O teorema do homomorfismo

(A) Sejam E, F ELCs Hausdorff e $u \in L(E,F)$. Dizemos que u é um *homomorfismo* se dado U aberto em E então $u(U)$ é aberto em $u(E)$. Equivalentemente, u é um homomorfismo se a aplicação $u^\sharp : E/\ker u \to F$ induzida por u define um isomorfismo topológico entre $E/\ker u$ e $u(E)$.

(B) *Se E, F são ELCs Hausdorff e se $u \in L(E,F)$ então*

$$(\ker u)^{\text{o}} = \overline{{}^t u(F')},$$

fecho em $\sigma(E', E)$.

Basta verificar que ${}^t u(F')^{\text{o}} = \ker u$ (teorema do bipolar). Uma vez que ${}^t u(F') = \{f \circ u : f \in F'\}$ segue que $x \in^t u(F')^{\text{o}}$ se, e somente se, $f(u(x)) =$ para todo $f \in F'$, que é é equivalente a $u(x) = 0$ (teorema de Hahn-Banach). $\square$

(C) Valem também as igualdades, quaisquer que sejam $A \subset E$ $B \subset F'$:

$$u(A)^{\text{o}} = ({}^t u)^{-1}(A^{\text{o}}),\ {}^t u(B)^{\text{o}} = u^{-1}(B^{\text{o}}).$$

(D) Teorema do homomorfismo (Grothendieck): *Se E, F são ELCs Hausdorff e se $u \in L(E,F)$ então u é um homomorfismo se, e somente se, valem as duas propriedades seguintes:*

1. ${}^t u(F')$ *é $\sigma(E', E)$-fechado;*
2. *Se $\mathcal{M} \subset ({}^t u)(F')$ é equicontínuo em E' então existe $\mathcal{N} \subset F'$ equicontínuo tal que $\mathcal{M} \subset ({}^t u)(\mathcal{N})$.*

Assuma que u é um homomorfismo e tome x_0' pertencente ao fecho de ${}^t u(F')$ em $\sigma(E', E)$. Então por (B) temos que x_0' se anula sobre o kernel de u. Fica então bem definida a aplicação linear

$$\ell : u(E) \to \mathbb{K}, \quad \ell(u(x)) = x_0'(x).$$

Provemos que ℓ é contínua, quando $u(E)$ é munida da topologia induzida por F. De fato, seja $\varepsilon > 0$. Então $U = \{x \in E : |\langle x_0', x\rangle| \leq \varepsilon\}$ é uma vizinhança de 0 em E e portanto $u(U)$ é uma vizinhança de zero em $u(E)$

e $|\ell| \leq \varepsilon$ em $u(U)$. Pelo teorema de Hahn-Banach o funcional ℓ se estende a um elemento $y_0' \in F_0$. Agora ${}^t u(y_0') = y_0' \circ u = \ell \circ u = x_0'$, e portanto $x_0' \in^t u(F')$. Assim vale (1). Tome agora $\mathcal{M}$ como em (2) e seja $V \in \Phi_E(0)$ tal que $\mathcal{M} \subset V^{\mathrm{o}}$. Como u é um homomorfismo existe um tonel $W \in \Phi_F(0)$ tal que $W \cap u(E) \subset u(V)$. Logo,

$$V + \ker u = u^{-1}(u(V)) \supset u^{-1}(W \cap u(E)) = u^{-1}(W) =^t u(W^{\mathrm{o}})^{\mathrm{o}},$$

já que W é um tonel. Então

$$\mathcal{M} \subset^t u(F') \cap V^0 = (\ker u)^{\mathrm{o}} \cap V^{\mathrm{o}} \subset (\ker u + V)^{\mathrm{o}} \subset^t u(W^{\mathrm{o}})^{\mathrm{oo}}.$$

Finalmente, com W^{o} é fracamente compacto em F' (Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki) segue que ${}^t u(W^0)$ é fracamente compacto, e portanto fracamente fechado em E'. Consequentemente ${}^t u(W^{\mathrm{o}})^{\mathrm{oo}} =^t u(W^{\mathrm{o}})$ e (2) fica provada, com $\mathcal{N} = W^{\mathrm{o}}$.

Precisamos agora demonstrar que (1)+(2) implicam que u é um homomorfismo. Para isto precisamos mostrar que dada $V_1 \in \Phi_E(0)$ existe $W \in \Phi_F(0)$ tal que $W \cap u(E) \subset u(V_1)$. Considerando a aplicação canônica $\Pi : E \to E/\ker u$ existe um tonel $V_2 \in \Phi_{E/\ker u}(0)$ tal que $V_2 \subset \Pi(V_1)$. Então $V \doteq \Pi^{-1}(V_2) \in \Phi_E(0)$ é um tonel em E que contém $\ker u$. Se mostrarmos que existe $W \in \Phi_F(0)$ tal que $W \cap u(E) \subset u(V)$ então

$$W \cap u(E) \subset u(V) \subset u(V_1)$$

já que dado $x \in V$ existe $y \in V_1$ com $x - y \in \ker u$.

Seja $\mathcal{M} \doteq V^{\mathrm{o}}$. Então $\mathcal{M}$ é equicontínuo em E' e também $\mathcal{M} \subset (\ker u)^{\mathrm{o}} = {}^t u(F')$ por (1). Por (2) existe $\mathcal{N}$ equicontínuo tal que $V^{\mathrm{o}} \subset {}^t u(\mathcal{N})$. Seja $W \in \Phi_F(0)$ um tonel tal que $\mathcal{N} \subset W^{\mathrm{o}}$. Então $W \subset \mathcal{N}^{\mathrm{o}}$ donde

$$u^{-1}(W) \subset u^{-1}(\mathcal{N}^{\mathrm{o}}) = {}^t u(\mathcal{N})^{\mathrm{o}} \subset V$$

onde usamos (C) e o teorema do bipolar. Logo

$$W \cap u(E) \subset u(V)$$

e o teorema está demonstrado. □

(E) Se E, F são ELCs Hausdorff e se $u : E \to F$ é linear dizemos que u é um *homomorfismo fraco* se $u : E_{\sigma(E,E')} \to F_{\sigma(F,F')}$ é um homomorfismo, isto é, $u \in L(E_{\sigma(E,E')}, F_{\sigma(F,F')})$ e $u : E \to u(E)$ é uma aplicação aberta para as topologias fracas.

(F) *Seja $u \in L(E_{\sigma(E,E')}, F_{\sigma(F,F')})$. Então u é um homomorfismo fraco se, somente se, ${}^t u(F')$ é $\sigma(E', E)$-fechado.*

Por (D) se u é um homomorfismo fraco então ${}^t u(F')$ é $\sigma(E', E)$-fechado. Reciprocamente, seja $U \in \Phi_{E_{\sigma(E,E')}}(0)$. Queremos mostrar que existe $W \in \Phi_{F_\sigma(F,F')}$ tal que

$$W \cap u(E) \subset u(U).$$

Como em (D) podemos assumir que U é um tonel e que $\ker u \subset U$. Temos $U^{\text{o}} \subset (\ker u)^{\text{o}} =^t u(F')$, onde a última igualdade segue da hipótese. Além do mais, U^0 é um conjunto convexo equilibrado e fechado contido em um subespaço de dimensão finita de E' e portanto existem $x'_j \in^t u(F')$, $j = 1 \ldots, k$, tais que U^0 está contido na envoltória convexa equilibrada K de $\{x'_1, \ldots, x'_k\}$. Então $U_0 \doteq K^{\text{o}} = \{x \in E : |\langle x'_j, x\rangle| \leq 1, j = 1, \ldots, k\}$ está contido em U pelo teorema do bipolar. Tomemos agora $y'_j \in F'$ tais que ${}^t u(y'_j) = x'_j$, $j = 1, \ldots, k$, e seja $W = \{y \in F : |\langle y'_j, y\rangle| \leq 1\}$. Se $y \in W \cap u(E)$ então $y = u(x)$ para algum $x \in E$ e também $|\langle y'_j, y\rangle| = |\langle y'_j, u(x)\rangle| = |\langle x'_j, x\rangle| \leq 1$, $j = 1, \ldots, k$, o que implica $y \in u(U_0) \subset u(U)$. O resultado está demonstrado. $\square$

(G) *Sejam G, H dois ELC's Hausdorff, com G metrizável. Seja $v : G \to H$ linear e suponha que $v : G_{\sigma(G,G')} \to H_{\sigma(H,H')}$ seja contínua. Então $v \in L(G, H)$.*

A demonstração se dá por contradição. Seja $\{U_n\} \subset \Phi_G(0)$ um sistema fundamental enumerável de vizinhanças de 0 , com $U_{n+1} \subset U_n$ para todo n, e suponha que exista $V \in \Phi_H(0)$ convexa e equilibrada tal que $v^{-1}(V) \not\subset (1/n)U_n$ para todo n. Então existirá uma sequência em $\{x_n\}$ em G tal que $nx_n \in U_n$ mas $v(x_n) \notin V$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $nx_n \to 0$ segue que $\{nx_n\}$ é limitada em G e consequentemente $\{v(nx_n)\}$ será $\sigma(H, H')$-limitada em H. Pelo teorema de Mackey segue que $\{v(nx_n\}$ é limitada em H e assim existirá $\rho > 0$ tal que $nv(x_n) \in \rho V$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomando $n > \rho$ obtemos $v(x_n) \in (\rho/n)V \subset V$, que é uma contradição. $\square$

(H) *Se E e F são espaços de Fréchet então u é um homomorfismo se, e* *somente se, $u(E)$ é fechado em F.*

De fato, se u é um homomorfismo então $u(E) = u^\sharp(E/\ker u)$ é completo em F e, reciprocamente, se $u(E)$ é fechado em F então $u(E)$ é um espaço de Fréchet e portanto $u : E \to u(E)$ é uma aplicação aberta. $\square$

(I) Teorema do homomorfismo para espaços de Fréchet: *Se E e F são espaços de Fréchet e se $u \in L(E,F)$ então são equivalentes:*

1. *u é um homomorfismo;*
2. *$u(E)$ é fechado em F;*
3. *${}^t u(F')$ é $\sigma(E',E)$-fechado.*

Em (H) foi provada a equivalência entre (1) e (2) enquanto que (1) $\Rightarrow$ (3) segue de (D). Provaremos (3) $\Rightarrow$ (1) primeiramente assumindo u injetora. Uma vez que $L(E,F) \subset L(E_{\sigma(E,E')}, F_{\sigma(F,F')})$ (Exercício A da Lista 5) segue de (3) e de (F) que u é um homomorfismo fraco e portanto que $u_\bullet : E \to u(E)$ tem uma inversa contínua para as topologias fracas. Por (G) esta inversa é contínua, e portanto u é um homomorfismo.
Para o caso geral considere $u^\sharp : E/\ker u \to F$ como em (A). Para aplicar o que acabamos de provar precisamos verificar que ${}^t u^\sharp(F') = (E/\ker u)'$ (uma vez que $u^\sharp$ é injetora). Mas observe a existência de um isomorfismo (algébrico) canônico

$$\lambda : (E/\ker u)' \longrightarrow (\ker u)^{\mathrm{o}}$$

definido por $\lambda(f^\sharp) = f^\sharp \circ \Pi$. Como $\lambda^{-1}({}^t u(F')) = {}^t u^\sharp(F')$ segue de (3) nossa afirmação, o que conclui a demonstração do teorema. $\square$

Corolário *Se E e F são espaços de Fréchet e se $u \in L(E,F)$ então u é sobrejetora se, e somente se, ${}^t u$ é injetora e ${}^t u(F')$ é $\sigma(E',E)$-fechado.*

Em virtude do teorema que acabamos de provar basta mostrar que $u(E)$ é denso em F se, e somente se, ${}^t u$ é injetora. Mas é uma consequência do Teorema de Hahn-Banach que $u(E)$ é denso em F se, e só se, todo $f \in F'$ que se anula em $u(E)$ se anula em F; mas f se anula em $u(E)$ se, e só se, $f \circ u = 0$, isto é, $f \in \ker {}^t u$. $\square$

(J) Daremos agora uma outra caracterização para a sobrejetividade de aplicações lineares entre espaços de Fréchet. Primeiramente observamos que da nossa demonstração do teorema da aplicação aberta podemos concluir a validade do seguinte resultado:

→ *Sejam E um espaço de Fréchet, F um ELC metrizável e $u \in L(E,F)$. Suponha que para toda $V \in \Phi_E(0)$ vizinhança equilibrada e convexa tem-se $\overline{u(V)} \in \Phi_F(0)$. Então u é sobrejetora.*

Com o auxílio deste resultado podemos demonstrar:

Teorema. *Sejam E, F espaços de Fréchet e $u \in L(E,F)$. Suponha que $u(E)$ seja denso em F. São equivalentes:*

1. $u(E) = F$;
2. *Dada $\{y'_j\} \subset F'$, se $\{{}^t u(y'_j)\}$ é fortemente limitada em E' então $\{y'_j\}$ é fortemente limitada em F'.*

Demonstração. (1)⇒(2): Seja $\{y'_j\} \subset F'$ tal $\{{}^t u(y'_j)\}$ é fortemente limitada em E'. Então $\{{}^t u(y'_j) : j \geq 1\}$ é equicontínuo e portanto existe $V \in \Phi_0(E)$ tal que $\{{}^t u(y'_j) : j \geq 1\} \subset V^{\circ}$. Pelo teorema da aplicação aberta existe $W \in \Phi_F(0)$ tal que $W \subset u(V)$. Mas então $\{y'_j : j \geq 1\} \subset W^{\circ}$ e portanto $\{y'_j\}$ é fortemente limitada em F'.

(2)⇒(1) Suponha que u não seja sobrejetora e seja $\{W_j\}$ um sistema fundamental de vizinhanças da origem em F formado por tonéis. Então pelo lema acima existe $V \in \Phi_E(0)$ equilibrada e convexa tal que $W_j \not\subset \overline{u(V)}$ para todo $j \geq 1$. Pelo teorema do bipolar obtemos então $u(V)^{\circ} \not\subset W_j^{\circ}$. Logo para cada $j \geq 1$ existirá $y'_j \in u(V)^{\circ}$ tal que $y'_j \notin W_j^{\circ}$. Mas então ${}^t u(y'_j) \in V^{\circ}$ para todo $j \geq 1$ mas não existe $W \in \Phi_F(0)$ tal que $y'_j \in W^{\circ}$ para todo $j \geq 1$. A demonstração está completa. □

Caracterização dos subconjuntos convexos fracamente fechados no dual de um espaço de Fréchet

Nas aplicações do teorema do homomorfismo enunciado em (I) é importante, portanto, obter uma caracterização dos subespaços do dual de um espaço de Fréchet que são fracamente fechados. Assim, o seguinte resultado é fundamental:

(K) *Sejam E um espaço de Fréchet e $S \subset E'$ convexo. As propriedades seguintes são equivalentes:*

1. *S é $\sigma(E', E)$-fechado;*

2. *Dada $V \in \Phi_E(0)$ então $V^{\circ} \cap S$ é $\sigma(E', E)$-fechado;*

3. *Existe um sistema fundamental enumerável $\{U_n\}$ de vizinhanças da origem em E, $U_{n+1} \subset U_n$, tal que $U_n^{\circ} \cap S$ é $\sigma(E', E)$-fechado para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Uma vez que V° é $\sigma(E', E)$-compacto, qualquer que seja $V \in \Phi_E(0)$ (teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki), vemos que (1)⇒(2) enquanto que (2)⇒(3) trivialmente. Temos então que demonstrar que (3)⇒(1), o que será feito após provarmos alguns resultados preliminares.

(L) *Sejam E um espaço de Fréchet e $K \subset E$ compacto. Então $\overline{\mathrm{Conv}(K)}$ é compacto.*

Como E é um espaço métrico completo basta mostrar que $\mathrm{Conv}(K)$ é totalmente limitado, isto é, basta mostrar que dada $V \in \Phi_E(0)$ existe $A \subset E$ finito tal que

$$\mathrm{Conv}(K) \subset A + V.$$

Tomemos então $W \in \Phi_E(0)$ convexa tal que $W + W \subset V$. Como K é totalmente limitado existe $A_1 \subset E$ finito tal que $K \subset A_1 + W$. Se $x \in \mathrm{Conv}(K)$ podemos escrever

$$x = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j x_j, \;\; x_j \in K, \;\; \lambda_j \geq 0, \; \sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 1.$$

Escrevendo $x_j = y_j + z_j$, com $y_j \in A_1$, $z_j \in W$ obtemos $x = y + z$, onde

$$y = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j y_j \in \mathrm{Conv}(A_1), \;\; z = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j z_j \in W,$$

uma vez que W é convexo. Provamos então que $\mathrm{Conv}(K) \subset \mathrm{Conv}(A_1) + W$. Agora, como $\mathrm{Conv}(A_1)$ é compacto, existe $A \subset E$ finito tal que $\mathrm{Conv}(A_1) \subset$

$A+W$, donde $\mathrm{Conv}(K) \subset A+W+W \subset A+V$. $\square$

(M) Como consequência de (L) concluimos que no dual de um espaço de Fréchet as topologias $c(E',E)$ (da convergência uniforme sobre os compactos de E) e $\gamma(E',E)$ (da convergência uniforme sobre os compactos convexos de E) coincidem.

(N) Seja agora E um ELC Hausdorff. Como a envoltória equilibrada de um conjunto compacto é compacta (afirmação válida em qualquer EVT) $\gamma(E',E)$ coincide com a topologia da convergência uniforme sobre os conjuntos convexos equilibrados e compactos de E; tal classe está certamente contida na classe de todos os convexos, equilibrados e fracamente compactos, donde concluímos que $(E'_\sigma)' = (E'_\gamma)'$. Assim, quando E é Fréchet, $(E'_\sigma)' = (E'_c)'$ e, portanto para um conjunto convexo $S \subset E'$, temos que S é $\sigma(E',E)$-fechado se, e somente se, S é $c(E',E)$-fechado.

(O) Passaremos agora à demonstração da implicação (3)$\Rightarrow$(1) em (K). Para tal temos que mostrar que se S é convexo em E' e se $S \cap U_n^0$ é $\sigma(E',E)$-fechado para todo $n \in \mathbb{N}$ então $E \setminus S$ é $c(E',E)$-aberto. Seja $x' \in E \setminus S$; temos que provar que existe $K \subset E$ compacto tal que $(x'+K) \cap S = \emptyset$. Não há perda de generalidade em assumir que $x' = 0$.

Tomamos $U_0 = E$. Vamos mostrar a seguinte propriedade:

- Existe uma sequência $B_n \subset U_n$ de conjuntos finitos tais que

$$U_n^{\mathrm{o}} \cap B_1^{\mathrm{o}} \cap \cdots \cap B_{n-1}^{\mathrm{o}} \cap S = \emptyset, \ \ n \geq 1.$$

Assumamos, primeiramente, provada a existência de tal sequência $\{B_n\}$. Seja $B = \cup B_n$. Então

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n^{\mathrm{o}} \cap B^{\mathrm{o}} \right) \cap S \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n^{\mathrm{o}} \cap B_1^{\mathrm{o}} \cap \cdots \cap B_{n-1}^{\mathrm{o}} \cap S = \emptyset$$

Agora $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n^{\mathrm{o}} = E'$ e portanto $B^{\mathrm{o}} \cap S = \emptyset$. Como B é enumerável, podemos considerar B como a imagem de uma sequência em E convergindo a zero. Logo $K \doteq B \cup \{0\}$ é compacto em E e seu polar é disjunto de S.

Para concluir a demonstração devemos mostrar a existência da sequência $\{B_n\}$ satisfazendo as propriedades requeridas. Primeiramente B_0: uma vez que $U_1^{\mathrm{o}} \cap S$ é fracamente fechado e $0 \notin U_1^{\mathrm{o}} \cap S$ podemos tomar $B_0 \subset E$ finito tal que $U_1^{\mathrm{o}} \cap B_0^{\mathrm{o}} \cap S = \emptyset$.

Seja $n \geq 1$ e suponhamos agora que $B_1, \ldots, B_{n-1}$ tenham sido determinados mas que seja impossível determinar B_n: isto significa que dado qualquer subconjunto finito $B \subset U_n$ temos $C \cap B^{\mathrm{o}} \neq \emptyset$, onde $C = U_{n+1}^{\mathrm{o}} \cap B_1^{\mathrm{o}} \cap \cdots \cap B_{n-1}^{\mathrm{o}} \cap S$ é fracamente compacto. Considere $\mathcal{F}$ a coleção de todos os subconjuntos limitados de U_n e defina $K_B = C \cap B^{\mathrm{o}}$ se $B \in \mathcal{F}$. Então $\{K_B\}$ forma uma coleção de subconjuntos compactos de C; além do mais se $B_1, \ldots, B_k \in \mathcal{F}$ então $K_{B_1} \cap \ldots \cap K_{B_k} = C \cap (B_1 \cup \cdots \cup B_k)^{\mathrm{o}}$ é não vazio. Mas então $\bigcap_{B \in \mathcal{F}} K_B \neq \emptyset$, isto é, $C \cap (\bigcup \mathcal{F})^{\mathrm{o}} = C \cap U_n^0 \neq \emptyset$. Como $U_n^{\mathrm{o}} \subset U_{n+1}^{\mathrm{o}}$ concluimos então que $U_n^0 \cap B_1^{\mathrm{o}} \cap \cdots \cap B_{n-1}^{\mathrm{o}} \neq \emptyset$, o que contraria nossa hipótese de indução. $\square$

Resolubilidade de ODPL's com coeficientes constantes

Seja $P(D)$ um operador diferencial parcial linear em $\mathbb{R}^N$ com coeficientes constantes, não identicamente nulo. Seja, também, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto.

(P) *A aplicação $P(D) : C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ é sobrejetora se, e somente se, Ω é $P(D)$-convexo, isto é, se dado $K \subset \Omega$ compacto existe $K_1 \subset \Omega$ compacto tal que se $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ é tal que $\operatorname{supp} P(-D)\phi \subset K$ então $\operatorname{supp} \phi \subset K_1$.*

No exercício A da Lista 3 o estudante foi convidado a demonstrar que a sobrejetividade de $P(D) : C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ implica que Ω é $P(D)$-convexo. Provaremos agora a recíproca.

(Q) Dado $P(D)$ (não identicamente nulo) sempre existe uma solução fundamental para $P(D)$, isto é, existe $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ tal que $P(D)E = \delta$, a distribuição de Dirac na origem de $\mathbb{R}^N$. Este é o celebrado teorema de Malgrange-Ehrenpreis.

(R) *Assuma que o aberto Ω é $P(D)$-convexo. Dado $K \subset \Omega$ compacto existe $K_1 \subset \Omega$ compacto tal que se $\mu \in \mathcal{E}'(\Omega)$ satisfaz $\operatorname{supp} P(-D)\mu \subset K$ então $\operatorname{supp} \mu \subset K_1$.*

De fato dado $K \subset \Omega$ compacto seja $\delta > 0$ tal que $K_\delta \doteq \{x \in \mathbb{R}^N : \operatorname{dist}(x, K) \leq \delta\} \subset \Omega$ e tome K_1 como na definição de $P(D)$-convexidade correspondente agora a K_δ. Seja $\mu \in \mathcal{E}'(\Omega)$ com $\operatorname{supp} P(-D)\mu \subset K$. Então as usuais regularizações satisfazem $\rho_\varepsilon \star \mu \in C_c^\infty(\Omega)$ e $\operatorname{supp} P(-D)(\rho_\varepsilon \star \mu) \subset K_\delta$ para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ suficientemente pequeno. Mas então $\rho_\varepsilon \star \mu$ tem suporte contido em K_1 para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Como $\rho_\varepsilon \star \mu \to \mu$ concluimos finalmente que $\operatorname{supp} \mu \subset K_1$. $\square$

(S) Vamos considerar $P(D)$ como um operador linear contínuo do espaço de Fréchet $C^\infty(\Omega)$ em si mesmo. Para concluir sua sobrejetividade utilizaremos o corolário enunciado em (I): bastará mostrar que $P(-D) : \mathcal{E}'(\Omega) \to \mathcal{E}'(\Omega)$ é injetora e que $P(-D)\mathcal{E}'(\Omega)$ é fracamente fechado em $\mathcal{E}'(\Omega)$. Note que se $\mu \in \mathcal{E}'(\Omega)$ é tal que $P(-D)\mu = 0$ então, tomando a solução fundamental $E^\sharp \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ de $P(-D)$, obtemos $\mu = \mu \star \delta = \mu \star P(-D)E^\sharp = (P(-D)\mu) \star E^\sharp = 0$. Assim, para concluir a demonstração do resultado enunciado em (O), devemos mostrar que $P(-D)\mathcal{E}'(\Omega)$ é fracamente fechado em $\mathcal{E}'(\Omega)$ ou, pelo resultado enunciado em (K), que a $P(D)$-convexidade implica a seguinte propriedade:

($\diamondsuit$) *Se $K \subset \Omega$ é compacto e se*

$$U \doteq \{\psi \in C^\infty(\Omega) : \, C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_K |\partial^\alpha \psi| \leq 1\},$$

onde $C > 0$ e $m \in \mathbb{Z}_+$, então $U^{\mathrm{o}} \cap P(-D)\mathcal{E}'(\Omega)$ é fracamente fechado em $\mathcal{E}'(\Omega)$.

Note que então que U^{o} é o conjunto de todas $\nu \in \mathcal{E}'(\Omega)$ tais que

$$|\nu(\psi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_K |\partial^\alpha \psi|, \; \psi \in C^\infty(\Omega).$$

Em particular se $\nu \in U^{\mathrm{o}}$ então $\operatorname{supp} \nu \subset K$ e a ordem de ν é $\leq m$. Por (R) existe $K_1 \subset \Omega$ compacto tal que se $P(-D)\mu \in U^{\mathrm{o}}$ então $\operatorname{supp} \mu \subset K_1$. Além disto, uma vez que $\mu = E^\sharp \star P(-D)\mu$, se tomarmos $\chi \in C_c^\infty(\Omega)$ com $\chi = 1$ em uma vizinhança de K_1 e observarmos que $\mu = \chi\mu$, podemos escrever

$$\mu(\psi) = (E^\sharp \otimes P(-D)\mu)((\chi\psi)(x + y)), \; \psi \in C^\infty(\Omega).$$

Daqui segue que o conjunto $\Phi \doteq \{\mu \in \mathcal{E}'(\Omega) : \, P(-D)\mu \in U^{\mathrm{o}}\}$ está contido no polar de uma vizinhança de zero em $C^\infty(\Omega)$ e portanto é relativamente fracamente compacto.

Agora, a aplicação $P(-D) : \mathcal{E}'(\Omega) \to \mathcal{E}'(\Omega)$ é fracamente contínua. Como U^{o} é fracamente fechado, segue que Φ é de fato fracamente compacto, e, portanto, $P(-D)\Phi = U^{\mathrm{o}} \cap P(-D)\mathcal{E}'(\Omega)$ é fracamente compacto. $\square$