son elementos decorativos característicos del arte musulmán aplicados en muros, arcos y bóvedas, siendo los alarifes musulmanes, los primeros maestros en su uso y técnica a lo largo de más de nueve siglos, durante los que se han desarrollado tipologías de diversos estilos artísticos (taifa, almohade, nazarí, mudéjar, etc.).

Las primeras yeserías de la España islámica se fechan en la ampliación de la Mezquita Mayor de Córdoba por al-Hakam II, manteniéndose posteriormente en los edificios almohades, mudéjares o nazaríes y en sus contemporáneos orientales. Destacan por su belleza y la calidad de sus ejecuciones en edificios civiles, como el Real Alcázar de Sevilla y el conjunto monumental de la Alhambra de Granada, entre otros.

LA TÉCNICA DEL YESO

Las yeserías de tradición islámica están formadas básicamente por mezclas de yeso y colas de origen animal, u otros aditivos orgánicos, que retrasan el fraguado, aumentando la plasticidad y moldeado del estado fresco, mejorando la adherencia, dureza y resistencia a agentes externos. Posteriormente, durante los siglos XIII al XV, se distinguen focos de gran interés, tanto en el reino musulmán nazarí de Granada como en la zona cristiana de Aragón, Toledo y Sevilla (Villanueva, 1996) (DOMINGUEZ, 1996). La tradición medieval de las yeserías continuó durante la primera mitad del siglo XVI, con motivos decorativos de otros estilos.

C. LA MADERA

Según Sebastián Fernández (Aguilera, 2011), son varios los tratadistas españoles que desde principios del siglo XVII abordaron el tema de la carpintería de armar de tradición hispanomusulmana, realizando una recopilación de los conocimientos que se tenían sobre este arte, con el fin de que no se perdiera y sirviera para instruir a nuevos oficiales.

López de Arenas, en 1619 se propuso realizar un trabajo gráfico en el que, con una serie de dibujos comentados, tratar de ayuda a los artesanos de su época en la realización correcta de sus armaduras, procurando, además, de unificar criterios. Se trata de una serie de recetas que permitieran simplificar la ejecución de toda clase de armaduras, desde las más sencillas en su composición hasta las aparentemente más complicadas, mostrando las reglas a seguir para el trazado y ejecución de las mismas.

Este manuscrito lo descifraron Manuel Gómez Moreno y Antonio Prieto Vives, porque no era fácil entender a qué se refería López de Arenas. No debemos olvidar que este manuscrito apareció en el siglo XVII, y el palacio Mudéjar se construyó en 1365 por ello quizás el secretismo que existía en el manuscrito, de cómo se trató esas maderas preciosas.

Aunque el Patio de las Doncellas es de cuando reinaba Pedro I, después pasaron muchas dinastías y con ellas sus cambios, pero se siguió utilizando las técnicas de carpintería de tradición mudéjar y por ello hoy en día se siguen conservando.

La madera está presente de forma generalizada en todos los ámbitos de la arquitectura mudéjar con diversidad de soluciones, para cubiertas, forjados de plantas, cerramientos de huecos de puertas y ventanas, aleros en voladizo, elementos decorativos de la propia arquitectura como dinteles o capialzados, del mismo modo que sin duda existió un gran número de elementos muebles.

En cuanto al origen de la carpintería hispano-musulmana, todos coinciden en afirmar que no guarda relación con la carpintería del mundo clásico, sobre todo se basan en el estudio de cubiertas y su evolución, desde los sistemas de cubiertas planas, a dos aguas y por último la de media caña.

De forma paralela, debieron desarrollarse las técnicas constructivas de puertas y ventanas, aunque con sus peculiaridades, dada la distinta función que deberían cumplir dentro de la edificación. Hasta el momento actual, no disponíamos de documentación que nos facilitara información acerca de los detalles constructivos de estas carpinterías, pero el estudio de ejemplares existentes pone de manifiesto su paralelismo con el resto de carpinterías, tanto en estructura y ensambles como en el desarrollo de la ornamentación.

LA DECORACIÓN EN LA CARPINTERÍA MUDEJAR

Entre las características de la carpintería hispanomusulmana y mudéjar destaca la ornamentación. Los artesanos mudéjares se colocaron con predilección en los motivos formales de tradición islámica, llevándolos a su máxima expresión. Siguiendo los principios compositivos de la ornamentación islámica, el diseño no reconoce límites espaciales, llegando al revestimiento total de las superficies a base de ritmos repetitivos.

En cuanto a temas decorativos que podemos encontrar en la carpintería mudéjar, se observan tres grandes grupos: los de carácter vegetal (atauriques⁶), los geométricos (lazos y estrellas), y los epigráficos (con escritura cúfica y nasjí⁷). No obstante no podemos excluir los temas figurativos, decoraciones pictóricas en estructuras de madera, aunque poco generalizado y siempre en combinación con alguno de los tres grandes grupos anteriores.

La principal creación de origen islámico, dentro del campo de la decoración geométrica son los trazados de lacería (Ilustración 2), como ya se ha mencionado, realizados esencialmente a base de bandas o cintas entrelazadas que van pasando alternativamente unas encima de las otras, describiendo líneas rectas, con la particularidad de que los quiebros de las bandas no inciden nunca con los puntos entrecruzamientos de las mismas.

Los primeros entrelazados de cintas creando diseños geométricos en forma de grecas, evástica, octógonos, etc. tienen sus antecedentes en el mundo copto, griego y romano, y así podemos contemplar numerosos ejemplos de estos motivos de decoración geométrica sobre su distintos tipos de soporte, siendo los mosaicos los que por su naturaleza han resistido el paso del tiempo. Pero la singularidad hispano musulmana desarrolló el arte de la lacería como ornamentación, usando la estrella como origen y centro de una rueda de lazo que, con sus prolongaciones, se convierte en el elemento generador de toda la decoración.

El Alcázar mudéjar de Sevilla participó de los influjos toledanos, pues para la construcción y decoración del palacio, trabajaron maestros venidos de Toledo, según consta epigrafiado sobre los largueros de las puertas de la Media Naranja. Pero también fueron intensas las relaciones culturales y políticas entre mudéjares sevillanos y musulmanes nazaríes, por lo que no es difícil descubrir en este palacio, determinados aspectos más orientales que en otros edificios mudéjares, como resultado de la importación de los artistas granadinos.

⁶ m. Arq. Ornamentación árabe de tipo vegetal (RAE)

⁷ La caligrafía cúfica es un estilo de [caligrafía árabe](#) considerado el más antiguo tipo de escritura en este [idioma](#), desarrollado en la ciudad de [Kufa](#) de la cual toma el nombre, actualmente en [Irak](#), a partir de una modificación del alfabeto sirio antiguo y utilizada para escribir los primeros ejemplares del [Corán](#). (RAE)

IV. JUSTIFICACIÓN Y OBJETIVO

A. JUSTIFICACIÓN

En la documentación que ha sido encontrada, se observa que los trabajos que se ocupan de la ornamentación del Real Alcázar de Sevilla (Hohenwarter, 2016), (Ramírez, 1995) no se usa ninguna técnica de clasificación exhaustiva. Sin embargo, es sabido, que las técnicas clasificatorias derivadas de la catalogación cristalográfica: “Grupos de Simetría”, han sido aplicadas a la ornamentación del Mudéjar Aragonés (Gilsanz Mayor, 2010), a los alicatados de la Alhambra de Granada (Costa, 1995), a los alicatados de la Mezquita de Córdoba (Messina, 2004) y a los esgrafiado de Segovia (Gilsanz Mayor, 2010).

Este estudio surge por la necesidad de aportar nuevos datos a los alicatados, yeserías y ornamentación en madera del Alcázar. Son escasas las ocasiones en las que se han aplicado los algoritmos Internacionales de la Simetría para su clasificación. Entre ellos, hay que señalar que la Dra. María José Chávez de Diego en la Lección inaugural de la apertura del curso 2005-2006 de la EU de Arquitectura Técnica de la Universidad de Sevilla: “*Un paseo matemático por la técnica y el arte de construir*”, hace mención de un trabajo sobre la localización de los Grupos de Simetría en la ornamentación del Real Alcázar de Sevilla (Chávez de Diego, 2006).

En nuestro caso, nos vamos a centrar en el Patio de las Doncellas porque abarcar todo el Alcázar sería mucha amplitud. Estas técnicas nos facilitarían en un futuro poder reconocer la tipología de alicatados, no solo para diferenciarlos, sino que en el caso de que se encuentre parcialmente destruido, poder así reconstruirlo.

B. OBJETIVOS

El objetivo de este trabajo es dar una metodología que nos proporcione una clasificación rigurosa y exhaustiva de la ornamentación del Patio de las Doncellas, que permite además obtener una documentación gráfica.

Para ello vamos usar un software matemático interactivo llamado GeoGebra (Hohenwarter, 2016) que permite reproducir los *Grupos de Simetría puntuales, lineales y planos*. Se identificaran a partir de una foto, la *Región Unidad* y *Región Mínima* dentro del panel ornamental a clasificar.

Este método podrá ser aplicado en futuras investigaciones sobre otras áreas del propio Alcázar de Sevilla, o en nuevos yacimientos arqueológicos donde se encuentren antiguas pinturas, mosaicos, esgrafiados que presenten una decoración de formas geométricas repetitivas.

C. COMPETENCIAS

Las que se pretenden adquirir en este trabajo fin de grado son:

1. Dentro de las competencias del nivel básico

G13. *Actitud social positiva frente a las innovaciones sociales y tecnológicas:* Esta competencia se desarrolla haciendo uso del programa GeoGebra, con el cual se verifica la correcta catalogación de los elementos ornamentales estudiados. Es decir que el Grupo de Simetría, el Región Mínima y el paralelogramo fundamental son los adecuados.

2. Dentro de las competencias de nivel medio

G09. Capacidad para trabajar en un equipo de carácter interdisciplinar

3. Dentro de las competencia de nivel avanzado

G01. Capacidad de organización y planificación: En efecto, para poder llegar a la entrega en el plazo a cumplir el trabajo, es necesario tener una gran organización y planificación del mismo. Cada semana hay una corrección de la materia avanzada.

G04. Aptitud para la comunicación oral y escrita de la lengua nativa

G05. Capacidad de análisis y síntesis: El proyecto se basa en reunir, estudiar, y analizar la mejor información sobre los temas a tratar, por ello se requiere el desarrollo de búsqueda de bibliografía y referencias, la lectura rápida y la capacidad de sintetizar al máximo los archivos encontrados.

G06. Capacidad de gestión de la información: Elección de la mejor información y más adecuada que se adapte al proyecto.

G14. Capacidad de razonamiento, discusión y exposición de ideas propias: Las varias reuniones con mi tutora de proyecto María José Chávez, nos lleva a la continua exposición de nuestras ideas e intentamos las dos siempre llevarnos a razón.

G15. Capacidad de comunicación a través de la palabra y de la imagen: El uso de palabras e imágenes es esencial en este proyecto, ya que trata de la geometría. Por tanto es teórico-práctico.

G16. Capacidad de búsqueda, análisis y selección de la información

G17. Capacidad para el aprendizaje autónomo: Cada día observo como aumenta mi capacidad mental tras la búsqueda de nuevos textos, por internet o cualquier información que busque.

G19. Aplicar sus conocimientos a su trabajo o vocación de una forma profesional y adquieran las competencias que suelen demostrarse por medio de la elaboración y defensa de argumentos y resolución de problemas dentro de su área de estudio.

V. METODOLOGÍA Y ESTUDIO DE CASOS

En este capítulo veremos el proceso seguido, sintetizando toda la información para posteriormente hacer el estudio de casos.

El proceso seguido para la elaboración del presente trabajo se divide en tres fases:

- Una primera fase de estudio detallado de la noción de Simetría bajo el punto de vista matemático-algebraico, así como el aprendizaje del programa GeoGebra.
 - Una vez decidida la línea de trabajo que iba a seguir, comencé a la búsqueda de referencias sobre Simetría y la decoración en la arquitectura. Uno de los primeros resultados fue la tesis: El Esgrafiado Segoviano (Gilsanz Mayor, 2010) a partir de su bibliografía amplíe información sobre los Grupos de Simetría aplicados a la ornamentación arquitectónica.
 - Posteriormente me planteo relacionar los conocimientos adquiridos con El Real Alcázar de Sevilla, en concreto en el Palacio Múdejar. En historia obtengo (Cómez, 1996), relativo a las investigaciones arqueológicas (Tabales, Investigaciones Arqueológicas en el Alcázar de Sevilla, 2000), iba dirigiendo más el trabajo hacia un punto en común y mi objetivo.
 - La Dra. M.J. Chavéz me ha dado pautas, enseñanzas para que el aprendizaje de las matemáticas necesarias en mi TFG las haya podido desarrollar satisfactoriamente.
 - El programa GeoGebra me fue facilitado por el Dr. R. Falcón, el cual me ha enseñado a convivir con este software nuevo para mí y que ha sido tan útil para desarrollar la parte gráfica.
- Fase de Campo Realizada en el Real Alcázar de Sevilla, donde se ha hecho un reconocimiento de los alicatados, yeserías y madera del Patio de las Doncellas, tomándose fotografías de los diferentes motivos.
 - Han sido varias las visitas, la primera de ellas tenía por objetivo la decisión de que zona del Palacio de don Pedro I sería objeto de mi estudio. Estuve haciendo un reconocimiento de ese mismo patio y también del Patio de las Muñecas, para elegir uno de los dos. Por amplitud, por tener más información y por tener más riqueza en cuanto a mosaicos, la decisión fue el Patio de las Doncellas.
 - en la segunda visita me sirvieron de guía libros en los cuales se habían estudiado anteriormente paños de mosaicos del Patio de las Doncellas (Ramírez, 1995) y los portaventaneros del mismo (Aguilera, 2011).
 - En la tercera visita, al tener definido cual era el estudio que se iba a realizar, me dirigí a reconocer cuantos tipos de paños había diferentes y si en el libro de (Ramírez, 1995), que hace un catálogo de ellos estaban bien definidos los diferentes tipos. Me acompañó la Doctora M.J. Chavez y mi copañera de la ETSIE Esther Pineda. Hicimos algunas

fotos pero no con mucha calidad, pero suficiente para poder empezar a estudiar los paños de mosaicos según su grupo de Simetría.

- Una vez estudiada la relación entre Simetría y arquitectura y aplicado los algoritmos que permiten la catalogación, nos hemos vuelto a dirigir al Real Alcázar para una nueva sección fotográfica con una máquina de fotografía FujiFilm 16 megapixel y acompañada por Pilar López. Siempre antes del trabajo de campo hay que llevar un trabajo realizado, en este caso ha sido un plano donde estaban se encuentra con detalle los paños estudiados. El procedimiento: localizar el paño, coger la mejor posición y esperar que no pasara nadie, ya que el Real Alcázar está muy concurrido. Posteriormente, se una vez descargadas, poner el nombre a cada una de ellas, recortar, dar iluminación y mejoras de la imagen.
- Fase de catalogación y reproducción de cada uno de cada uno de los paneles decorativos.
 - Identificación del grupo de Simetría mediante la aplicación de los algoritmos de clasificación. Véase Ilustración 24.
 - Primero se identifica si es *Grupo Plano*, *Grupo de friso* o *Grupo Puntual*, depende solo de las *traslaciones*.
 - Segundo, Identificación de la *Región Unidad*.
 - Tercero se hace las preguntas del algoritmo y se llega a la denotación exacta.
 - Importación foto al GeoGebra
 - Se importa la foto
 - Se marca en el GeoGebra la *Región Unidad*.
 - Según la denotación se seguirá una serie de pasos, como: *rotaciones*, *simetrías*, *deslizamientos* y *traslaciones*. Véase en el apartado Técnicas Computacionales.

A. Teoría de LA SIMETRÍA

SIMETRÍA:

f. Correspondencia exacta en forma, tamaño y posición de las partes de un todo.

f. Geom. Correspondencia exacta en la disposición regular de las partes o puntos de un cuerpo o figura con relación a un centro, un eje o un plano. (RAE)

La Simetría nos da una sensación de equilibrio y armonía allá donde se use. La podemos encontrar en la naturaleza, sin nosotros crearla, como por ejemplo una banda de pájaros volando nuestro cielo, en los cuerpos humanos, en los anfibios, en las aves, etc. Todos ellos poseen Simetría bilateral. La Simetría con sus formas conecta muchos edificios patrimoniales, entre otros La Alhambra de Granada con el Real Alcázar de Sevilla. La Simetría es necesaria en el diseño y representación de los elementos arquitectónicos: Diseños de plantas, alzados, perfiles, techos... de edificios de ahora y antes. También figuras geométricas decorativas recubren muchos muros los cuales empiezan con una figura principal y se va repitiendo según las reglas de la Simetría, así ocurre en la Alhambra de Granada, Alcázar de Sevilla y en otros muchos de edificios mudéjares, (Navarro, 2011). Estas figuras geométricas decorativas se pueden diferenciar según sus Simetrías, por ello hay 17 clases o grupos de mosaicos periódicos planos y 7 grupos de friso.

La Teoría de la Simetría se encuentra en pleno desarrollo, practicándose en diferentes campos, física, química, biología etc. siendo la Simetría el nexo de unión entre ellos. Cada día se hace más estudios sobre la misma, que puede corroborarse mediante el Premio Abel 2008, de la Academia Noruega de las Matemáticas. (Livio, 2016)

Cuando se intenta diferenciar los objetos simétricos, nace el problema de cómo medir el grado de Simetría que presenta. Las figuras regulares tienen más Simetrías, por el contrario, una figura irregular no tiene ni Simetría bilateral, ni rotaciones parciales, solo admiten giros completos de 360° . La manera de reconocer que nivel Simetría posee una figura está relacionada con el número de *movimientos (traslaciones, Simetría bilateral, rotaciones y deslizamientos) que la dejan invariable.*

Para este trabajo se utilizara la clasificación de patrones del plano generados por una figura que se repite regularmente siguiendo unas pautas. Los cristales en la naturaleza presenta una peculiaridad y por ello se hizo una clasificación de los grupos cristalográficos.

Otra aportación a la teoría de la Simetría en base a la matemática fue en 1848 por el matemático francés Evariste Galois. La identificación de 230 Grupos de Simetría en el espacio de tres dimensiones se atribuye a Fedorov y Shonflies en 1891, anterior al reconocimiento de los 17 grupos del plano, por parte de Polya y Niggli en 1924. La primera lista completa de los 7 grupos de frisos fue dada por Polya, en 1924. (Gilsanz Mayor, 2010)

Un estudio a finales del siglo XX demostró que la Alhambra de Granada contiene mosaicos de todos los posibles Grupos de Simetría. Es el único complejo arquitectónico en el mundo del que se haya publicado que contiene modelos de los 17 Grupos de Simetría. También hay un estudio del Alcázar de Sevilla, pero se reconoció 14 Grupos de Simetría. Este estudio

realizado por un grupo de personas entre ellas la doctora María José Chávez de Diego. Por ello el interés que me despierta el estudio de la Simetrías del Alcázar de Sevilla. (Chávez de Diego, 2006)

B. LAS ISOMETRÍAS DEL PLANO

Las isometrías cuando se aplican contiguas se denominan composición de isometrías.

“Aplicación o transformación geométrica que conserva las distancias existentes entre rectas, longitudes y ángulos. “ Según la RAE. (RAE)

Las isometrías del plano se clasifican en los siguientes tipos:

Traslación: determinada por un vector

Reflexión (o Simetría Axial): definida por su eje.

Rotaciones: definido por su centro y ángulo.

Deslizamiento: dado por su eje y un vector.

La composición de traslaciones se hace con varias traslaciones en el mismo plano cartesiano.

La composición de dos giros con un mismo centro O es otro giro del mismo centro O y cuyo ángulo es la suma de los ángulos.

La composición de dos giros con distinto centros es una traslación si la suma de los ángulos es múltiplo de 360° y, en otro caso, un giro cuyo ángulo es la suma de los ángulos.

La composición de dos reflexiones de ejes paralelos es una traslación cuyo vector es perpendicular a los ejes y tiene doble longitud que la distancia entre ellos.

Un deslizamiento es la composición de una reflexión y una traslación paralelas.

La composición de isometrías es siempre una isometría y, además, verifica varias propiedades que pueden resumirse diciendo que las isometrías del plano forman un grupo.

La composición de isometrías es importante en el estudio de las Simetrías de los frisos y mosaicos. Algunos grupos son fáciles de obtener, pero otros tienen más procedimientos y por ello se complican.

Paridad de las isometrías

Cualquier isometría o bien es una reflexión o bien puede expresarse como composición de 2 ó 3 reflexiones.

En efecto:

- Una traslación es composición de dos reflexiones de ejes perpendiculares al vector de la traslación, con los ejes situados a una distancia igual a la mitad de la longitud de la traslación.
- Un giro puede expresarse como composición de dos reflexiones cuyos ejes pasen por el centro de giro, formando un ángulo igual a la mitad del ángulo de giro.
- Un deslizamiento es composición de una reflexión y una traslación; al expresar la traslación como composición de dos reflexiones, se obtiene el deslizamiento como composición de tres reflexiones.

Grupo de Simetría de una figura

El grupo de transformaciones que dejan invariante (no cambiada) una figura plana es el conjunto de todos los movimientos que dejarían invariante a dicha figura, y contiene al menos el movimiento identidad.

Un conjunto de puntos de un plano se dice que es invariante por un movimiento cuando mediante dicho movimiento de transformación se obtiene el mismo conjunto. Por ejemplo a un **triángulo equilátero**⁸ 120, 240 ó 360 grados, obteniéndose el mismo triángulo.

Al movimiento que deja los puntos en la misma posición inicial se le llama movimiento identidad, en el ejemplo dado sería el giro de 360 grados.

⁸ m. Geom. triángulo que tiene sus tres lados iguales

1. Grupos puntuales o de Leonardo

Unos Grupos de Simetría que han tenido aplicación ampliamente en la arquitectura desde el Renacimiento son los grupos puntuales de Simetría o de Leonardo, en honor a Leonardo da Vinci quien los estudió y aplicó en el diseño de plantas de capillas. Estos grupos, aparte de ser utilizados en el diseño arquitectónico o urbanístico, también son ampliamente utilizados para la generación de rosetones y elementos decorativos en general. Una figura plana se dice que presenta un Grupo de Simetría de Leonardo si todos los movimientos que la transforman en sí misma tienen un mismo punto fijo, al que se le llama centro de la figura O, de ahí su nombre.

Grupos diedrales

El Grupo de Simetría de un polígono regular de n lados, para $n \geq 3$, se denomina grupo diedral D_n . Está formado por $2n$ isometrías, de las cuales n son reflexiones y otras n son giros. Los ejes de reflexión se cortan en un mismo punto, que coincide con el centro de los giros. El grupo diedral D_n está generado por dos reflexiones.

Por ejemplo, en el caso particular en que $n=3$, el grupo diedral D_3 es el Grupo de Simetría del triángulo equilátero, constituido por 6 isometrías, de las cuales 3 son reflexiones y 3 son giros, véase Ilustración 14.



Ilustración 14. Grupo diedral D_3 . (Moratalla)

Para $n < 3$ resultan los siguientes grupos:

El grupo diedral D_1 está constituido por la Simetría identidad y una reflexión. Corresponde a las figuras con Simetría bilateral.

El grupo diedral D_2 consta de 4 Isometrías: la Simetría identidad, dos reflexiones de ejes perpendiculares y un giro de centro situado en la intersección de los ejes de reflexión y con ángulo de 180° , véase Ilustración 15.



Ilustración 15. Grupo diedral D_2 (Moratalla)

Grupos Cíclicos.

Los giros o rotaciones que contiene el grupo diedral D_n forman un subgrupo del mismo denominado grupo cíclico con n elementos, que se denota C_n .

En el caso $n=3$, el subgrupo C_3 está formado por 3 giros, uno de ellos el giro G de 120° , de orden 3, que es generador del subgrupo, puesto que cualquiera de los giros puede expresarse como composición de ese giro consigo mismo. En efecto, el giro de ángulo 240° es igual a la composición GG , y el giro de ángulo 0° es igual a la composición GGG . Por esa razón, el subgrupo se denomina grupo cíclico, véase Ilustración 16.



Ilustración 16: Grupo cíclico C_3 (Moratalla)

Grupos puntuales

Los grupos diedrales y cíclicos son llamados también grupos puntuales.

Las Rosetas Ornamentales.

Una figura cuyo Grupo de Simetría es un Grupo Puntual C_n o D_n se denomina roseta.

Una modulo mínimo de un grupo cíclico C_n es un sector del plano limitado por dos semirrectas que pasan por el centro de los giros formando un ángulo de $360^\circ/n$.

Un Región Mínima de un grupo diedral D_n es un sector del plano limitado por dos semirrectas que pasan por el centro de los giros formando un ángulo de $180^\circ/n$.

Una roseta cuyo Grupo de Simetría es el grupo cíclico C_n puede obtenerse a partir del Región Mínima de su Grupo de Simetría. La parte de figura contenida en un Región Mínima se denomina Región Unidad.

2. Grupos de Frisos

Los frisos en la ornamentación

Los frisos están muy presentes en la ornamentación desde hace miles de años. En el paleolítico y el neolítico ya existían y nos dejaron constancia en las Cuevas de Altamira. (Google.es, 2017)

Un friso nace de una figura que se repite a lo largo de una recta. En nuestra cultura se han creado en diferentes ámbitos, desde una vasija hasta elementos arquitectónicos. En este trabajo nos interesa estudiar las isometrías que generan la totalidad del friso a partir de una región pequeña del mismo.

Matemáticamente hablando, se llama “*friso*” a las figuras del plano que presentan una distribución unidimensional continua, ordenada y periódica (en una dirección) de una celda unidad que constituye, sin dejar huecos, una cenefa o greca. En ellos se repite un motivo periódicamente, con un espaciado constante, lo largo de una dirección.

A partir de un motivo simple, se puede generar un friso por simple *traslación* de dicho motivo de modo repetitivo y periódico en una dirección.

Además de la familia de traslaciones, el Grupo de Simetría de un friso puede contener otras isometrías: reflexiones, rotaciones o deslizamientos.

- Reflexiones de eje coincidente con el eje longitudinal del friso.
- Reflexiones de eje transversal –perpendicular al eje longitudinal–.
- Si hay reflexión transversal y longitudinal a la vez, también existirá rotación (giro) binaria “2”.
- Si hay rotaciones distintas de la identidad “1” (360°), serán rotaciones binarias “2” (180°).
- Si hay reflexión transversal y deslizamiento longitudinal también contendrá los giros que resultan de su composición.

Existen **7 Grupos de Simetría** de los frisos que según la nomenclatura general, se antepone la letra F mayúscula –identificativa de sistemas de una dimensión, frisos– se denotan: F11, F12, Fm1, F1m, F1g, Fmg, Fmm.

La letra **F**, de friso, va seguida de dos símbolos que corresponden a la notación internacional. El primer símbolo indica las Simetrías de eje transversal, y puede tomar valores “1” si no hay reflexión y “m” si hay reflexiones (del inglés “mirrors”). El segundo símbolo indica las Simetrías de eje longitudinal y puede tomar los valores “1” si no hay reflexión, “2” si solo hay giros, “m” si hay reflexiones y “g” si no hay reflexiones pero si deslizamientos (del inglés “glides”).

A continuación se muestra el proceso para conseguir de cada uno de los 7 grupos mediante el programa GeoGebra.

- Pasos a seguir para obtener los diferentes frisos.
- Entrar en el programa GeoGebra, recuérdese que no es necesario descargar el programa, porque se puede acceder online.
- En la barra superior de *Herramientas* se crea con la *casilla de entrada*:
 - Simetría axial vertical: contiene dos opciones “1” y “m”
 - Simetría axial horizontal: contiene “g”, “1” y “m”
 - Giro: tercera connotación le doy dos opciones “1” o “2”.
- Usando *polígono de las Herramientas* se elige un polígono. Para ilustrar el proceso se construye un triángulo a modo de ejemplo.
- **F11:** Pasos a seguir para obtener un F11.
 - Pulso la casilla Simetría vertical: 1 (quiere decir que no tiene reflexión transversal)
 - Pulso la casilla Simetría horizontal: 1 (no tiene reflexión longitudinal)
 - Pulso la casilla Giro: 1 (no tiene giro), por tanto se considera friso porque si tiene una traslación.
 - Se aplica una traslación horizontal.
 - Solución en el interfaz del programa GeoGebra. Véase



- Ilustración 17.

Ilustración 17. Friso grupo F11, imagen generada con GeoGebra. (La autora, 2017)

- **F12:** Pasos a seguir para obtener un F12.
 - Ya tengo todas las casillas de control hechas, cada polígono interaccionado para cada número, pues ahora solo tengo que ir pulsando las opciones.
 - Llega el turno de crear el friso, pulso la casilla de control primera y pincho sobre ella y en este caso es 1 quiere decir que no tiene reflexión o simetría transversal, pulso la segunda casilla de control y pincho sobre el 1 no tiene simetría longitudinal, por ultimo pulso la tercera casilla de control y pincho sobre el 2 que quiere decir que tiene giro.
 - Solución en la imagen del programa GeoGebra. Véase Ilustración 18.

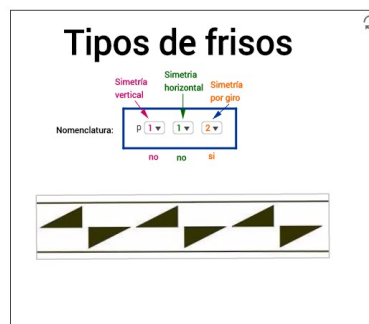


Ilustración 18. Friso grupo f12, imagen generada con GeoGebra. (La autora, 2017)

- **Fm1:** Pasos a seguir para obtener un Fm1.
 - Ya tengo todas las casillas de control hechas, cada polígono interaccionado para cada número, pues ahora solo tengo que ir pulsando las opciones.
 - Llega el turno de crear el friso, pulso la casilla de control primera y pincho sobre ella y en este caso es m quiere decir que tiene simetría transversal, pulso la segunda casilla de control y pincho sobre el 1 que quiere decir que no tiene simetría longitudinal, por ultimo pulso la tercera casilla de control y pincho sobre el 1 que quiere decir que no tiene giro.
 - Solución en la imagen del programa GeoGebra. Véase Ilustración 19.

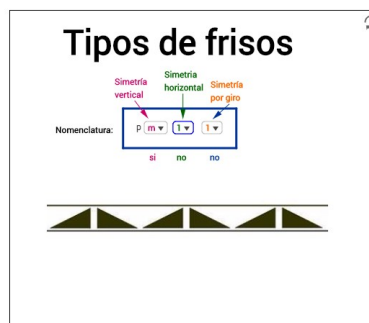


Ilustración 19. Friso grupo Fm1, imagen generada con GeoGebra. (La autora, 2017)

- **F1m:** Pasos a seguir para obtener un F1m.
 - Ya tengo todas las casillas de control hechas, cada polígono interaccionado para cada número, pues ahora solo tengo que ir pulsando las opciones.
 - Llega el turno de crear el friso, pulso la casilla de control primera y pincho sobre ella y en este caso es 1 quiere decir que no tiene simetría transversal, pulso la segunda casilla de control y pincho sobre la m que quiere decir que tiene simetría longitudinal, por ultimo pulso la tercera casilla de control y pincho sobre el 1 que quiere decir que no tiene giro.
 - Solución en la imagen del programa GeoGebra. Véase Ilustración 20.

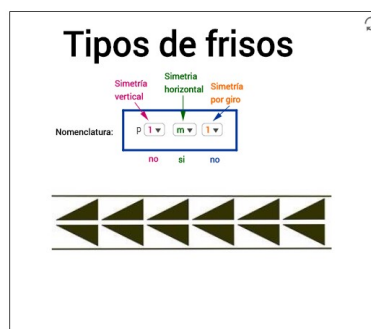


Ilustración 20. Friso grupo F1m, imagen generada con GeoGebra. (La autora, 2017)

- **F1g:** Pasos a seguir para obtener un F1g.
 - Ya tengo todas las casillas de control hechas, cada polígono interaccionado para cada número, pues ahora solo tengo que ir pulsando las opciones.
 - Llega el turno de crear el friso, pulso la casilla de control primera y pincho sobre ella y en este caso es 1 quiere decir que no tiene simetría transversal, pulso la segunda casilla de control y pincho sobre el a quiere decir que tiene simetría longitudinal con deslizamiento, por ultimo pulso la tercera casilla de control y pincho sobre el 1 que quiere decir que no tiene giro.
 - Solución en la imagen del programa GeoGebra. Véase Ilustración 21.

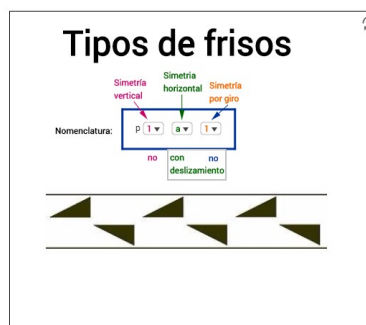


Ilustración 21. Friso grupo F1g, imagen generada con GeoGebra. (La autora, 2017)

- **Fmg:** Pasos a seguir para obtener un Fmg
 - Ya tengo todas las casillas de control hechas, cada polígono interaccionado para cada número, pues ahora solo tengo que ir pulsando las opciones.
 - Llega el turno de crear el friso, pulso la casilla de control primera y pincho sobre ella y en este caso es m quiere decir que tiene simetría transversal, pulso la segunda casilla de control y pincho sobre el a quiere decir que tiene simetría longitudinal con deslizamiento, por ultimo pulso la tercera casilla de control y pincho sobre el 2 que quiere decir que tiene giro.
 - Solución en la imagen del programa GeoGebra. Véase Ilustración 22.

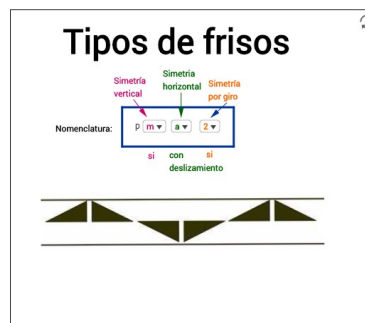


Ilustración 22. Friso grupo Fmg, imagen generada con GeoGebra. (La autora, 2017)

- **Fmm:** Pasos a seguir para obtener un Fmm
 - Ya tengo todas las casillas de control hechas, cada polígono interaccionado para cada número, pues ahora solo tengo que ir pulsando las opciones.
 - Llega el turno de crear el friso, pulso la casilla de control primera y pincho sobre ella y en este caso es m quiere decir que tiene simetría transversal, pulso la segunda casilla de control y pincho sobre el m quiere decir que tiene simetría longitudinal, por ultimo pulso la tercera casilla de control y pincho sobre el 2 que quiere decir que tiene giro.
 - Solución en la imagen del programa GeoGebra. Véase Ilustración 23.

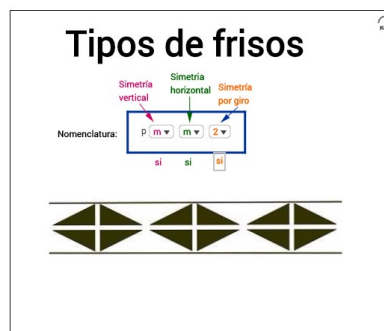


Ilustración 23. Friso grupo Fmm, imagen generada con GeoGebra. (La autora, 2017)

Se denomina módulo *unidad* de un friso a la menor región que genere el friso completo al aplicarle la familia de traslaciones. La parte del friso contenido en una Región Unidad se denomina *motivo*. Al aplicar la familia de traslaciones a la Región Unidad, el motivo dará lugar al friso completo.

Identificación del grupo de un friso.

Lo primero es comprobar que el motivo ornamental objeto de estudio es un friso, es decir, que a partir de una Región Unidad y aplicando traslaciones es generado.

Existen algoritmos de identificación basados en preguntas Si/No, hasta obtener el Grupo de Simetría de un friso determinado. Véase Ilustración 24.

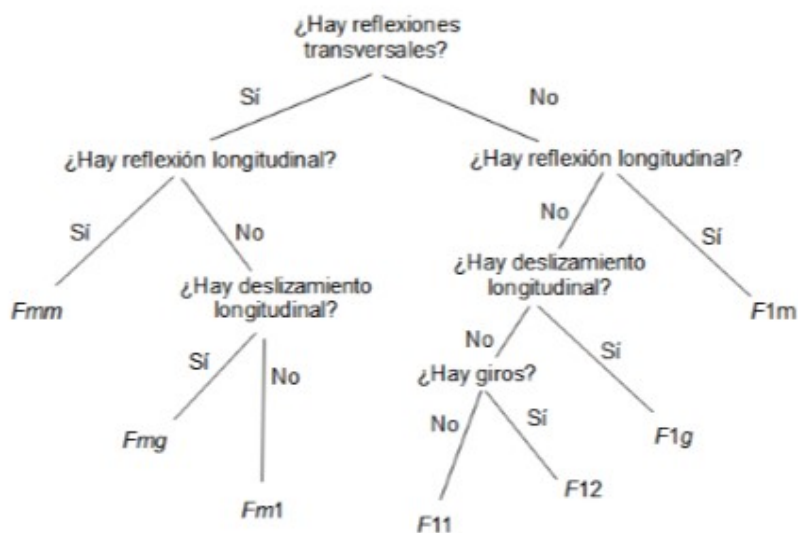


Ilustración 24. Algoritmo, identificación de un friso. (Gilsanz Mayor, 2010)

Los frisos más habituales en el Real Alcázar son del grupo Fm1 en el cual se produce sensación de armonía, es muy repetitivo, pero hace que enlace unas habitáculos con otros, los colores más usados el verde, blanco y negro, y sobre todo el verde que hace la unión con todos los colores, da con la mezcla con el blanco luminosidad, sensación fresca y floral, se integra bastante bien con los colores de los jardines y te da sensación de tranquilidad. El azul y melado se suelen unir entre ellos cuando el tipo de friso es entrelazado. Véase Ilustración 25.



Ilustración 25. Frisos más repetitivos del Real Alcázar. (La autora, 2017)

3. Grupos de Mosaicos

Los Grupos Planos de Simetría

En nuestros antepasados del Paleolítico y Neolítico ya hay indicios de la Simetría, se encontraron algunos Grupos Planos de Simetrías en sus pinturas.

En el Paleolítico el grupo más hallado es el denotado por $p4m$, se usaba mucho por la sensación de estabilidad y armonía.

Hoy en día nos podemos encontrar con muchas fachadas y suelos adornados con la repetición de una figura, distribuidas regularmente. El estudio en el que se centra este trabajo será en los alicatados, yeserías y maderas del Real Alcázar. Analizándose cada tipo de patrón o *mosaico plano*. A diferencia de los frisos en el que el motivo solo se repiten en un sentido y los mosaicos se le pueden añadir rotaciones de diversos órdenes, y varias direcciones de repetición.

Se define "*mosaico periódico del plano*" a toda figura plana cuyo Grupo de Simetría contiene dos traslaciones no paralelas.

Al aplicar la familia de traslaciones a un punto cualquiera del plano se obtiene una retícula cuyos vértices adyacentes forman paralelogramos de lados v y w . dependiendo del ángulo que formen dichos vectores y sus longitudes, existen varias posibles retículas: Oblicua, rectangular, rectangular centrada, cuadrada, hexagonal.

Se denomina módulo traslacional o módulo de un grupo cristalográfico plano a cualquier región plana, de mínima superficie, que genere el plano al aplicarle la familia de traslaciones. El módulo o paralelogramo fundamental, se puede tomar como un rectángulo, un rombo o un cuadrado, dependiendo del grupo cristalográfico que pertenezca.

En el Grupo de Simetría del mosaico pueden existir otras isometrías: reflexiones, giros y deslizamientos. Dos diseños distintos pueden tener las mismas isometrías.

Un mosaico es ilimitado, se extiende indefinidamente por todo el plano, pero es solo una aproximación a ideal. Se analiza sus isometrías para clasificarlo y obtener así un motivo que pueda generar todo el mosaico.

Los mosaicos periódicos del plano pueden clasificarse en 17 grupos, dependiendo de las Simetrías que posean. Se denomina Grupo de Simetría del plano y también Grupos Cristalográficos planos.

Para nombrarlos hay una notación cristalográfica internacional abreviada. Los nombres asignados de los utilizados en la notación cristalográfica internacional, que consta de cuatro símbolos. Son los siguientes:

1. El primer signo es la letra "**p**", cuando los elementos de Simetría se refieren a un módulo, cuyos vértices coinciden con los centros de giro de mayor orden y los lados son paralelos a los ejes de reflexión o deslizamiento. Solo en dos casos cambia la "**p**" por la "**c**", corresponde a célula centrada, para que los ejes de reflexión sean paralelos a los lados de los lados de la célula.

2. El segundo signo es un número (1, 2, 3, 4 ó 6) que corresponde a los giros de mayor orden del grupo.
3. El tercer signo es “m” es la abreviatura de mirror, en el caso de Simetrías por reflexión de ejes perpendiculares a uno de los vectores de traslación, “g” si no hay reflexiones pero sí deslizamiento (glides), o “l” si no hay reflexiones ni deslizamientos.

Los 17 grupos que existen son los denominados : p1, cm, pg, pm, cmm, p2, pgg, pmg, pmm, p3, p31m, p3m1, p4, p4m, p4g, p6, p6m.

Una manera de visualizar los Grupos de Simetría es representarlos mediante esquemas que representan un módulo traslacional, con las Simetrías del grupo marcadas sobre ella. Se ha utilizado el siguiente código.

Los Grupos de Simetría suelen agruparse según los giros. Puede a ver giro de 0° , 180° , 120° , 90° y 60° . Esta proposición se apoya fundamentalmente en dos propiedades:

- Todo punto de la órbita de un centro de giro de orden n es también un centro de giro del mismo orden n.
- Los puntos de una órbita se encuentran lo suficientemente separados unos de otros como para poder asegurar la existencia de una distancia mínima entre O y cualquier otro punto de su órbita.
- Pasos a seguir para crear los grupos de mosaicos:
 - Entrar en el programa GeoGebra, recuérdese que no es necesario descargar el programa, porque se puede acceder online.
 - Usando *polígono* de la barra de *Herramientas*, se selecciona y se crea un polígono, que en es la Región Unidad. Véase Ilustración 26.
 - En la barra de Herramientas hay una llamada casilla de control, se pulsa y se le llama ocultar rectángulo, da la opción en un despegable de los puntos, polígonos, segmentos que quieres mostrar/ocultar y se selecciona el polígono rectángulo. Véase Ilustración 27.
 - Con la herramienta polígono, se crea una figura dentro del rectángulo, se pulsa botón derecho y se cambia de color en propiedades. Véase Ilustración 28.
 - Se inserta otra casilla de control y se asocia al segundo polígono. Véase Ilustración 29.
 - Con la herramienta vector, indico dos vectores de traslación paralelos al polígono rectángulo. Véase Ilustración 31.
 - Se oculta el rectángulo, porque solo se necesitaba para acotar el espacio y poner los vectores paralelos.
 - Con la herramienta traslación, se selecciona el polígono que se va a trasladar con el botón derecho, y se pulsa uno de los vectores y se traslada el polígono. Se vuelve a repetir la acción, pero en este caso se selecciona los dos polígonos y se pulsa el otro vector. Véase Ilustración 32.

Grupos sin giros: p1, pg, pm y cm. Los únicos giros que poseen estos grupos son los triviales, es decir, de ángulo 0° . Además de las traslaciones, son posibles otras isometrías, como reflexiones y deslizamientos. Pero sus ejes deberán ser paralelos, pues en otro caso su composición sería un giro que no está permitido.

- **p1:** Este Grupo de Simetrías contiene las traslaciones generados por dos vectores que definen un paralelogramo fundamental
 - pasos a seguir para crear un p1:
 - Se selecciona polígono y se crea un paralelogramo, que en es la Región Unidad de un p1. Véase Ilustración 26.
 - Se crea una figura dentro del paralelogramo, que es la Región Mínima. Véase Ilustración 28.
 - Creo dos vectores de traslación paralelos al polígono paralelogramo. Véase Ilustración 31.
 - Se hace las traslaciones. Véase Ilustración 32.
 - Solución en el interfaz del programa GeoGebra. Véase Ilustración 33.

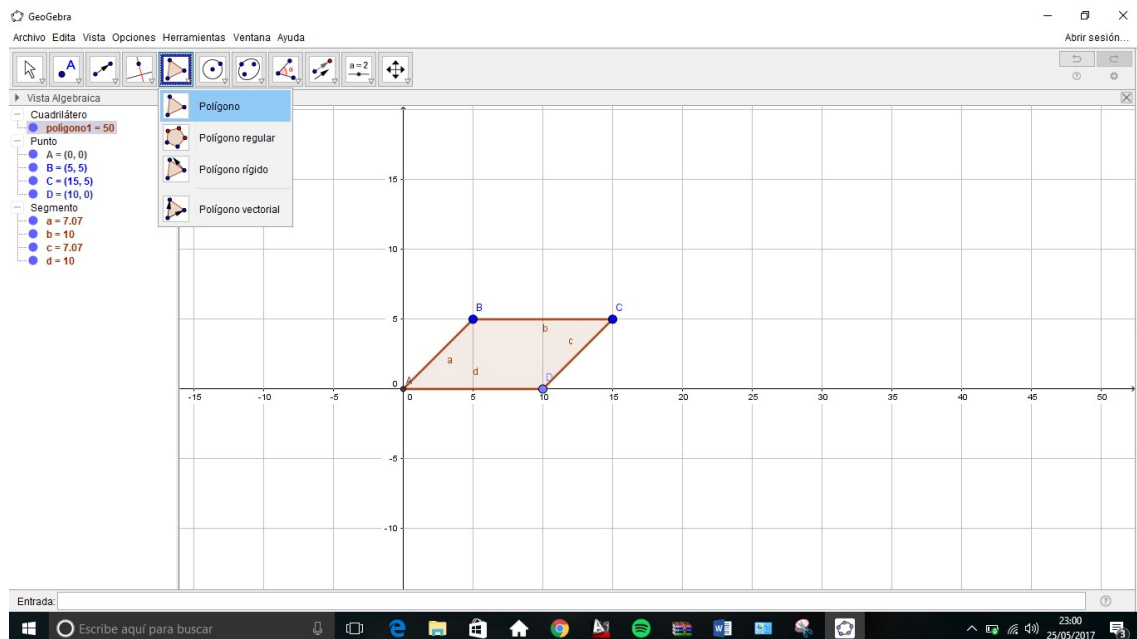


Ilustración 26. Rectángulo: paralelogramo fundamental. (La autora, 2017)

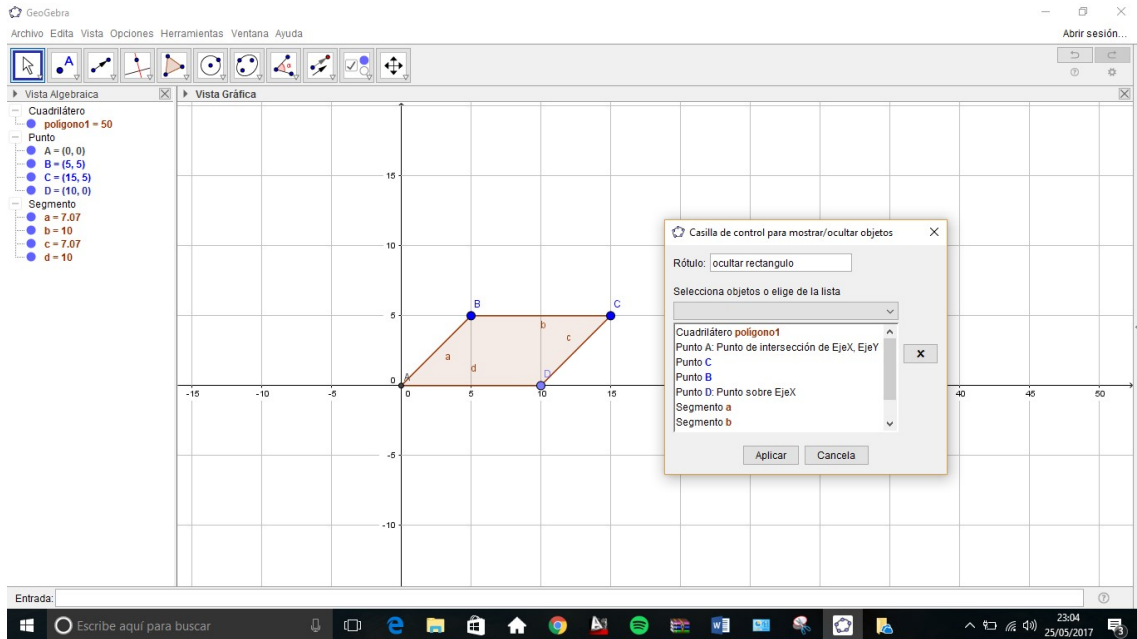


Ilustración 27. Se crea la casilla de control. (La autora, 2017)

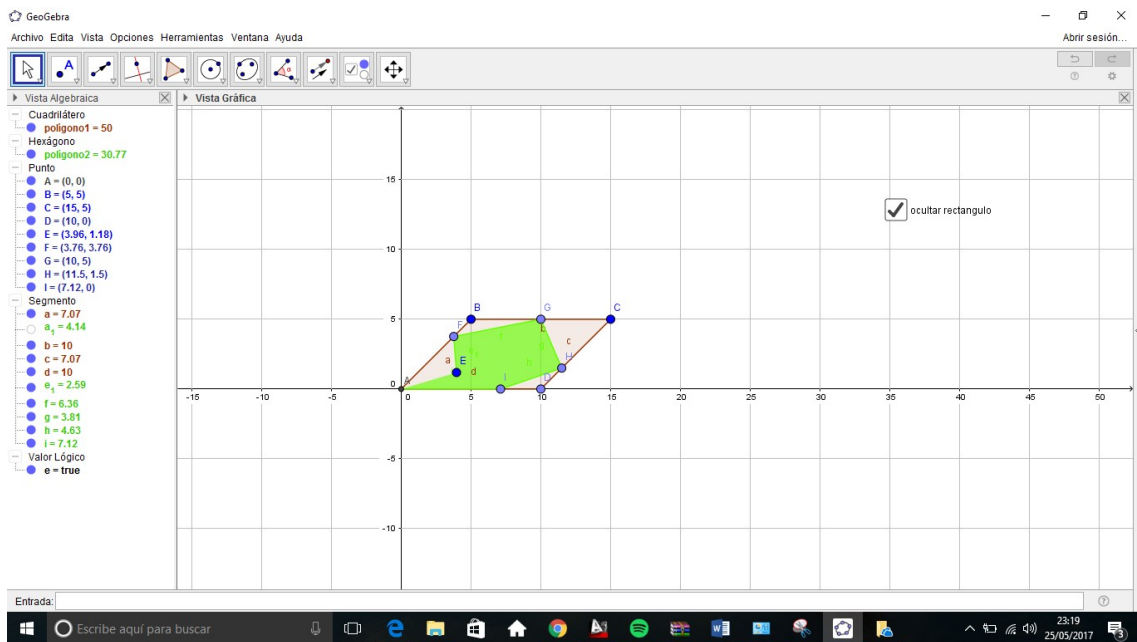


Ilustración 28. Polígono 2. (La autora, 2017)

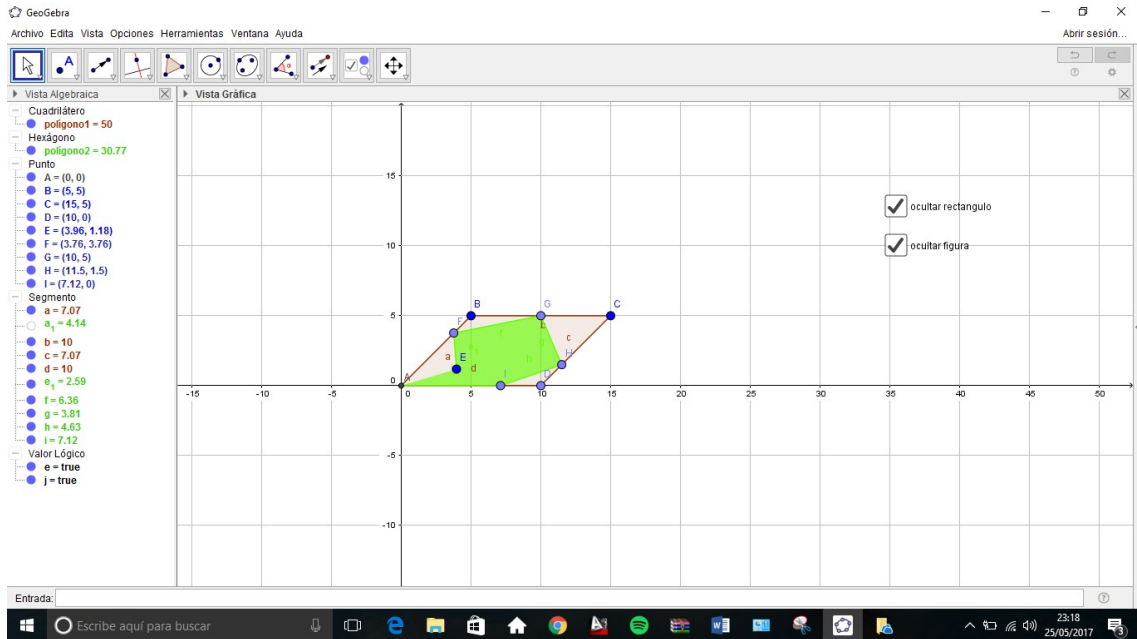


Ilustración 29. Casilla de control: ocultar figura. (La autora, 2017)

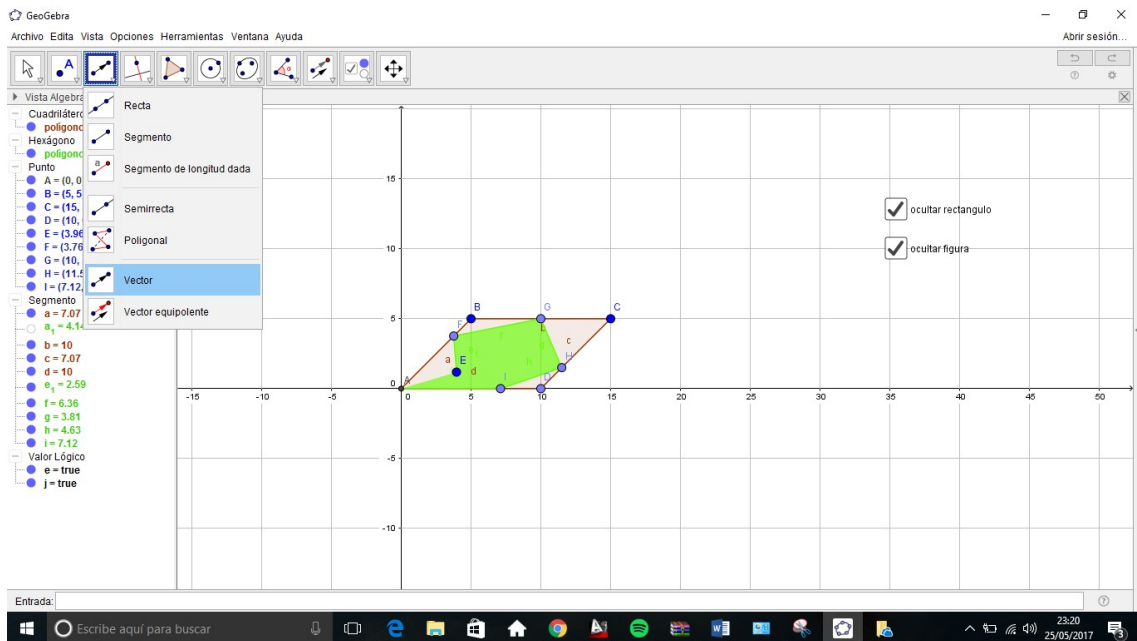


Ilustración 30. Herramienta vector. (La autora, 2017)

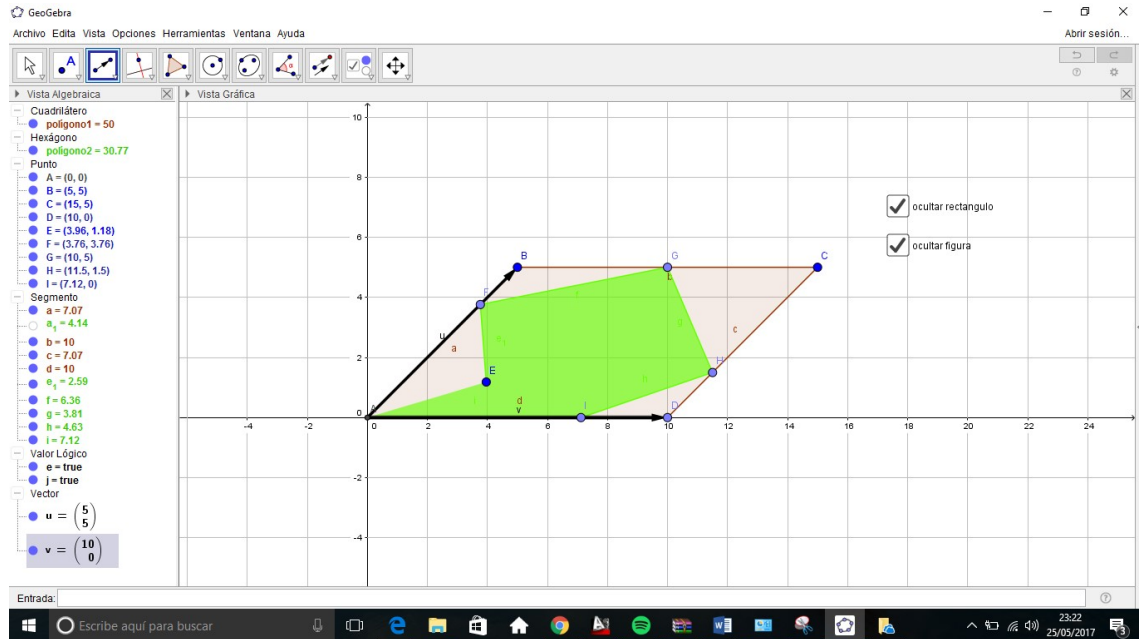


Ilustración 31. Vectores. (La autora, 2017)

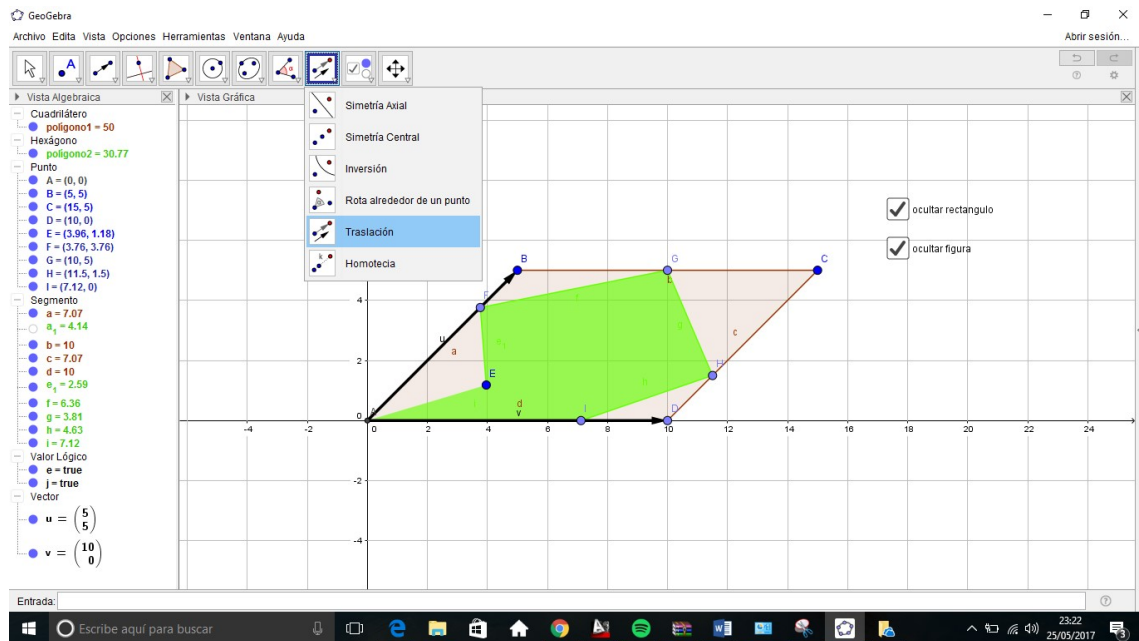


Ilustración 32. Herramienta traslación. (La autora, 2017)

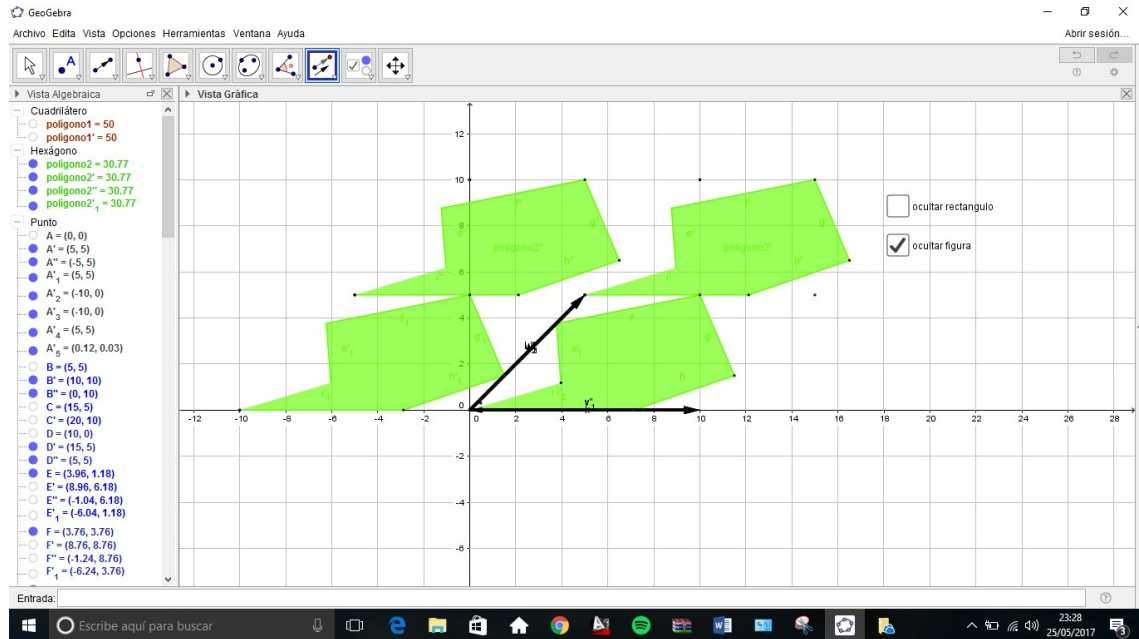


Ilustración 33. Mosaico: Grupo Plano p1. (La autora, 2017)

- **pg:** El paralelogramo fundamental del grupo pg es un rectángulo y los ejes de Simetría con deslizamiento son paralelos a uno de los lados del rectángulo. Está generado por dos traslaciones y un deslizamiento.
 - pasos a seguir para crear un pg:
 - Se selecciona polígono y se crea un rectángulo, que en es la Región Unidad de un pg. Véase Ilustración 34.
 - Se crea una figura dentro del paralelogramo, que es la Región Mínima. Véase Ilustración 36.
 - Con la Herramienta Recta, se crea los ejes de simetría. Véase Ilustración 35.
 - Con la Herramienta Simetría axial, se pulsa la Región Mínima y se elige un eje de Simetría. Véase Ilustración 37.
 - Se crea un vector de deslizamiento y aplicamos la traslación a la Región Mínima simétrica. Véase Ilustración 38.
 - Creo dos vectores de traslación paralelos al polígono paralelogramo.
 - Se hace las traslaciones.
 - Solución en el interfaz del programa GeoGebra. Véase Ilustración 39.

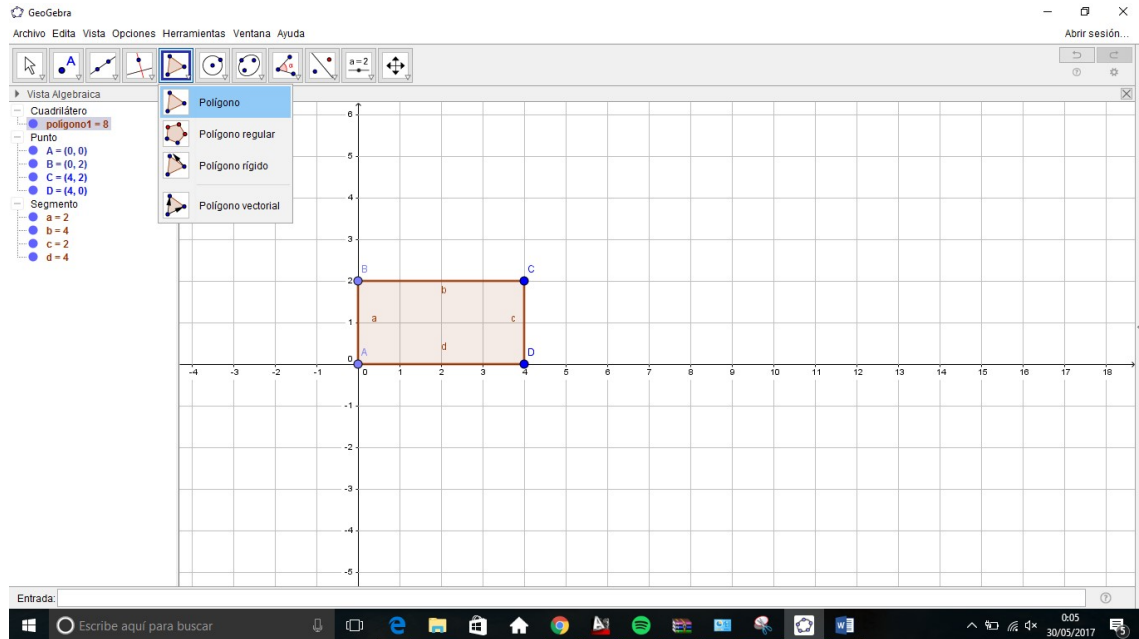


Ilustración 34. Crear Región Unidad (rectángulo). (La autora, 2017)

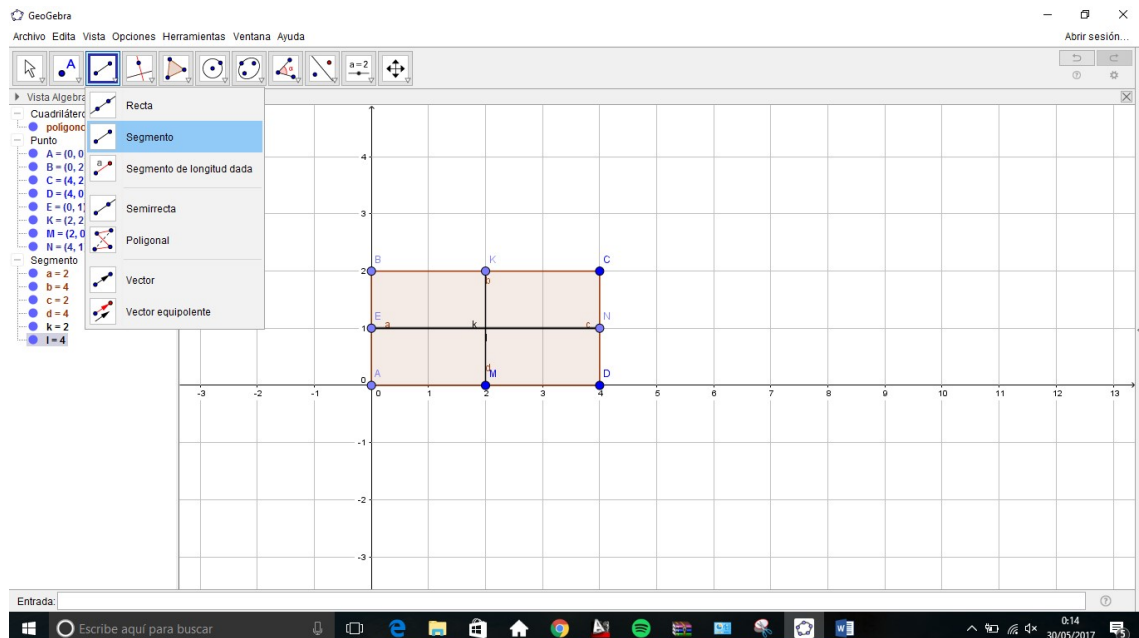


Ilustración 35. Ejes de Simetría. (La autora, 2017)

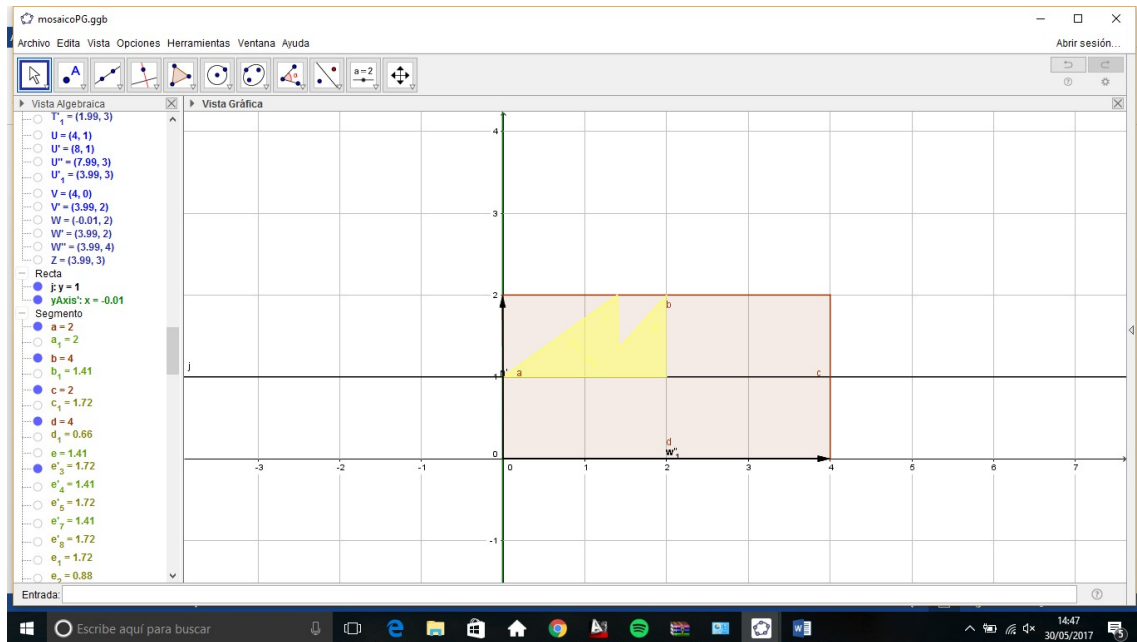


Ilustración 36. Región Unidad y Región Mínima. (La autora, 2017)

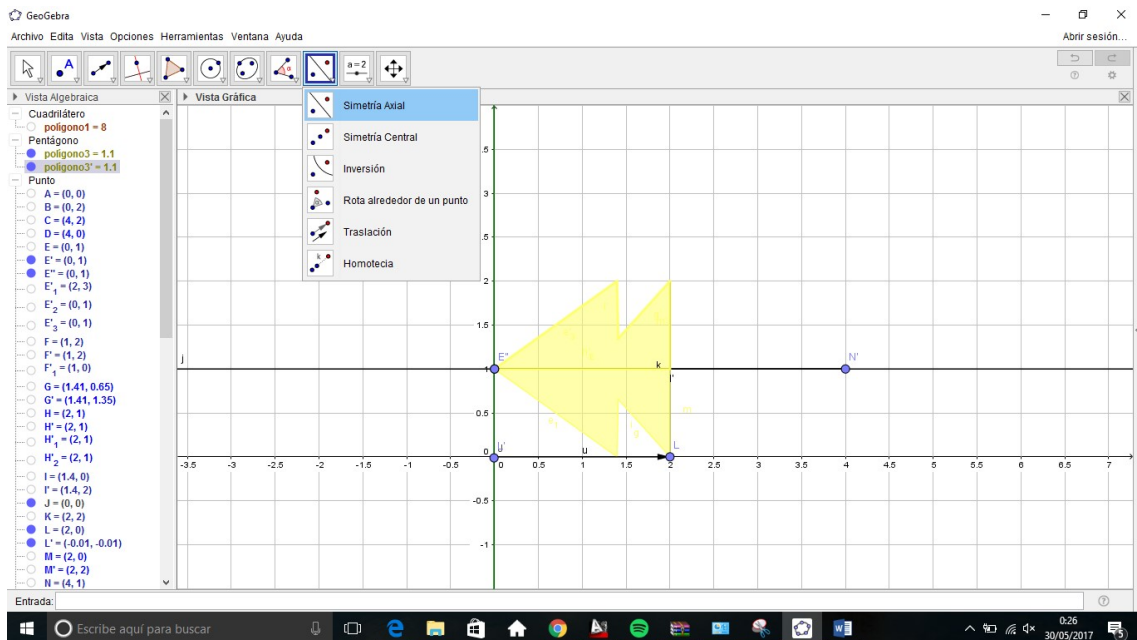


Ilustración 37. Reflexión al eje horizontal. (La autora, 2017)

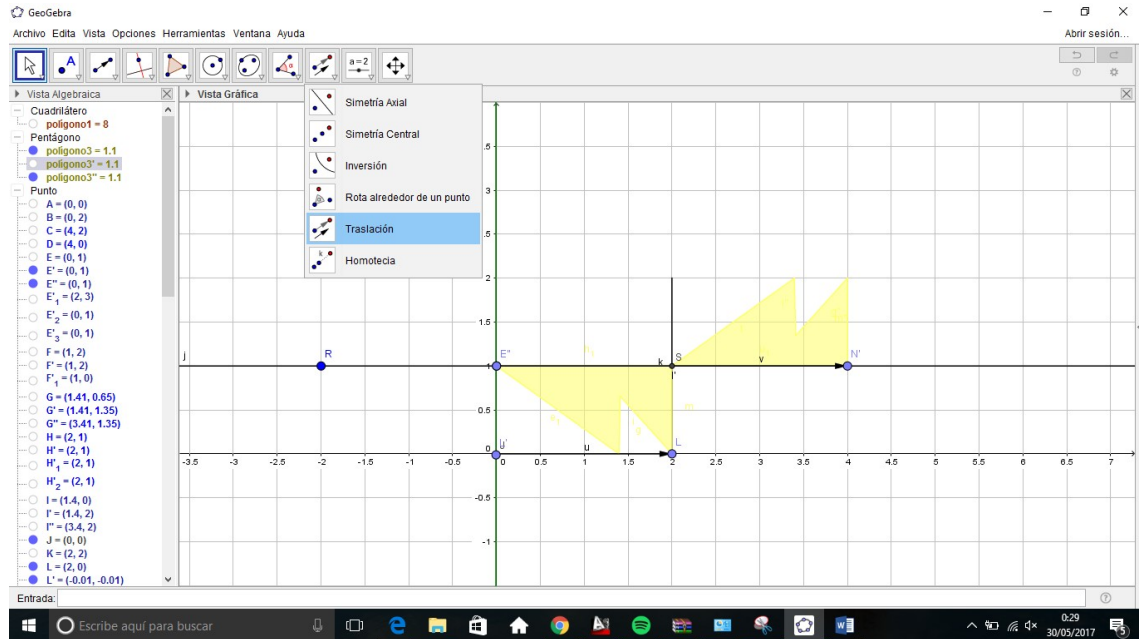


Ilustración 38. Deslizamiento eje horizontal. (La autora, 2017)

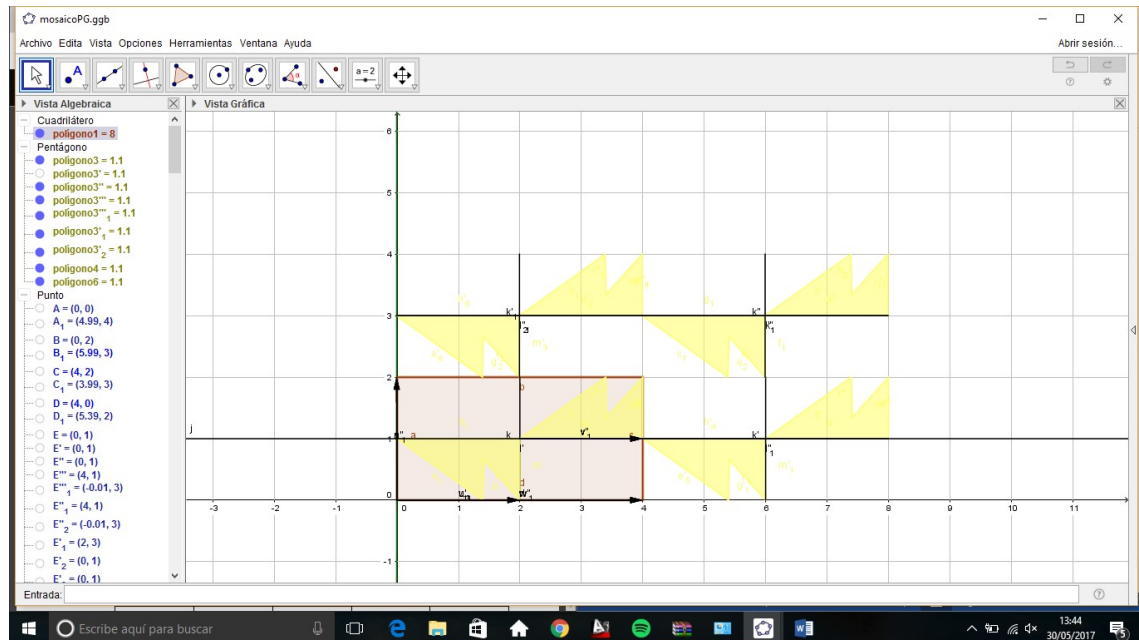


Ilustración 39. Mosaico Grupo Plano pg. (La autora, 2017)

- **pm**: El grupo cristalográfico pm contiene reflexiones (simetrías axiales). Los ejes de simetría son paralelos a un vector de traslación y perpendiculares al otro vector de traslación. No hay movimientos de rotación, giros de orden uno, ni simetrías con deslizamiento. El paralelogramo fundamental es un rectángulo. Los ejes de simetría son necesariamente paralelos a uno de los lados del rectángulo.
 - pasos a seguir para crear un pm:
 - Se selecciona polígono y se crea un rectángulo, que en es la Región Unidad de un pm. Véase Ilustración 40.
 - Se crea una figura dentro del paralelogramo, que es la Región Mínima. Véase Ilustración 42
 - Con la Herramienta Recta, se crea los ejes de simetría. Ilustración 41.
 - Con la Herramienta Simetría axial, se pulsa la Región Mínima y se elige un eje de Simetría en este caso vertical. Véase Ilustración 43.
 - Creo dos vectores de traslación paralelos al polígono paralelogramo. Véase Ilustración 44.
 - Se hace las traslaciones.
 - Solución en el interfaz del programa GeoGebra. Véase Ilustración 45.

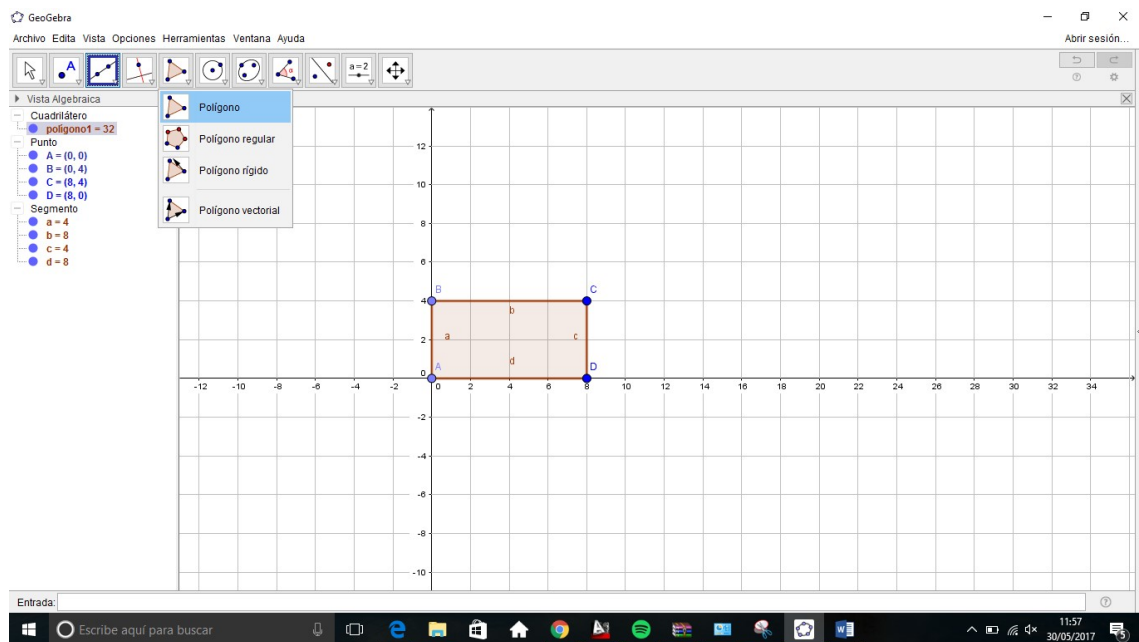


Ilustración 40. Región Unidad (rectángulo). (La autora, 2017)

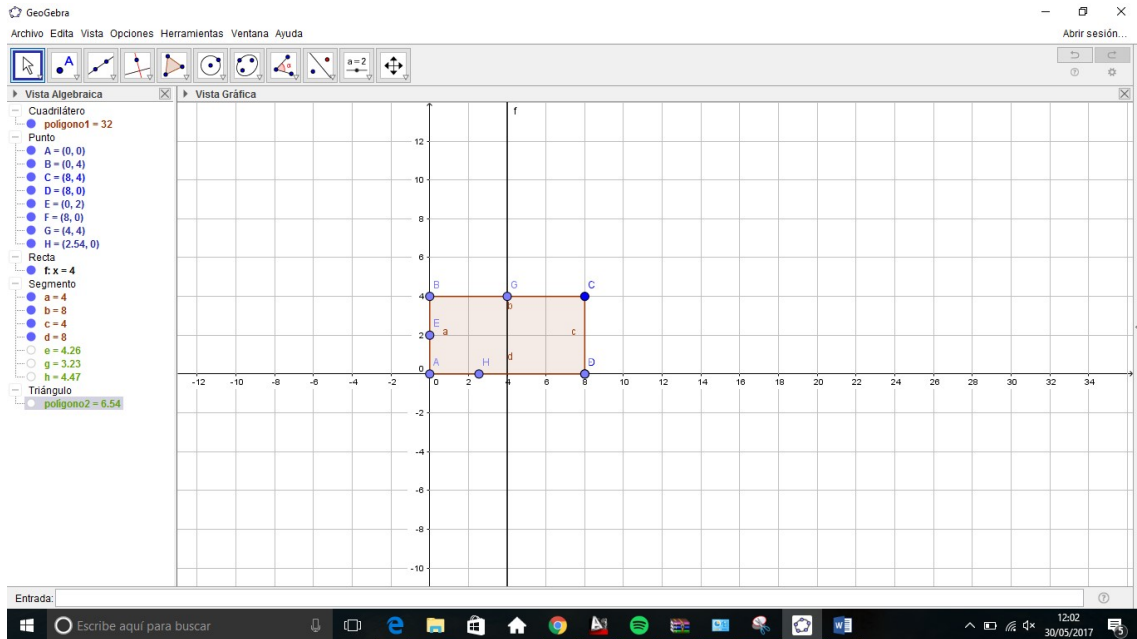


Ilustración 41. Eje de Simetría vertical. (La autora, 2017)

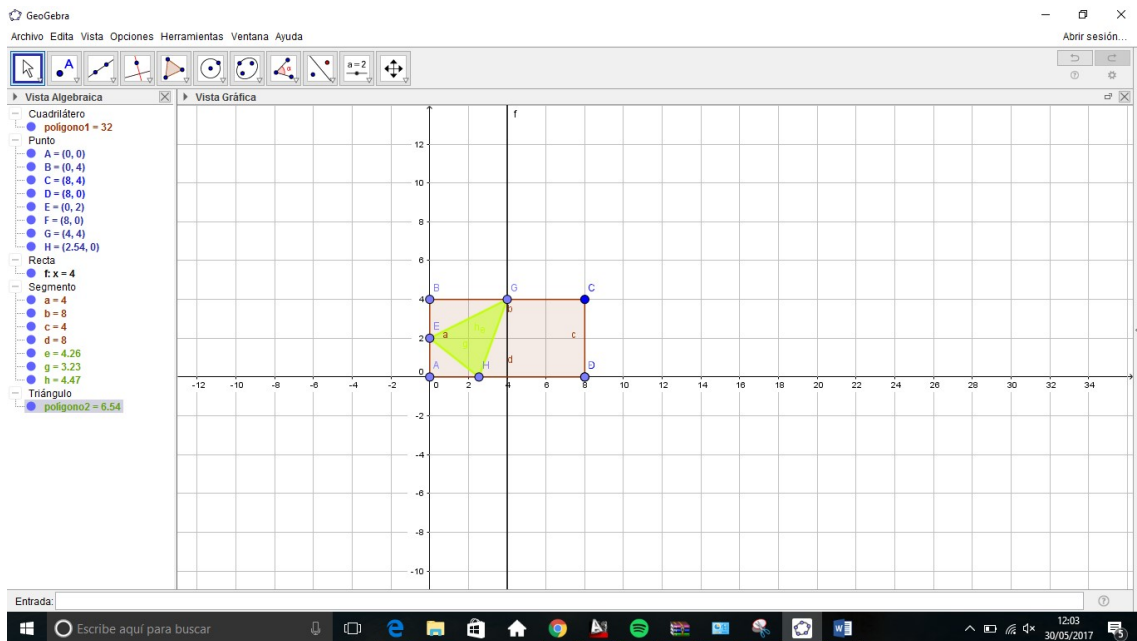


Ilustración 42. Región Mínima. (La autora, 2017)

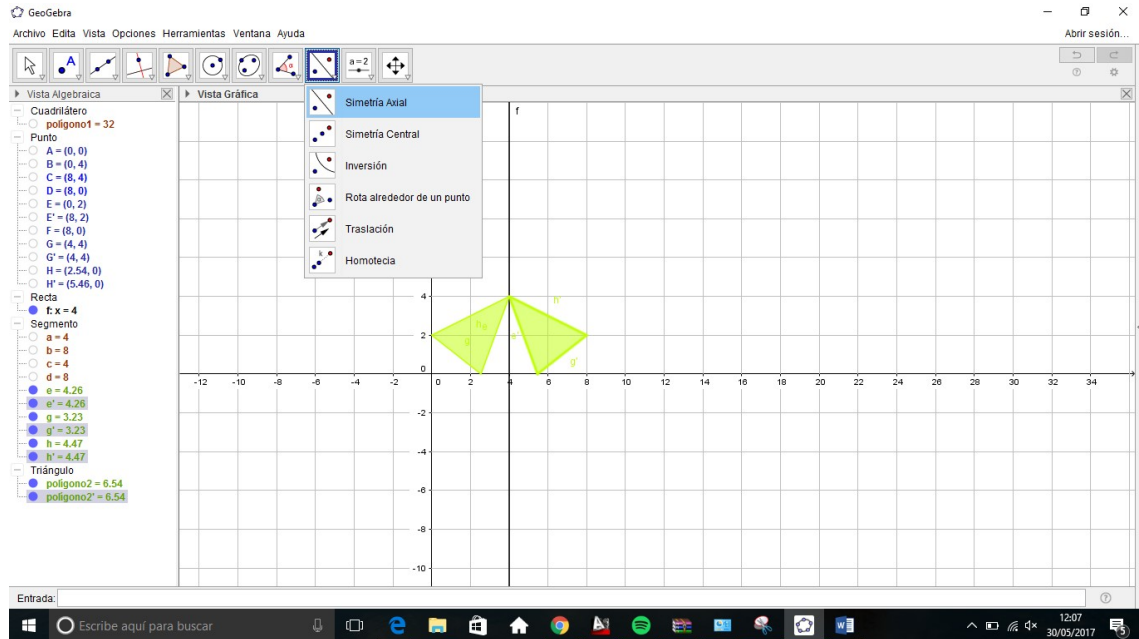


Ilustración 43. Simetría de Región Mínima. (La autora, 2017)

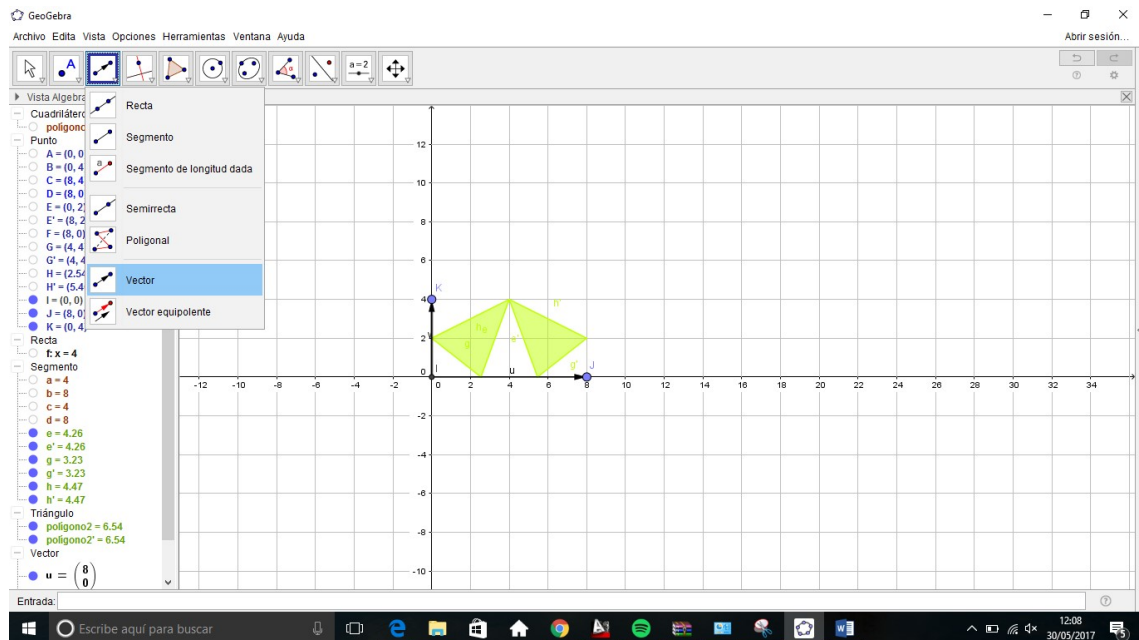


Ilustración 44. Vectores de traslación. (La autora, 2017)

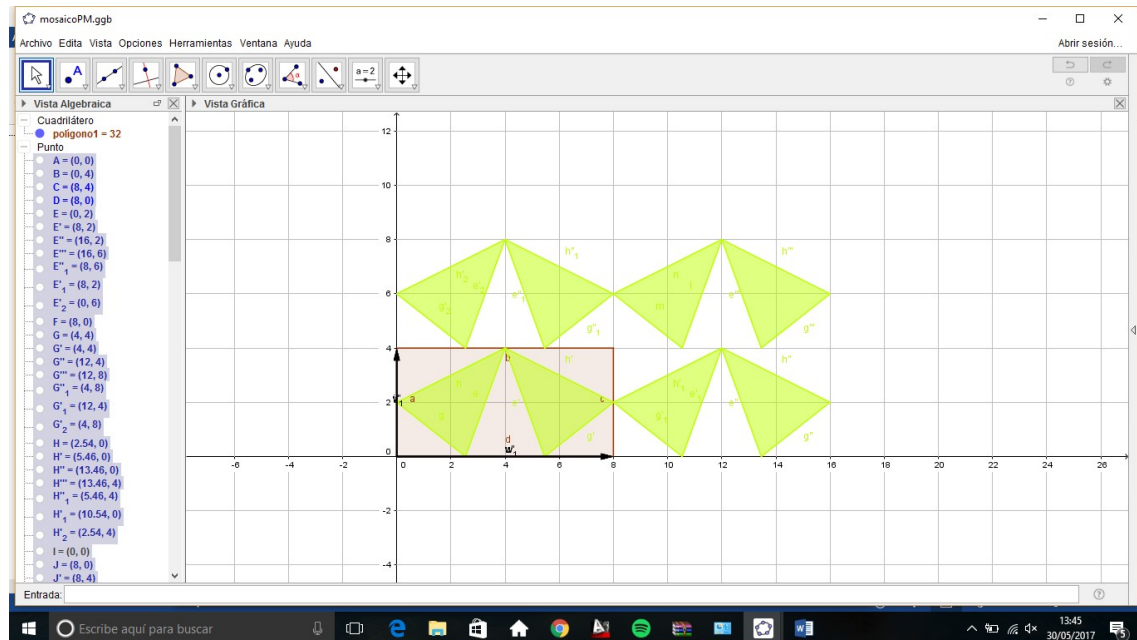


Ilustración 45. Mosaico pm. (La autora z, 2017)

- **cm**: Este grupo cristalográfico contiene giros de orden uno (no hay movimientos de rotación), pero en él aparecen Simetrías y Simetría con deslizamiento con ejes paralelos (de ahí la "C" de su nombre). El paralelogramo fundamental es un rombo y una de las diagonales es un eje de Simetría.
 - pasos a seguir para crear un cm:
 - Se selecciona polígono y se crea un rombo, que en es la Región Unidad de un cm. Véase Ilustración 46.
 - Se crea una figura dentro del paralelogramo, que es la Región Mínima y el eje de Simetría. Véase Ilustración 47.
 - Con la Herramienta Simetría axial, se pulsa la Región Mínima y se elige un eje de Simetría en este caso vertical. Véase Ilustración 48.
 - Creo dos vectores de traslación paralelos al polígono paralelogramo y se hace la primera traslación. Véase Ilustración 49.
 - Solución en el interfaz del programa GeoGebra. Véase Ilustración 50.

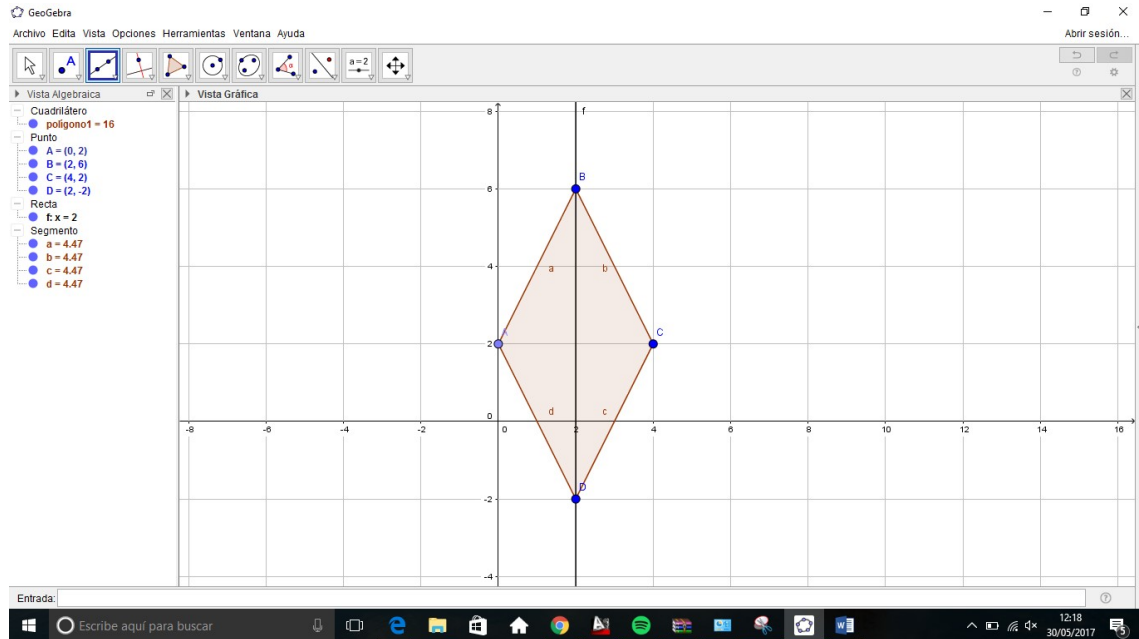


Ilustración 46. Región Unidad (rombo). (La autora, 2017)

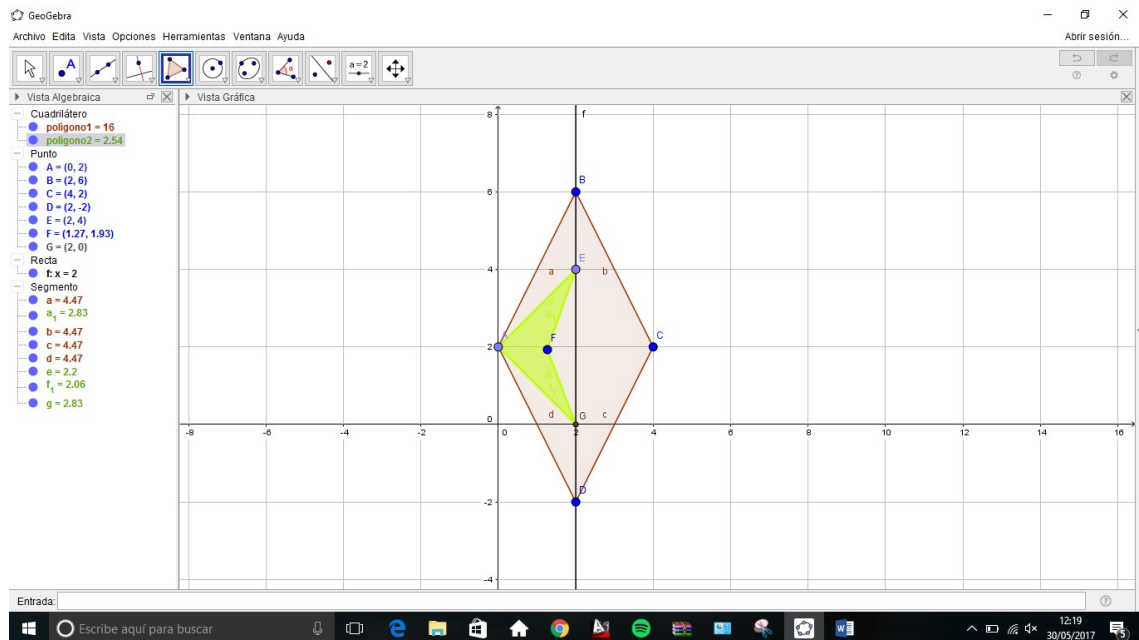


Ilustración 47. Región Unidad, Región Mínima y eje de Simetría. (La autora, 2017)

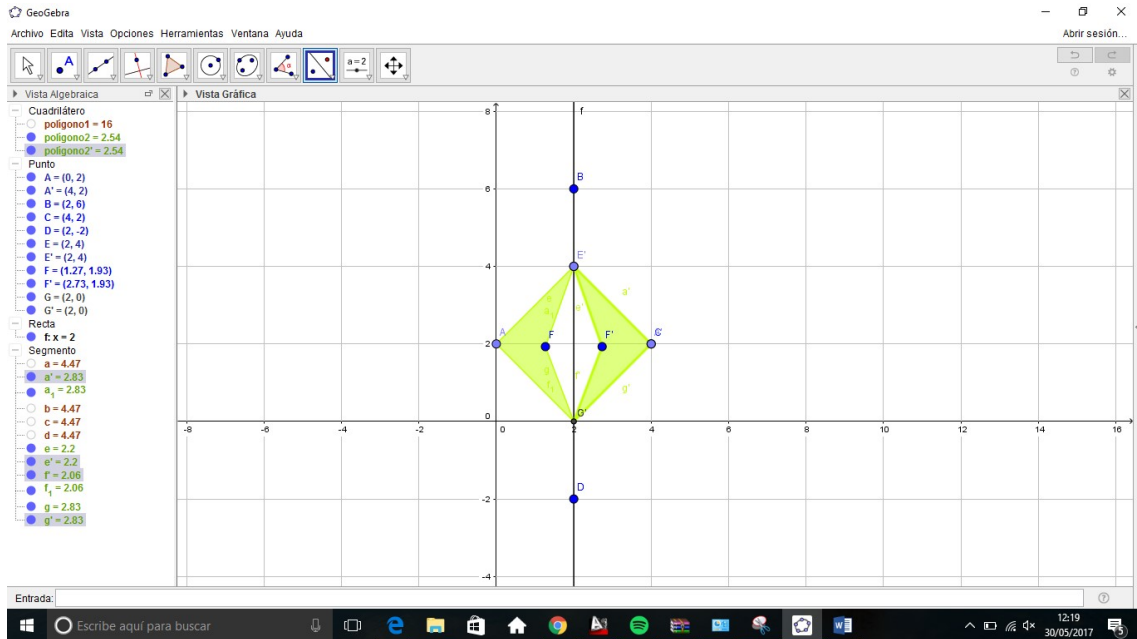


Ilustración 48. Simetría Región Mínima. (La autora, 2017)

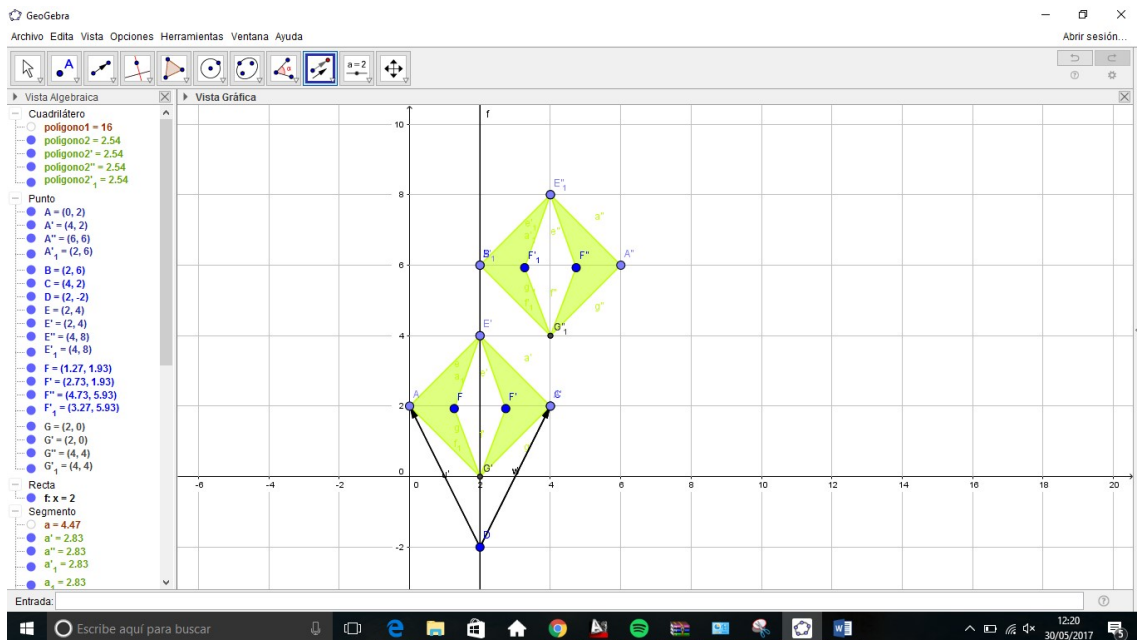


Ilustración 49. Vectores y primera traslación. (La autora, 2017)

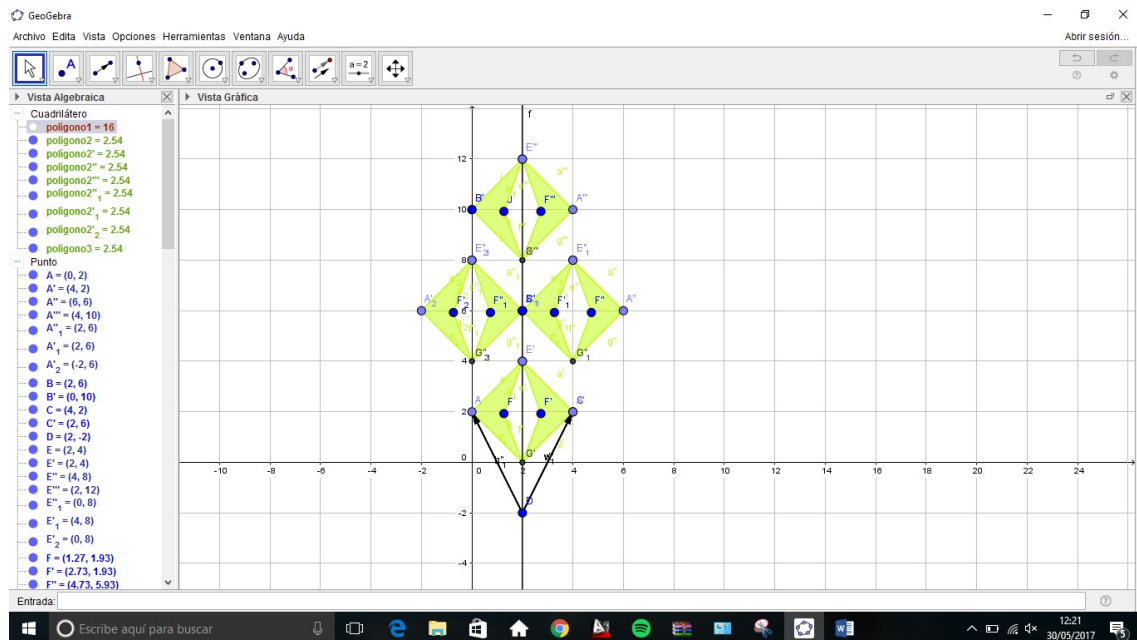


Ilustración 50. Mosaico cm. (La autora, 2017)

Grupos con giros de orden 2: cmm, p2, pgg, pmg y pmm. El mayor número de giros de este grupo es dos, todos sus giros serán de 180 grados. Además de las traslaciones, pueden existir reflexiones y deslizamientos, de ejes paralelos o perpendiculares.

- **p2:** El denominado grupo p2 es primer grupo que encontramos que contiene giros de orden dos (movimientos de rotación de 180°). No contiene simetrías (reflexiones) ni simetrías con deslizamiento (reflexión con deslizamiento).
 - pasos a seguir para crear un p2:
 - Se crea un paralelogramo (Región Unidad). Véase Ilustración 51.
 - Se crea una figura dentro del paralelogramo, que es la Región Mínima y el eje de Simetría. Véase Ilustración 52.
 - Con la Herramienta punto, se pulsa y se pone el centro de giro, que puede estar ubicado: en el centro de la pieza, en los vértices de la pieza o en el centro de las caras del polígono.
 - Con la Herramienta giro, se pulsa la Región Mínima y se elige un centro de giro. Véase Ilustración 53.
 - Creo dos vectores de traslación paralelos al polígono paralelogramo y se hace las traslaciones.
 - Solución en el interfaz del programa GeoGebra. Véase Ilustración 54.

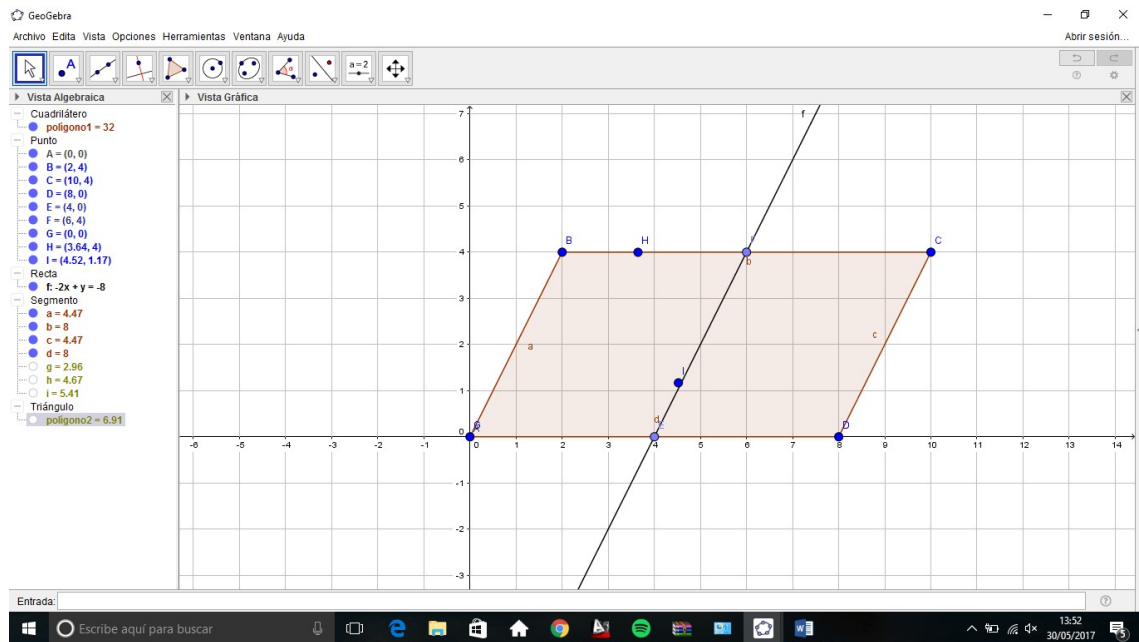


Ilustración 51. Región Unidad y recta para el giro. (La autora, 2017)

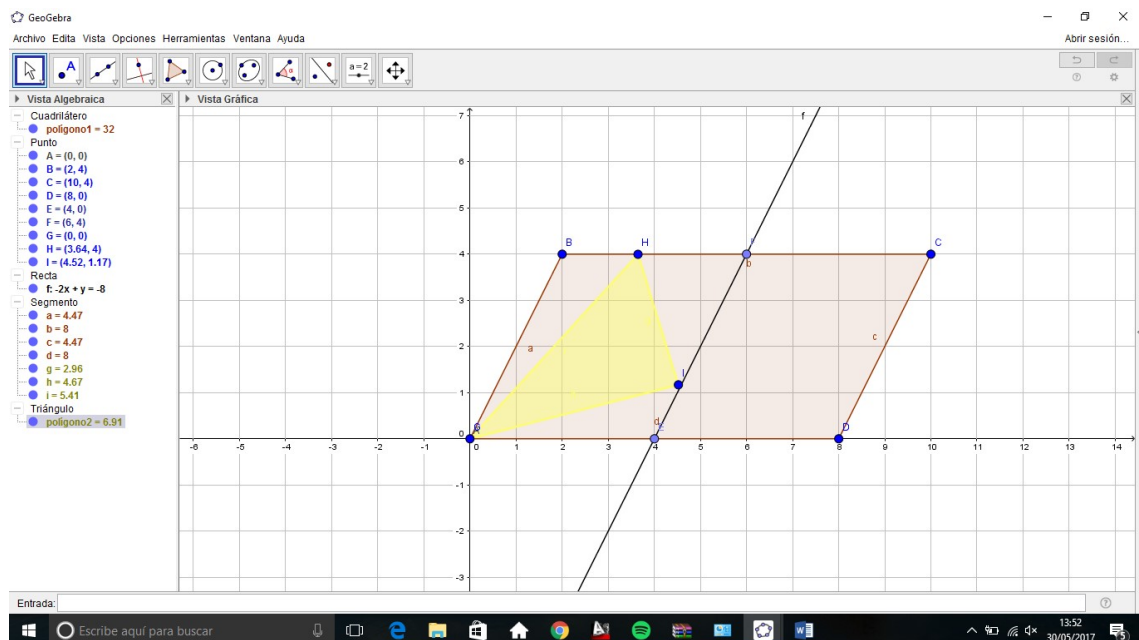


Ilustración 52. Región Mínima. (La autora, 2017)

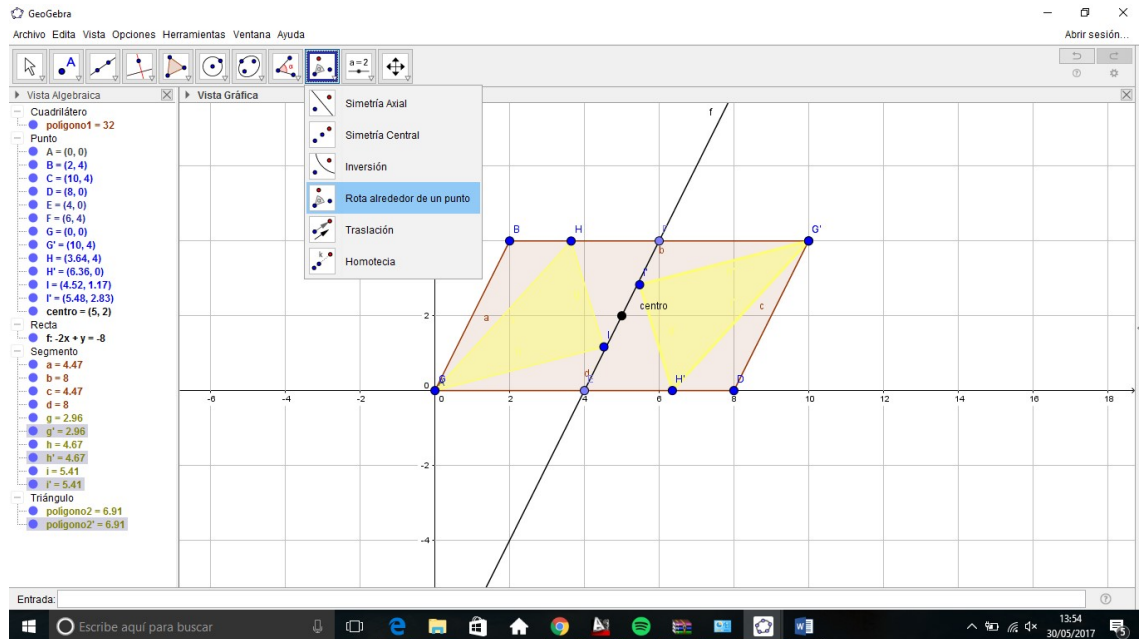


Ilustración 53. Rotación alrededor de un punto. (La autora, 2017)

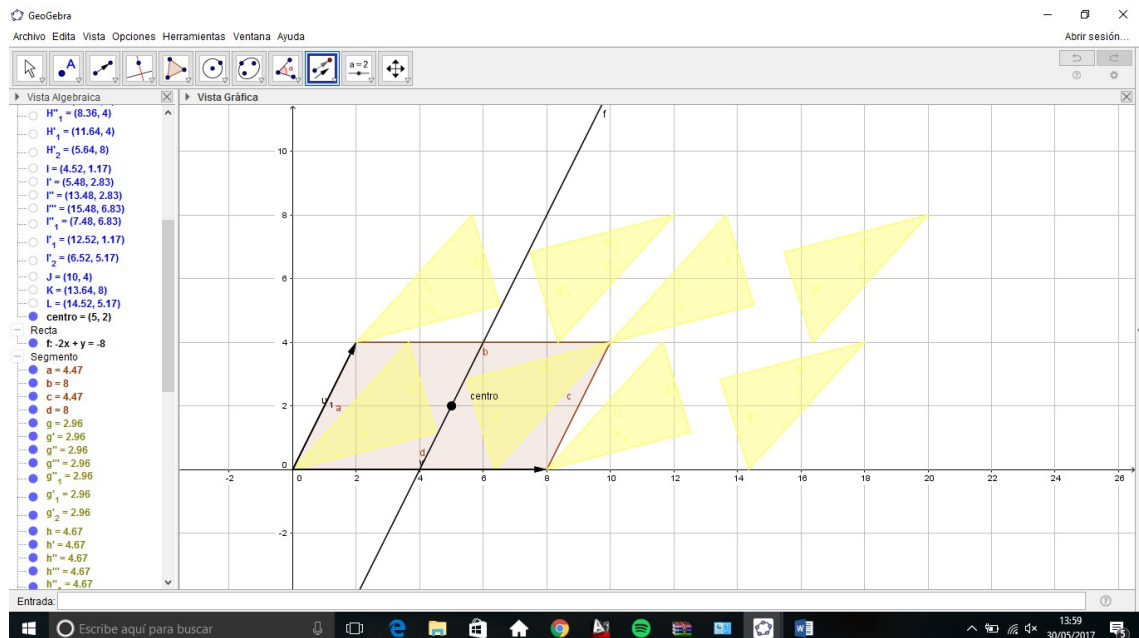


Ilustración 54. Mosaico p2. (La autora, 2017)

- **pgg:** El grupo pgg queda determinado por contener giros de orden dos y no de orden mayor. No hay ejes de simetría axiales, pero sí aparecen ejes de simetría con deslizamiento. Los centros de giro no están sobre dichos ejes. En este caso el paralelogramo fundamental ha de ser un rectángulo, como el de la figura siguiente donde se representa junto con los ejes de Simetría con deslizamiento.
 - pasos a seguir para crear un pgg:
 - se crea un rectángulo (Región Unidad), se crea una figura dentro del paralelogramo, que es la Región Mínima (1/4 de rectángulo) y los ejes de Simetría. Véanse Ilustración 55.
 - se crea los centros posibles de giro, que son los siguientes: en el centro del polígono, en los vértices del polígono o en el centro de las caras del polígono. Se hace el giro: se pulsa la Región Mínima y se elige un centro de giro Véase Ilustración 56.
 - Creo dos vectores de traslación paralelos al polígono paralelogramo y se hace las traslaciones.
 - Solución en el interfaz del programa GeoGebra. Véase Ilustración 57.

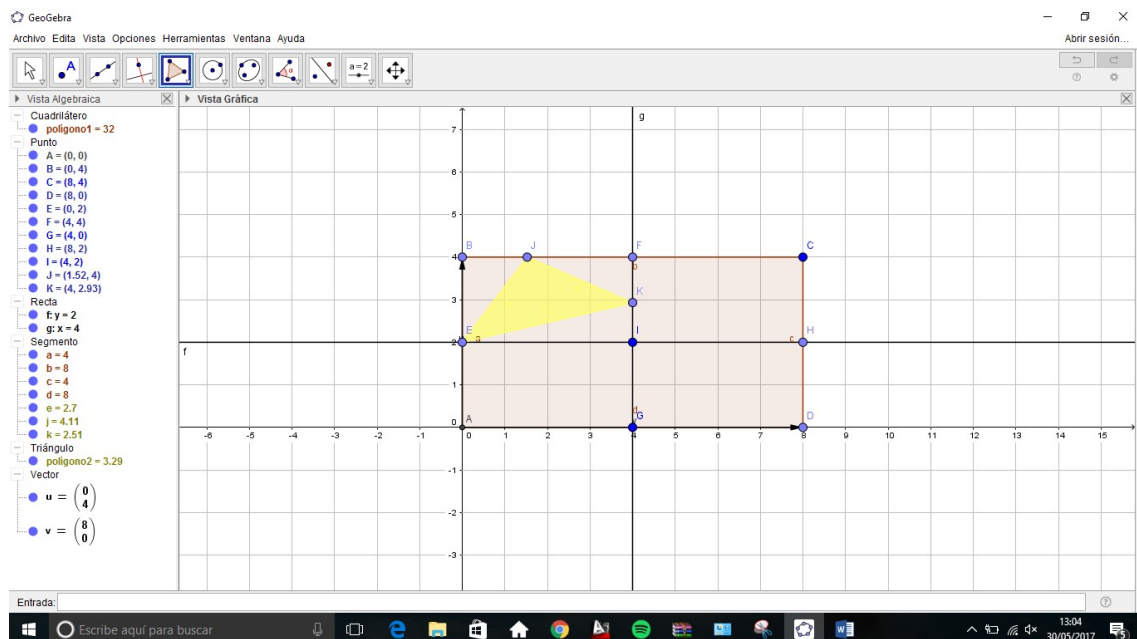


Ilustración 55. Región Unidad (rectángulo), Región Mínima (1/4 rectángulo). (La autora, 2017)

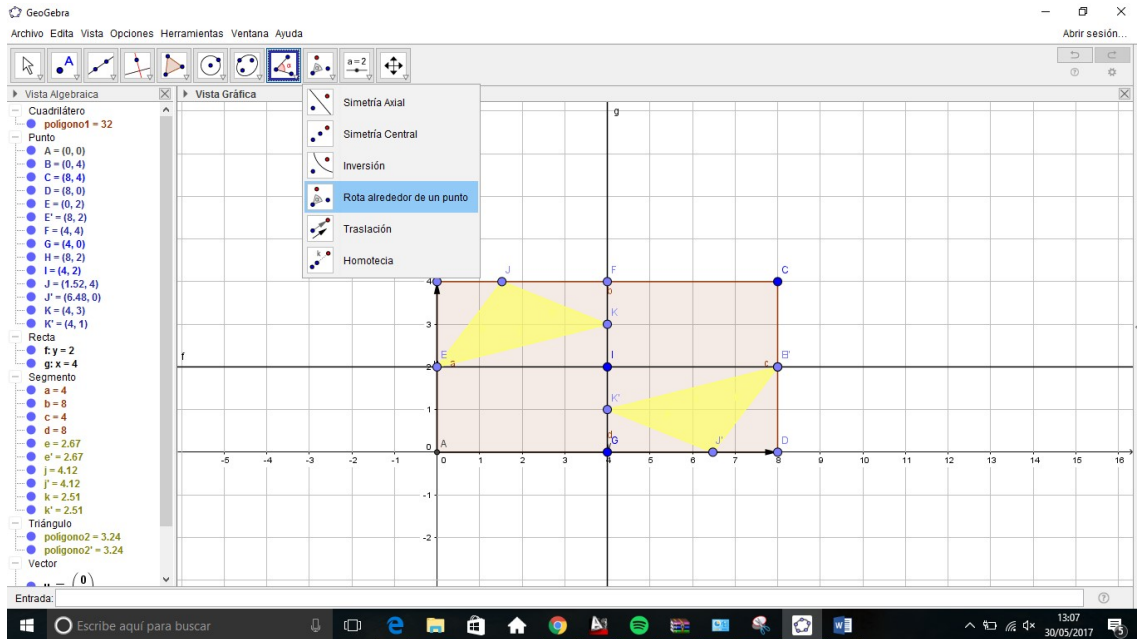


Ilustración 56. Rotación en el centro de la Región Unidad. (La autora, 2017)

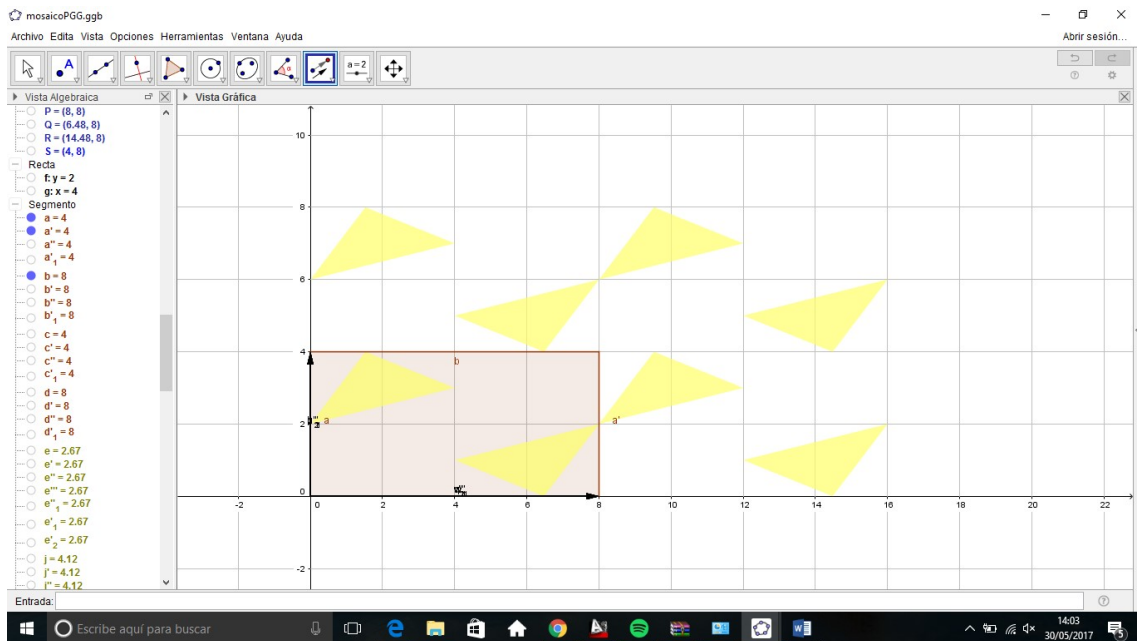


Ilustración 57. Mosaico pgg. (La autora, 2017)

- **pmg**: Este grupo cristalográfico contiene giros de orden dos y no hay giros de orden mayor. Hay ejes de Simetría, pero son todos paralelos entre sí y ejes de simetría con deslizamiento, también paralelos entre sí y perpendiculares a los anteriores. Los centros de giro no están en los ejes de simetría, pero sí sobre ejes de deslizamiento, perpendiculares a los de simetría. En este caso el paralelogramo fundamental ha de ser un rectángulo. (Rodríguez, 2009-2010)
 - pasos a seguir para crear un pmg:
 - Se crea un rectángulo (Región Unidad), se crea una figura dentro del paralelogramo, que es la Región Mínima (1/4 de rectángulo) y los ejes de simetría. Se crea los centros posibles centros de giro, que son los siguientes: en el centro del polígono, en los vértices del polígono o en el centro de las caras del polígono, en este caso en la mitad de nuestra Región Unidad se crea ejes de simetría y se les pone centro de giro. Véase Ilustración 58.
 - Se hace el giro: se pulsa la Región Mínima y se elige un centro de giro Véase Ilustración 59.
 - Se hace una Simetría a la otra mitad que nos queda libre del rectángulo Véase Ilustración 60.
 - Creo dos vectores de traslación paralelos al polígono paralelogramo y se hace las traslaciones.
 - Solución en el interfaz del programa GeoGebra. Véanse Ilustración 61.

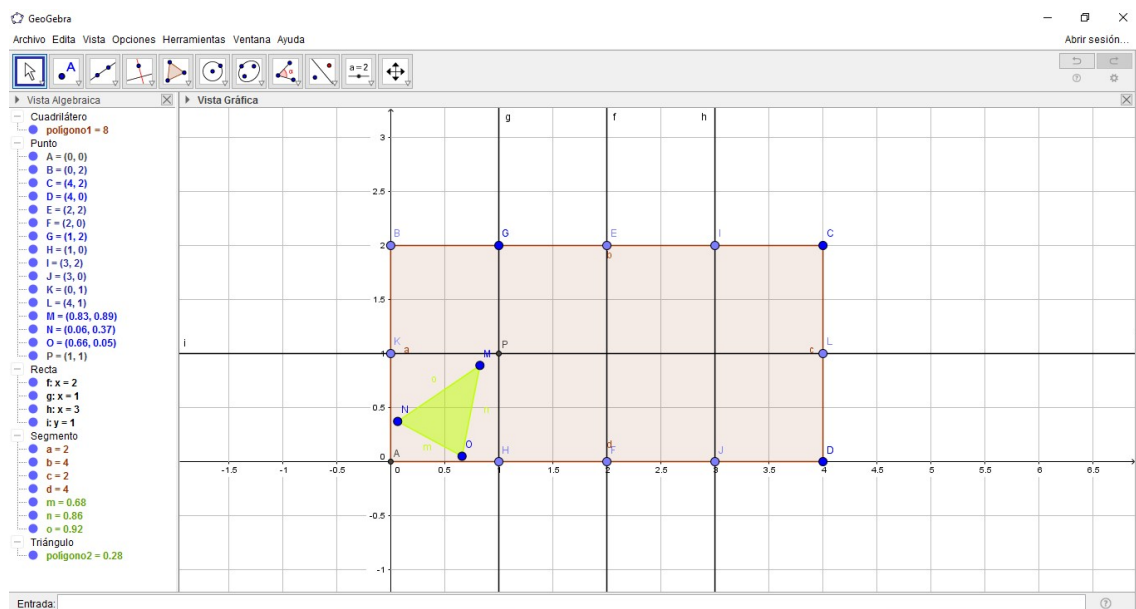


Ilustración 58. Región Unidad, Región Mínima, Ejes de Simetría y Centro de rotación. (La autora, 2017)

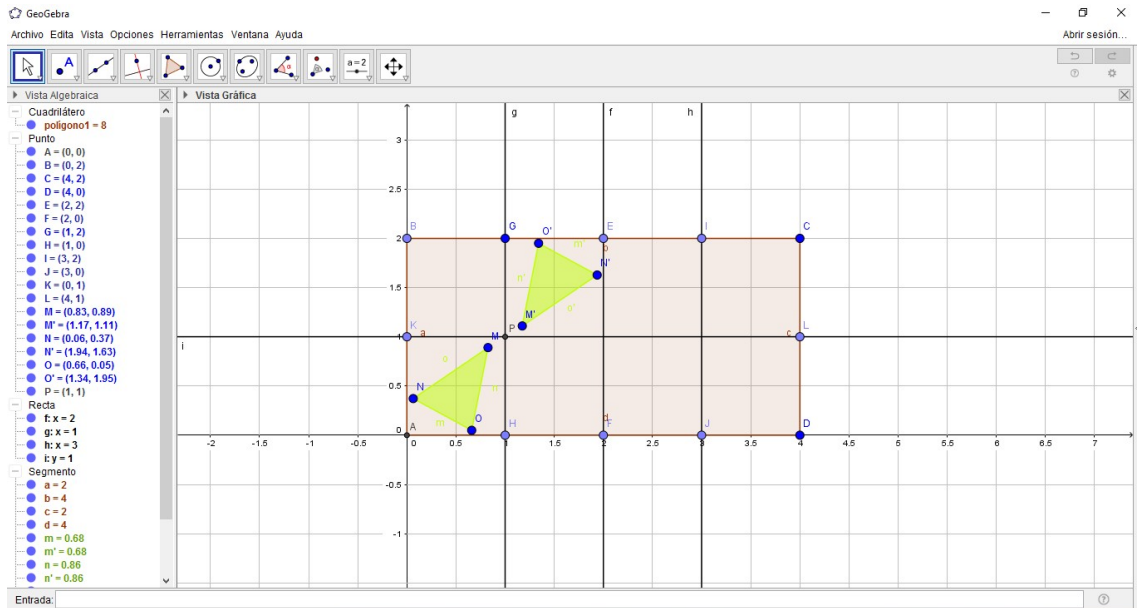


Ilustración 59. Rotación de Región Mínima (1/8 de la Región Unidad). (La autora, 2017)

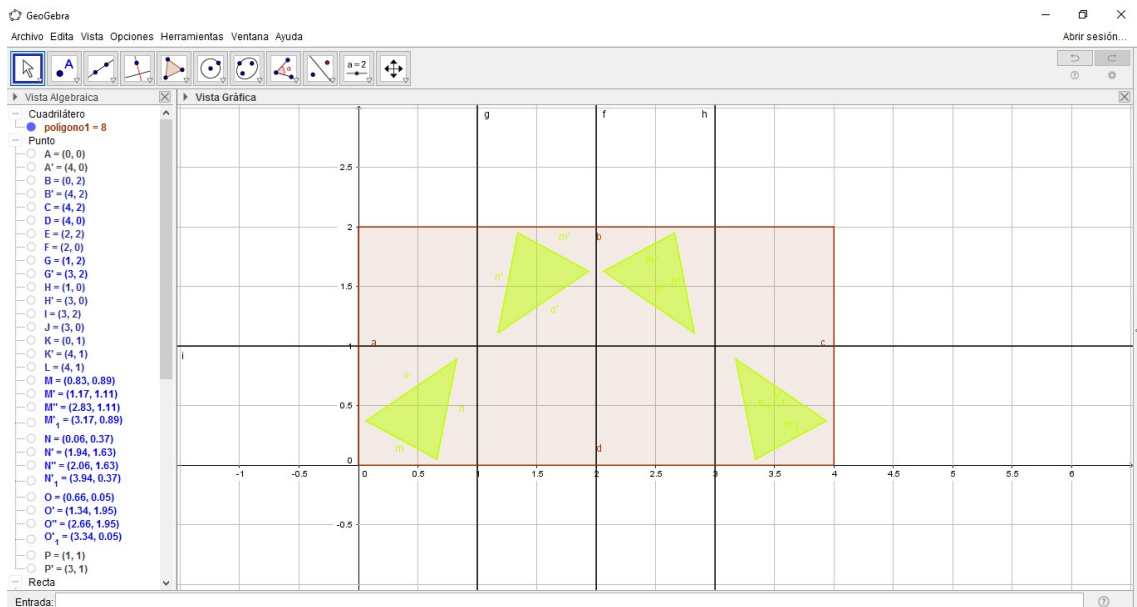


Ilustración 60. Simetría vertical. (La autora, 2017)

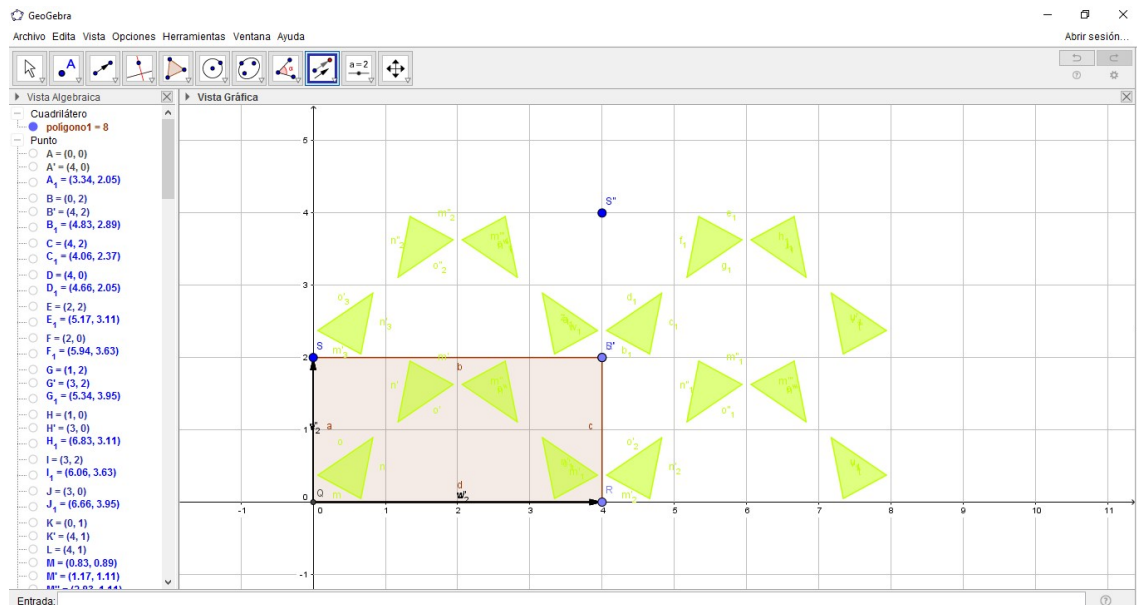


Ilustración 61. Mosaico pmm. (La autora, 2017)

- **cmm**: Este grupo contiene ejes de Simetría que son perpendiculares entre sí y también giros de orden dos. Los centros de giro que lo generan no están sobre los ejes de Simetría, sino sobre ejes de deslizamiento, que también existen (paralelos a los de Simetría de ahí la "c" de su nombre). Hay también centros de giro (de orden 2) sobre los ejes de Simetría. El paralelogramo fundamental en este caso es un rombo. Se observan que por los centros de orden dos que están en los vértices del rombo y el que está en el centro del rombo pasan ejes de simetría. Pero por los centros de orden dos que están en los puntos medios de los lados del rombo no pasan ningún eje de simetría. Por éstos últimos centros sí pasan ejes de simetría con deslizamiento. (Rodríguez, 2009-2010).

- pasos a seguir para crear un cmm:

- Se crea un rombo (Región Unidad), se crea una figura dentro del paralelogramo, que es la Región Mínima (1/4 de rombo) y los ejes de simetría. Se crea los centros posibles centros de giro, que son los siguientes: en el centro del polígono, en los vértices del polígono y en el centro de las caras del polígono. Véanse Ilustración 66.
- Se hace la rotación: se pulsa la Región Mínima, se elige el centro de rotación. Véase Ilustración 63.
- Se hace las simetrías: se pulsa la Región Mínima y se elige el eje de simetría horizontal y se repite con la vertical. Véase Ilustración 64.
- Creo dos vectores de traslación incidentes al rombo y se hace las traslaciones.
- Solución en el interfaz del programa GeoGebra. Véase Ilustración 69.

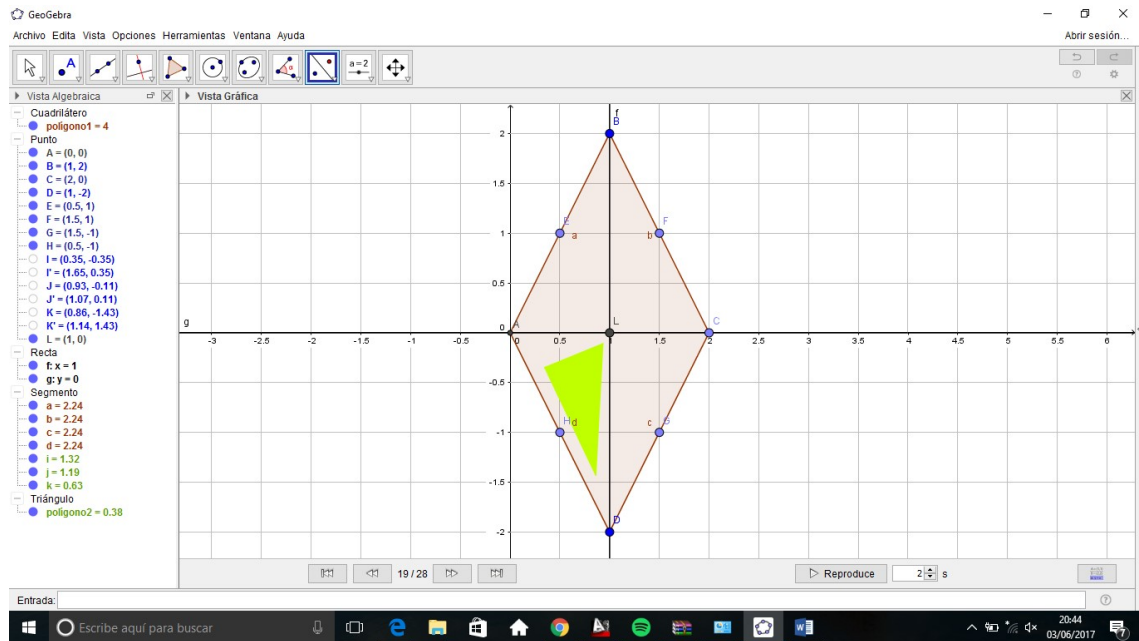


Ilustración 62. Región Unidad, Región Mínima, centro de rotaciones y ejes de Simetría. (La autora, 2017)

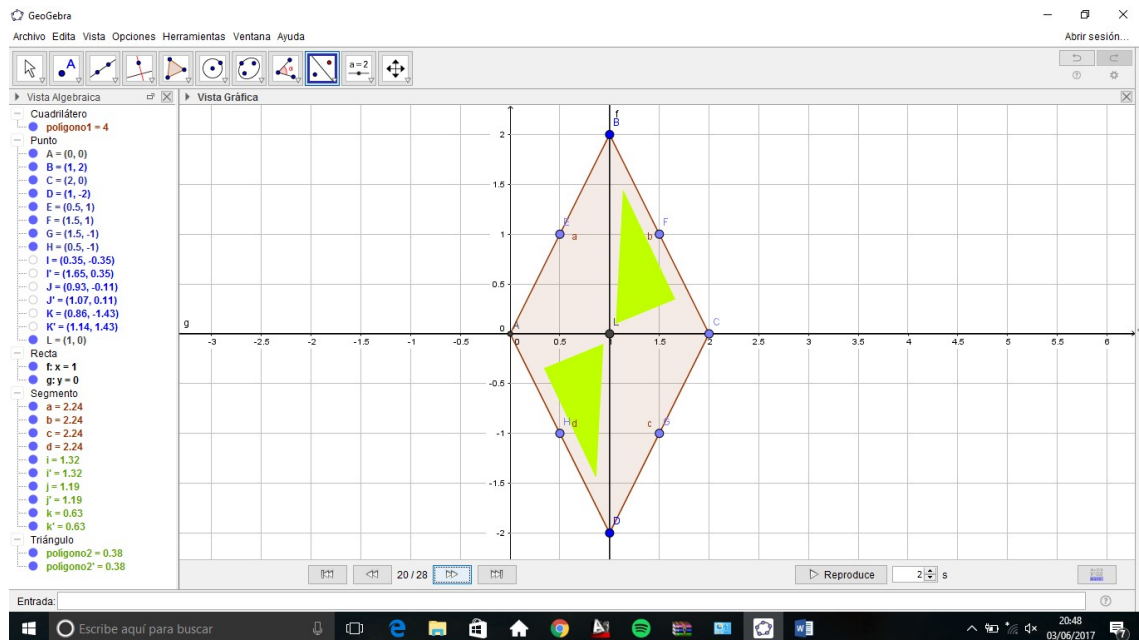


Ilustración 63. Rotación de 180°. (La autora, 2017)

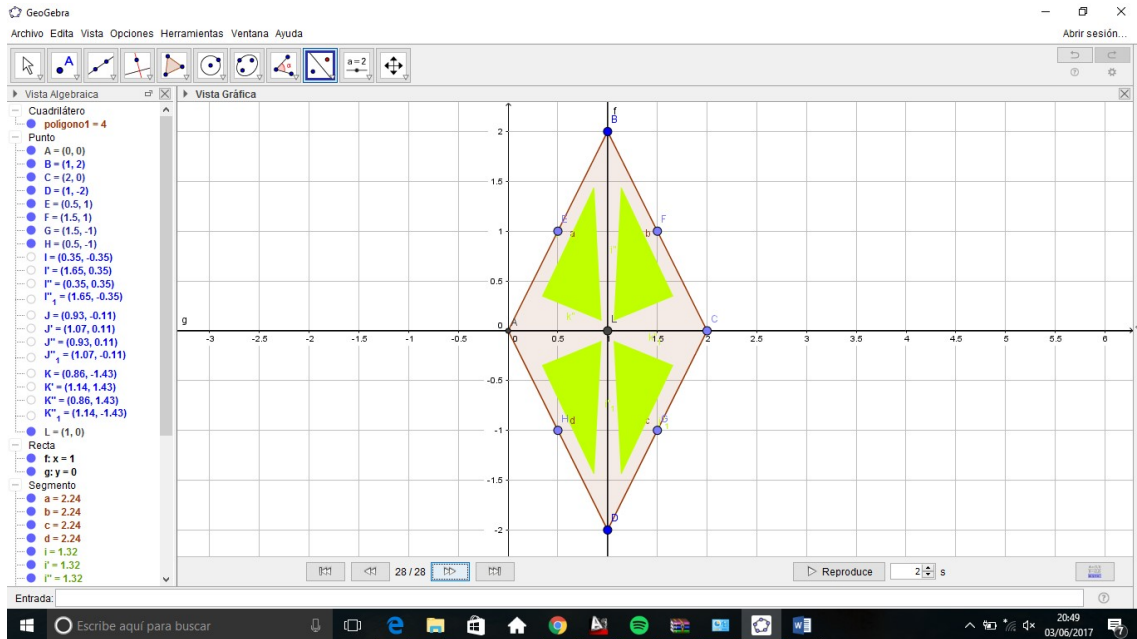


Ilustración 64. Reflexión horizontal y vertical. (La autora, 2017)

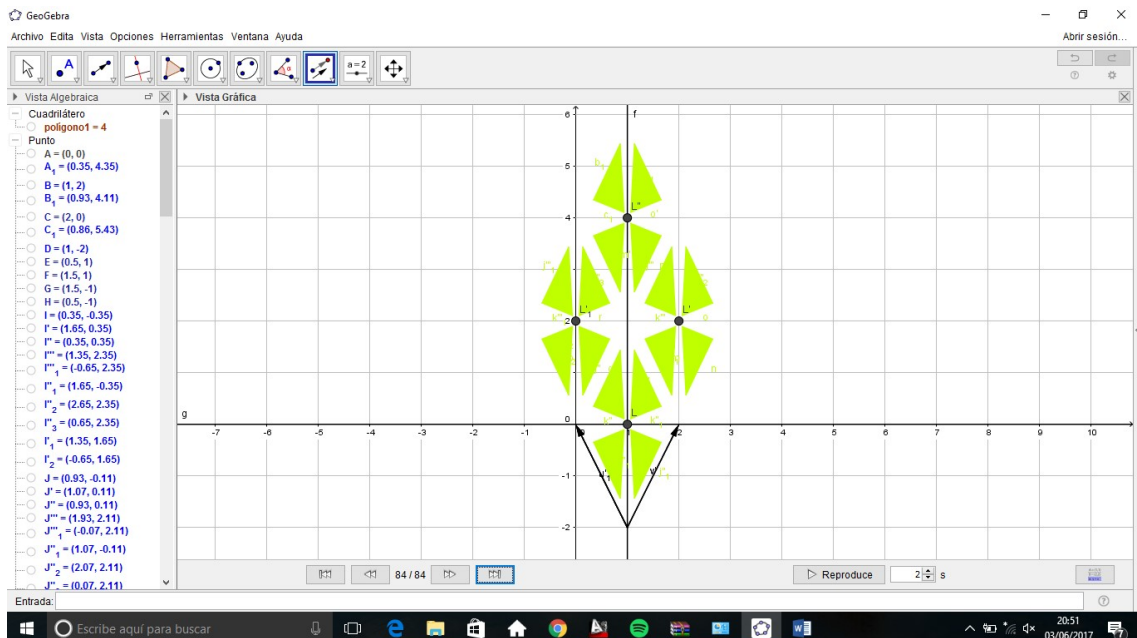


Ilustración 65. Mosaico cmm. (La autora, 2017)

- **pmm**: Este grupo cristalográfico cuenta con giros de orden dos y no de orden mayor. Contiene dos ejes de simetría perpendiculares entre sí. Todos los centros de orden dos pertenecen a algún eje de simetría. Estos centros de los giros de 180° están en las intersecciones de los ejes de simetría. No se encuentran en este grupo ejes de simetría con deslizamiento. El paralelogramo fundamental en este caso es un rectángulo. Se puede generar por dos traslaciones, una simetría y un giro de orden 2.
 - pasos a seguir para crear un pmm:
 - Se crea un rectángulo (Región Unidad), se crea una figura dentro del paralelogramo, que es la Región Mínima (1/4 de rectángulo) y los ejes de Simetría. Se crea los centros posibles centros de giro, que son los siguientes: en el centro del polígono, en los vértices del polígono o en el centro de las caras del polígono, en este caso en la mitad de nuestra Región Unidad se crea ejes de Simetría y se les pone centro de giro. Véanse Ilustración 66.
 - Se hace la Simetría: se pulsa la Región Mínima y se elige el eje de simetría. Véase Ilustración 67.
 - Se hace la rotación: se pulsa la Región Mínima, la Simetría y se elige el centro de rotación. Véase Ilustración 68.
 - Creo dos vectores de traslación paralelos al polígono rectángulo y se hace las traslaciones.
 - Solución en el interfaz del programa GeoGebra. Véanse Ilustración 69.

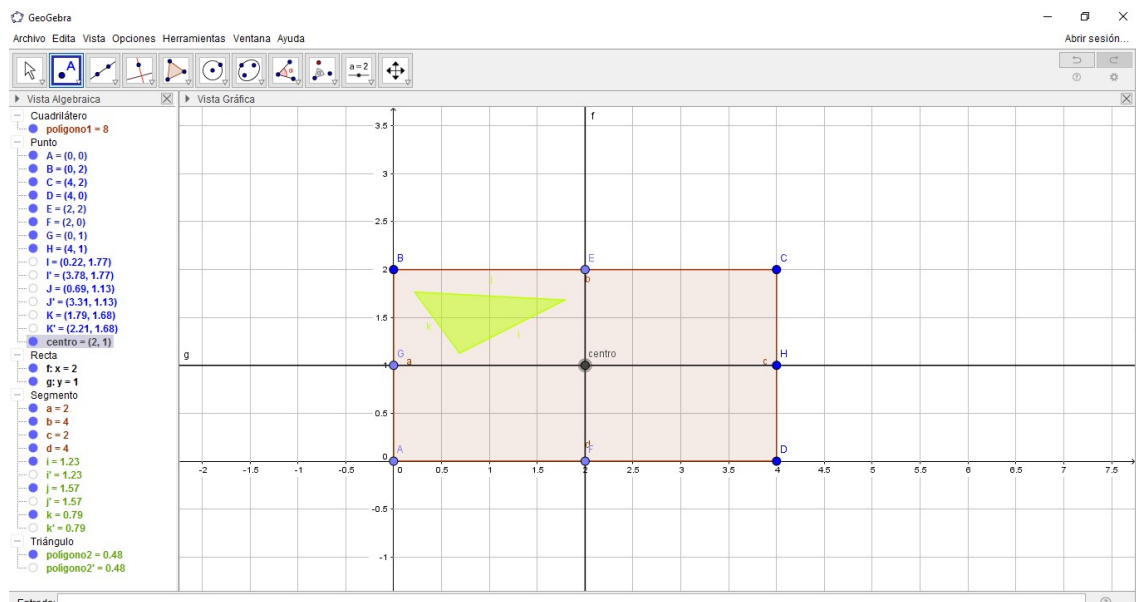


Ilustración 66. Región Unidad (rectángulo), Región Mínima (1/4 Región Unidad) y ejes de Simetría. (La autora, 2017)

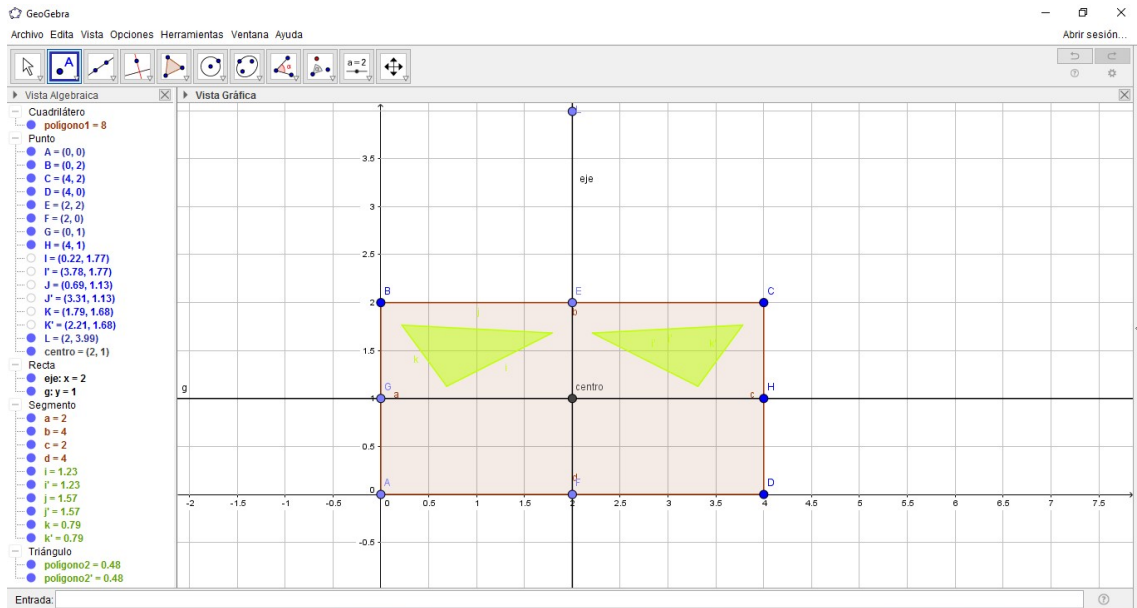


Ilustración 67. Simetría Región Mínima. (La autora, 2017)

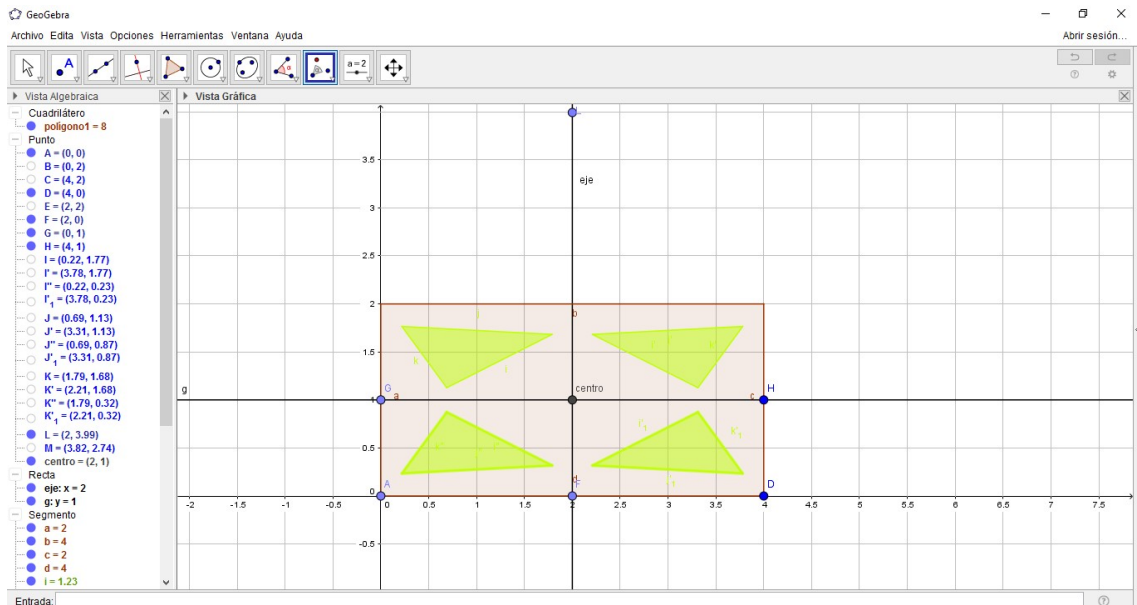


Ilustración 68. Rotación 180°. (La autora, 2017)

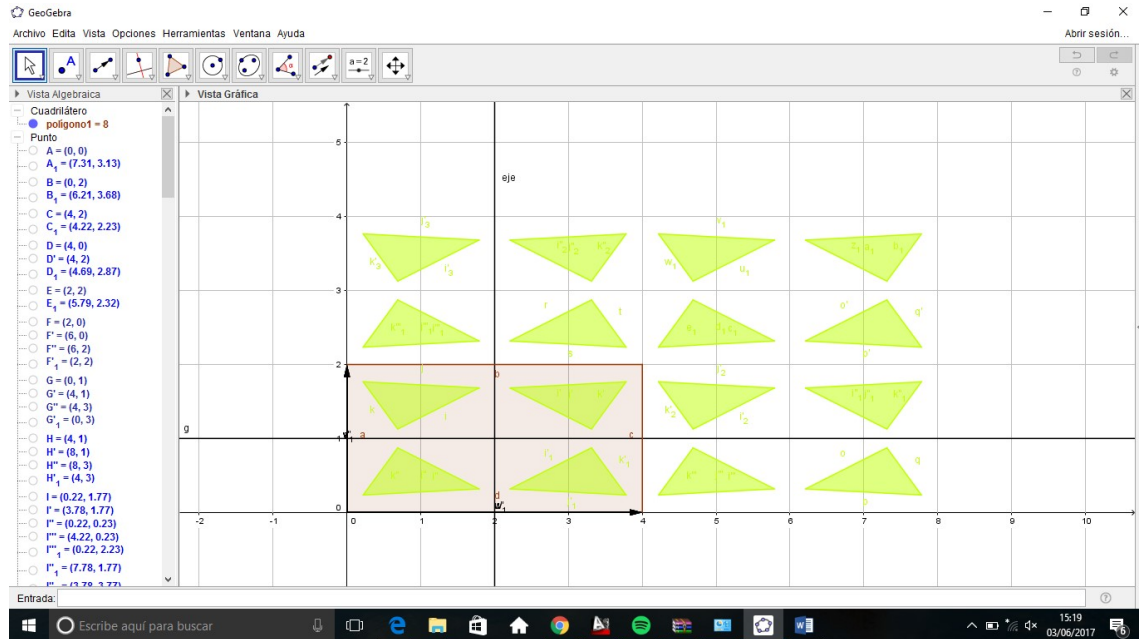


Ilustración 69. Mosaico pmm. (La autora, 2017)

Grupos con giros de orden 3: p3, p3m1 y p31m. El mayor número de giros de estos grupos es 3, todos sus giros de 120 grados. Junto a las traslaciones, pueden existir reflexiones y deslizamientos, cuyos ejes se cortan formando un ángulo de 60°.

- **p3:** Este es el grupo cristalográfico más simple con orden máximo de giro de orden tres. Esto implica movimientos de rotación de 120°, no aparecen ejes de simetrías ni ejes de simetrías con deslizamiento. El paralelogramo fundamental es un rombo formado por dos triángulos equiláteros. Está generado por dos traslaciones y un giro de orden 2.
 - pasos a seguir para crear un p3:
 - Se crea un rombo creado por dos triángulos equiláteros (Región Unidad), se crea una figura dentro del paralelogramo, que es la Región Mínima (1/3 del rombo). Se crea los centros de rotación posibles, que son los siguientes: en el centro del polígono, en los vértices del polígono o en el centro de las caras del polígono, en este caso situados en los vértices del rombo y en los centros de los triángulos. Véanse Ilustración 70.
 - Se hace la rotación: se pulsa la Región Mínima y Región Unidad, se elige el centro de rotación. Véase Ilustración 71.
 - Creo dos vectores por dos lados incidentes del rombo y se hace las traslaciones.
 - Solución en el interfaz del programa GeoGebra. Véanse Ilustración 72.

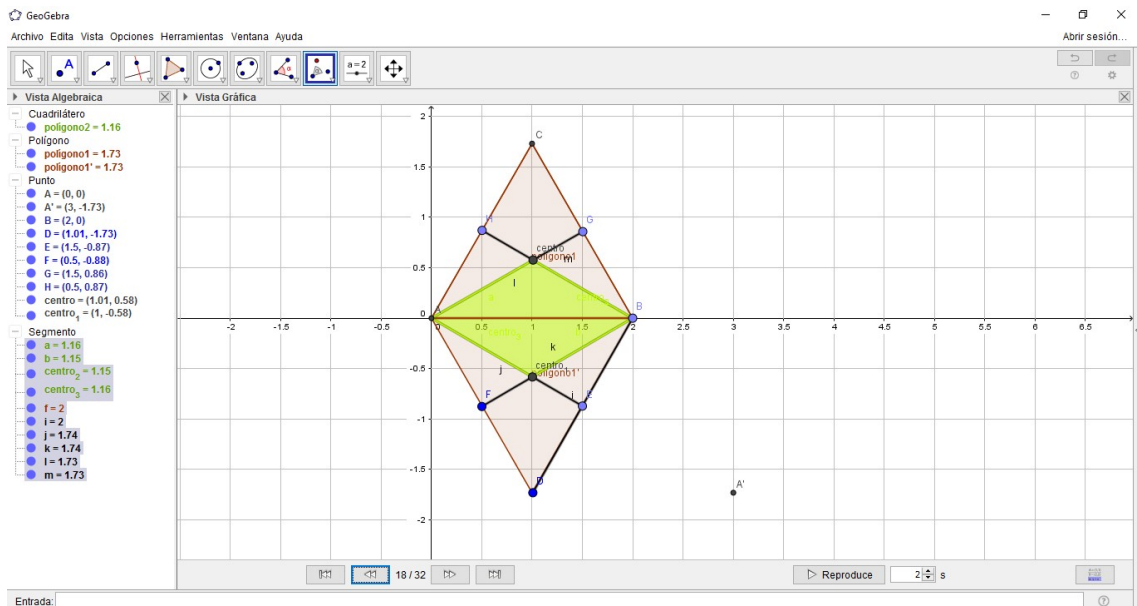


Ilustración 70. Región Unidad, centros de Rotaciones y Región Mínima (1/3 parte de la Región Unidad). (La autora, 2017)

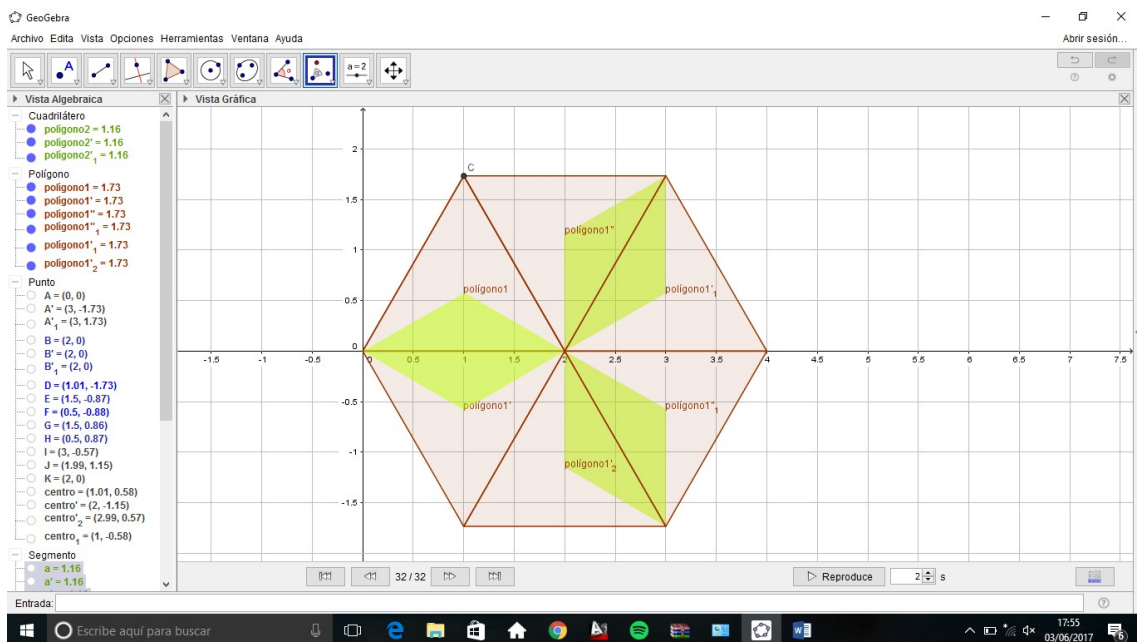


Ilustración 71. Rotaciones de la Región Unidad y mínima. (La autora, 2017)

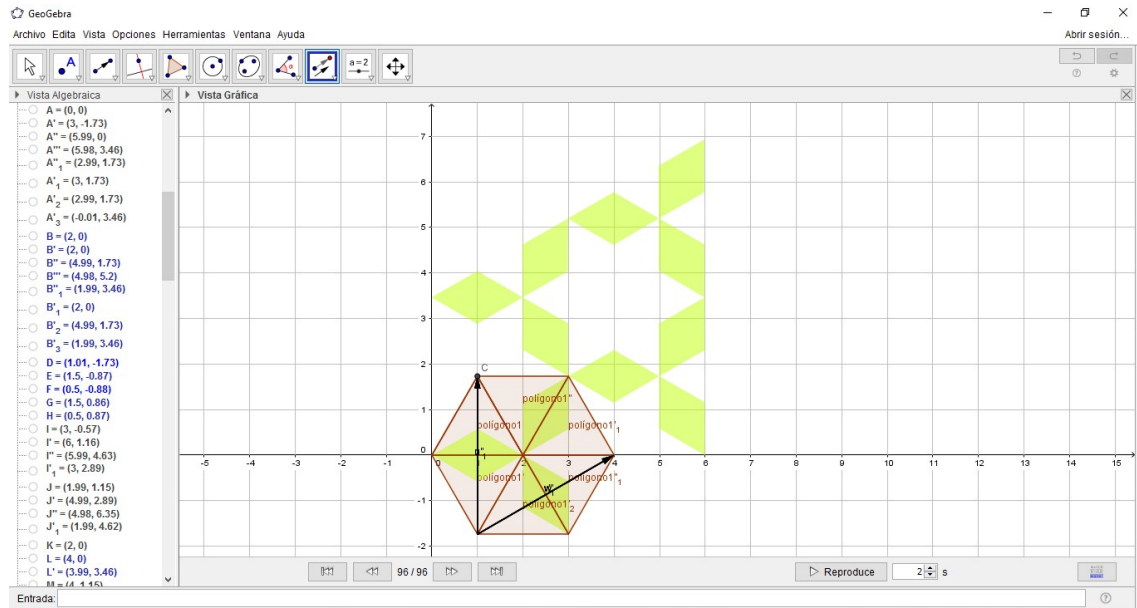


Ilustración 72. Mosaico p3. (La autora, 2017)

- **p3m1:** Este Grupo de Simetría está determinado por las siguientes condiciones:

El orden máximo de los giros es 3 (giros de 120°).

Contiene simetrías axiales, de tal forma que todos los centros de rotación están en algún eje de simetría (en la intersección de los 3 ejes de Simetría).

También existen 3 ejes de deslizamiento, paralelos a los de simetría e intercalados por el punto medio a ellos.

Está generado por dos traslaciones, una simetría y un giro de orden 3.

- pasos a seguir para crear un p3m1:

- Se crea un rombo creado por dos triángulos equiláteros (Región Unidad), se crea una figura dentro del paralelogramo, que es la Región Mínima (1/6 del rombo). Se crea los centros de rotación posibles que son los siguientes: en el centro del polígono, en los vértices del polígono o en el centro de las caras del polígono. Véanse Ilustración 73.
- Se hace la reflexión: se pulsa la Región Mínima, se elige la recta de simetría. Véase Ilustración 73.
- Se hace la rotación: se pulsa la Región Unidad y se elige un centro de giro.
- Creo dos vectores por dos lados incidentes del rombo y se hace las traslaciones. Véase Ilustración 74
- Solución en el interfaz del programa GeoGebra. Véanse Ilustración 75.

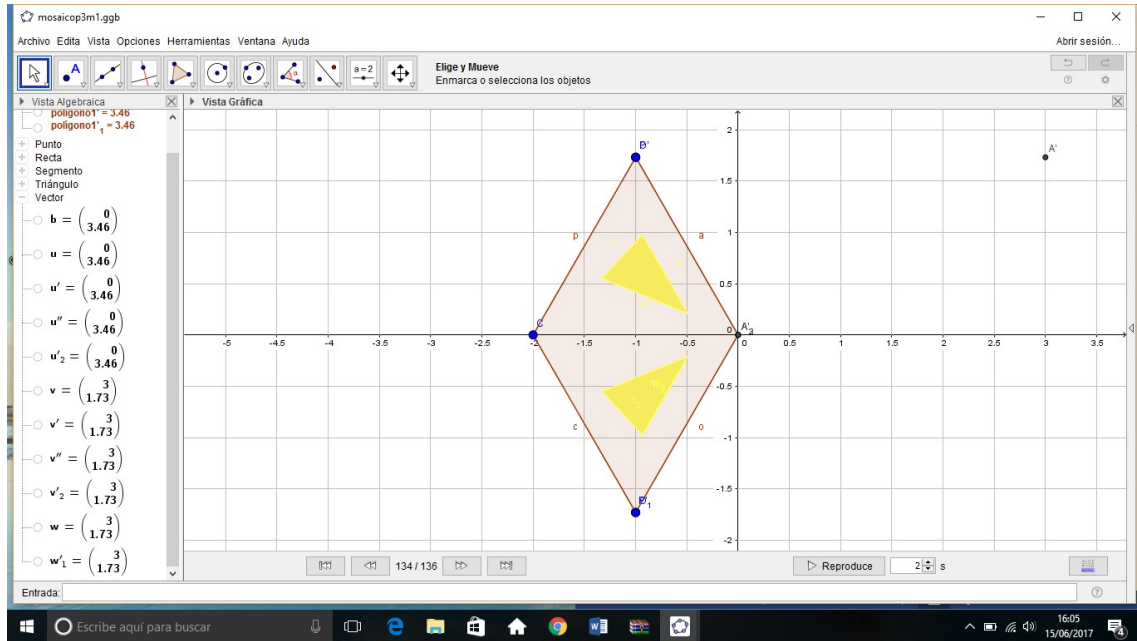


Ilustración 73. Región Unidad, Región Mínima (1/6 del rombo) y centros de rotaciones. (La autora, 2017)

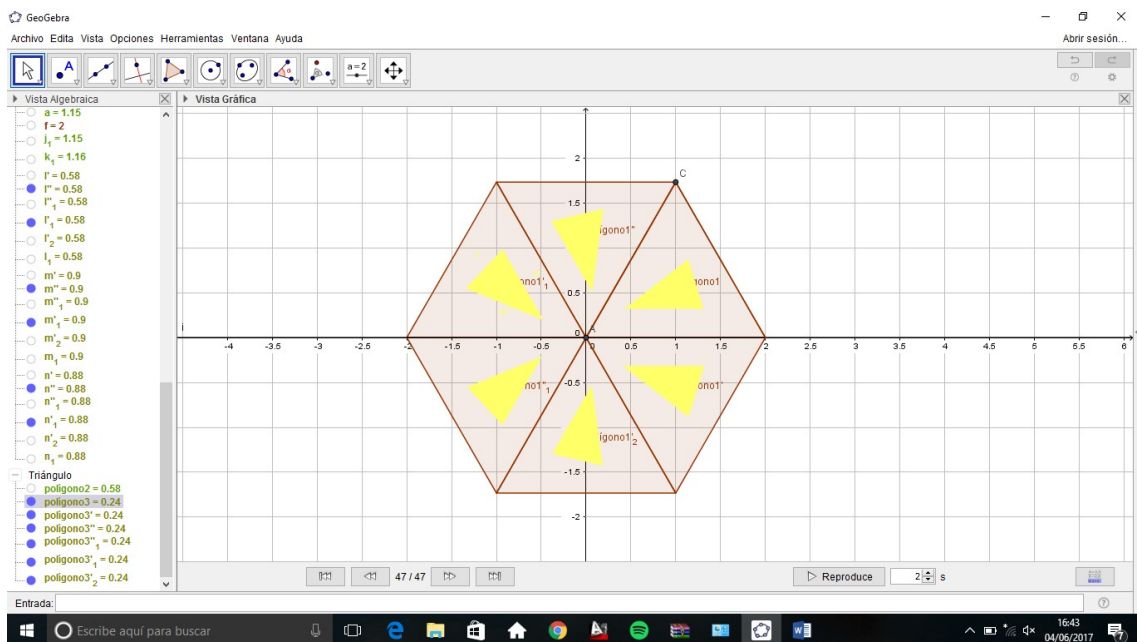


Ilustración 74. Reflexión Región Mínima y Rotación Región Unidad 120°. (La autora, 2017)

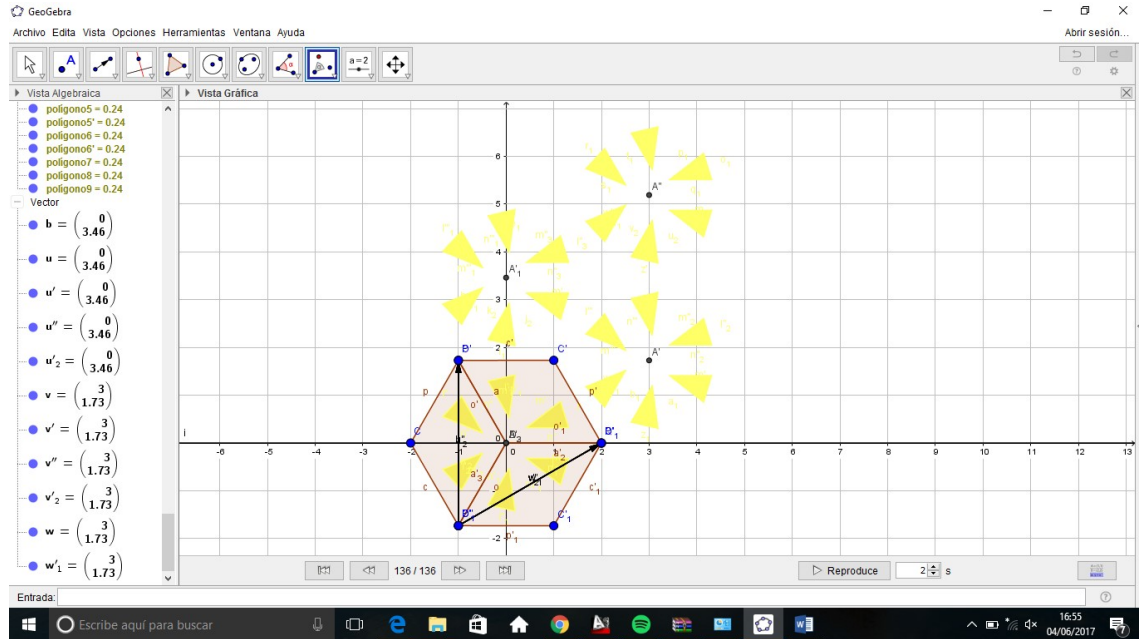


Ilustración 75. Mosaico p3m1. (La autora, 2017)

- **p31m**: Este Grupo de Simetría está determinado por las siguientes condiciones:
 - El orden máximo de los giros es 3 (giros de 120°).
 - Contiene simetrías axiales (cuyos ejes forman entre sí un ángulo de 60°)
 - Algunos de los centros de giro están sobre ejes de simetría, y otros no.
 - Contiene simetría con deslizamiento. Los ejes de deslizamiento pasan por los puntos medios entre dos ejes de simetría paralelos y tampoco pasan por los centros de giro. Estos ejes de deslizamiento van en tres direcciones como lo hacen los ejes de Simetría. Véase Ilustración 76.

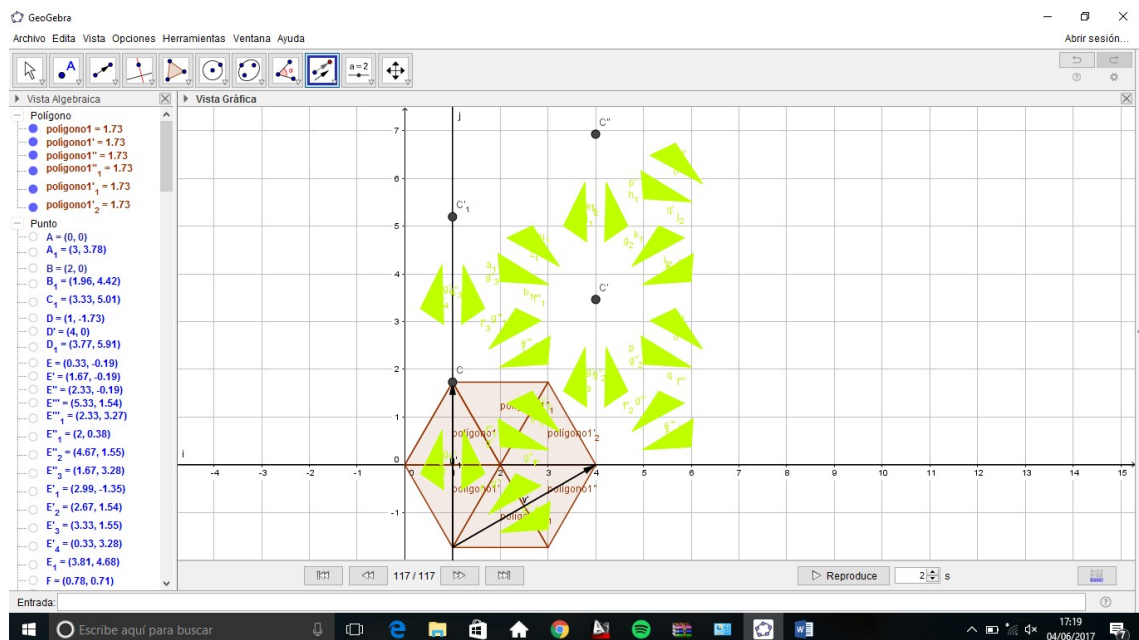


Ilustración 76. Mosaico p31m. (La autora, 2017)

Grupos con giros de orden 4: p4, p4g y p4m. El mayor número de giros de estos grupos son 90 grados. También existen giros de orden 2, con ángulo de 180 grados. No puede haber giros de orden 3 ni 6. Juntos con las traslaciones, estos grupos pueden tener reflexiones y deslizamientos cuyos ejes sean paralelos, perpendiculares o se corten formando 45°.

- **p4:** Es el grupo cristalográfico con giros de orden cuatro (giros de 90°) más sencillo ya que no contiene ni simetrías, ni simetrías con deslizamiento.

○ Pasos a seguir para crear un p4:

- Se crea un cuadrado (Región Unidad), se crea una Región Mínima (1/4 parte del cuadrado) y un punto de rotación. Véase Ilustración 77.
- Se hace la rotación de 90°, usando la Región Mínima y el punto de rotación.
- Se crea dos vectores y se hace las traslaciones.
- Solución en el interfaz del programa GeoGebra. Véase Ilustración 78.

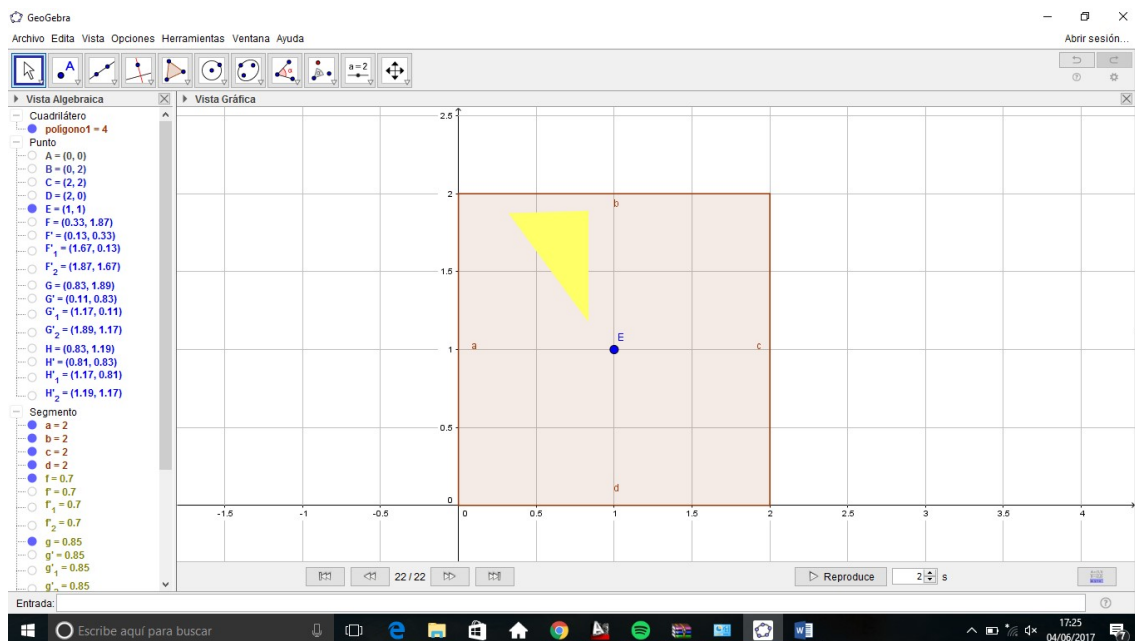


Ilustración 77.Región Unidad (cuadrado), Región Mínima (1/4 parte de Región Unidad). (La autora, 2017)

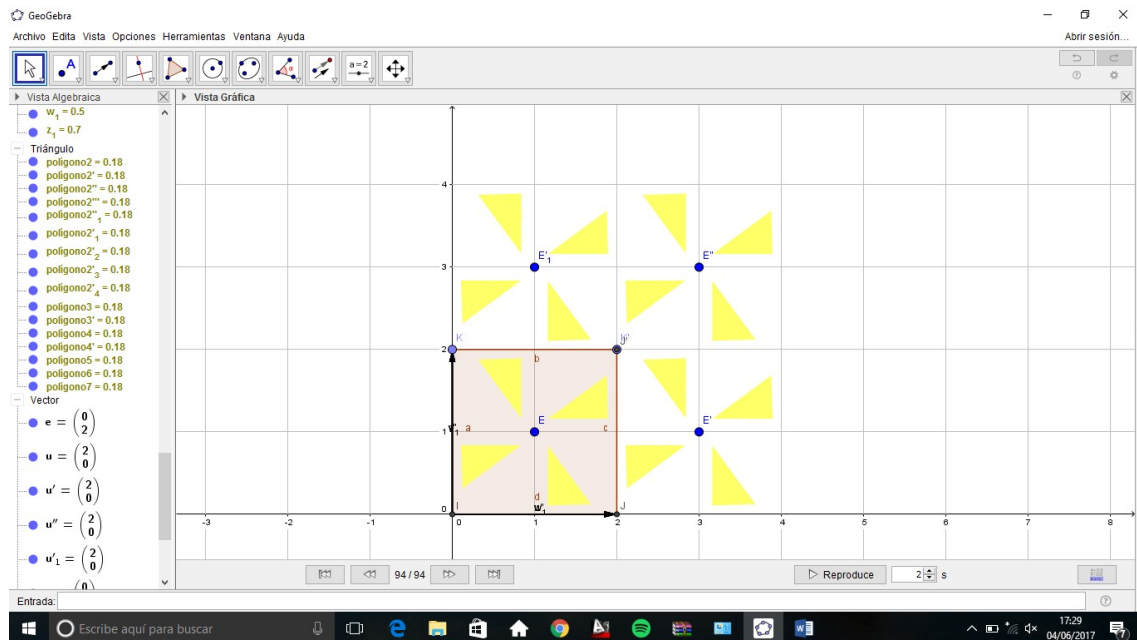


Ilustración 78. Rotaciones de 90°, Mosaico p4. (La autora, 2017)

- **p4g:** Este Grupo de Simetría está determinado por las siguientes características:

Este grupo contiene giros de orden cuatro (giros de 90°) y de orden dos (giros de 180°). Contiene ejes de simetría y ejes de simetría con deslizamiento. Los ejes de simetría son perpendiculares entre sí, así como los de deslizamiento. Los centros de giro de orden 4 están en la intersección de los ejes de deslizamiento y los centros de giro de orden 2 están en la intersección de los ejes de simetría. Está generado por dos traslaciones, una simetría y un giro de orden 4.

- Pasos a seguir para crear un p4g:

- Se crea un cuadrado, se crea una Región Mínima (triángulo), se hace giros de orden 4 y en cada Región Mínima se le hace una reflexión. Véase Ilustración 79.
- Se crea dos vectores y se hacen traslaciones.
- Solución en el interfaz del programa GeoGebra. Véase Ilustración 80.

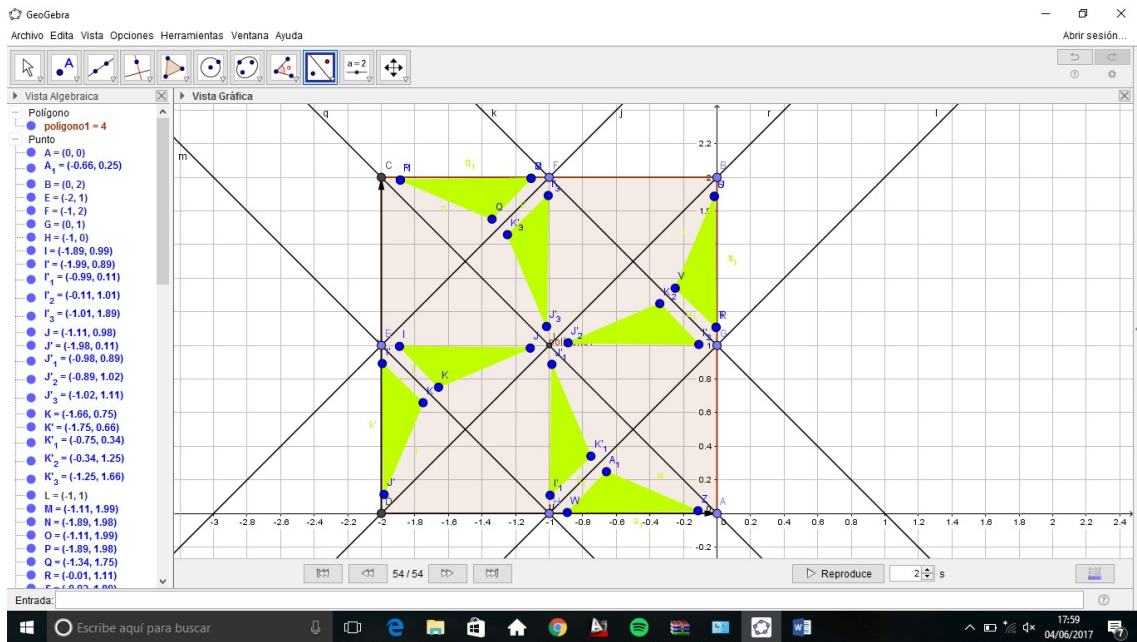


Ilustración 79. Región Unidad (cuadrado), Región Mínima (1/8 parte de Región Unidad), centro de rotación y ejes de reflexión. (La autora, 2017)

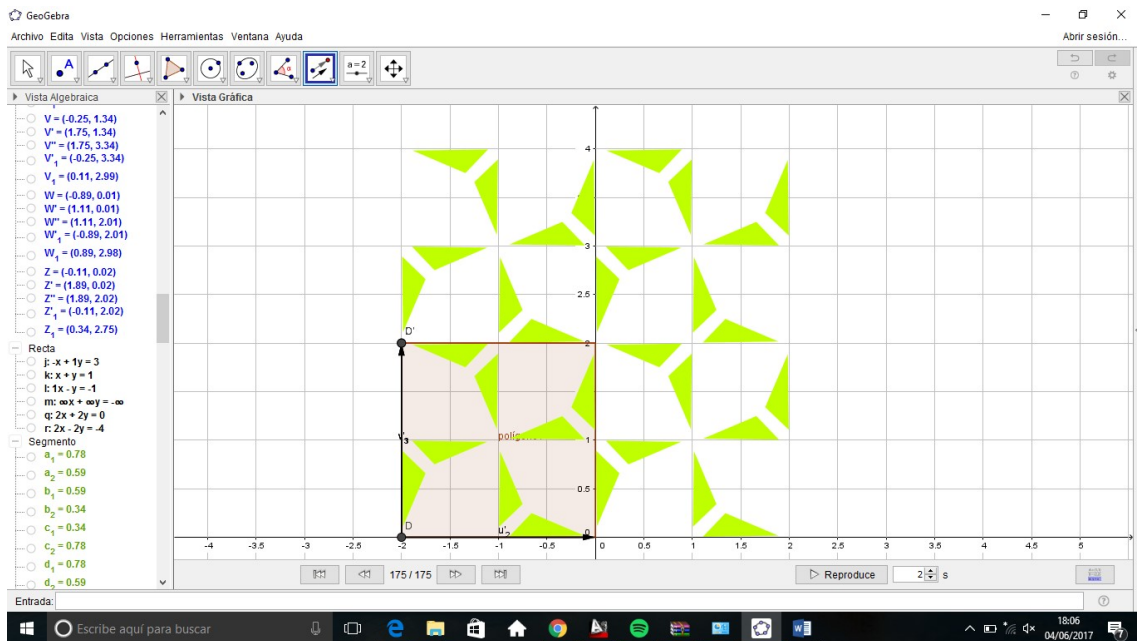


Ilustración 80. Mosaico p4g. (La autora, 2017)

- **p4m**: Este Grupo de Simetría está determinado por las siguientes características:

Este grupo contiene giros de orden cuatro (giros de 90°).

Tiene simetrías de tal forma que los ejes de Simetría forma un ángulo de 45° entre sí. Así cuatro ejes de simetría pasan por los centros de giro de orden cuatro.

Todos los centros de giro están sobre ejes de simetría.

No contiene ejes de simetría con deslizamiento.

- Pasos a seguir para crear un p4m:

- Se crea un cuadrado, se crea una Región Mínima (triángulo), en cada Región Mínima se le hace una reflexión y se hace rotaciones de orden 4 a cada dos Región Mínima con su reflexión. Véase Ilustración 81.
- Se crea dos vectores y se hacen traslaciones.
- Solución en el interfaz del programa GeoGebra. Véase Ilustración 82.

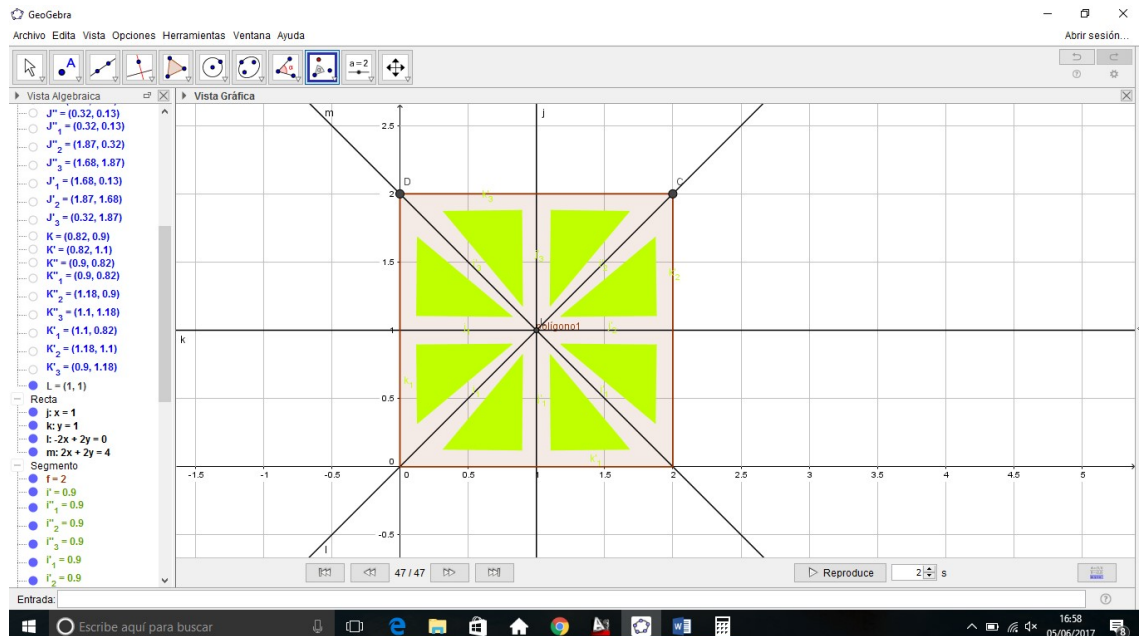


Ilustración 81.Región Unidad, Región Mínima, ejes de Simetría y centro de rotación. (La autora, 2017)

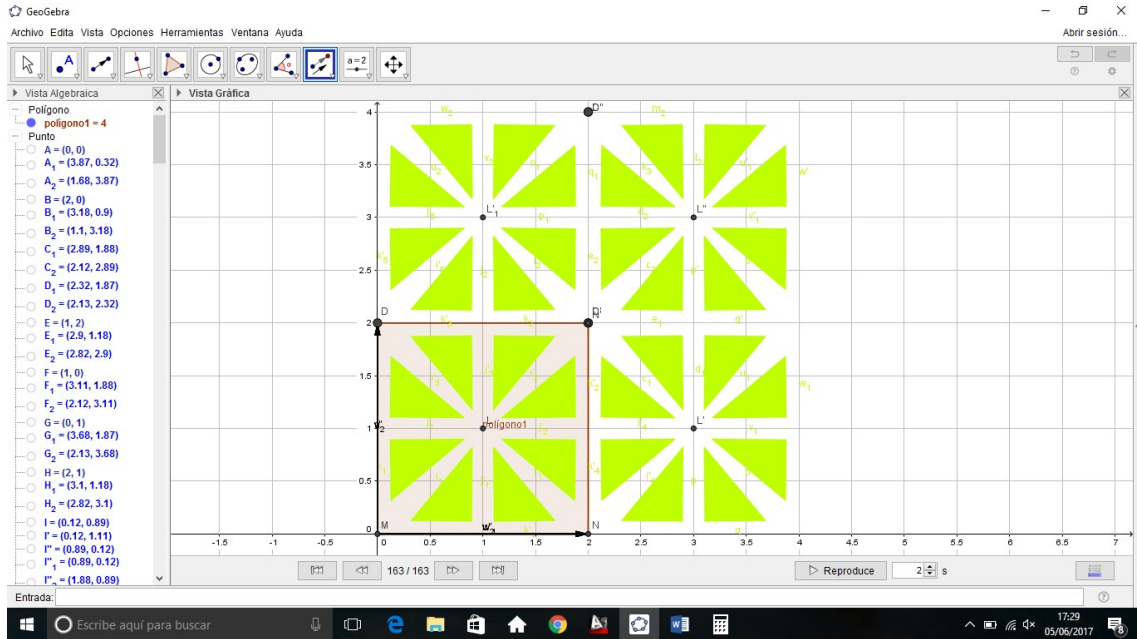


Ilustración 82. Mosaico p4m. (La autora, 2017)

Grupos con giros de orden 6: p6 y p6m. El mayor número de giros de estos grupos son de 60 grados. También existen giros de orden 3, con ángulo igual 120 grados, giros de orden 2, con ángulo de 180 grados y giros triviales, pero no puede haber giros de orden 4. Las reflexiones y deslizamientos pueden tener ejes paralelos, perpendiculares o formando ángulos de 30° y 60° .

- **P6:** Este grupo es el más sencillo con giros de orden seis. Contiene giros de 60° , también posee giros de 120° (orden 3) y de 180° (orden 2), pero no contiene Simetrías ni Simetrías con deslizamientos. El paralelogramo fundamental es un rombo formado por dos triángulos equiláteros y los centros de giro esta como en la figura. Está generado por dos traslaciones y un giro de orden.

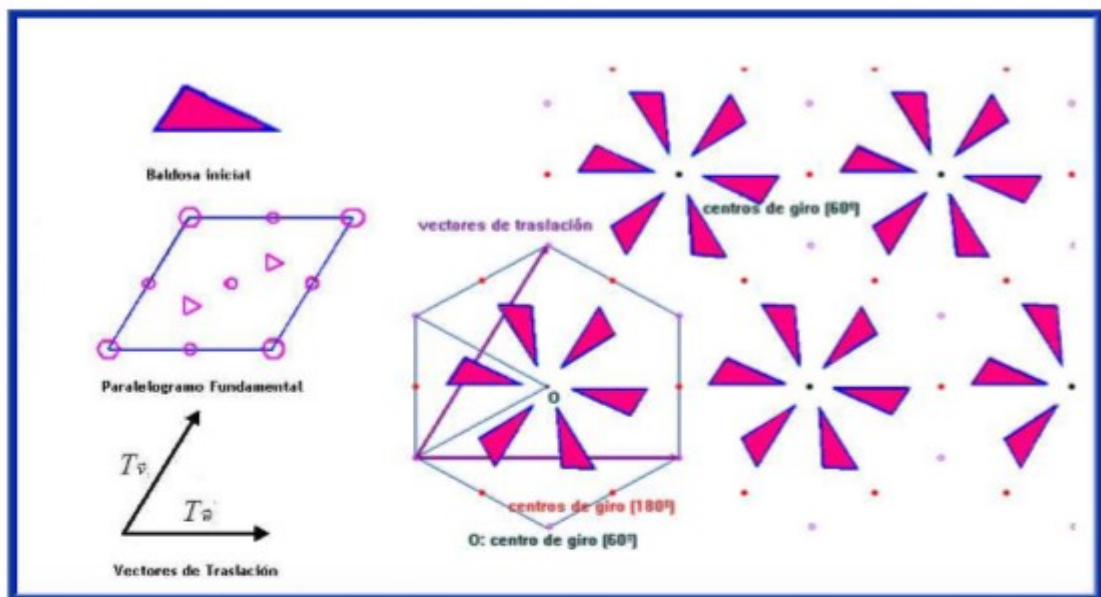


Figura 1. Región Unidad, Región Mínima, vector de traslación y mosaico p6. (Rodríguez, 2009-2010)

- **p6m**: Este grupo de Simetría está determinado por las siguientes características:

En este grupo aparecen giros de 60° (orden 6), de 120° (orden 3) y de 180° (orden 2). Contiene Simetrías. Los ejes de Simetría pasan por todos los centros de giro. En todos los centros de giro de orden 6 se cortan seis ejes de Simetría.

También hay deslizamientos en este grupo. Estos ejes de deslizamiento pasan por los puntos medios entre dos ejes de Simetría paralelos, es decir, pasan por los centros de las medias vueltas (centros de giro de 180°). Tales ejes son paralelos a seis direcciones como los ejes de Simetría.

Está generado por dos traslaciones, una Simetría y un giro de orden 6.

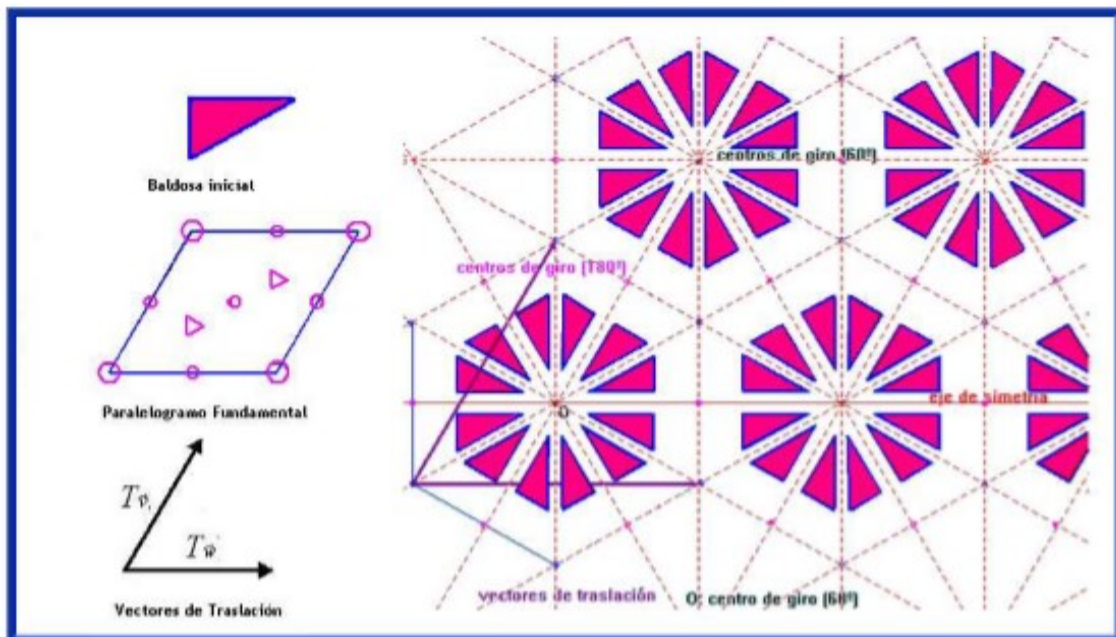


Figura 2. Región Unidad, Región Mínima, vector de traslación y mosaico p6m. (Rodríguez, 2009-2010)

Identificación del Grupo de Simetría de un mosaico. Lo primero que hay que hacer es buscar el módulo, para saber si es un mosaico periódico, con dos traslaciones de mínima longitud y distinta dirección. El mosaico deberá poder generarse a partir del módulo, mediante la familia de traslaciones obtenidas como composición de las dos traslaciones elegidas. Se hace las retículas anteriormente dibujadas: oblicua, rectangular, cuadrada, hexagonal.

A continuación se selecciona un módulo y las traslaciones determinadas. Manualmente hay un truco para saber si está bien el mosaico o no, y es copiar el módulo en un acetato, aplicarle los giros correspondientes y traslaciones y volver a poner encima del mosaico para saber si coincide. Pero hoy en día existen programas tecnológicos avanzados para ello, como el GeoGebra. Los pasos son subir una foto a GeoGebra, buscar el módulo del mosaico, dibujar todos sus puntos, y aplicarles sus giros, reflexiones y traslaciones.

Reflexiones:	No	Sí	No	Sí
Deslizamientos:	No	No	Sí	Sí
Sin giros	$p1$	pm	pg	cm
Mayor orden de giro: 2	$p2$	pmm	pgg	$pmg - cmm$
Mayor orden de giro: 3	$p3$			$p3m1 - p31m$
Mayor orden de giro: 4	$p4$			$p4m - p4g$
Mayor orden de giro: 6	$p6$			$p6m$

Ilustración 83. Resumen de los Grupos Planos de Simetría. (Gilsanz Mayor, 2010)

El cuadro de la Ilustración 83 resume cada isometría por grupo, así es más fácil de poder identificarlos. Los casos que se repiten se resuelven de la siguiente manera:

- En el grupo **cmm** hay reflexiones de ejes perpendiculares, mientras que en el grupo **pmg** todas las reflexiones son paralelas.
- En el grupo **p3m1** todos los centros de giro están situado en los ejes de reflexión, mientras que en el grupo **p31m** hay algunos centros de giro por los que no pasa ningún eje de reflexión.
- En el grupo **p4m** todos los centros de giro están situados en ejes de reflexión, mientras que en el grupo **p4g** hay algunos centros de giro por los que no pasa ningún eje de reflexión.

También hay estos algoritmos que te llevan justo al grupo que es, a partir de preguntas concretas y claras.

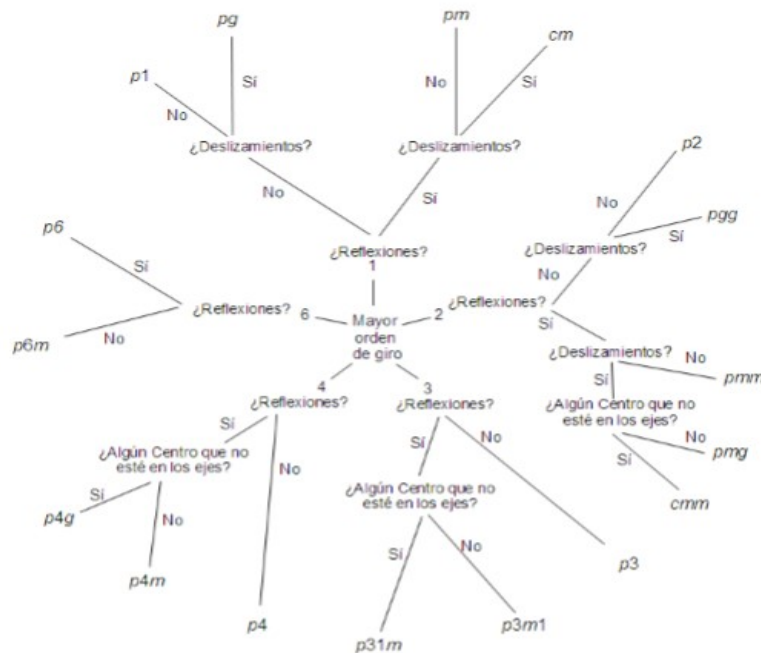


Ilustración 84. Algoritmo de identificación del Grupo de Simetría de un mosaico. (Gilsanz Mayor, 2010)

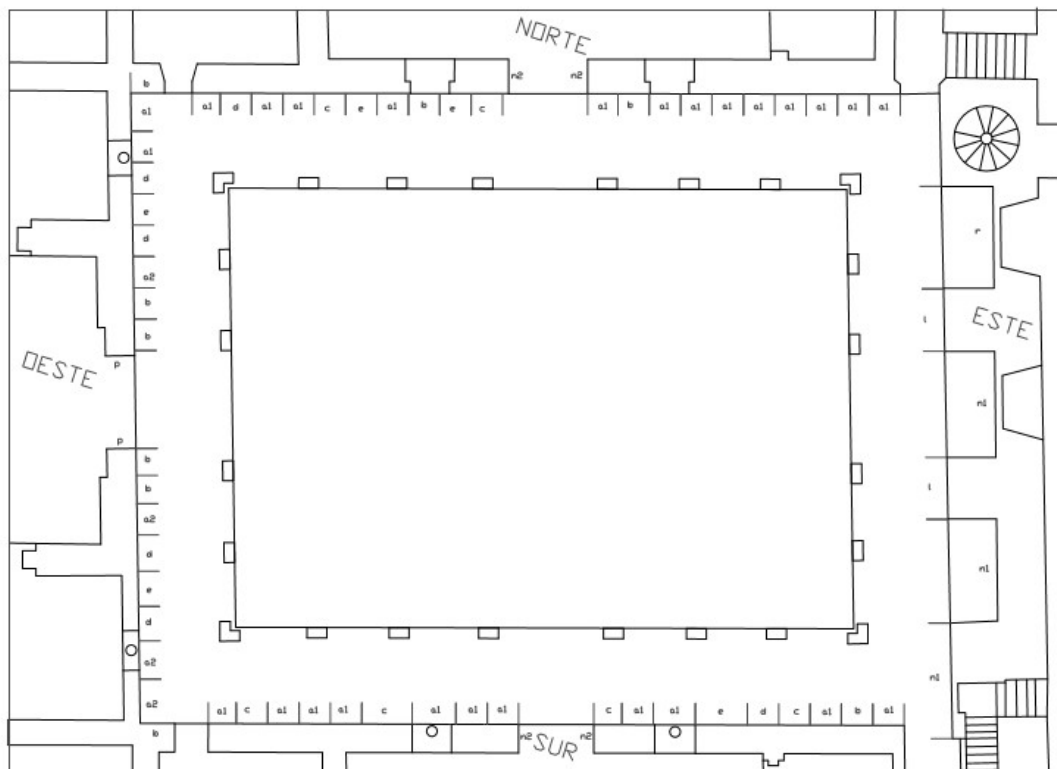
C. TECNICAS COMPUTACIONALES: GEOGEBRA

ESTUDIO DE CASOS

A continuación se clasificarán los elementos ornamentales del Patio de las Doncellas mediante los Grupos de Simetrías descritos. Para ello utilizaremos el Plano 1, Plano 2 y Plano 3. Donde queda recogido la situación de cada uno de los elementos.

1. ALICATADOS

A continuación se catalogan los diferentes alicatados que decoran el Patio de las Doncellas según la clasificación de los grupos cristalográficos planos, usándose la notación internacional. Para su ubicación en el patio se tomará la señalización dada por la Dra. María Isabel González Ramírez en (Ramírez, 1995), véase Plano 1 y para identificar el grupo se usará los algoritmos descritos anteriormente. Primeramente se estudian los paneles centrales de los alicatados y posteriormente las cenefas o frisos que enmarcan los mismos.



Plano 1. Patio de las Doncellas, con Referencias de paños de Alicatados. (La autora, 2017)

a) *Estudio de los paneles centrales*

Alicatado tipo L

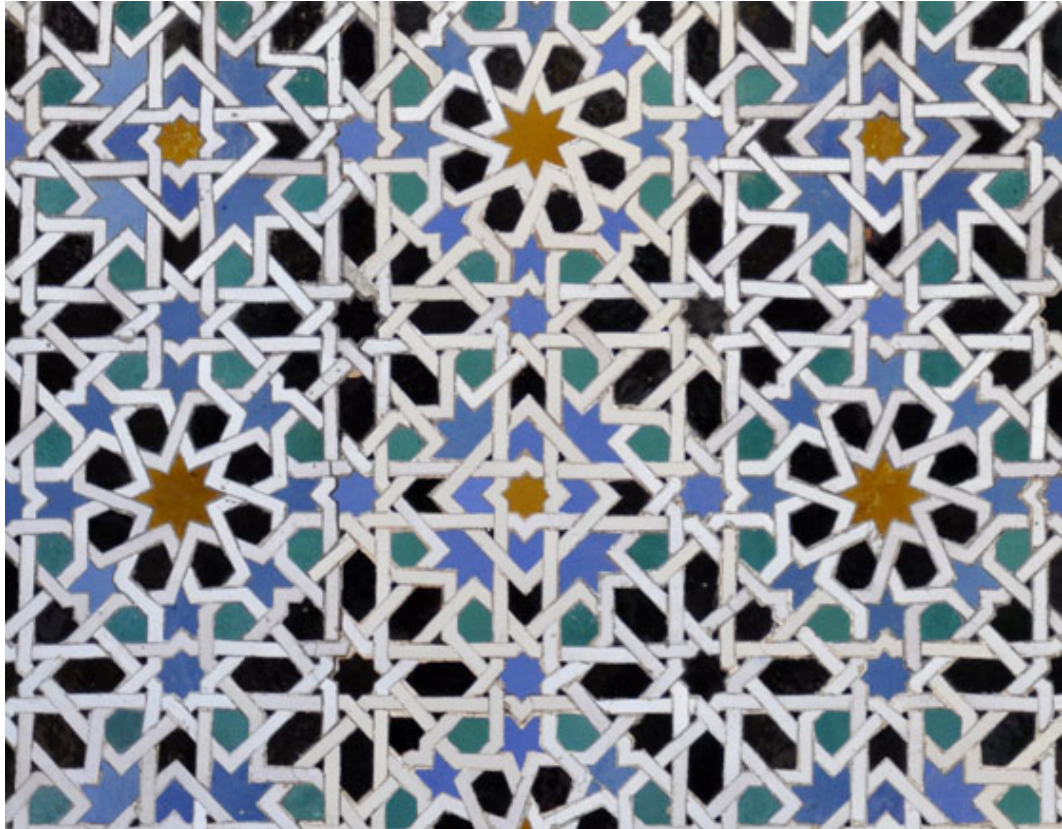


Foto 1. Panel tipo L. (La autora, 2017)

1. Ubicación: lado este del Patio de las Doncellas.
2. Presentan decoración geométrica lazo de ocho occidental, en el que se combina 3 estrellas diferentes dependiendo del lazo interior o exterior, su gama de colores es completa, el negro y el blanco es el más usado, combinando azul, verde rodeando las ruedas de lazo.
3. Grupo de Simetría plano:
 - a. ¿Presenta dos traslaciones no paralelas? Si
 - b. ¿Cuál es el mayor orden de giro? 4
 - c. ¿Presenta reflexiones? No

Según el algoritmo llegamos a la conclusión que este panel es un p4.

Su módulo unidad o “paralelogramo fundamental “es un **cuadrado**. Véase Ilustración 85.

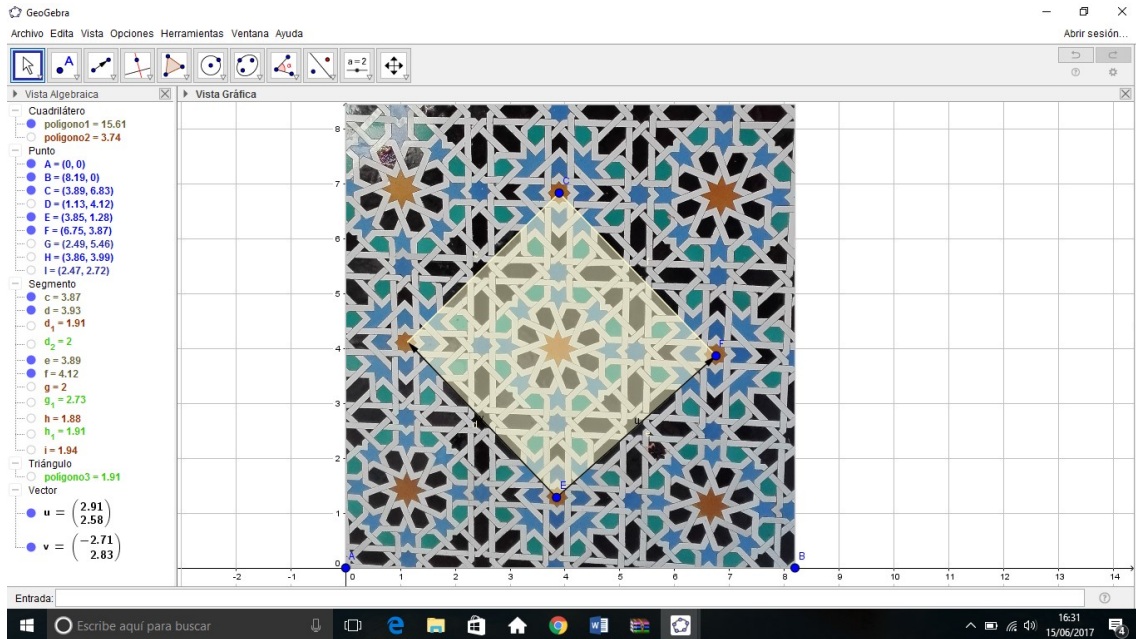


Ilustración 85. Región Unidad (cuadrado). (La autora, 2017)

Su “región generatriz” o Región Mínima también es un cuadrado (la cuarta parte del módulo unidad). Véase Ilustración 86.

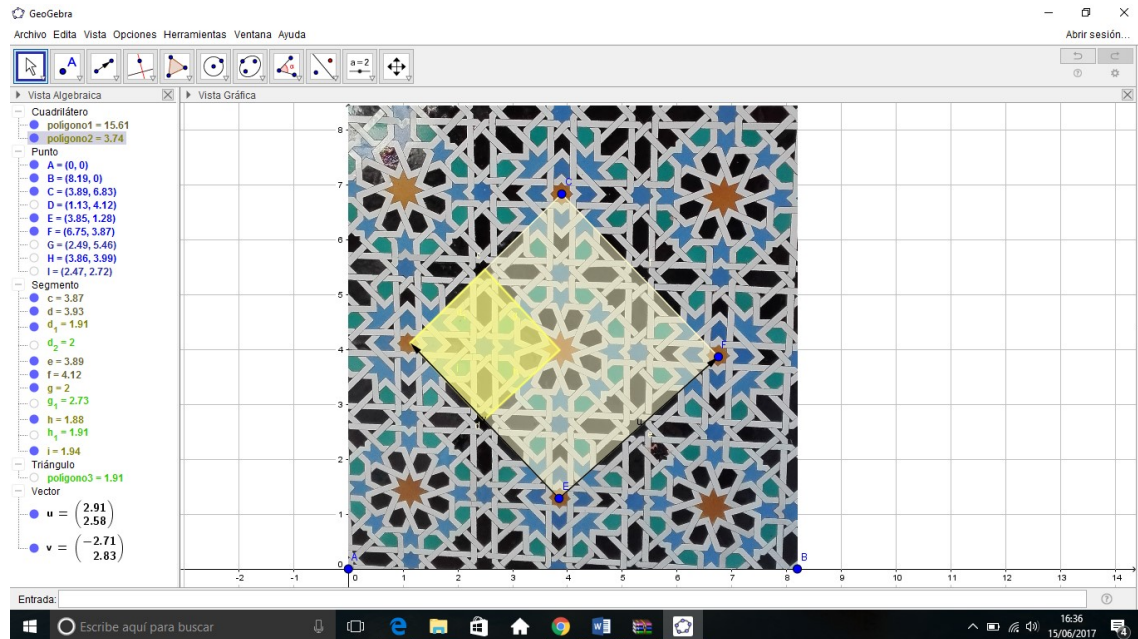


Ilustración 86.Región Mínima (1/4 parte de la Región Unidad). (La autora, 2017)

Si no tuviese lacería, obtendríamos un p4m, su Región Mínima tendría una simetría.

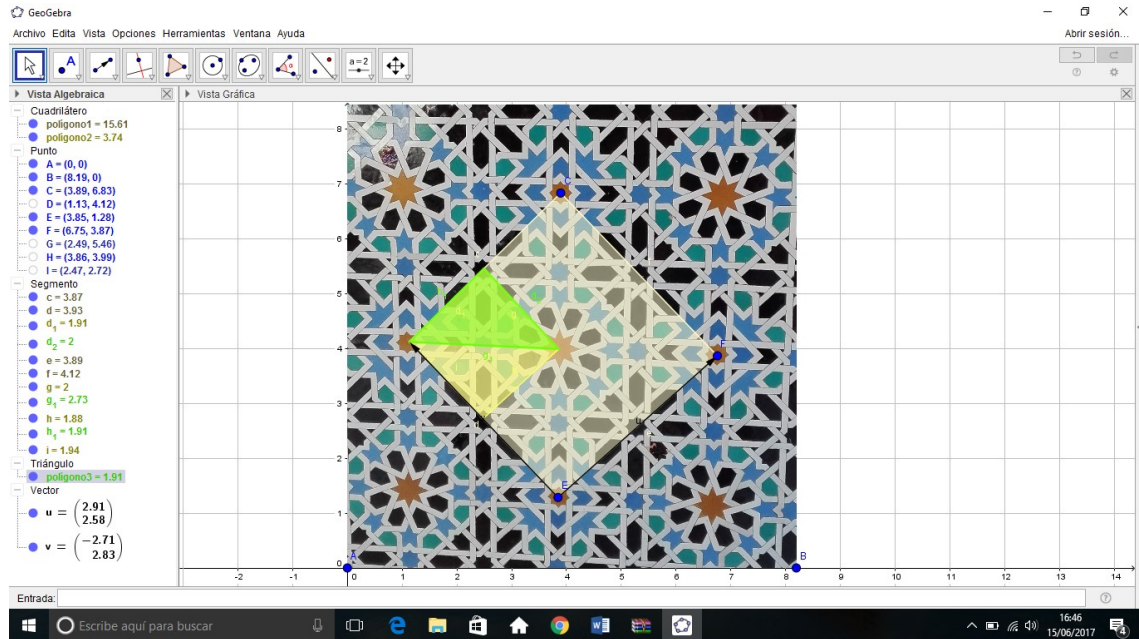


Ilustración 87. Región Mínima (1/8 parte de la Región Unidad). (La autora, 2017)

Reproducción con GeoGebra:

- Se identifica al Región Mínima: un cuadrado, en este caso lo detallamos totalmente punto por punto. Véase Ilustración 88.

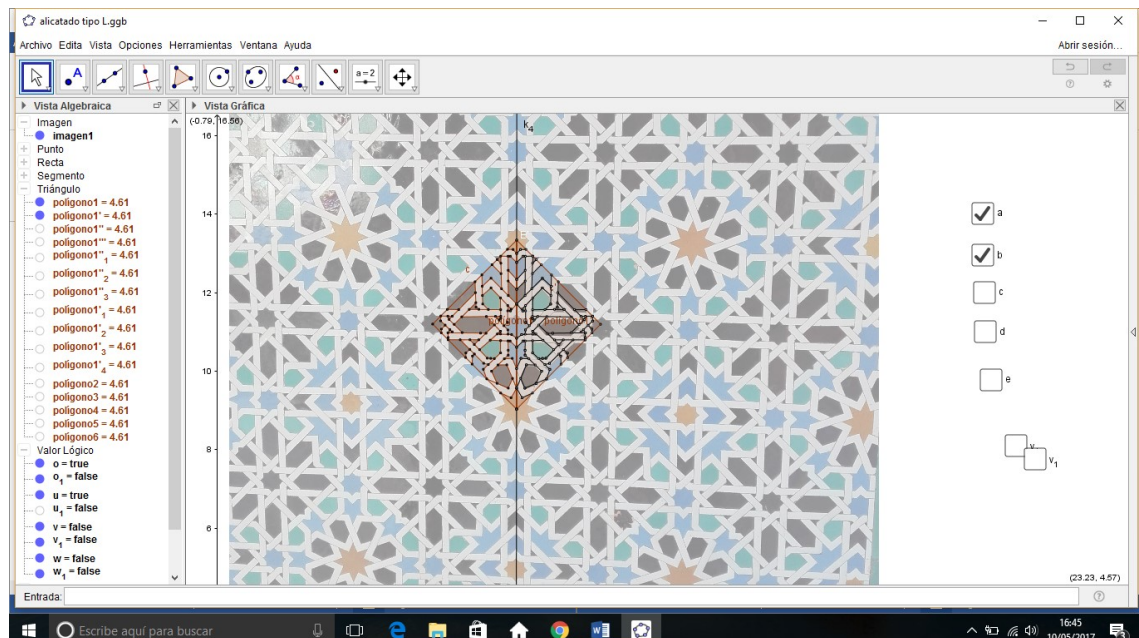


Ilustración 88. Región Mínima con lacería detallada. (La autora, 2017)

- Se aplica en uno de los dos vértices de rotación de orden cuatro, un giro de 90° . Véase Ilustración 89.

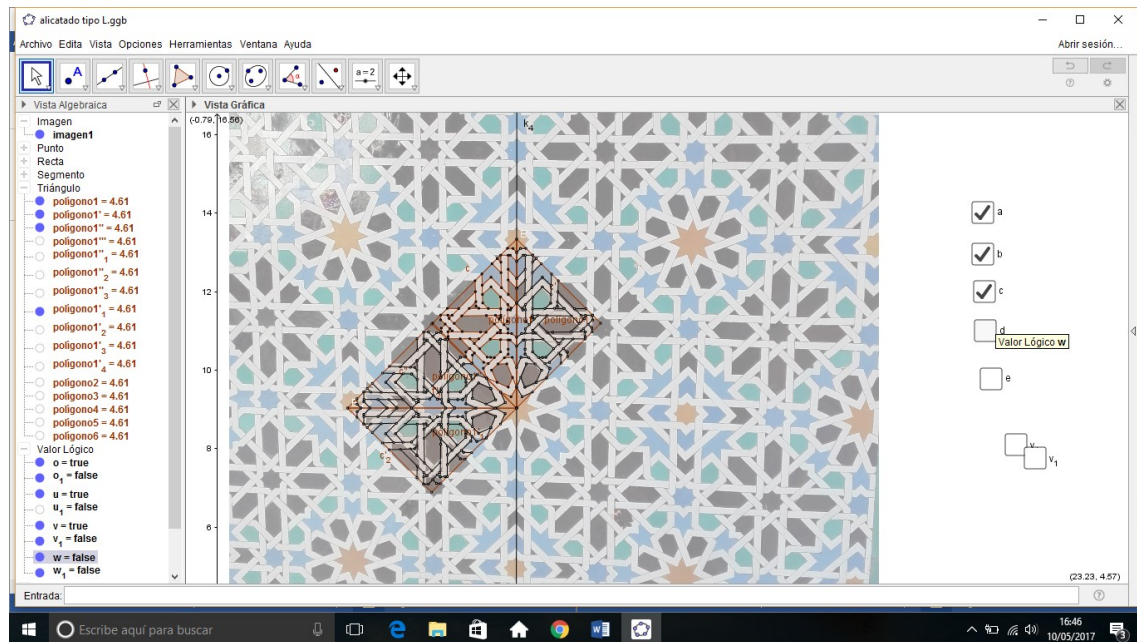


Ilustración 89. Región Mínima con un giro aplicado de 90° . (La autora, 2017)

- Segundo giro de 90° . Véase Ilustración 90.

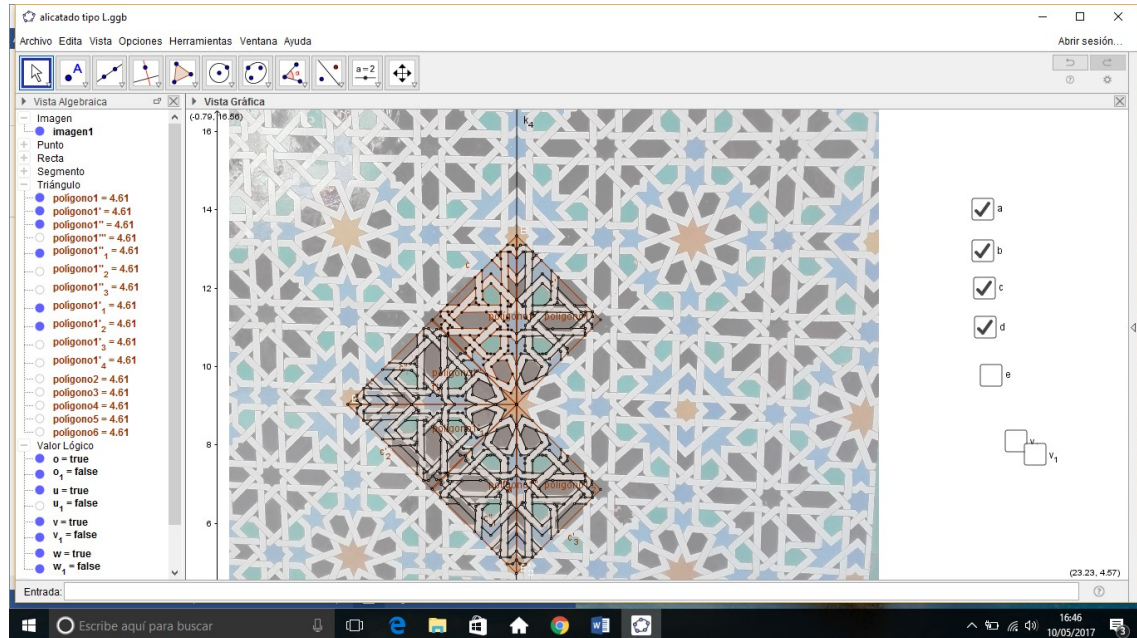


Ilustración 90. Región Mínima segundo giro aplicado. (La autora, 2017)

- 3º giro de 90º y se obtiene el cuadrado que constituye el módulo unidad. Véase Ilustración 91.

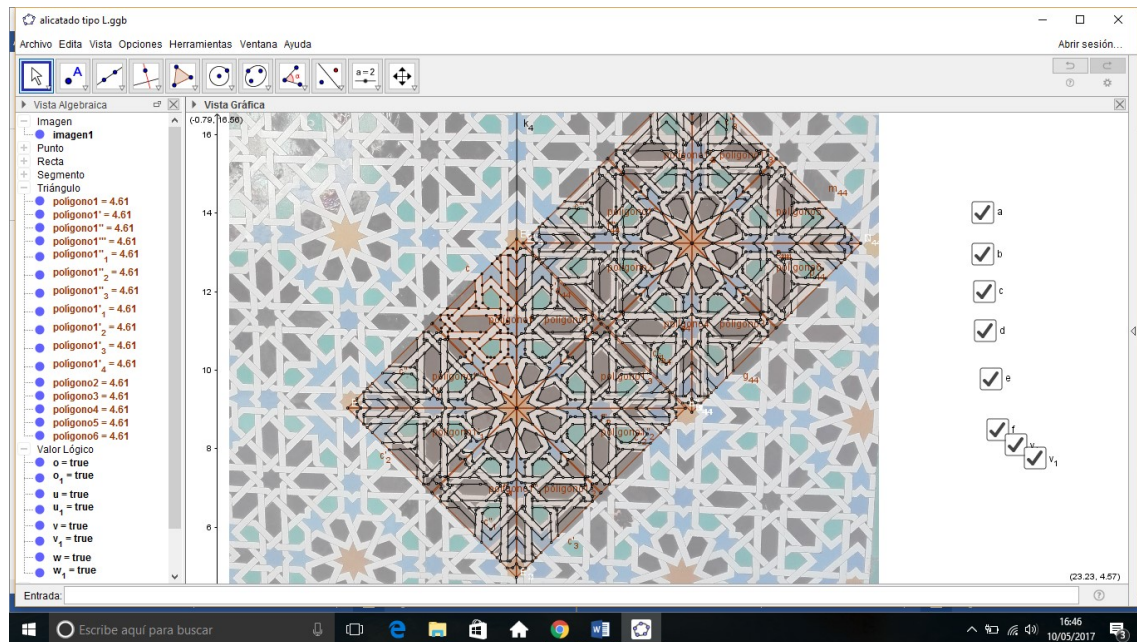


Ilustración 91. Tercer giro completa Región Unidad y se hace traslación. (La autora, 2017)

Alicatado tipo N1

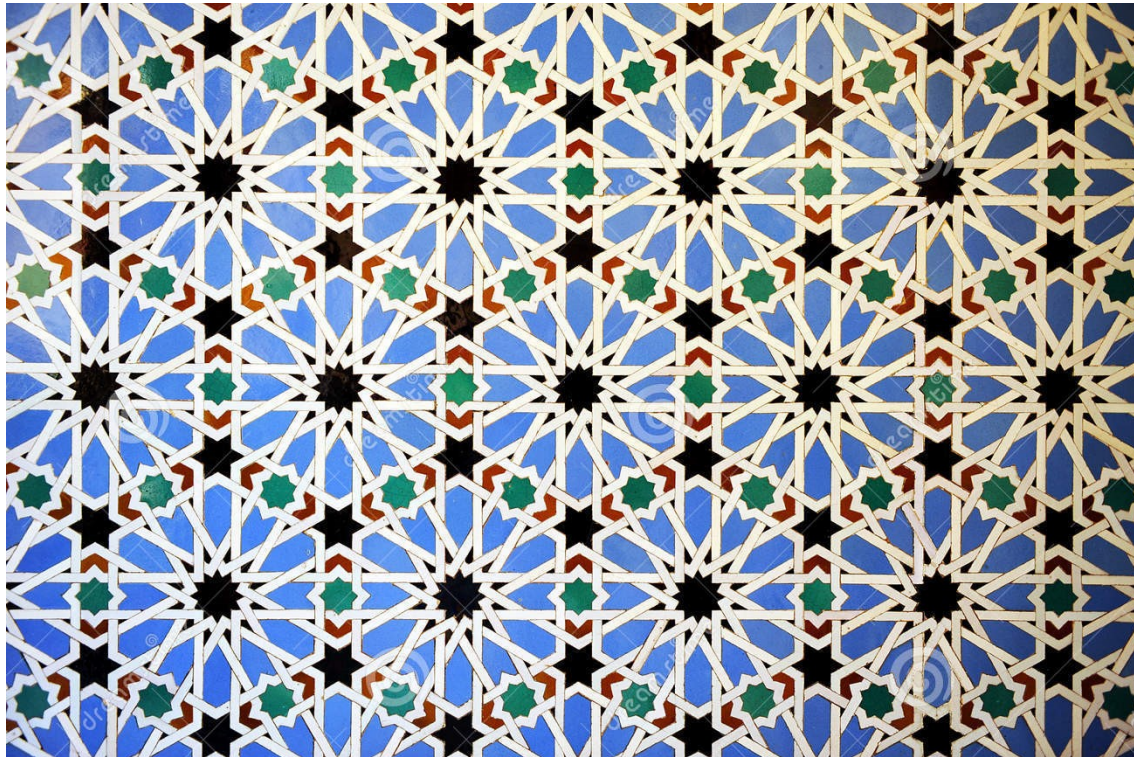


Foto 2. Panel tipo N1. (La autora, 2017)

1. Ubicación: Jambas entre Patio de las Doncellas y Dormitorio de los Reyes Moros, Jambas entre el Patio de las Doncella y Sala del Techo de Carlos V y Jambas entre Patio de las Doncellas y Salón de Embajadores.
2. Presenta decoración geométrica de Lazo de doce, la laceria le rodea haciendo un hexágono por los lazos, su color predominante el azul, combina estrellas meladas y verdes en las estrellas centrales de los giros de 60° en el caso N2 y en el N1 solo son negras.
3. Grupo de Simetría plano:
 - a. ¿Presenta dos traslaciones no paralelas? Si
 - b. ¿Cuál es el mayor orden de giro? 6
 - c. ¿Presenta reflexiones? No

Según el algoritmo llegamos a la conclusión que este panel es un p6.

Su Región Unidad o “paralelogramo fundamental” es **un rombo**.

Su región generatriz o Región Mínima es **un triángulo**. Véase Ilustración 92.

GeoGebra, reproducción:

- Región Mínima. Véase Ilustración 92.

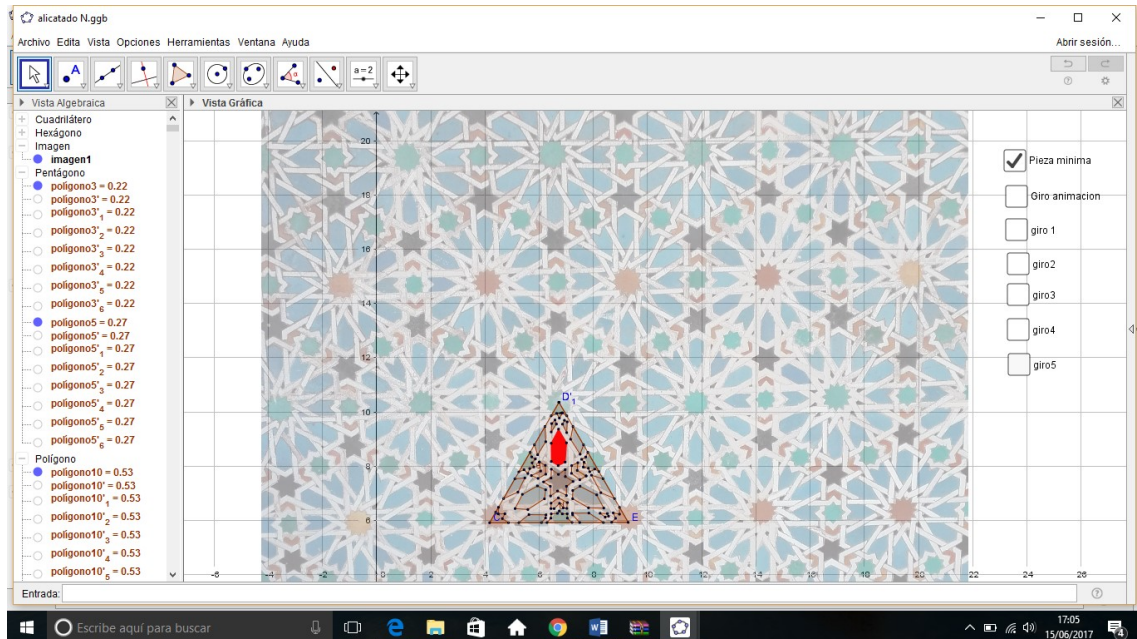


Ilustración 92. Región Mínima. ((La autora, 2017)

- Se aplica a uno de los dos vértices de rotación de orden 6, un giro de 60° . Véase Ilustración 93

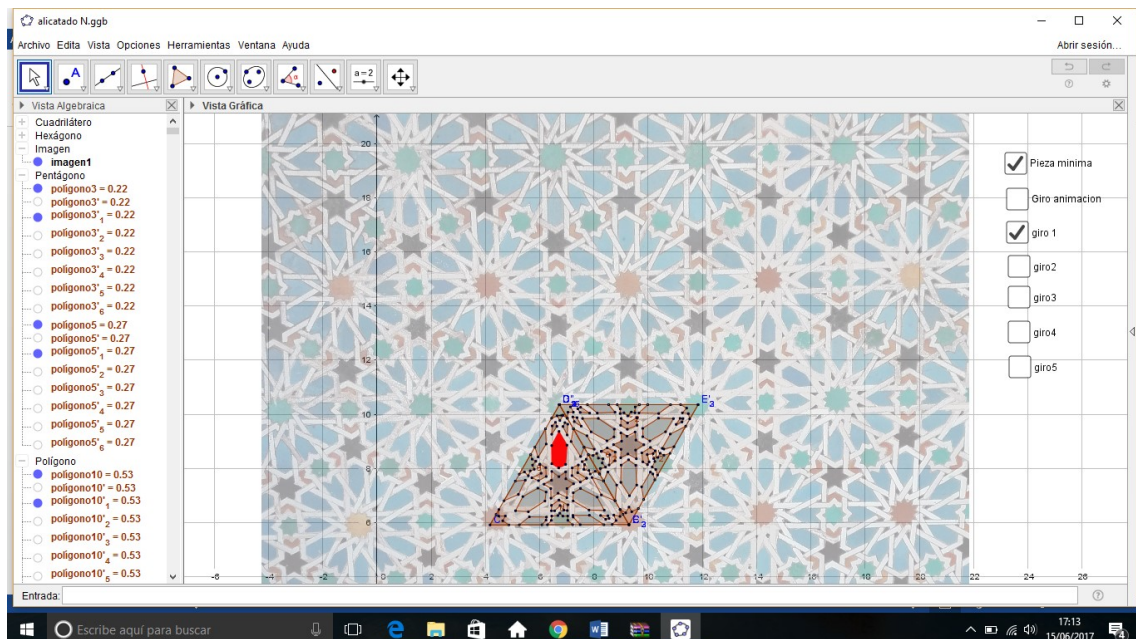


Ilustración 93. Giro 60° de la Región Mínima y forma la Región Unidad (Rombo). (La autora, 2017)

- Segundo giro de 60°. Véase Ilustración 94.

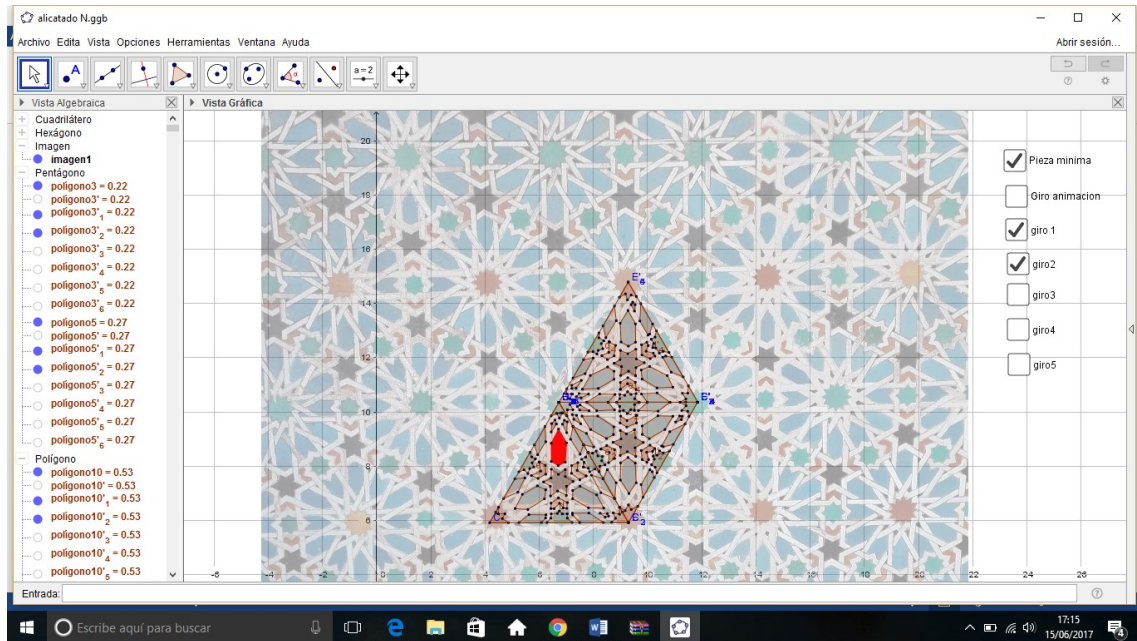


Ilustración 94. Segundo giro de 60° de la Región Mínima. (La autora, 2017)

- Tercer giro de 60°. Véase Ilustración 95

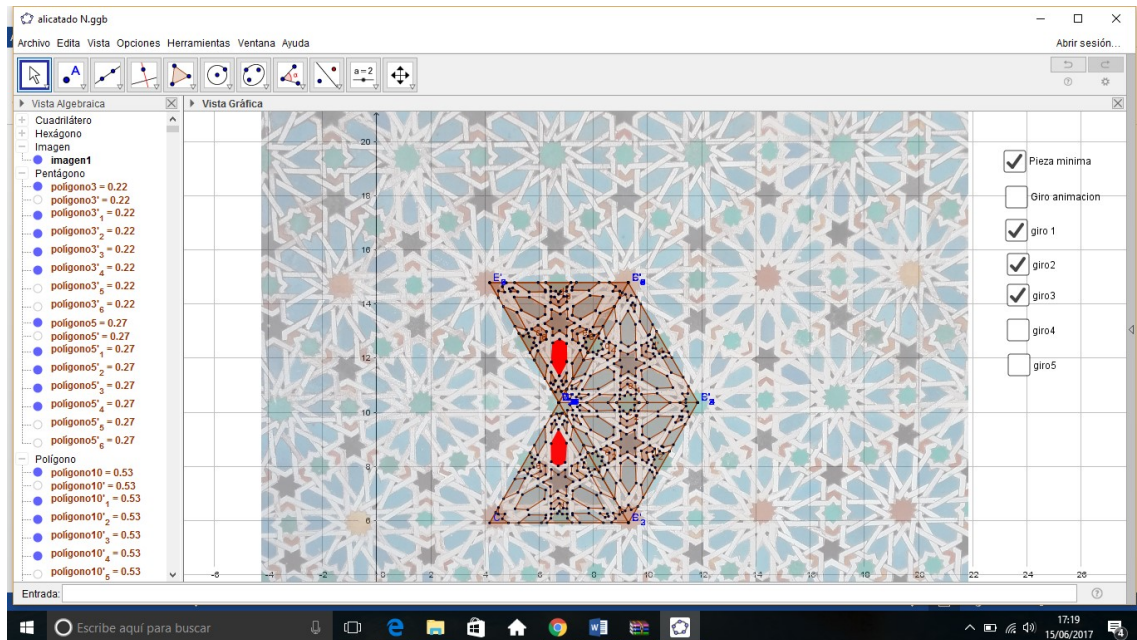


Ilustración 95. Tercer giro 60°. (La autora, 2017)

- Cuarto giro de 60°. Véase Ilustración 96.

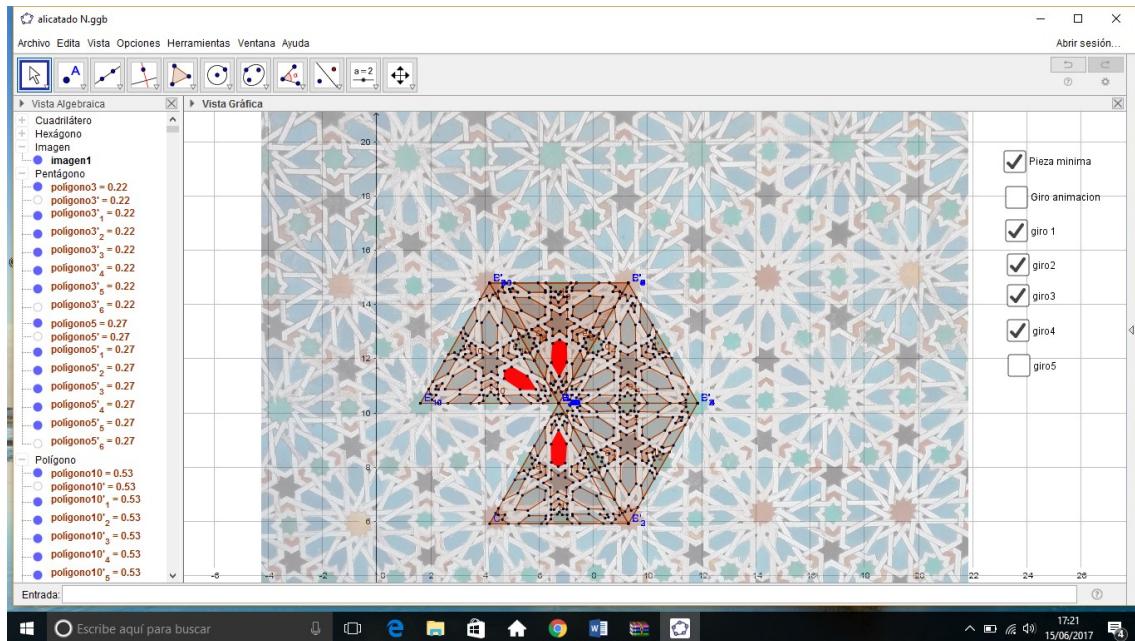


Ilustración 96. Cuarto giro 60°. (La autora, 2017)

- Quinto giro de 60°. Véase Ilustración 97.

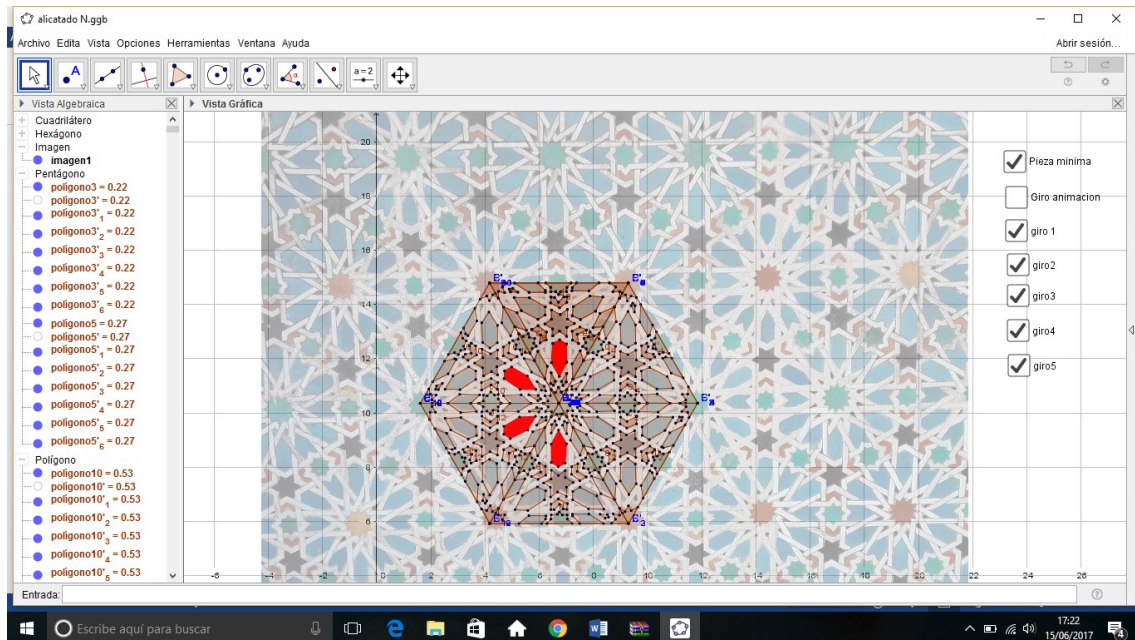


Ilustración 97. Quinto giro y Figura de traslación. (La autora, 2017)

- Se obtiene el hexágono que constituye la Región Unidad y se aplica traslación al módulo unidad cuyo vector es incidente dentro de los rombos. Véase Ilustración 98.

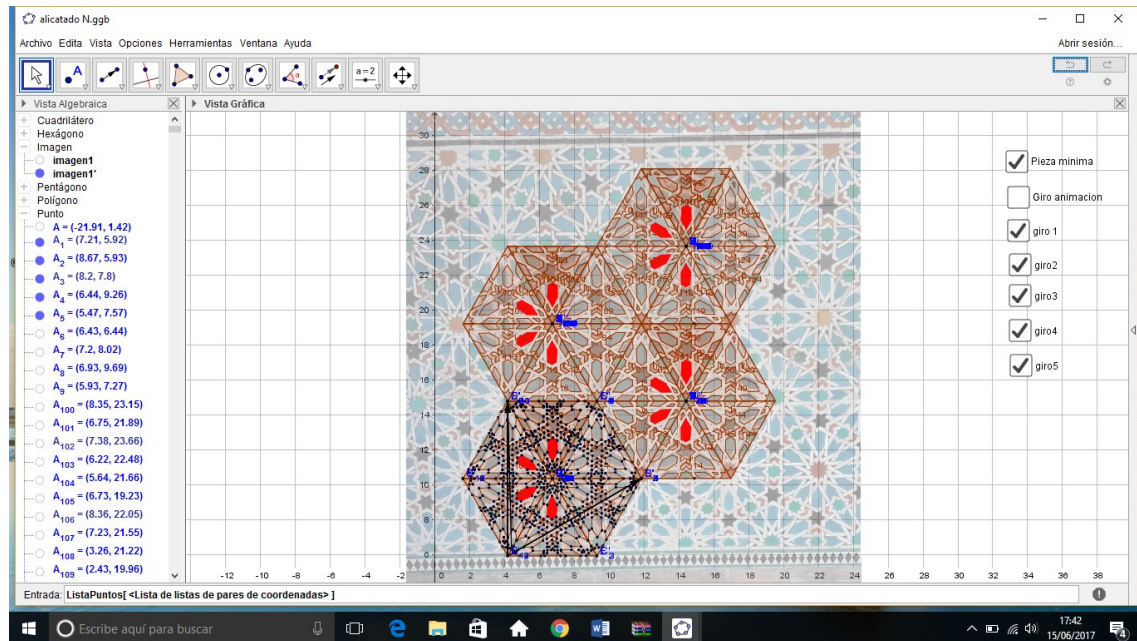


Ilustración 98. Mosaico panel L, 6 giros de 60° y 2 traslaciones. (La autora, 2017)

Alicatado tipo N2

Igual N1 cambia la estrella de color y los frisos

4. Ubicación: lado este Patio de las Doncellas
5. Presenta decoración geométrica de Lazo de doce.
6. Grupo de Simetría plano:
 - a. ¿Presenta dos traslaciones no paralelas? Si
 - b. ¿Cuál es el mayor orden de giro? 6
 - c. ¿Presenta reflexiones? No

Según el algoritmo llegamos a la conclusión que este panel es un p6.

Alicatado tipo P

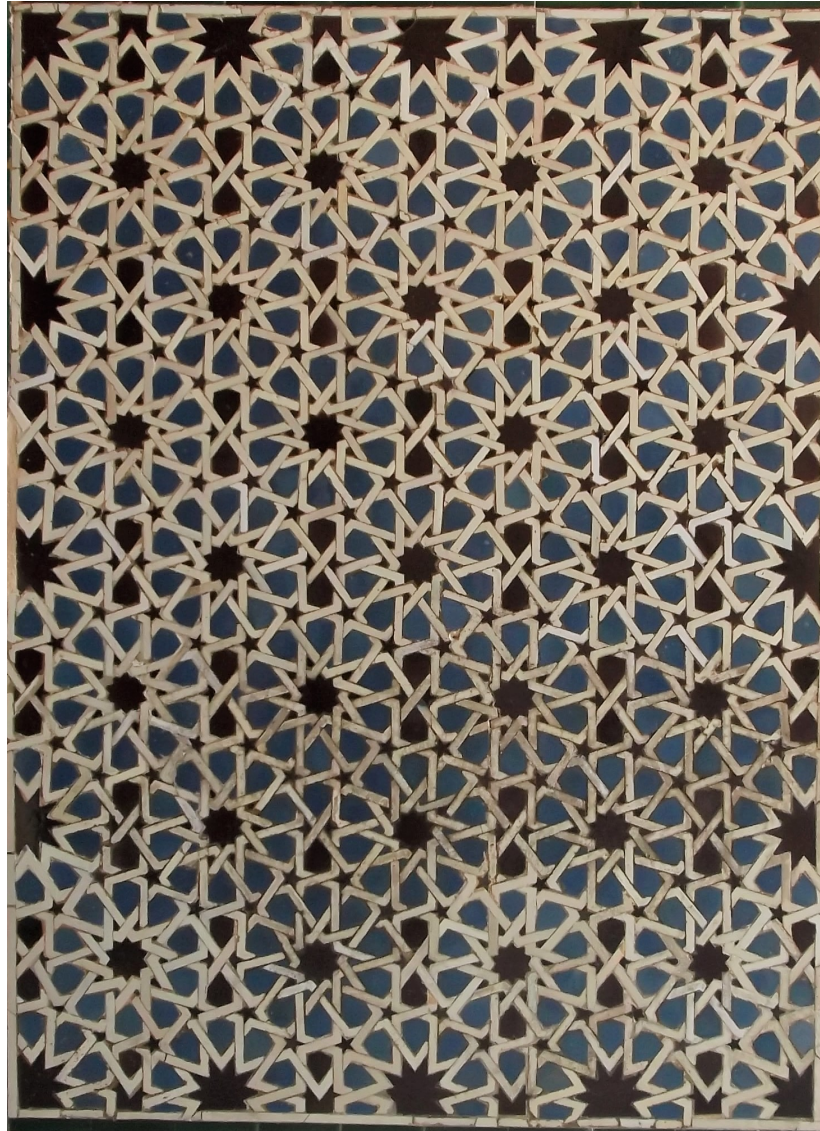


Foto 3. Panel tipo P. (La autora, 2017)

1. Ubicación: Jambas entre el Patio de las Doncellas y Salón de Embajadores.
2. Presentan decoración geométrica lazo de diez occidental, sus colores son el azul el relleno de las ruedas de lazo, las estrellas negras y el lazo blanco.
3. Grupo de Simetría plano:
 - a. ¿Presenta dos traslaciones no paralelas? Si
 - b. ¿Cuál es el mayor orden de giro? 2
 - c. ¿Presenta reflexiones? No

Según el algoritmo llegamos a la conclusión que este panel es un p2.

GeoGebra, reproducción:

Su Región Unidad o “paralelogramo fundamental” es un **paralelogramo**.

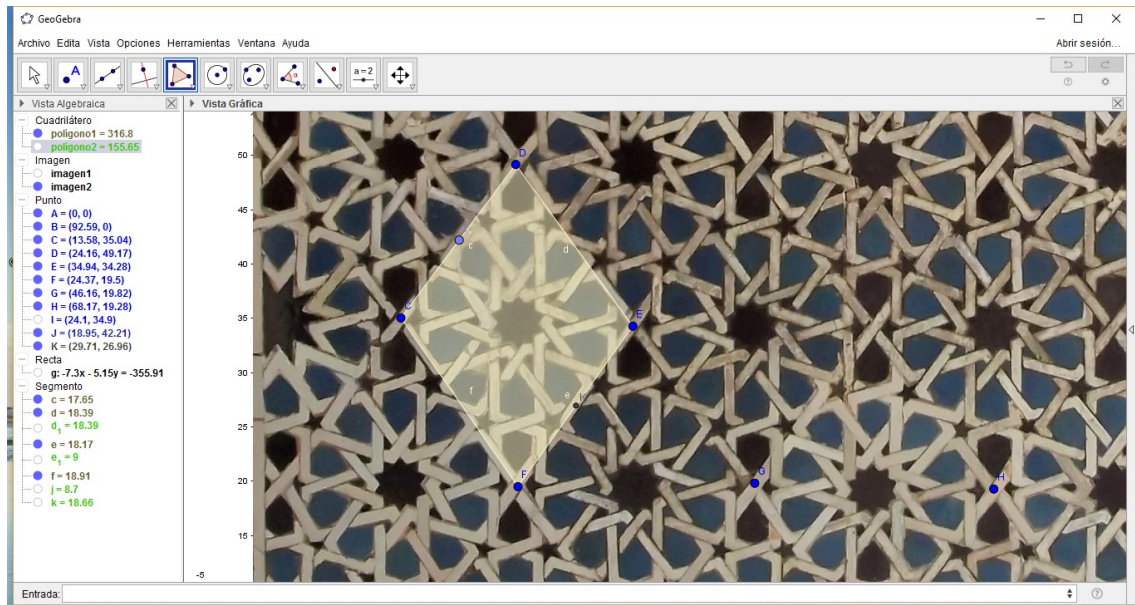


Ilustración 99. Región Unidad paralelogramo. (La autora, 2017)

1. Su “región generatriz” o Región Mínima es un $\frac{1}{2}$ del paralelogramo. Véase Ilustración 100.

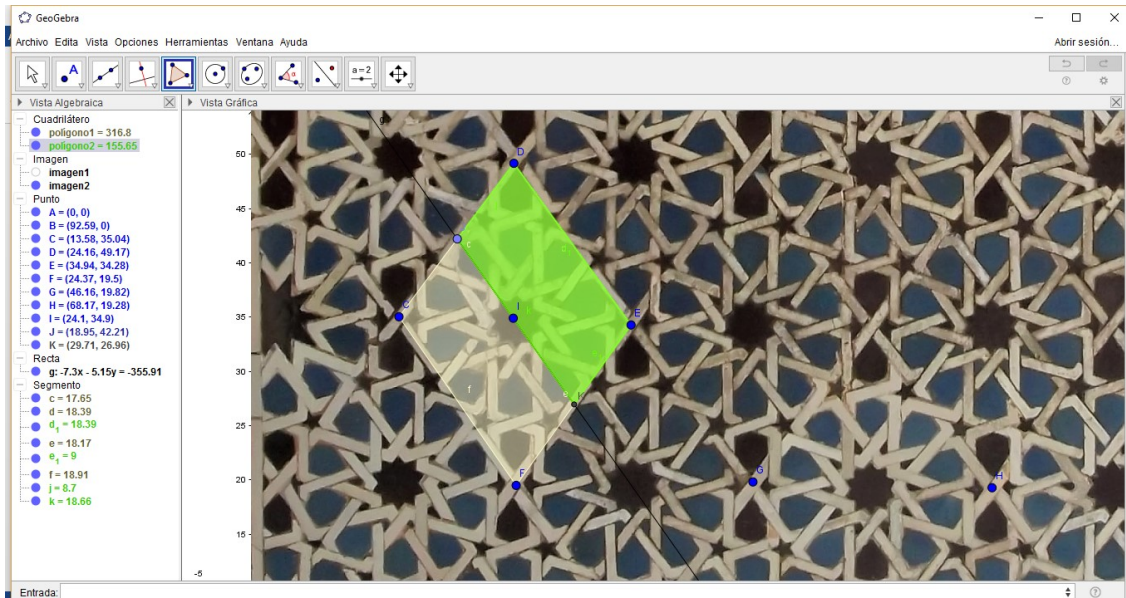


Ilustración 100. Región Mínima con centro de giro. (La autora, 2017)

2. Traslaciones del paralelogramo, paralelos a dos de sus lados. Véase Ilustración 101.

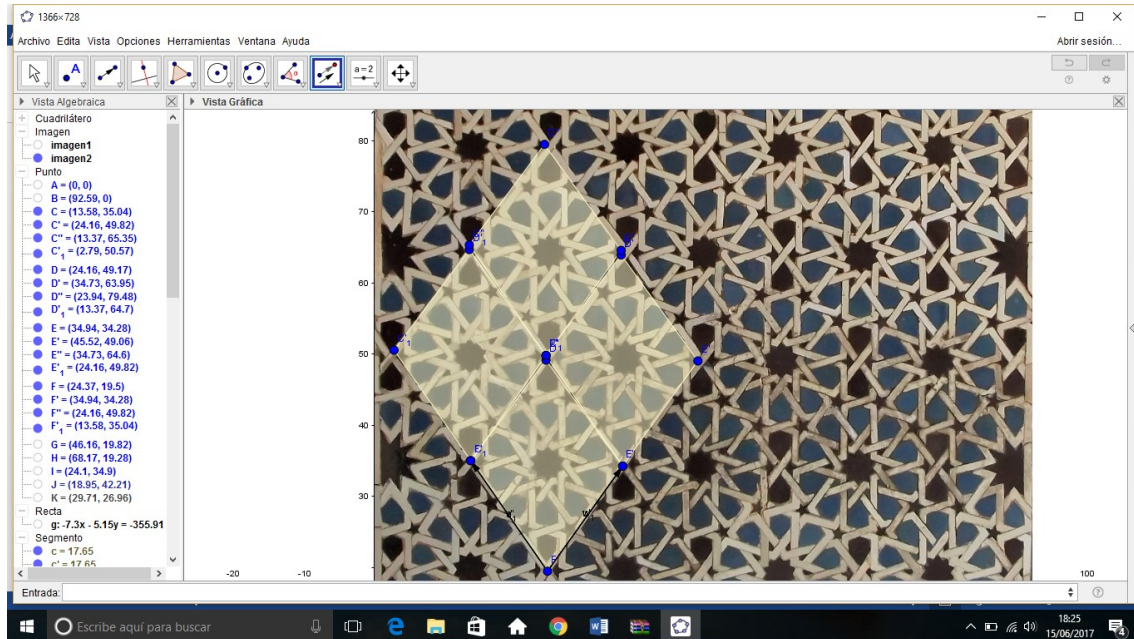


Ilustración 101. Traslación de paralelogramo y formación del mosaico. (La autora, 2017)

Alicatado tipo R



Foto 4. Panel tipo R. (La autora, 2017)

1. Ubicación: lado este del Patio de las Doncellas.
2. Presentan decoración geométrica *con lacería sus colores dominantes verde, negro y azul y sus lazos blancos.*
3. Grupo de Simetría plano:
 - a. ¿Presenta dos traslaciones no paralelas? Si
 - b. ¿Cuál es el mayor orden de giro? 1
 - c. ¿Presenta reflexiones? No
 - d. ¿presenta deslizamiento? No

Según el algoritmo llegamos a la conclusión que este panel es un p1.

Nota.- Si no se tiene en cuenta la lacería que contiene e impide las reflexiones deslizamiento, se cataloga como pm. Véase la catalogación que hace del el Prof. José Antonio Mora (Mora, s.f.)

Alicatado tipo A1

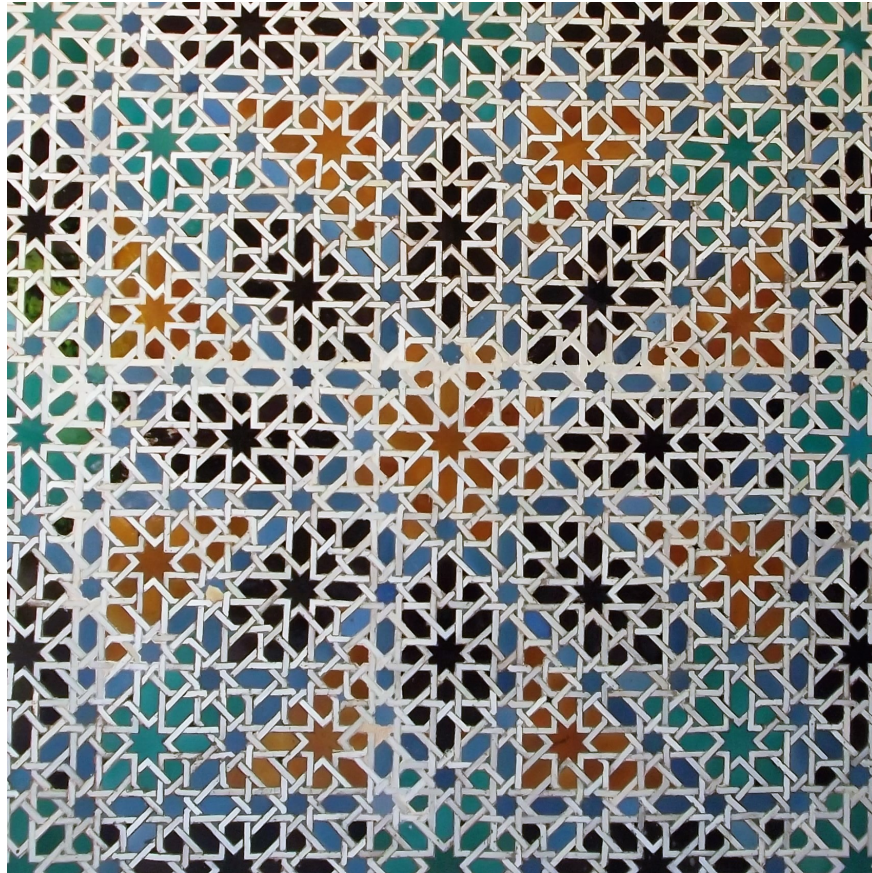


Foto 5. Panel tipo A1. (La autora, 2017)

1. Ubicación: este tipo de panel esta repetido por casi todo el patio con diferentes colores y esto hace que se perciban como diferentes tipos de alicatados.
2. Presentan decoración geométrica lazo de ocho occidental.
3. Grupo de Simetría plano:
 - a. ¿Presenta dos traslaciones no paralelas? No.

No es un Grupo Plano

- b. ¿Presenta unas traslaciones? No.

No es un friso (grupo lineal).

- c. ¿Cuál es el mayor orden de giro? 4

- d. ¿Presenta reflexiones? No

Por tanto es un grupo cíclico que pertenece a los Grupos de Leonardo C_4 .

GeoGebra, reproducción:

- Región Unidad y Región Mínima es la misma unidad en los grupos puntuales. Véase Ilustración 102.

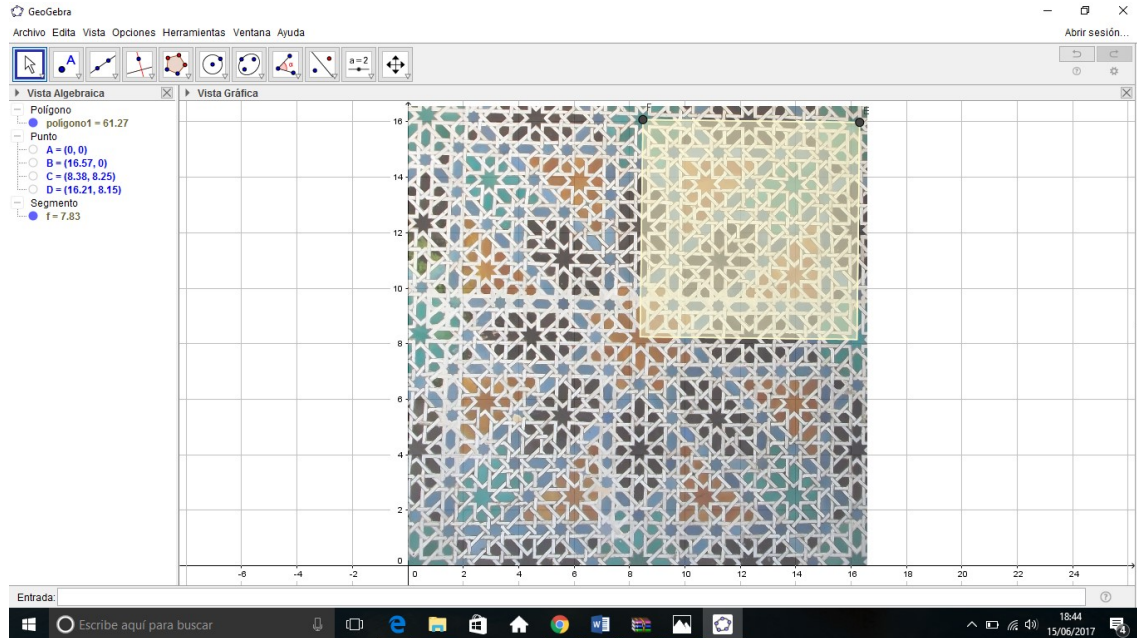


Ilustración 102. Mosaico A1 con clasificación simétrica C_4 . (La autora, 2017)

Alicatado tipo A2

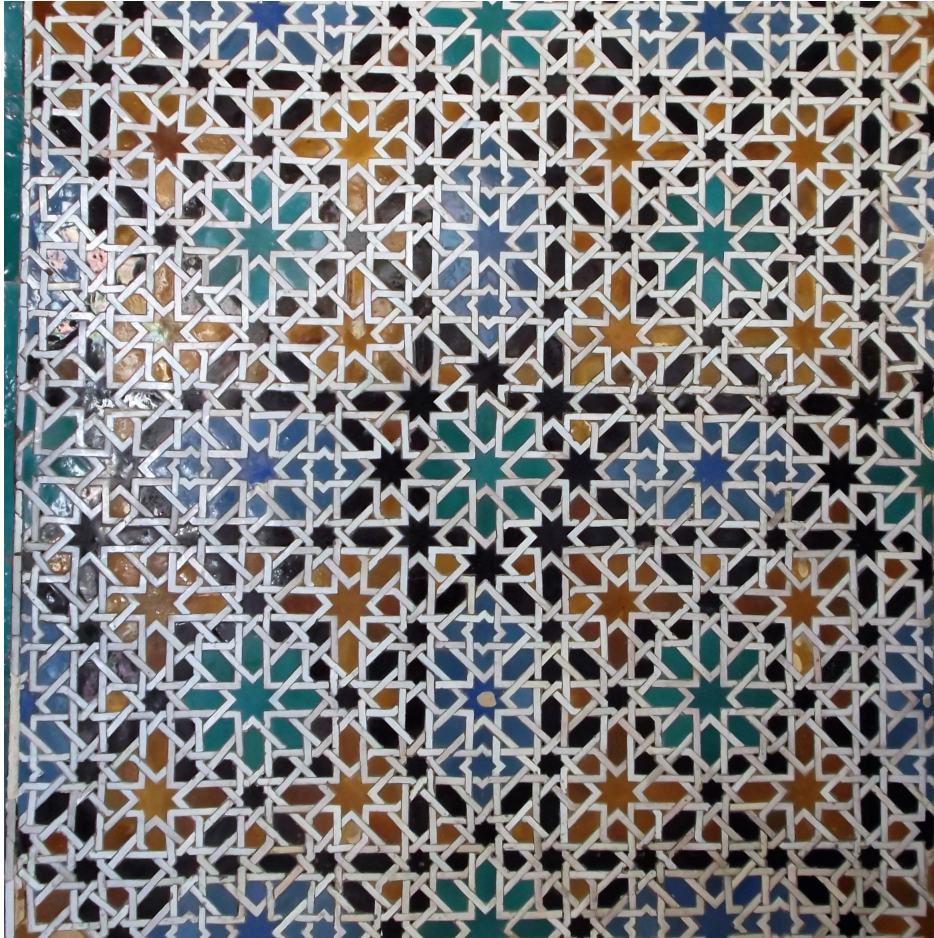


Foto 6. Panel tipo A2. (La autora, 2017)

1. Ubicación: este tipo de panel esta repetido por casi todo el patio con diferentes colores y esto hace que se perciban como diferentes tipos de alicatados.
2. Presentan decoración geométrica lazo de ocho occidental con lazo a la calle arriba.
3. Grupo de Simetría plano:

- a. ¿Presenta dos traslaciones no paralelas? No.

No es un Grupo Plano

- b. ¿Presenta una traslación? No.

No es un friso (grupo lineal).

- c. ¿Cuál es el mayor orden de giro? 4

- d. ¿Presenta reflexiones? No

Por tanto es un grupo cíclico que pertenece a los Grupos de Leonardo C_4 .

GeoGebra, reproducción:

- Región Unidad y Región Mínima es la misma unidad en los grupos puntuales. Véase Ilustración 103.

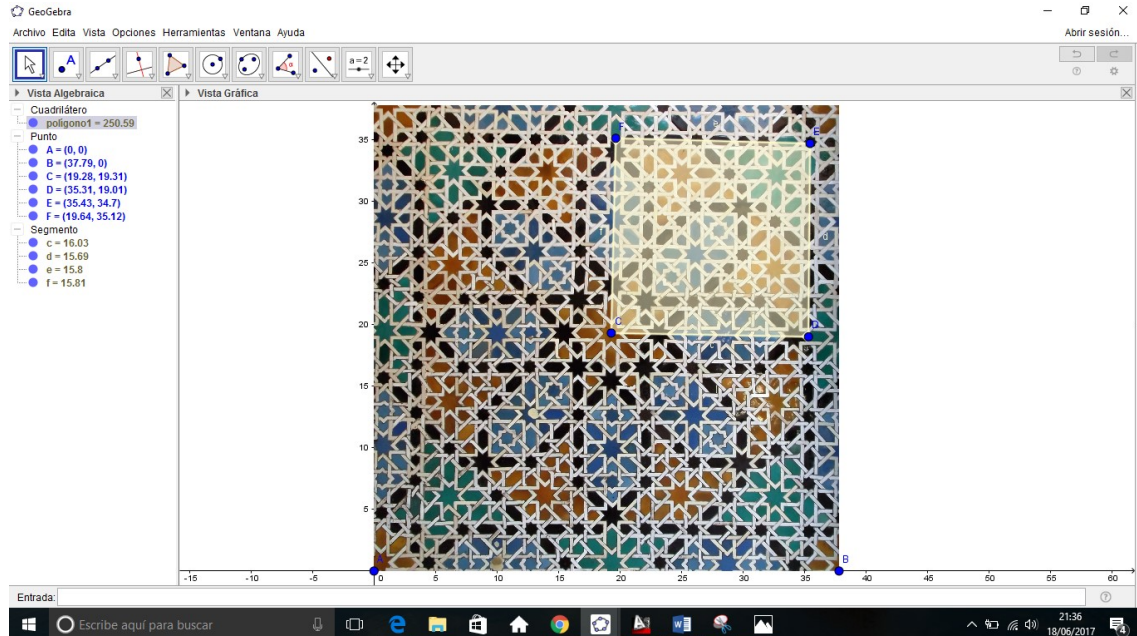


Ilustración 103. Mosaico A2 con clasificación simétrica C_4 . (La autora, 2017)

Alicatado tipo B

Página 201 (Ramírez,1995)

1. Ubicación: este tipo de panel esta repetido por casi todo el patio con diferentes colores y esto hace que se perciban como diferentes tipos de alicatados
2. Presentan decoración geométrica lazo de ocho occidental.
3. Grupo de Simetría plano:

a. ¿Presenta dos traslaciones no paralelas? No.

No es un Grupo Plano

b. ¿Presenta unas traslaciones? No.

No es un friso (grupo lineal).

c. ¿Cuál es el mayor orden de giro? 4

d. ¿Presenta reflexiones? No

Por tanto es un grupo cíclico que pertenece a los Grupos de Leonardo C_4 .

Alicatado tipo C

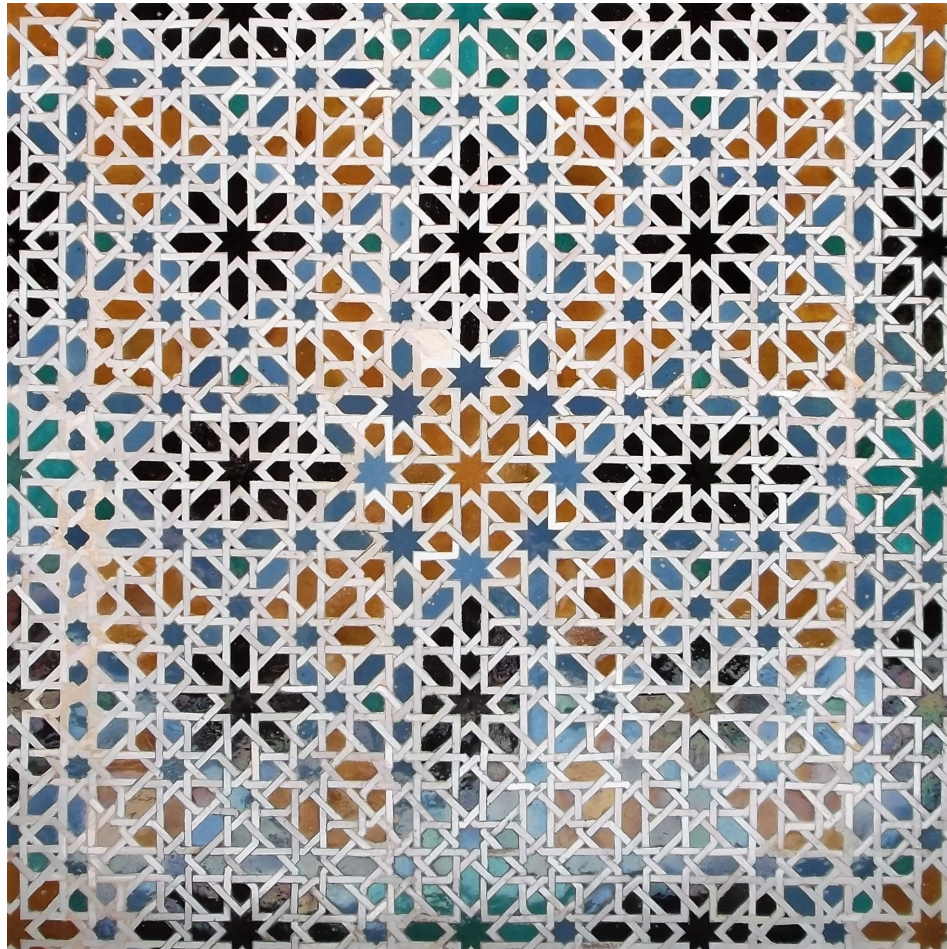


Foto 7. Panel tipo C. (La autora, 2017)

1. Ubicación: este tipo de panel esta repetido por casi todo el patio con diferentes colores y esto hace que se perciban como diferentes tipos de alicatados, presenta pérdida de material.
 2. Presentan decoración geométrica lazo de ocho occidental.
 3. Grupo de Simetría plano:
 - a. ¿Presenta dos traslaciones no paralelas? No.
No es un Grupo Plano
 - b. ¿Presenta unas traslaciones? No.
No es un friso (grupo lineal).
 - c. ¿Cuál es el mayor orden de giro? 4
 - d. ¿Presenta reflexiones? No
Por tanto es un grupo cíclico que pertenece a los Grupos de Leonardo C_4 .
- Región Unidad y Región Mínima es la misma unidad en los grupos puntuales. Véase Ilustración 104.

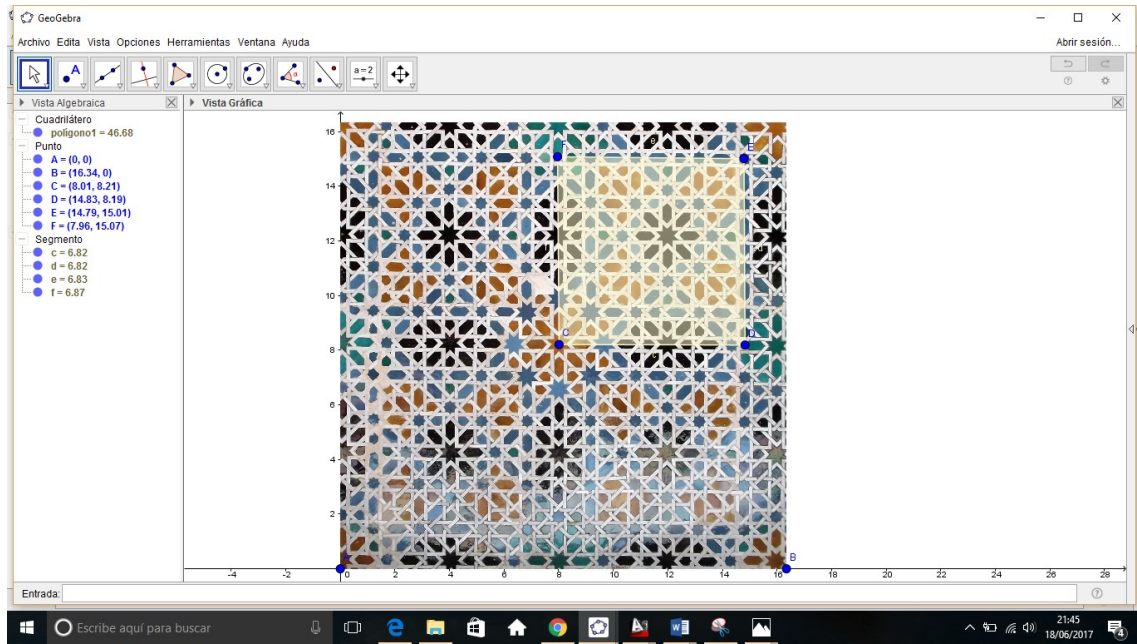


Ilustración 104. Mosaico C con clasificación simétrica C_4 . (La autora, 2017)

Alicatado tipo D

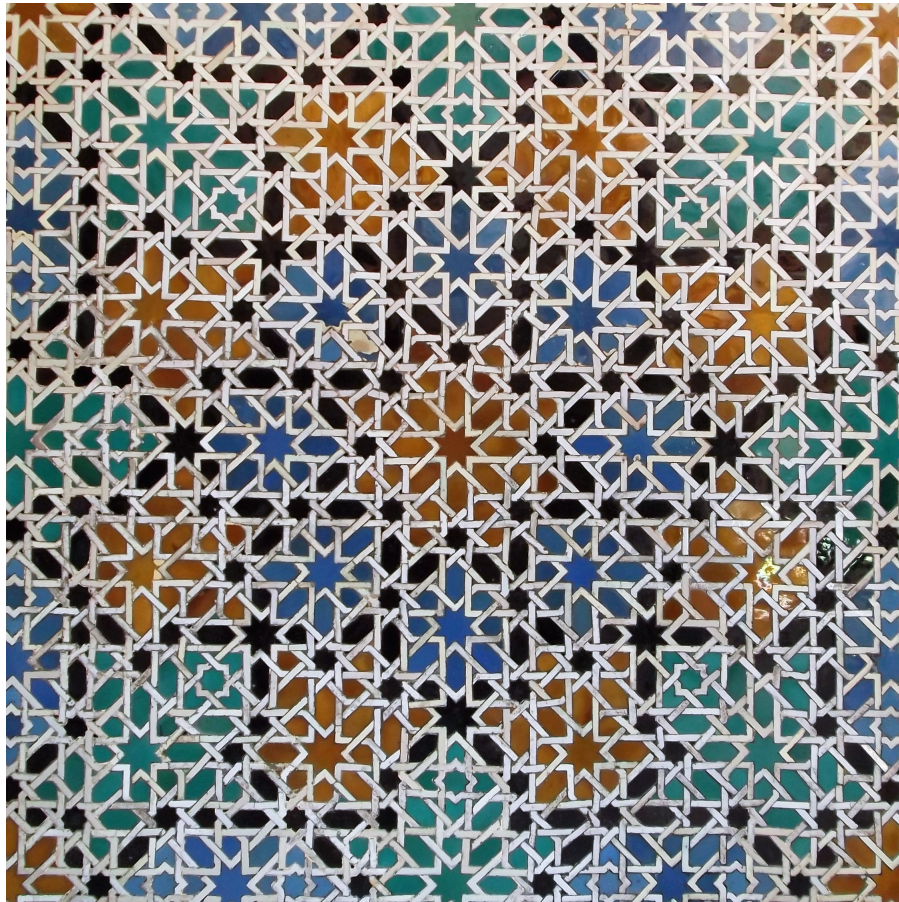


Foto 8. Panel tipo D. (La autora, 2017)

1. Ubicación: este tipo de panel esta repetido por casi todo el patio con diferentes colores y esto hace que se perciban como diferentes tipos de alicatados, presenta pérdida de material.
2. Presentan decoración geométrica lazo de ocho occidental.
3. Grupo de Simetría plano:
 - a. ¿Presenta dos traslaciones no paralelas? No.

No es un Grupo Plano

- b. ¿Presenta una traslación? No.

No es un friso (grupo lineal).

- c. ¿Cuál es el mayor orden de giro? 4

- d. ¿Presenta reflexiones? No

Por tanto es un grupo cíclico que pertenece a los Grupos de Leonardo C_4 .

- Región Unidad y Región Mínima es la misma unidad en los grupos puntuales. Véase Ilustración 105

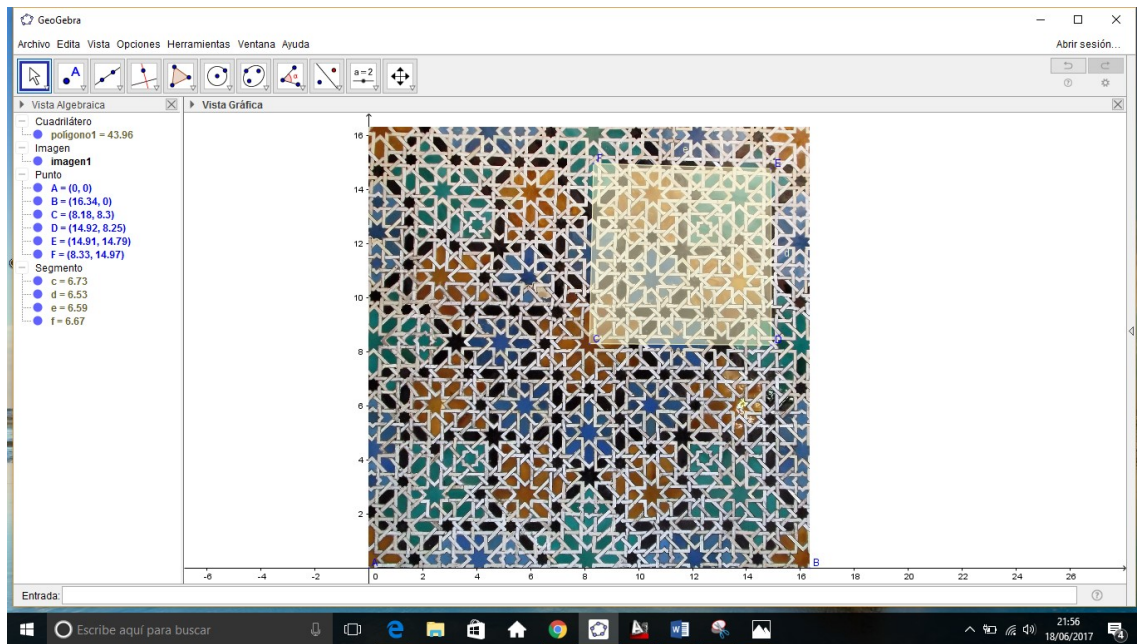


Ilustración 105. Mosaico D con clasificación C_4 . (La autora, 2017)

Alicatado tipo E

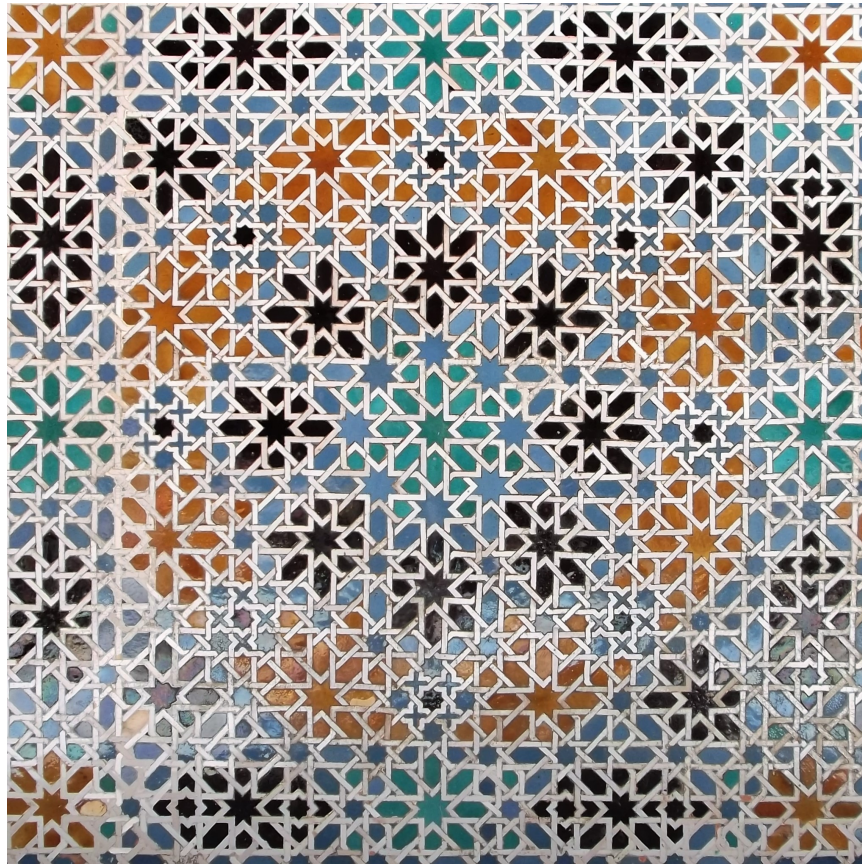


Foto 9. Panel tipo E. (La autora, 2017)

1. Ubicación: este tipo de panel esta repetido por casi todo el patio con diferentes colores y esto hace que se perciban como diferentes tipos de alicatados.
2. Presentan decoración geométrica lazo de ocho occidental.
3. Grupo de Simetría plano:
 - a. ¿Presenta dos traslaciones no paralelas? No.

No es un Grupo Plano

- b. ¿Presenta una traslación? No.

No es un friso (grupo lineal).

- c. ¿Cuál es el mayor orden de giro? 4

- d. ¿Presenta reflexiones? No

Por tanto es un grupo cíclico que pertenece a los Grupos de Leonardo C_4 .

b) Estudio de los frisos

Cenefa Superior 1 Patio de las Doncellas.



Foto 10. Cenefa superior que rodea el Patio de las Doncella. (La autora, 2017)

1. Ubicación: Patio de las Doncellas.
2. Presentan decoración geométrica, puede ser tricolor o bicolor, se van combinando por todo el perímetro del Patio.
3. Grupo de Simetría lineal:
 - a. ¿Presenta unas traslaciones? Si
 - b. ¿Presenta reflexiones transversales? Si
 - c. ¿Presenta reflexiones longitudinales? No
 - d. ¿Presenta deslizamiento longitudinal? No

Según el algoritmo de identificación de frisos pertenece a Fm1.

Geogebra, reproducción:

- Región Mínima y ejes de reflexión. Véase Ilustración 106.

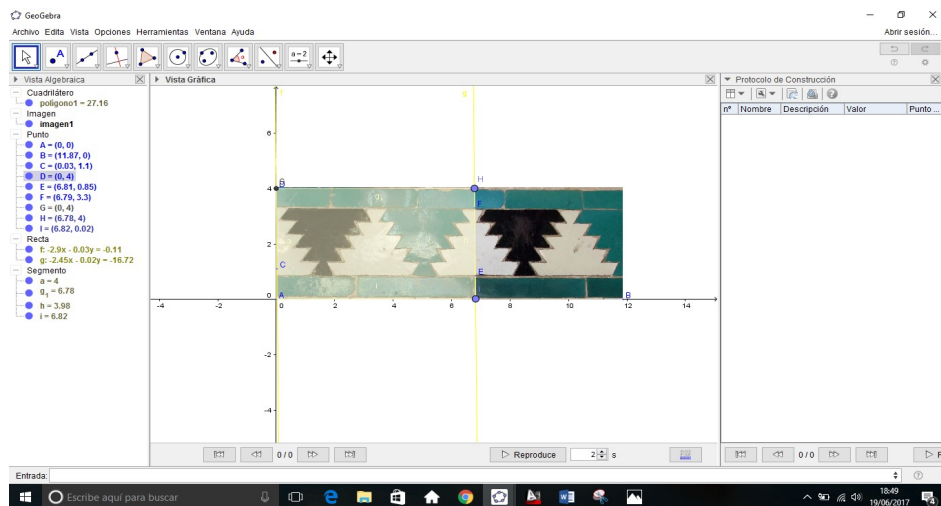


Ilustración 106. Región Mínima cenefa superior Patio de las Doncellas. (La autora, 2017)

Cenefa Superior 2 Patio de las Doncellas



Foto 11. Cenefa superior lado este del Patio de las Doncellas. (La autora, 2017)

Modulo

1. Ubicación: lado este del Patio de las Doncellas.
2. Presentan decoración geométrica con lacería en forma rombo y cuadrados, los toques verdes y azules con el melado hacen una mezcla armoniosa.
3. Grupo de Simetría lineal:
 - a. ¿Presenta una traslación? Si
 - b. ¿Presenta reflexiones transversales? No
 - c. ¿Presenta reflexiones longitudinales? No
 - d. ¿Presenta deslizamiento longitudinal? No
 - e. ¿Presenta giro? Sí, siempre y cuando solo sea bicolor.

Según el algoritmo de identificación del friso pertenece a F12.

Geogebra, reproducción:

Comprobación de rotación. Véase Ilustración 107.

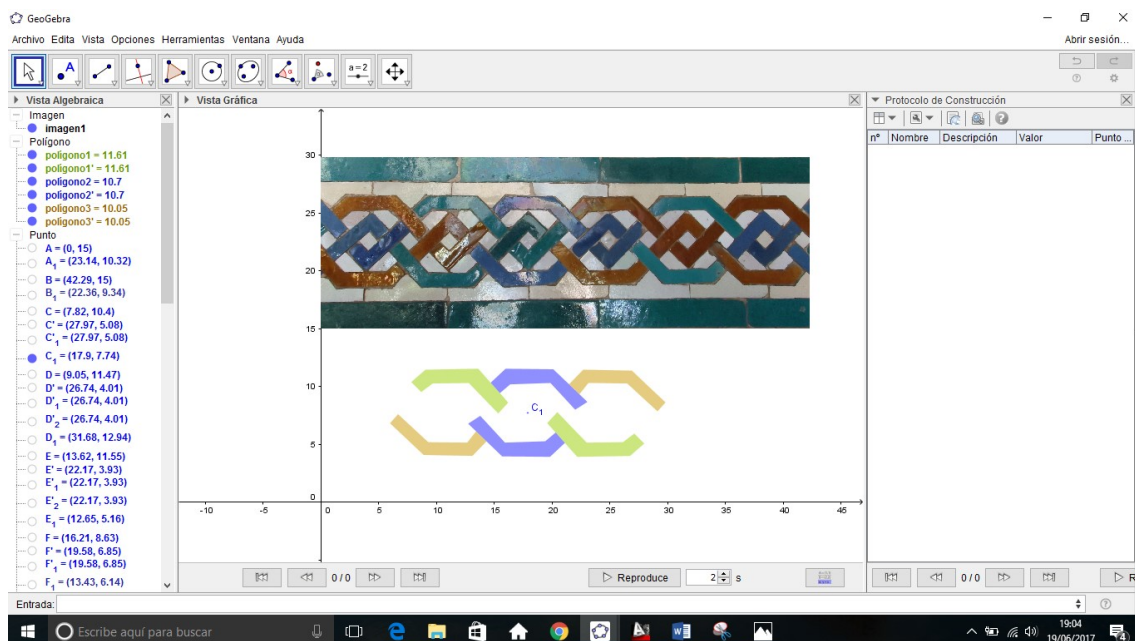


Ilustración 107. Simulación de rotación. (La autora, 2017)

Cenefa inferior Patio de las Doncellas



Foto 12. Cenefa inferior que rodea el Patio de las Doncellas. (La autora, 2017)

1. Ubicación: Parte inferior Patio de las Doncellas.
2. Presentan decoración geométrica con un juego de triángulos y cuadrados, tiene dos tonalidades de verde, uno verde agua y un verde Andalucía, haciendo un contraste con el blanco.
3. Grupo de Simetría lineal:
 - a. ¿Presenta una traslación? Si
 - b. ¿Presenta reflexiones transversales? Si
 - c. ¿Presenta reflexiones longitudinales? Si

Según el algoritmo de identificación del friso pertenece a Fmm.

Geogebra, reproducción:

- Región Mínima. Véase Ilustración 108.

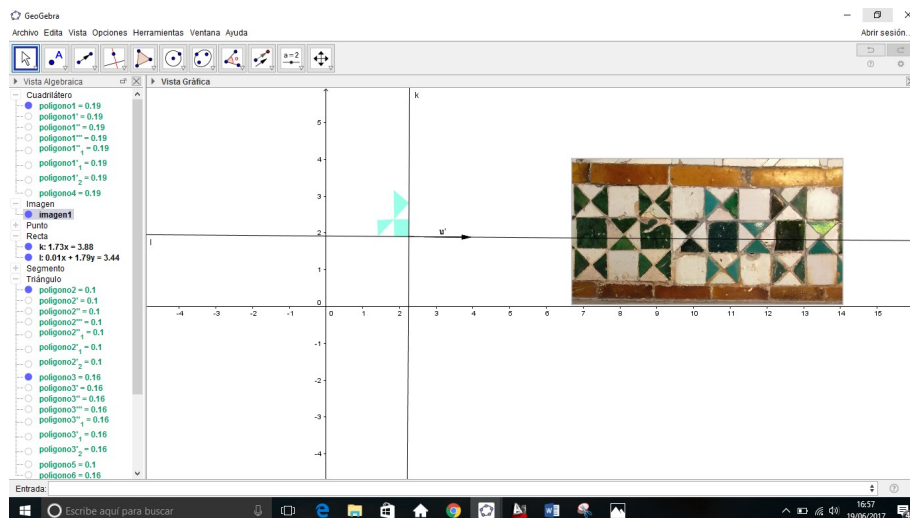


Ilustración 108. Región Mínima cenefa inferior que rodea el Patio de las Doncellas. (La autora, 2017)

- Reflexión transversal. Véase Ilustración 109.

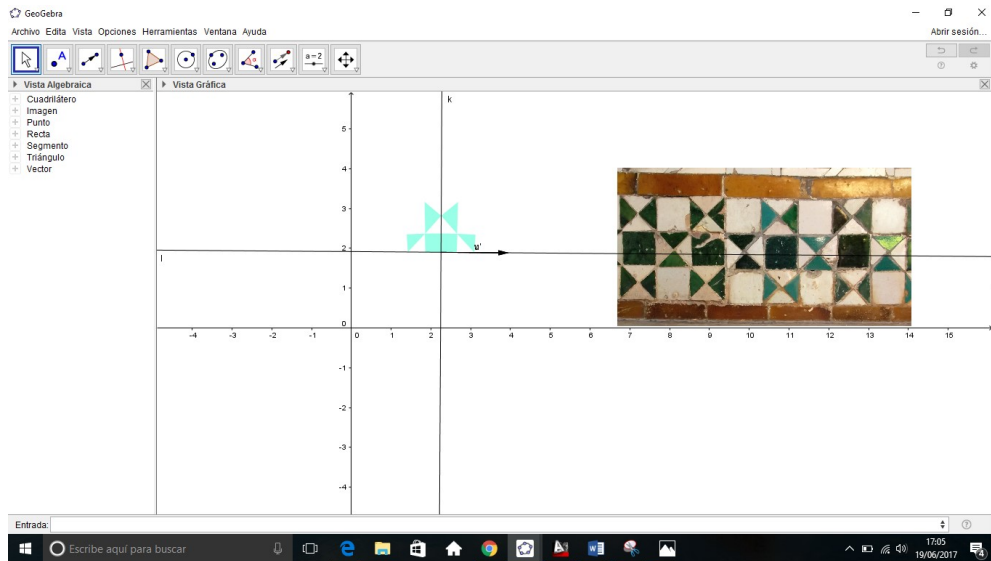


Ilustración 109. Reflexión vertical cenefa inferior que rodea Patio de las Doncellas. (Gutierrez, 2017)

- Reflexión longitudinal. Véase Ilustración 110.

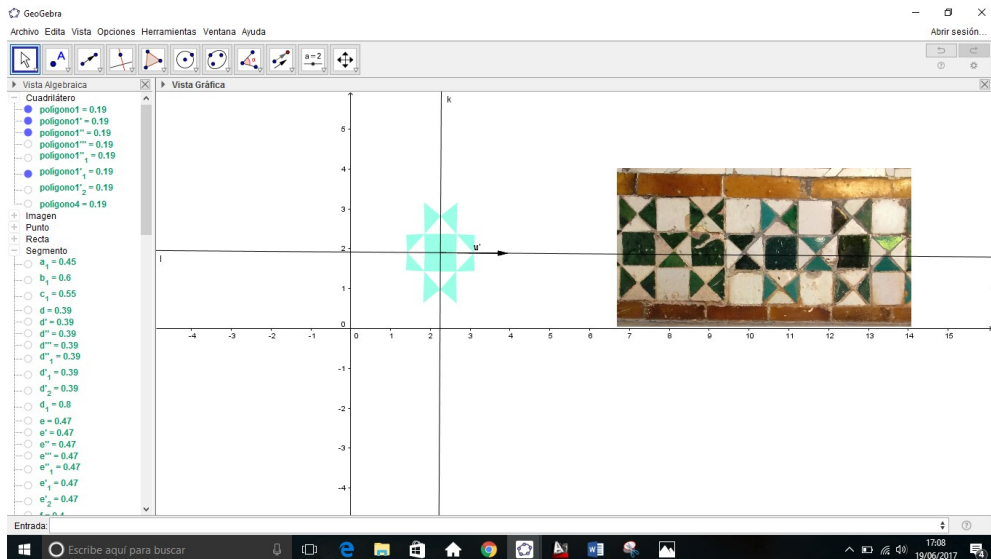


Ilustración 110. Reflexión longitudinal cenefa inferior que rodea Patio de las Doncellas. (La autora, 2017)

- Traslación longitudinal. Véase Ilustración 111.

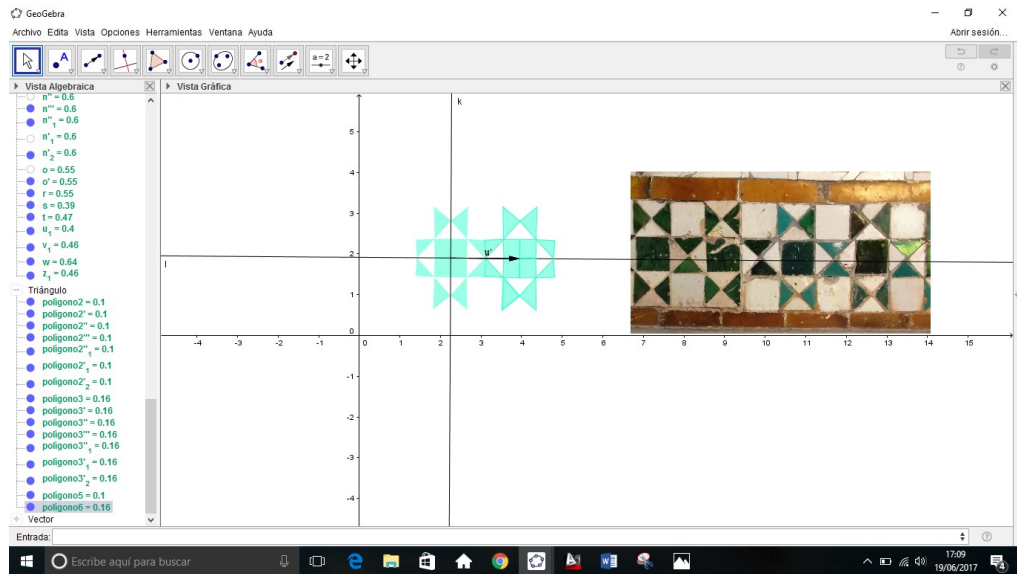


Ilustración 111. Traslación y formación del friso inferior del Patio de las Doncellas. (La autora, 2017)

Cenefa inferior lado este Patio de las Doncellas



Foto 13. Cenefa inferior lado este del Patio de las Doncellas. (La autora, 2017)

Modulo

1. Ubicación: lado este del Patio de las Doncellas.
2. Presentan decoración geométrica en forma de rombo, combina el color negro, verde y blanco.
3. Grupo de Simetría lineal:
 - a. ¿Presenta una traslación? Si
 - b. ¿Presenta reflexiones transversales? No
 - c. ¿Presenta reflexiones longitudinales? Si

Según el algoritmo de identificación del friso pertenece a F1m.

GeoGebra, reproducción:

- Región Mínima. Véase Ilustración 112.

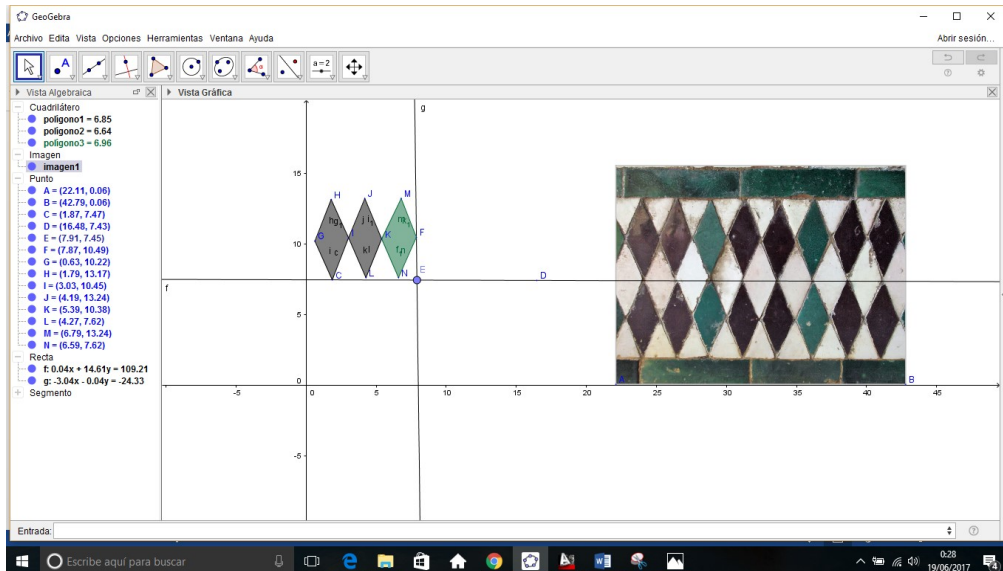


Ilustración 112. Región Mínima cenefa inferior. (La autoraz, 2017)

- Reflexión longitudinal. Véase Ilustración 113.

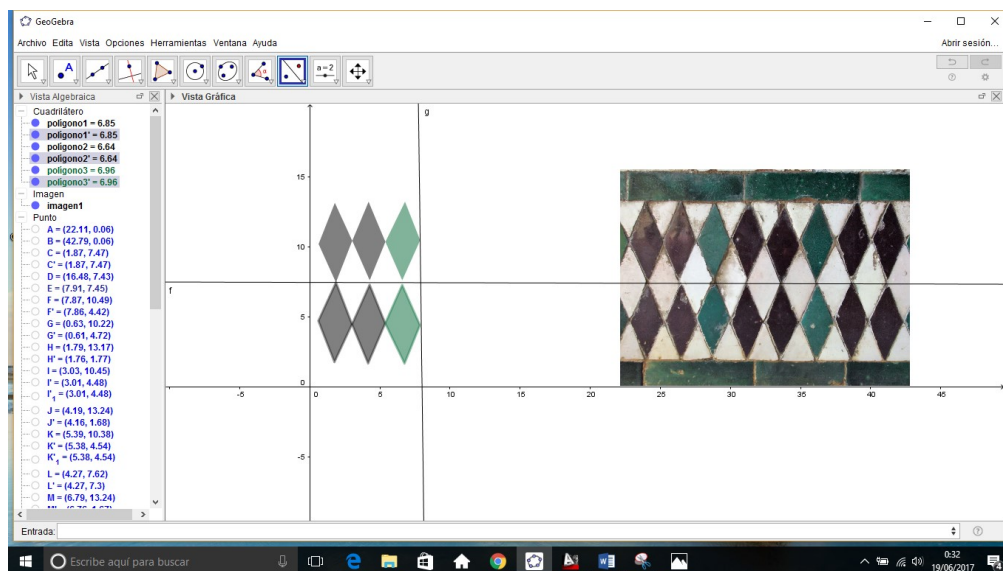


Ilustración 113. Reflexión horizontal. (La autora, 2017)

- Traslación longitudinal. Véase Ilustración 114.

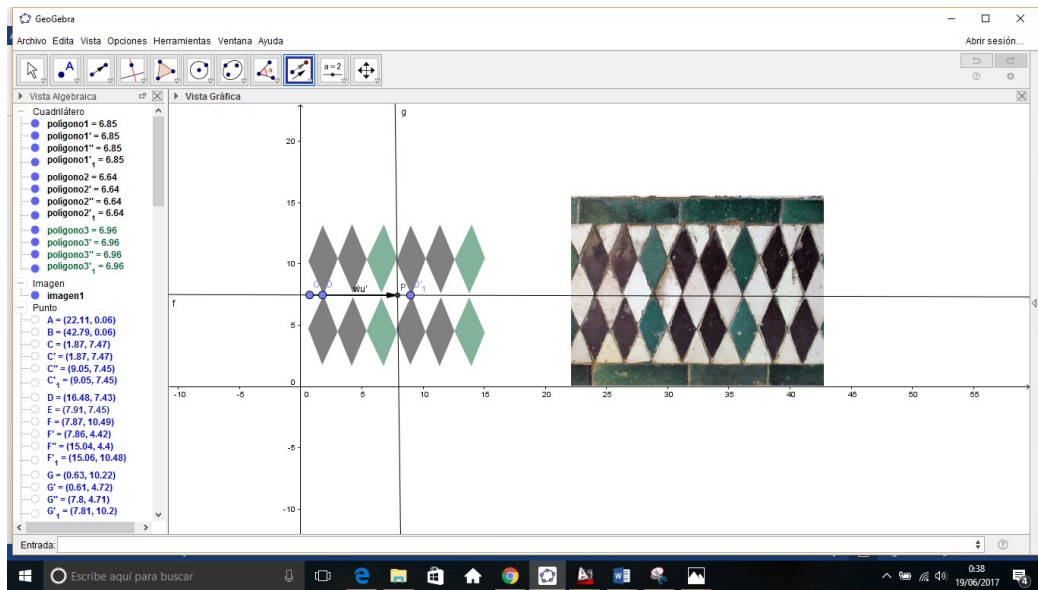


Ilustración 114. Traslación de Región Mínima con su reflexión longitudinal. (La autora, 2017)

Cenefa superior entre el Patio de las Doncellas y Salón de Embajadores

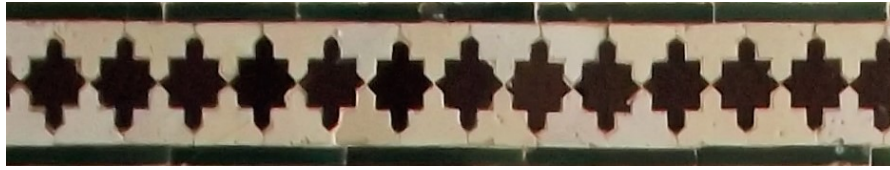


Foto 14. Cenefa superior entre el Patio de las Doncellas y el Salón de Embajadores. (La autora, 2017)

1. Ubicación: Jambas entre el Patio de las Doncellas y Salón de Embajadores.
2. Presentan decoración geométrica bicolor.
3. Grupo de Simetría lineal:
 - a. ¿Presenta una traslación? Si
 - b. ¿Presenta reflexiones transversales? Si
 - c. ¿Presenta reflexiones longitudinales? Si

Según el algoritmo de identificación del friso pertenece a Fmm.

GeoGebra, reproducción:

- Región Mínima con sus ejes de reflexión y vector de traslación longitudinal. Ilustración 115

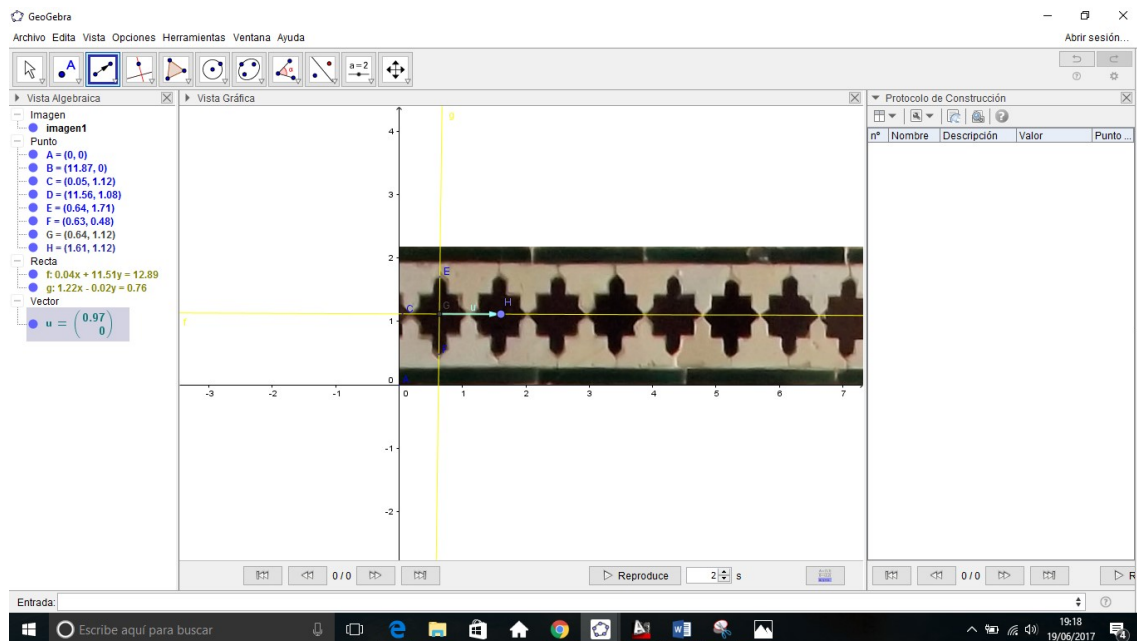


Ilustración 115. Ejes de Reflexiones y vector de traslación. (La autora, 2017)

Cenefa inferior lado este Patio de las Doncellas en el Panel R



15. Cenefa inferior lodo este Patio de las Doncellas en el panel R.. (La autora, 2017)

1. Ubicación: lado este del Patio de las Doncellas.
2. Presentan decoración geométrica
3. Grupo de Simetría lineal:
 - a. ¿Presenta una traslación? Si
 - b. ¿Presenta reflexiones transversales? No
 - c. ¿Presenta reflexiones longitudinales? No
 - d. ¿Presenta deslizamiento longitudinal? No
 - e. ¿Presenta giro? No

Según el algoritmo de identificación del friso pertenece a F11.

GeoGebra, reproducción:

- Región Mínima, eje reflexión y vector de traslación. Véase Ilustración 117.

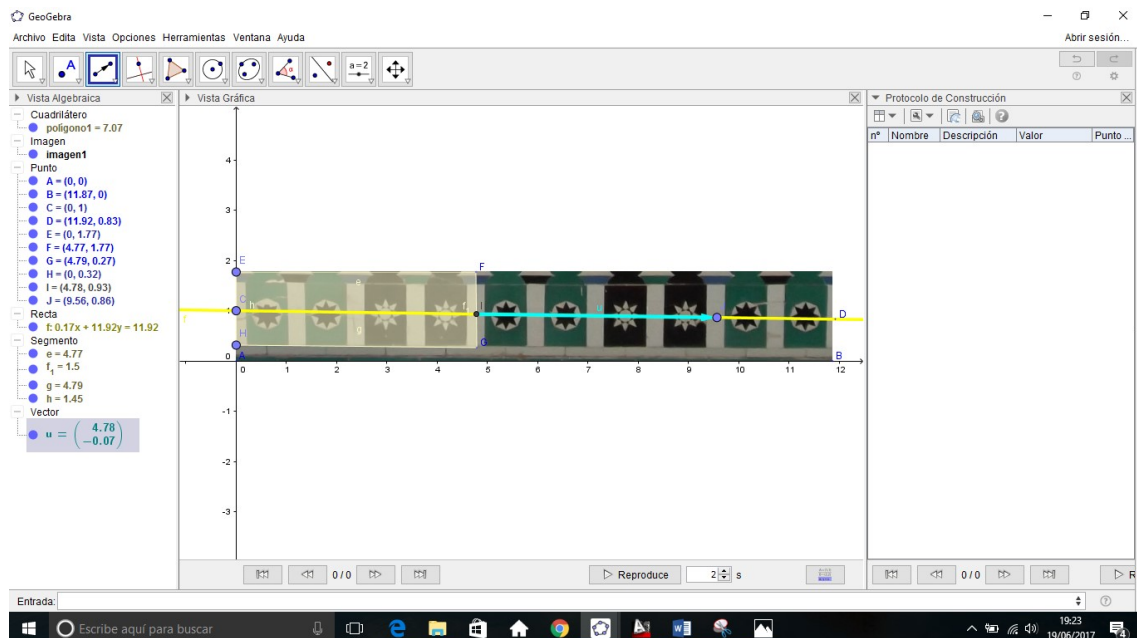


Ilustración 116. Eje de Reflexión longitudinal y vector de traslación. (La autora, 2017)

Cenefa inferior lado este Patio de las Doncellas en el panel N1



Foto 16. Cenefa inferior lado este Patio de las Doncellas en el panel N1. (La autora, 2017)

1. Ubicación: lado este del Patio de las Doncellas.
2. Presentan decoración geométrica
3. Grupo de Simetría lineal:
 - a. ¿Presenta una traslación? Si
 - b. ¿Presenta reflexiones transversales? Si
 - c. ¿Presenta reflexiones longitudinales? No
 - d. ¿Presenta deslizamiento longitudinal? No
 - e. ¿Presenta giro? No

Según el algoritmo de identificación del friso pertenece a Fm1.

GeoGebra, reproducción:

- Región Mínima. Véase Ilustración 118.

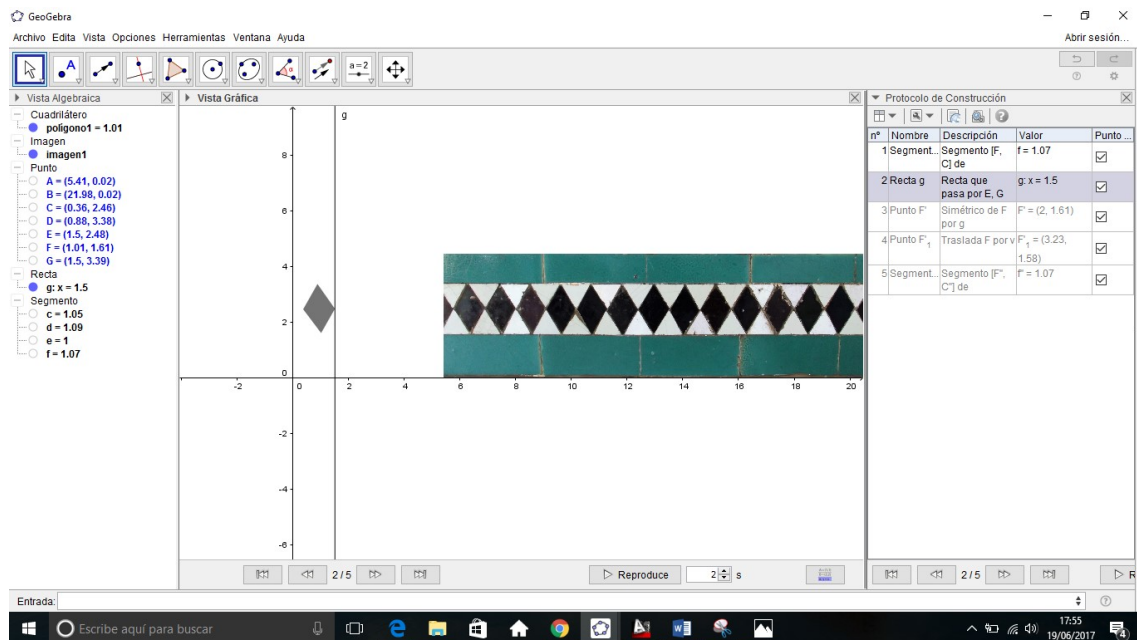


Ilustración 117. Región Mínima de la cenefa inferior del lado este. (La autora, 2017)

- Reflexión trasversal. Véase Ilustración 119.

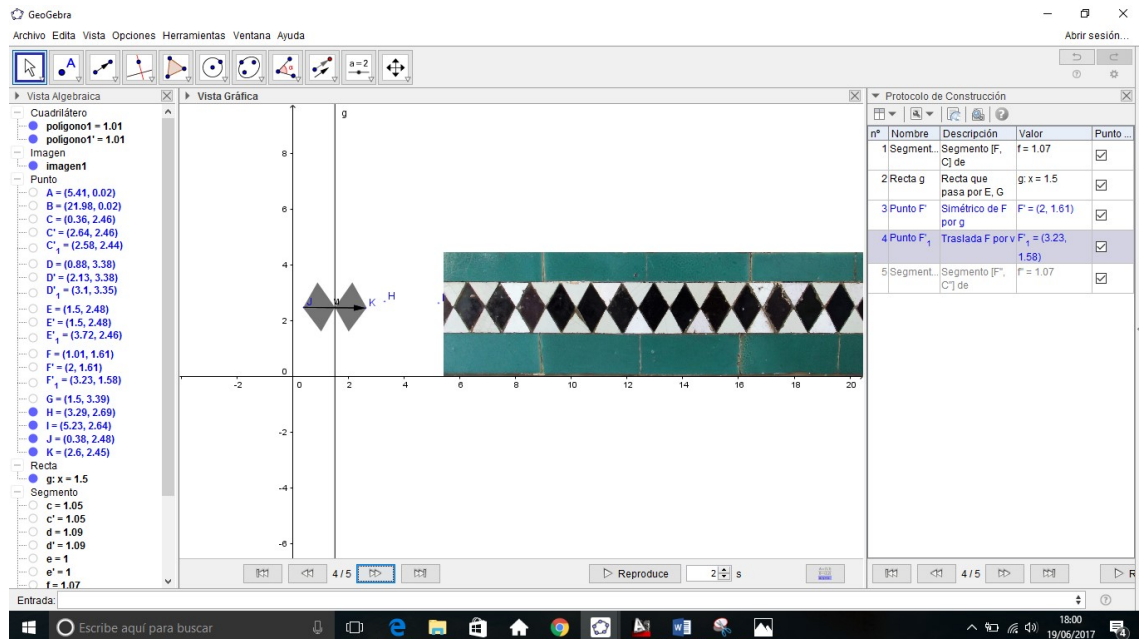


Ilustración 118. Reflexión vertical cenefa inferior del lado este. (La autora, 2017)

- Traslación longitudinal. Véase Ilustración 120.

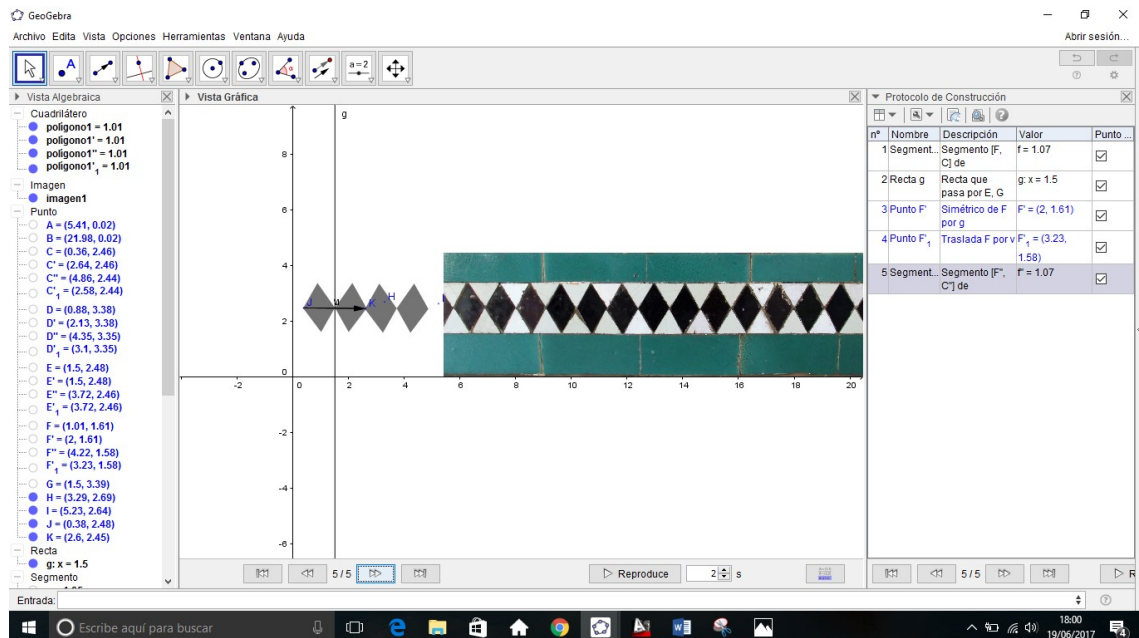
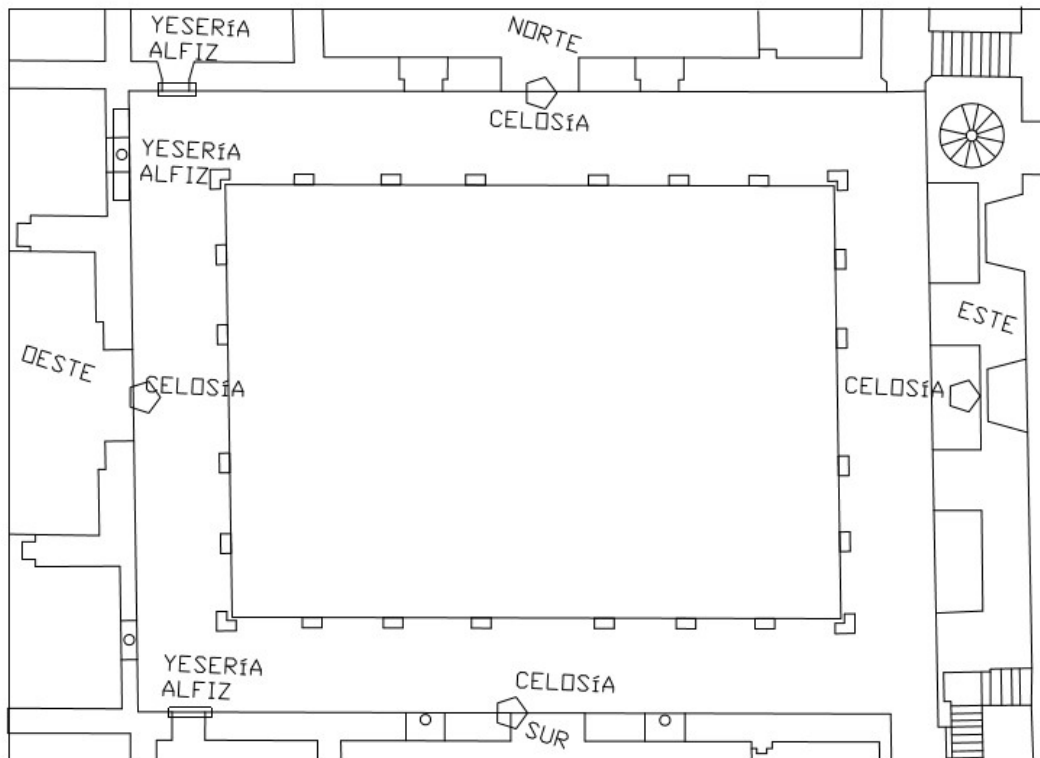


Ilustración 119. Traslación y formación de la cenefa inferior del lado este. (La autora, 2017)

2. YESERÍAS

En este apartado se estudian las yeserías, incluyendo las celosías, del Patio de La Doncellas que tienen trazado geométrico. No se estudian las de temas epigráficos. En general las Simetrías que presenta la decoración de las yeserías y celosías son muy similares a los alicatados, suelen ser trazados de lacería. Aunque sean trazados de lacería, se omiten los lazos por la dificultad de hacer con yeso los trazados. Por lo tanto si contienen reflexiones y deslizamientos y los grupos son más complejos.



Plano 2. Ubicación de Yesería y Celosías. (La autora, 2017)

Yesería alfiz



Foto 17. Yesería superior parte oeste del Patio de las Doncellas. (La autora, 2017)

1. Ubicación: borde superior y lateral de la ventana lado oeste del Patio de las Doncellas.
2. Presentan decoración rueda de ocho con una decoración con técnica de pintura azul.
3. Grupo de Simetría: dado que no es un panel, sino es una orla de la ventana, consideramos que presenta un grupo lineal (friso).
 - a. ¿Presenta una traslación? Si
 - b. ¿Presenta reflexiones transversales? Si
 - c. ¿Presenta reflexiones longitudinales? Si

Según el algoritmo de identificación del friso pertenece a Fmm.

Yesería alfiz



Foto 18. . Yesería superior parte noroeste y suroeste. (La autora, 2017)

1. Ubicación: borde superior y lateral de la puerta lado noroeste y suroeste del Patio de las Doncellas.
2. Presentan decoración en forma floral.
3. Grupo de Simetría: dado que no es un panel, sino es una orla de la ventana, consideramos que presenta un grupo lineal (friso).
 - a. ¿Presenta una traslación? Si
 - b. ¿Presenta reflexiones transversales? No
 - c. ¿Presenta reflexiones longitudinales? No

Según el algoritmo de identificación del friso pertenece a F11.

Celosía

1. Ubicación: Celosía sobre hueco de paso desde el Patio de las Doncellas al Salón de Embajadores.
2. Presentan decoración rueda de doce con rueda de ocho.
3. Grupo de Simetría:
 - a. ¿Presenta traslaciones? Si
 - b. ¿Mayor orden de giro? 4
 - c. ¿Reflexiones? Si
 - d. ¿Algún centro que no esté en los ejes? Si

Según el algoritmo de identificación del Grupo de Simetría de mosaico pertenece al grupo p4g.

Celosía

1. Ubicación: Celosía lado sur extremo este del Patio de Doncellas.
2. Presentan decoración rueda de doce con rueda de ocho
3. Grupo de Simetría:
 - a. ¿Presenta una traslación? Si
 - b. ¿hay reflexiones trasversales? Si
 - c. ¿hay reflexiones longitudinales? No

Según el algoritmo de identificación de friso pertenece a Fm1.

Celosía

1. Ubicación: Celosía lado sur extremo este del Patio de Doncellas.
2. Presentan decoración rueda de doce con rueda de ocho y rueda de dieciséis con rueda de ocho.

Laterales

3. Grupo de Simetría:
 - a. ¿Presenta una traslación? Si
 - b. ¿hay reflexiones trasversales? Si
 - c. ¿hay reflexiones longitudinales? No

Según el algoritmo de identificación de friso pertenece a Fm1.

Centrales

4. Grupo de Simetría:
 - a. ¿Presenta una traslación? Si
 - b. ¿hay reflexiones trasversales? Si
 - c. ¿hay reflexiones longitudinales? No

Según el algoritmo de identificación de friso pertenece a Fm1.

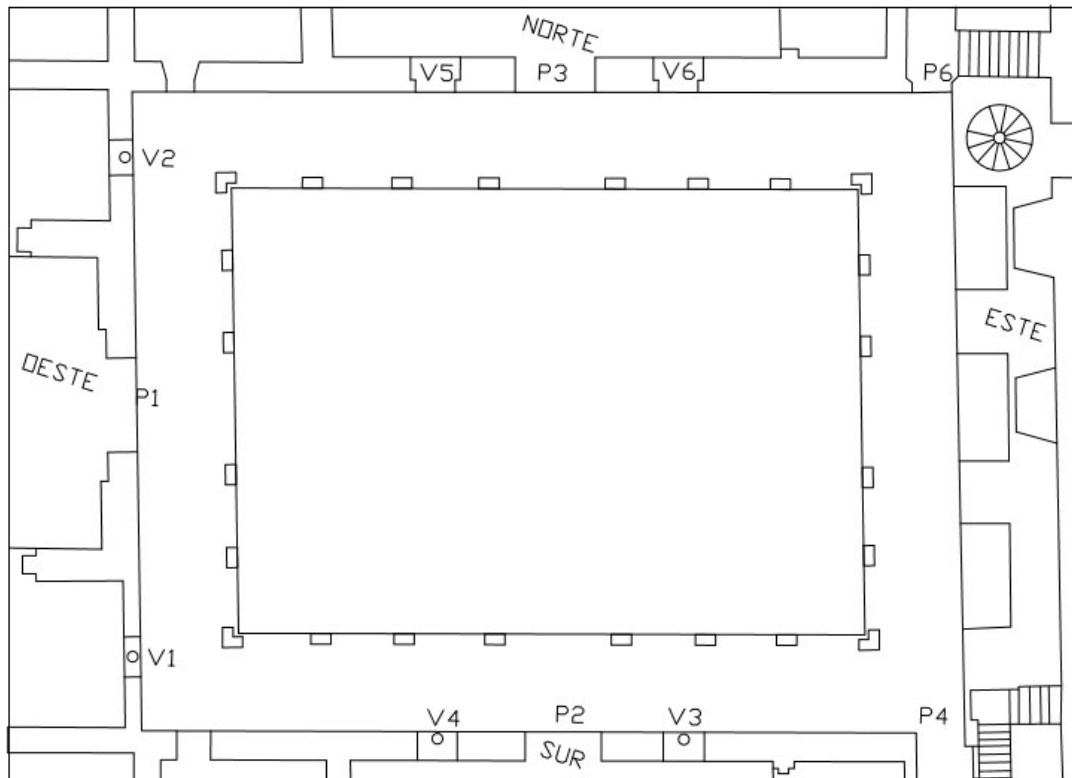
Celosía

1. Ubicación: Celosía sobre hueco de paso desde el Patio de las Doncellas al Dormitorio de los Reyes Moros.
2. Presentan decoración rueda de doce con rueda de nueve.
3. Grupo de Simetría:
 - a. ¿Presenta una traslación? Si
 - b. ¿hay reflexiones transversales? Si
 - c. ¿hay reflexiones longitudinales? Si

Según el algoritmo de identificación de friso pertenece a Fmm.

3. MADERA

a) Puertas y Contraventaneros



Plano 3. Ubicación de Puertas y ventanas. (Gutiérrez, 2017)

Puertas del Salón de la Media Naranja P1

Las dimensiones de cada una de sus hojas son 197 cm de ancho, 532 cm de alto y 10 cm de grosor. Un travesaño intermedio divide el plano de cada hoja en dos partes, dejando la superior con mayor presencia, y la inferior destinada a la ubicación de los postigos, cada uno de ellos son dos hojas que miden cada una 51 x 177 x 6cm. (Aguilera, 2011)

Su decoración mayormente es generada por ruedas de doce que se combinan con otras de ocho en el plano principal de cada hoja, mientras los postigos con ruedas de lazo de diez. Y está enmarcada con filacterias en árabe.

Clasificación:

Parte superior

1. ¿Hay reflexiones transversales? No
2. ¿Hay reflexión longitudinal? No
3. ¿Hay deslizamiento longitudinal? No
4. ¿Hay giros? Si

Según el algoritmo de identificación del friso pertenece a F12.

Parte inferior se distribuye en tres zonas una central y dos laterales.

Central

1. ¿Hay reflexiones transversales? No
2. ¿Hay reflexión longitudinal? No
3. ¿Hay deslizamiento longitudinal? No
4. ¿Hay giros? Si

Según el algoritmo de identificación del friso pertenece a F12.

Laterales

5. ¿Hay reflexiones transversales? No
6. ¿Hay reflexión longitudinal? No
7. ¿Hay deslizamiento longitudinal? No
8. ¿Hay giros? Si

Según el algoritmo de identificación del friso pertenece a F12.

Puertas de la Antigua Capilla P2

Se trata de otra gran puerta también de técnica **apeinazada**⁹ y de dos hojas, que miden 458 x 160 x 9 cm. cada una. Presenta una decoración unitaria en toda su altura, con los postigos acogidos dentro de la misma. Estos postigos son también de dos hojas, midiendo 156 x 36 x 4, 6 cm. cada una.

La decoración de laceria que muestra esta generada por ruedas de lazo de ocho occidental.

Parte superior:

1. ¿Hay reflexiones transversales? No
2. ¿Hay reflexión longitudinal? No
3. ¿Hay deslizamiento longitudinal? No
4. ¿Hay giros? Si

Según el algoritmo de identificación del friso pertenece a F12.

Puertas de la Alcoba Real P3

La tercera puerta de grandes dimensiones, **apeinada** como las anteriores, es la correspondiente a la Alcoba Real, en el lado norte del mismo patio principal, siendo las dimensiones de cada una de las dos hojas principales de 162 x 46 x 8,5 cm, y las del postigo, también de dos hojas, 166 x 33 x 4.6 cm.

La decoración esta generada por estrellas de seis puntas, haciendo un hexágono central en el plano de cada hoja.

1. ¿Hay reflexiones transversales? No
2. ¿Hay reflexión longitudinal? No
3. ¿Hay deslizamiento longitudinal? No
4. ¿Hay giros? Si

Según el algoritmo de identificación del friso pertenece a F1

⁹ APEINAZADA: Armadura de madera en la que la ornamentación a base de lazos se forma ensamblando los peinaos, sin clavarlos. (RAE)

Puerta de salida al Palacio Gótico P4

Este portalón está realizado en técnica **ataujerada**¹⁰ y es de una sola hoja de 173 x 380 x 7 cm, que cuenta con postigo, también de batiente único, de 82,5 x 171 x 5cm. Un travesaño intermedio divide la superficie en dos mitades, siendo el cuerpo superior donde se desarrolla la geometría de lazo en su mayor extensión y el cuerpo inferior, destinado al emplazamiento del postigo, que queda enmarcado entre dos bandas verticales de lazo.

Parte superior

No pertenece al grupo de mosaicos, ni al de frisos, porque no tienen traslaciones mínimas, por tanto es un grupo de Rosetas de Leonardo.

Por tanto es un grupo cíclico que pertenece a los Grupos de Leonardo.

1. ¿Orden de giro? 4

Según la identificación de Grupos de Leonardo es un C₄.

Parte inferior se distribuye en tres zonas una central y dos laterales.

Central

1. ¿Hay reflexiones transversales? No
2. ¿Hay reflexión longitudinal? No
3. ¿Hay deslizamiento longitudinal? No
4. ¿Hay giros? Si

Según el algoritmo de identificación del friso pertenece a F12.

Laterales

5. ¿Hay reflexiones transversales? No
6. ¿Hay reflexión longitudinal? No
7. ¿Hay deslizamiento longitudinal? No
8. ¿Hay giros? Si

Según el algoritmo de identificación del friso pertenece a F12.

Presenta decoración de lazo de ruedas de ocho y doce en el cuerpo del portalón, mientras que en el postigo es un lazo de diez lefe.

¹⁰ ARMADURA ATAUIERADA: Armadura de madera en la que la ornamentación de lazos, al colocarse por el intradós, oculta la estructura. (RAE)

Portalón de acceso desde el vestíbulo P5

Se trata de otro portalón de una sola hoja realizado en la técnica ataujerada, de 164 x 344 x 7 cm, que cuenta con un postigo, también de un batiente, de 82 x 171 x 5 cm. la estructura o bastidor queda conformada de mismo modo que en la puerta descrita anteriormente. También presentado la misma decoración geométrica.

Parte superior

No pertenece al grupo de mosaicos, ni al de frisos, porque no tienen traslaciones mínimas, por tanto es un grupo de Rosetas de Leonardo.

Por tanto es un grupo cíclico que pertenece a los Grupos de Leonardo.

1. ¿Orden de giro? 4

Según la identificación de Grupos de Leonardo es un C_4 .

Parte inferior se distribuye en tres zonas una central y dos laterales.

Central

1. ¿Hay reflexiones transversales? No
2. ¿Hay reflexión longitudinal? No
3. ¿Hay deslizamiento longitudinal? No
4. ¿Hay giros? Si

Según el algoritmo de identificación del friso pertenece a F12.

Laterales

1. ¿Hay reflexiones transversales? No
2. ¿Hay reflexión longitudinal? No
3. ¿Hay deslizamiento longitudinal? No
4. Hay giros

Según el algoritmo de identificación del friso pertenece a F12.

Ventana del salón de Toledanos V1

Esta Realizada en técnica **ataujerada**, de dos hojas articuladas, siendo los dos tramos menores de 25,5 x 236 x 5,5 cm. a estos tramos se unen mediante bisagras de hembrillas engarzadas, el cuerpo principal de cada hoja que mide 50 x 236 x 5,5 cm.

La decoración geométrica que presenta en su cara externa desarrolla una rueda de lazo de diez lefe ocupando las dos hojas principales, con su centro y eje en la línea de batientes entre ambas hojas.

1. ¿Hay reflexiones transversales? No
2. ¿Hay reflexión longitudinal? No
3. ¿Hay deslizamiento longitudinal? No
4. ¿Hay giros? Si

Según el algoritmo de identificación del friso pertenece a F12.

Ventana de la sala de Sevillanos V2

Es prácticamente idéntica a la anterior ventana de Toledanos, en cuanto a su estructura, también Realizada en técnica **ataujerada**, de dos hojas articuladas, siendo los dos tramos menores de 18,75 x 236 x 5,5 cm cada uno. A estos tramos se unen mediante bisagras de hembrillas, el cuerpo principal de cada hoja, que mide cada una también, 49 x 236 x 5,5 cm.

La decoración es de lazo de diez lefe al exterior.

1. ¿Hay reflexiones transversales? No
2. ¿Hay reflexión longitudinal? No
3. ¿Hay deslizamiento longitudinal? No
4. ¿Hay giros? Si

Según el algoritmo de identificación del friso pertenece a F12.

Ventana oriental de la antigua Capilla V3 y Ventana occidental de la Antigua Capilla V4

Las dos ventanas son iguales entre sí, de dos hojas cada una, con dimensiones de 75 x 253 x 5,5 cm, cada hoja, y Realizadas en técnica **ataujerada**.

La decoración geométrica de lacería compuesta por ruedas de lazo de estrellas de seis puntas, alineadas en el eje de cada hoja, enlazando con otras de ocho puntas que se alinean en los bordes, otras de cuatro puntas que se generan en el eje entre las de seis.

1. ¿Hay reflexiones transversales? No
2. ¿Hay reflexión longitudinal? No
3. ¿Hay deslizamiento longitudinal? No
4. ¿Hay giros? Si

Según el algoritmo de identificación del friso pertenece a F12.

Ventana occidental de la Alcoba Real V5 y Ventana oriental de la Alcoba Real V6

Las dos ventanas son iguales entre sí, de dos hojas, midiendo 74 x 254 x 5,5 cm. cada hoja. Realizadas con la técnica ataujerada.

Al exterior presenta una laceria generada por ruedas de lazo de ocho occidental, que se alinean en número de cinco en el eje de cada hoja, y otras tantas alineadas en cada uno de los borde de las mismas y de modo alterno.

1. ¿Hay reflexiones transversales? No
2. ¿Hay reflexión longitudinal? No
3. ¿Hay deslizamiento longitudinal? No
4. ¿Hay giros? Si

Según el algoritmo de identificación del friso pertenece a F12.

b) *Alfarjes*

Normalmente los alfarjes van lisos, con un simple agramillado en la cara inferior de sus piezas. Otras veces van adornados con lazo formado por las propias alfarjías, peinaos intermedios y tablillas.

Cuando el lazo elegido es complicado no se aviene con la disposición estructural; en lugar de esta labor apeinada se emplea el ataujerado: el lazo se compone con taujeles sobre un tablero que luego se fija por debajo del alfarje. Otra modalidad ornamental es el menado, adorno de tablas o listones recortados y fijados en esa tablazón del fondo.

También puede verse alfarjes con jaldetas, unas piezas transversales entre las alfarjías, que dividen las calles en cuadrado o rectángulos. Cuando las jaldetas tienen la misma sección que las alfarjías, el aspecto de la obra es de una cuadrícula de casetones y se llama artesonado. Es esta una técnica más renacentista que musulmana.

ALFARJE DE LA GALERÍA BAJA DEL PATIO DE LAS DONCELLAS

Las cuatro galerías que rodean el Patio de las Doncellas están cubiertas por un alfarje en el que se repite un sencillo tema de lazo a base de tres estrellas de ocho y dos hexágonos alargados o alfarzones más dos calles de más estrechas. Este tema se interrumpe en las esquinas y aproximadamente en el centro de cada galería para encajar una lacería más complicada resolviendo el encuentro de dos galerías perpendiculares o precediendo las puertas desde el patio dan paso a las salas aproximadamente a eje con él.

El decorado de las galerías este y norte formado por cinco estrellas de ocho y cuatro lacillos intercalados más dos calles perimetrales más estrechas, lo que suma un total de 32 gruesos. También las dos esquinas de la galería norte presentan este tema.

También observándolo me doy cuenta que no tiene traslaciones y por tanto no puede ser un mosaico, ni un friso.

Por tanto es un grupo cíclico que pertenece a los Grupos de Leonardo.

¿Orden de giro? 4

C_4

En la esquina suroeste está formado por un cuadrado central con lazo de ocho en sus vértices dejando un octógono central decorado con cubo de mocárabe. Este cuadrado tiene un total de 12 gruesos de eje a eje; está rodeado por dos calles más y finalmente la calle perimetral más estrecha sumando un total de 32 gruesos de borde a borde.

También observándolo me doy cuenta que no tiene traslaciones y por tanto no puede ser un mosaico, ni un friso.

Por tanto es un grupo cíclico que pertenece a los Grupos de Leonardo.

¿Orden de giro? 2

C_2

En la esquina sureste es un cuadrado definido por los ejes de la calle perimetral que en este caso forma parte del propio dibujo, interrumpiéndose la más estrecha que bordea toda la galería, tiene 29 gruesos de lado lo que obliga a que una de la calles interiores sea más ancha de lo que correspondería con el trazado exacto.

También observándolo me doy cuenta que no tiene traslaciones y por tanto no puede ser un mosaico, ni un friso.

Por tanto es un grupo cíclico que pertenece a los Grupos de Leonardo.

¿Orden de giro? 4

C_4

En el centro de la galería oeste es igual al sureste pero con 28 gruesos.

También observándolo me doy cuenta que no tiene traslaciones y por tanto no puede ser un mosaico, ni un friso.

Por tanto es un grupo cíclico que pertenece a los Grupos de Leonardo.

¿Orden de giro? 4

C_4

Por último la galería sur. El cuadrado a ejes de las calles de borde tiene 28 gruesos como es obligado por el ancho de la galería. Este cuadrado se subdivide en cuatro más pequeños de 14 gruesos d lado.

También observándolo me doy cuenta que no tiene traslaciones y por tanto no puede ser un mosaico, ni un friso.

Por tanto es un grupo cíclico que pertenece a los Grupos de Leonardo.

¿Orden de giro? 4

C_4

CONCLUSIONES Y PROSPECTIVA

A lo largo de los capítulos de esta memoria se ha recogido la catalogación y reproducción, mediante una aplicación desarrollada, de la ornamentación del Patio de las Doncellas del Real Alcázar de Sevilla según las técnicas de la Geometría Mudéjar. Para ello, no sólo se ha explicado el uso de la aplicación creada en GeoGebra, sino su fundamentación matemática. Echando la vista atrás a capítulos anteriores se considera alcanzado este objetivo en gran medida gracias a las imágenes y dibujos explicativos que completan los esquemas, algoritmos y descripciones.

En la introducción de este trabajo se han descrito cuatro objetivos principales del proyecto que se ven cumplidos gracias a los resultados obtenidos. La aplicación final resultante es capaz, a partir de varios polígonos, de generar 7 Grupos lineales, 17 Grupos Planos y los Grupos de Leonardo más importantes. Y estos ser aplicados a casos reales como el Patio de las Doncellas.

Además, permite al usuario ver los diferentes pasos intermedios del algoritmo utilizado en cada uno de ellos hasta la obtención del mosaico resultado final. Una de las prioridades era conseguir una interfaz fácil e intuitiva enfocada a un usuario no familiarizado con la informática, lo que se ha conseguido a través de una interfaz amigable con iconos en los botones de mosaicos representando cada uno de los grupos cristalográficos, para que sean fácilmente diferenciables, funcionalidades básicas resaltadas, etc.

En resumen una interfaz sencilla pero con una serie de características que hacen que la aplicación sea atractiva y fácil de usar. Otro de los objetivos más importantes es que el tiempo de generación fuera lo más reducido posible. Objetivo que se considera cumplido con unos tiempos de generación de mosaicos más que aceptables, pudiendo saltar de un mosaico a otro casi en el acto, al “clic” de un botón.

Es interesante observar que la aplicación creada permite reproducir paños decorativos mudéjares completos a partir de pequeñas porciones, por lo que consideramos de gran utilidad en la restauración de edificios monumentales mudéjares. Así mismo, es posible su uso para crear nuevos diseños de lienzos decorativos con la regularidad y armonía que imprime los grupos cristalográficos de la geometría.

Por último al ser construido bajo el marco de un applet firmado, la aplicación podrá ser ejecutada por Internet sin ningún tipo de problema, estando a disposición de cualquier persona a través de la Web.

La línea iniciada en este TFG puede ser fácilmente continuada con el estudio de otros recintos del Real Alcázar de Sevilla.

INDICE DE ILUSTRACIONES

<i>Ilustración 1. Ejemplo de Región Mínima. (La autora, 2017)</i>	10
<i>Ilustración 2. Izq. Miembros de la rueda de lazo; Dcha. Taujeles de la labor del lazo. (Albendea Ruz, 2011)</i>	17
<i>Ilustración 3. Juego de cartabones de lazo. (Albendea Ruz, 2011)</i>	18
<i>Ilustración 4. Cartabones para las ruedas de 8. (Albendea Ruz, 2011)</i>	19
<i>Ilustración 5. Cartabones para las rueda de 9. (Albendea Ruz, 2011)</i>	19
<i>Ilustración 6. Cartabones para las rueda de 10. (Albendea Ruz, 2011)</i>	20
<i>Ilustración 7. Cartabones para la rueda de 12. (Albendea Ruz, 2011)</i>	20
<i>Ilustración 8. Cartabones para la rueda de 16. (Albendea Ruz, 2011)</i>	21
<i>Ilustración 9. Desarrollo de rueda de 8. (Albendea Ruz, 2011)</i>	21
<i>Ilustración 10. Desarrollo de la rueda de 9. (Albendea Ruz, 2011)</i>	22
<i>Ilustración 11. Izq. Rueda de 10 fuera de calle y cuerda; Dcha. Rueda de 10 a calle y cuerda ..</i>	22
<i>Ilustración 12. Descúlate de rueda de 9 en otra de 12. (Albendea Ruz, 2011)</i>	23
<i>Ilustración 13. Despiece de los alicatados con GeoGebra. (Gutiérrez, 2017)</i>	25
<i>Ilustración 14. Grupo diedral D_3. (Moratalla)</i>	36
<i>Ilustración 15. Grupo diedral D_2 (Moratalla)</i>	36
<i>Ilustración 16: Grupo cíclico C_3 (Moratalla)</i>	37
<i>Ilustración 17. Friso grupo F11, imagen generada con GeoGebra. (La autora, 2017)</i>	39
<i>Ilustración 18. Friso grupo f12, imagen generada con GeoGebra. (La autora, 2017)</i>	40
<i>Ilustración 19. Friso grupo Fm1, imagen generada con GeoGebra. (La autora, 2017)</i>	40
<i>Ilustración 20. Friso grupo F1m, imagen generada con GeoGebra. (La autora, 2017)</i>	41
<i>Ilustración 21. Friso grupo F1g, imagen generada con GeoGebra. (La autora, 2017)</i>	41
<i>Ilustración 22. Friso grupo Fmg, imagen generada con GeoGebra. (La autora, 2017)</i>	42
<i>Ilustración 23. Friso grupo Fmm, imagen generada con GeoGebra. (La autora, 2017)</i>	42
<i>Ilustración 24. Algoritmo, identificación de un friso. (Gilsanz Mayor, 2010)</i>	43
<i>Ilustración 25. Frisos más repetitivos del Real Alcázar. (La autora, 2017)</i>	44

Ilustración 26. Rectángulo: paralelogramo fundamental. (La autora, 2017).....	47
Ilustración 27. Se crea la casilla de control. (La autora, 2017).....	48
Ilustración 28. Polígono 2. (La autora, 2017)	48
Ilustración 29. Casilla de control: ocultar figura. (La autora, 2017).....	49
Ilustración 30. Herramienta vector. (La autora, 2017).....	49
Ilustración 31. Vectores. (La autora, 2017)	50
Ilustración 32. Herramienta traslación. (La autora, 2017)	50
Ilustración 33. Mosaico: Grupo Plano p1. (La autora, 2017).....	51
Ilustración 34. Crear Región Unidad (rectángulo). (La autora, 2017)	52
Ilustración 35. Ejes de Simetría. (La autora, 2017).....	52
Ilustración 36. Región Unidad y Región Mínima. (La autora, 2017).....	53
Ilustración 37. Reflexión al eje horizontal. (La autora, 2017)	53
Ilustración 38. Deslizamiento eje horizontal. (La autora, 2017)	54
Ilustración 39. Mosaico Grupo Plano pg. (La autora, 2017).....	54
Ilustración 40. Región Unidad (rectángulo). (La autora, 2017)	55
Ilustración 41. Eje de Simetría vertical. (La autora, 2017)	56
Ilustración 42. Región Mínima. (La autora, 2017).....	56
Ilustración 43. Simetría de Región Mínima. (La autora, 2017).....	57
Ilustración 44. Vectores de traslación. (La autora, 2017)	57
Ilustración 45. Mosaico pm. (La autora z, 2017)	58
Ilustración 46. Región Unidad (rombo). (La autora, 2017)	59
Ilustración 47. Región Unidad, Región Mínima y eje de Simetría. (La autora, 2017)	59
Ilustración 48. Simetría Región Mínima. (La autora, 2017).....	60
Ilustración 49. Vectores y primera traslación. (La autora, 2017).....	60
Ilustración 50. Mosaico cm. (La autora, 2017)	61
Ilustración 51. Región Unidad y recta para el giro. (La autora, 2017).....	62
Ilustración 52. Región Mínima. (La autora, 2017).....	62

Ilustración 53. Rotación alrededor de un punto. (La autora, 2017).....	63
Ilustración 54. Mosaico p2. (La autora, 2017).....	63
Ilustración 55. Región Unidad (rectángulo), Región Mínima (1/4 rectángulo). (La autora, 2017)	64
Ilustración 56. Rotación en el centro de la Región Unidad. (La autora, 2017)	65
Ilustración 57. Mosaico pgg. (La autora, 2017).....	65
Ilustración 58. Región Unidad, Región Mínima, Ejes de Simetría y Centro de rotación. (La autora, 2017).....	66
Ilustración 59. Rotación de Región Mínima (1/8 de la Región Unidad). (La autora, 2017).....	67
Ilustración 60. Simetría vertical. (La autora, 2017).....	67
Ilustración 61. Mosaico pmg. (La autora, 2017).....	68
Ilustración 62. Región Unidad, Región Mínima, centro de rotaciones y ejes de Simetría. (La autora, 2017).....	69
Ilustración 63. Rotación de 180º. (La autora, 2017)	69
Ilustración 64. Reflexión horizontal y vertical. (La autora, 2017)	70
Ilustración 65. Mosaico cmm. (La autora, 2017).....	70
Ilustración 66. Región Unidad (rectángulo), Región Mínima (1/4 Región Unidad) y ejes de Simetría. (La autora, 2017).....	71
Ilustración 67. Simetría Región Mínima. (La autora, 2017).....	72
Ilustración 68. Rotación 180º. (La autora, 2017)	72
Ilustración 69. Mosaico pmm. (La autora, 2017)	73
Ilustración 70. Región Unidad, centros de Rotaciones y Región Mínima (1/3 parte de la Región Unidad). (La autora, 2017)	74
Ilustración 71. Rotaciones de la Región Unidad y mínima. (La autora, 2017)	74
Ilustración 72. Mosaico p3. (La autora, 2017).....	75
Ilustración 73. Región Unidad, Región Mínima (1/6 del rombo) y centros de rotaciones. (La autora, 2017).....	76
Ilustración 74. Reflexión Región Mínima y Rotación Región Unidad 120º. (La autora, 2017)....	76
Ilustración 75. Mosaico p3m1. (La autora, 2017)	77
Ilustración 76. Mosaico p31m. (La autora, 2017)	77

Ilustración 77.Región Unidad (cuadrado), Región Mínima (1/4 parte de Región Unidad). (La autora, 2017).....	78
Ilustración 78. Rotaciones de 90º, Mosaico p4. (La autora, 2017)	79
. Ilustración 79.Región Unidad (cuadrado), Región Mínima (1/8 parte de Región Unidad), centro de rotación y ejes de reflexión. (La autora, 2017)	80
Ilustración 80. Mosaico p4g. (La autora, 2017).....	80
Ilustración 81.Región Unidad, Región Mínima, ejes de Simetría y centro de rotación. (La autora, 2017)	81
Ilustración 82.Mosaico p4m. (La autora, 2017)	82
Ilustración 83. Resumen de los Grupos Planos de Simetría. (Gilsanz Mayor, 2010).....	84
Ilustración 84.Algoritmo de identificación del Grupo de Simetría de un mosaico. (Gilsanz Mayor, 2010).....	84
Ilustración 85. Región Unidad (cuadrado). (La autora, 2017)	87
Ilustración 86.Región Mínima (1/4 parte de la Región Unidad). (La autora, 2017)	87
Ilustración 87. Región Mínima (1/8 parte de la Región Unidad). (La autora, 2017)	88
Ilustración 88. Región Mínima con lacería detallada. (La autora, 2017).....	88
Ilustración 89. Región Mínima con un giro aplicado de 90º. (La autora, 2017).....	89
Ilustración 90. Región Mínima segundo giro aplicado. (La autora, 2017).....	89
Ilustración 91. Tercer giro completa Región Unidad y se hace traslación. (La autora, 2017).....	90
Ilustración 92. Región Mínima. ((La autora, 2017).....	92
Ilustración 93.Giro 60º de la Región Mínima y forma la Región Unidad (Rombo). (La autora, 2017)	92
Ilustración 94. Segundo giro de 60º de la Región Mínima. (La autora, 2017)	93
Ilustración 95. Tercer giro 60º. (La autora, 2017)	93
Ilustración 96. Cuarto giro 60º. (La autora, 2017).....	94
Ilustración 97. Quinto giro y Figura de traslación. (La autora, 2017).....	94
Ilustración 98. Mosaico panel L, 6 giros de 60º y 2 traslaciones. (La autora, 2017)	95
Ilustración 99. Región Unidad paralelogramo. (La autora, 2017)	97
Ilustración 100. Región Mínima con centro de giro. (La autora, 2017)	97

Ilustración 101. Traslación de paralelogramo y formación del mosaico. (La autora, 2017).....	98
Ilustración 102. Mosaico A1 con clasificación simétrica C_4 . (La autora, 2017)	101
Ilustración 103. Mosaico A2 con clasificación simétrica C_4 . (La autora, 2017)	103
Ilustración 104. Mosaico C con clasificación simétrica C_4 . (La autora, 2017)	105
Ilustración 105. Mosaico D con clasificación C_4 . (La autora, 2017).....	107
Ilustración 106. Región Mínima cenefa superior Patio de las Doncellas. (La autora, 2017)....	109
Ilustración 107. Simulación de rotación. (La autora, 2017)	110
Ilustración 108. Región Mínima cenefa inferior que rodea Patio de las Doncellas. (La autora, 2017)	111
Ilustración 109. Reflexión vertical cenefa inferior que rodea Patio de las Doncellas. (Gutierrez, 2017)	112
Ilustración 110. Reflexión longitudinal cenefa inferior que rodea Patio de las Doncellas. (La autora, 2017).....	112
Ilustración 111. Traslación y formación del friso inferior del Patio de las Doncellas. (La autora, 2017)	113
Ilustración 112. Región Mínima cenefa inferior. (La autora, 2017).....	115
Ilustración 113. Reflexión horizontal. (La autora, 2017).....	115
Ilustración 114. Traslación de Región Mínima con su reflexión longitudinal. (La autora, 2017)	116
Ilustración 115. Ejes de Reflexiones y vector de traslación. (La autora, 2017).....	117
Ilustración 116. Eje de Reflexión longitudinal y vector de traslación. (La autora, 2017).....	118
Ilustración 117. Región Mínima de la cenefa inferior del lado este. (La autora, 2017)	119
Ilustración 118. Reflexión vertical cenefa inferior del lado este. (La autora, 2017)	120
Ilustración 119. Traslación y formación de la cenefa inferior del lado este. (La autora, 2017).....	120

ÍNDICE DE PLANOS

Plano 1. Patio de las Doncellas, con Referencias de paños de Alicatados. (La autora, 2017) ...	85
Plano 2. Ubicación de Yasería y Celosías. (La autora, 2017)	121
Plano 3. Ubicación de Puertas y ventanas. (Gutierrez, 2017)	126

INDICE DE FOTOS

Foto 1. Panel tipo L. (La autora, 2017)	86
Foto 2. Panel tipo N1. (La autora, 2017)	91
Foto 3. Panel tipo P. (La autora, 2017).....	96
Foto 4. Panel tipo R. (La autora, 2017).....	99
Foto 5. Panel tipo A1. (La autora, 2017)	100
Foto 6. Panel tipo A2. (La autora, 2017)	102
Foto 7. Panel tipo C. (La autora, 2017).....	104
Foto 8. Panel tipo D. (La autora, 2017)	106
Foto 9. Panel tipo E. (La autora, 2017).....	108
Foto 10. Cenefa superior que rodea el Patio de las Doncella. (La autora, 2017).....	109
Foto 11. Cenefa superior lado este del Patio de las Doncellas. (La autora, 2017).....	110
Foto 12. Cenefa inferior que rodea el Patio de las Doncellas. (La autora, 2017).....	111
Foto 13. Cenefa inferior lado este del Patio de las Doncellas. (La autora, 2017)	114
Foto 14. Cenefa superior entre el Patio de las Doncellas y el Salón de Embajadores. (La autora, 2017)	117
15. Cenefa inferior lado este Patio de las Doncellas en el panel R.. (La autora, 2017)	118
Foto 16. Cenefa inferior lado este Patio de las Doncellas en el panel N1. (La autora, 2017)...	119
Foto 17. Yasería superior parte oeste del Patio de las Doncellas. (La autora, 2017).....	122
Foto 18. . Yasería superior parte noroeste y suroeste. (La autora, 2017)	123

REFERENCIAS

CITADA

- Albendea Ruz, E. (2011). *La carpintería de lo blanco de la Casa de Pilatos de Sevilla*. Universidad de Sevilla: Tesis doctoral.
- BLASCO LÓPEZ, F. J. (2007-2009). Caracterización de Yeserías de tradición Islámica del Real Alcázar. *Informes de la Construcción Vol. 65*, 530, 177-182.
- Castro Fuertes, J. (2015). *Los revestimientos cerámicos en el pabellón de Carlo V del Real Alcázar de Sevilla*. Universidad de Sevilla: Tesis doctoral.
- Chávez de Diego, M. J. (2006). *Un paseo matemático de la técnica y el arte de construir. Lección inaugural de la ETSIE 2005-2006*. Universidad de Sevilla.
- Cómez Ramos, R. (1996). *El Alcázar del Rey Don Pedro*. Diputación de Sevilla.
- Costa, A. (Dirección). (1995). *Arabescos y Geometría* [Película].
- DE VILLANUEVA DOMINGUEZ, L. (1996). *Yeserías españolas; propuesta de tipología histórica*. Primer congreso nacional de historia de la construcción, (págs. 1003-1013). CÁDIZ.
- Fernández Aguilera, S. F. (2011). *Portaventanero mudéjares en el Real Alcázar de Sevilla*. Diputación de Sevilla.
- Gestoso y Pérez, J. (1995). *Historia de los barros vidriados sevillanos*. Ayuntamiento de Sevilla.
- Gilsanz Mayor, M. Á. (2011). *Simetrías en la ornamentación arquitectónica. El esgrafiado segoviano*. Universidad Politécnica de Madrid: Tesis doctoral.
- González Ramírez, M. I. (1995). *El trazado Geométrico en la ornamentación del Alcázar de Sevilla*. Sevilla: Conserjería de Obras Públicas y transportes.
- Hohenwarter, M. (15 de Julio de 2016). *GeoGebra.org*. Obtenido de [GeoGebra.org](https://www.geogebra.org/): <https://www.geogebra.org/>
- Livio, M. (2016). *La ecuación jamás resuelta: como dos genios matemáticos descubrieron el lenguaje de la simetría*. Barcelona: Ariel.
- Messina, B. (2004). *Geometrie in pietra : la moschea di Cordova*. Roma: Giannini .
- Mora, J. A. (10 de Marzo de 2017). <http://jmora7.com>. Obtenido de <http://jmora7.com>.
- Moratalla, A. (2008). Grupos de Leonardo en la Mezquita del Cristo de la luz. *Segundo Congreso Internacional de Matemáticas en la Ingeniería y la Arquitectura* . Madrid.
- Navarro, J. (2011). *Al otro lado del espejo: la simetría en matemáticas*. Barcelona: RBA.
- Rodríguez, M. (2009-2010). *Generación de teselaciones periódicas: Grupos Cristalográficos*. Madrid: Universidad Politécnica de Madrid.

- Romero Murube, J. (1977). *Alcázar de Sevilla*. Madrid: Patrimonio Nacional.
- RUBIO DOMENE, R. F. (2010). *Yeserías de la Alambra: técnica y conservación*. Universidad de Granada.
- Tabales Rodriguez, M. A. (2000). *Investigaciones Arqueológicas en el Alcázar de Sevilla*. Sevilla: Instituto Andaluz del Patrimonio Histórico.
- Tabales Rodriguez, M. A. (2009). La investigación arqueológica en edificios históricos. Metodología y experiencias. El Alcázar de Sevilla. *Arqueología aplicada al Estudio e Interpretación de Edificios Históricos*. Madrid.
- Tabales Rodriguez, M. A. (2010). *El Alcazar de Sevilla. Reflexiones sobre su transformación durante la Edad Media. Memoria de Investigación Arqueológica 2000-2005*. Sevilla: Consejería de Cultura de la Junta de Andalucía.
- Tabales Rodriguez, M. A. (2016). *Excavaciones Arqueológicas en el Patio de las Doncellas del Palacio de Pedro I. Memoria de Investigación 2002-2005*. Sevilla: Patronato del Real Alcázar y Casa Consistorial.
- Torres Balbás, L. (1949). *Arte almohade, arte nazarí, arte mudéjar*. Madrid: Plus-Ultra .

CONSULTADA

- Amador de los Ríos (1875). *Mosaicos, Aliceres y Azulejos Árabes y mudéjares*. Imprenta de T. Fortanet .
- Becerra, J.M. (1992). *Alicatados de Sevilla*. Probyc . Sevilla
- Cabezas, J.M (2008). *Real Alcázar de Sevilla: 1990-2008*. Sevilla
- Calero Castillo, A.I. (2013). Las yeserías del Real Alcázar de Sevilla. Estudio comparativo de la fachada de Pedro I y el Patio de las Doncellas. Materiales y cronología. *X Congreso de Arqueometría*. Castellón.
- Garófano, I. *Caracterización físico- químico de morteros de revestimientos y pinturas murales, de época romana e islámica de la excavación arqueológica del Patio de Bandera, y cerámicas vidriadas de los siglos XI-XV, del Real Alcázar de Sevilla*. Universidad de Sevilla. Tesis doctoral
- Pleguezuelo Hernández, A. (1989). *Azulejo sevillano: catálogo del Museo de Artes y Costumbres Populares de Sevilla*. Padilla Libros Editores & Libreros.
- Revista Épsilon (1995). La Alhambra*. Granada: S.A.E.M. Thales.
- Tinoco Mora, P. (2016) *Fotogrametría de los alicatados del dormitorio de los Reyes Moros del Real Alcázar de Sevilla*. PFG. Universidad de Sevilla.
- Borras Gualis, G.M. (2010) Materiales, técnicas artísticas y sistemas de trabajo: la cerámica mudéjar. Actas del III Simposio internacional de mudejarismo. 317-328

