10 ZATIDURA TOPOLOGIA

1. Izan bitez $\sim$ X-ren gainean definitutako baliokidetasun-erlazioa eta $A \subseteq X$. $p^{-1}(p(A))$ multzoari A-ren *asedura* deritzo. $A \subseteq X$ *asea* dela esango dugu baldin eta $A = p^{-1}(p(A))$ bada. Frogatu

i.- p irekia da baldin eta soilik baldin $\forall A \in \tau_X$, A-ren asedura irekia bada.

ii.- p itxia da baldin eta soilik baldin $\forall A \in \mathcal{C}_X$, A-ren asedura itxia bada.

iii.- Izan bedi β_X τ_X-en ireki oinarria. Frogatu p irekia dela baldin eta soilik baldin $A \in \beta_X$ guztietarako, A-ren asedura irekia bada.

2. Izan bedi $\sim$ $\big(X, \tau_X\big)$-n definitutako baliokidetasun-erlazioa eta $A \subseteq X$ azpimultzo itxia. Izan bedi $\sim$ ondoko moduan definitutako baliokidetasun-erlazioa: $x \sim y \Longleftrightarrow x, y \in A$. Frogatu proiekzio naturala aplikazio itxia dela.

3. Izan bedi $\sim$ $\big(X, \tau_X\big)$-n definitutako baliokidetasun-erlazioa. Frogatu

i.- $\big(X/\sim, \tau_{Zat}\big)$ indiskretua da baldin eta soilik baldin ase ireki bakarrak $\varnothing$ eta X badira.

ii.- Baliokidetasun-klase guztiak $\big(X, \tau_X\big)$-n dentsoak badira, orduan zatidura espazioa indiskretua da.
Erabili emaitza hau $(\mathbb{R}, \tau_u)$-n ondoko erlazioa kontsideratzen dugunean:
$x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$.

iii.- $\big(X/\sim, \tau_{Zat}\big)$ diskretua da baldin eta soilik baldin ase guztiak irekiak badira.

iv.- $\big(X/\sim, \tau_{Zat}\big)$ diskretua da baldin eta soilik baldin klase guztiak $\big(X, \tau_X\big)$-n irekiak badira.

4. Izan bedi $\sim$ $\mathbb{R}$-ren gainean ondoko moduan definitutako baliokidetasun-erlazioa: $x \sim y$ baldin eta soilik baldin $[x] = [y]$ bada. ($[x] \equiv x$-ren zati osoa).

i.- Deskribatu zatidura multzoa.

Izan bitez $(\mathbb{R}, \tau_{Sor})$ espazio topologikoa eta $\sim$ aurreko baliokidetasun-erlazioa.

ii.- Frogatu proiekzio naturala irekia eta itxia dela.

Izan bedi $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{Sor}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_u)$ zati osoa aplikazioa, hau da, $f(x) = [x]$.

iii.- Frogatu f jarraikia dela.

iv.- Zein da $A = f(X)$ multzoa? Deskribatu (A, τ_u) azpiespazio topologikoa.

v.- Frogatu $f^*\colon (\mathbb{R}, \tau_{Sor}) \longrightarrow (A, \tau_u)$ aurreko aplikazioaren murrizketa identifikazioa dela.

Izan bedi $h\colon \big(\mathbb{R}/\sim, \tau_\sim\big) \longrightarrow (A, \tau_u)$ non $h(p(t)) = f^*(t)$ den.

vi.- Frogatu h ondo definituta dagoela eta homeomorfismoa dela.

5. Izan bedi $X = \{(x,1) : -1 \leq x \leq 1\} \cup \{(x,-1) : -1 \leq x \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ ohiko topologiarekin eta $(-1,1) \sim (-1,-1)$ eta $(1,1) \sim (1,-1)$ erlazionatzen dituen baliokidetasun-erlazioa. Frogatu zatidura espazio topologikoa eta $\mathbb{S}^1$ homeomorfoak direla.

6. Izan bitez $X_n = I \times \{n\} \subset \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}$ eta $I = [0,1]$ izanik, ohiko topologiarekin. Izan bedi $X = \big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n\big)/\sim$, $(0,n)$ moduko puntuak identifikatzen ditugunean lortzen dugun zatidura espazioa. Aztertu zatidura espazioa Frechet, Hausdorff, 1. zenbakigarria edota 2. zenbakigarria denentz.

7. Izan bedi $(X = \mathbb{R} \times \{0,1\}, \tau_u)$. Kontsidera dezagun ondoko baliokidetasun-erlazioa: $\quad x < 0$ guztietarako $(x,0) \sim (x,1)$.

i.- Aztertu zatidura espazioa Hausdorff edota Frechet denentz.

ii.- Aztertu proiekzio naturala irekia edota itxia denentz.

8. Izan bedi $[-1,1]$ multzoan -1, 0 eta 1 identifikatzen dituen baliokidetasun-erlazioa.

i.- Deskribatu zatidura multzoa.

Izan bitez $\big([-1,1], \tau_u\big)$ espazio topologikoa eta aurreko baliokidetasun-erlazioa.

ii.- Frogatu proiekzio naturala irekia ez dela baina itxia bai.

Kontsidera dezagun orain $f\colon \big([-1,1], \tau_u\big) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{Big})$ ondoko aplikazioa:

$$f(t) = \begin{cases} \tan\left(\frac{\Pi}{2} t\right), & t \in (-1,1) \text{ bada;} \\ 0, & t = \pm 1 \text{ bada.} \end{cases}$$

iii.- Frogatu f jarraikia dela. Irekia al da? Itxia al da? Identifikazioa al da?

Izan bedi $h\colon \big([-1,1]/\sim, \tau_\sim\big) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{Big})$ non $h(p(t)) = f(t)$ den.

iv.- Frogatu h ondo definituta dagoela eta homeomorfismoa dela.

9. Kontsidera dezagun $\big(\mathbb{R}^2, \tau_u\big)$-n ondoko modu honetan definitutako baliokidetasun-erlazioa: $(x,y) \sim (x',y') \Longleftrightarrow x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$.

i.- Frogatu $\big(\mathbb{R}^2/\sim, \tau_\sim\big)$ eta $([0,+\infty), \tau_u)$ homeomorfoak direla.

ii.- Aztertu p irekia edota itxia denentz.

10. Kontsidera dezagun $(\mathbb{R}, \tau_u)$-n ondoko modu honetan definitutako baliokidetasun-erlazioa: $x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$ bada. Frogatu $\big(\mathbb{R}/\sim, \tau_\sim\big)$ eta $\big(\mathbb{S}^1, \tau_u\big)$ homeomorfoak direla.

11. Izan bedi $P = \big\{(x,y) : y > 0\big\}$ eta $X = P \cup \big(\mathbb{R} \times \{0\}\big)$.
$p \in P$ bada, oinarriko inguruneak ohiko bolak dira: $\mathcal{B}_p = \big\{B_u(p,\epsilon) \cap X : \epsilon > 0\big\}$ eta $p \in \mathbb{R} \times \{0\}$ guztietarako ondokoak: $\mathcal{B}_p = \big\{\big(B_u(p,\epsilon) \cap P\big) \cup \{p\} : \epsilon > 0\big\}$.

i.- $(x,y) \sim (x',y') \iff x = x'$ baliokidetasun-erlazioa kontsideratzen badugu, aztertu proiekzioa irekia edota itxia denentz.

ii.- Frogatu modu honetan definitutako baliokidetasun-erlazioa kontsideratuz, zatidura espazio topologikoa eta $(\mathbb{R}, \tau_u)$ homeomorfoak direla.

12. Izan bedi $[-1,1]$ ohiko topologiarekin. $x \in (-1,1)$ guztietarako $x \sim -x$ identifikatzen badugu, frogatu:

i.- Proiekzio kanonikoa irekia da. Itxia al da?

ii.- Zatidura espazioa Fréchet dela baina ez Hausdorff.

13. Kontsidera dezagun $(\mathbb{R}^2, \tau_u)$-ren gainean ondoko modu honetan definitutako baliokidetasun-erlazioa: $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ baldin eta soilik baldin $y_1 = y_2$ bada.
Frogatu zatidura espazioa eta $(\mathbb{R}, \tau_u)$ homeomorfoak direla.

14. Izan bedi $(\mathbb{R}^2, \tau_u)$-n definitutako ondoko baliokidetasun-erlazioa:
$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ edo $x_1 = x_2 \neq 0$.

i.- Deskribatu zatidura espazioa.

ii.- Aztertu zatidura espazio topologikoa Hausdorff edota Frechet denentz.

iii.- $(\mathbb{R}^n, \tau_u)$-ren aspiezpazio topologikoren batekin homeomorfoa al da?

iv.- Aztertu $\{p(0, \frac{1}{n})\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{p(n, \frac{1}{n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ eta $\{p(\frac{1}{n}, 0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ segiden konbergentzia zatidura espazio topologikoan.

15. Izan bedi $(X = \mathbb{R} \times [0, +\infty), \tau_u)$-n definitutako ondoko erlazioa:
$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ edo $y_1 = y_2 \neq 0$ bada

i.- Deskribatu zatidura espazioa.

ii.- Frogatu proiekzio naturala irekia dela baina itxia ez.

iii.- Aztertu zatidura espazio topologikoa Hausdorff edota Frechet denentz.

16. Izan bitez (X, τ_X) esp. top., $I = [0,1]$ eta $(X \times I, \tau \times \tau_u)$. Kontsidera dezagun ondoko moduan definitutako baliokidetasun-erlazioa: $(x_1, 1) \sim (x_2, 1)$.
Zatidura espazioari X-ren *konoa* deritzo eta $(K(X), \tau_\sim)$ idatziko dugu.
Era berean, izan bitez $J = [-1,1]$ eta $(X \times J, \tau \times \tau_u)$ eta ondoko moduan definitutako baliokidetasun-erlazioa: $(x_1, 1) \sim (x_2, 1)$ eta $(x_1, -1) \sim (x_2, -1)$.
Zatidura espazioari X-ren *esekidura* deritzo eta $(E(X), \tau_\sim)$ idatziko dugu.

i.- Frogatu $E(X)$ $K(X)$-ren zatidura espazioa dela.

ii.- Frogatu $E(\mathbb{S}^n)$ eta $\mathbb{S}^{n+1}$ homeomorfoak direla $n \geq 0$ guztietarako.

iii.- Frogatu $K(\mathbb{S}^1)$ eta $\overline{B}_u((0,0),1)$ homeomorfoak direla.

17. ♣Izan bedi $\sim$ (X, τ_X)-n definitutako baliokidetasun-erlazioa. Demagun baliokidetasun-klase guztiak (X, τ_X)-n itxiak direla. Frogatu

i.- $(X/\sim, \tau_{Zat})$ Frechet da.

ii.- Klase kopurua finitua bada, orduan proiekzio naturala itxia da.

iii.- $A \subseteq X/\sim$ guztietarako $\overline{A}^{Zat} = p\left(\overline{p^{-1}(A)}^X\right)$ da.

18. ♣Izan bedi $\sim$ $\big(X,\tau_X\big)$-n definitutako baliokidetasun-erlazioa. Demagun baliokidetasun-klase guztiak $\big(X,\tau_X\big)$-n itxiak direla. Frogatu

i.- $\big(X/\sim,\tau_{Zat}\big)$ Frechet da.

ii.- Klase kopurua finitua bada, orduan proiekzio naturala itxia da.

iii.- Klase kopurua finitua bada, orduan $\big(X/\sim,\tau_{Zat}\big)$ diskretua da.

19. ♣Izan bedi $\sim$ $\big(X,\tau_X\big)$-n definitutako baliokidetasun-erlazioa. Frogatu

i.- $\mathcal{C}_{Zat}=\big\{F\subseteq X/\sim:\ p^{-1}(F)\in\mathcal{C}_X\big\}$, hau da F $\big(X/\sim,\tau_{Zat}\big)$-n itxia da baldin eta soilik baldin $p^{-1}(F)$ $\big(X,\tau_X\big)$-n itxia bada.

ii.- $\big(X/\sim,\tau_{Zat}\big)$ Frechet da baldin eta soilik baldin baliokidetasun-klase guztiak $\big(X,\tau_X\big)$-n itxiak badira.

iii.- Baliokidetasun-klase kopurua finitua bada eta $\big(X/\sim,\tau_{Zat}\big)$ Frechet bada, orduan proiekzio naturala itxia da.

20. ♣Izan bedi $\big(X,\tau_X\big)$. $x\sim y\Longleftrightarrow\overline{\{x\}}=\overline{\{y\}}$ baliokidetasun-erlazioa definitzen badugu, frogatu

i.- X-ren azpimultzo itxiak azpimultzo aseak dira.

ii.- X-ren azpimultzo irekiak ere azpimultzo aseak dira.

iii.- Proiekzio naturala irekia eta itxia da.

21. ♣Izan bedi $\sim$ $[-1,1]$ multzoan 0 eta 1 identifikatzen dituen baliokidetasun-erlazioa.

i.- Deskribatu zatidura multzoa.

Izan bitez $\big([-1,1],\tau_u\big)$ espazio topologikoa eta $\sim$ aurreko moduan definitutako baliokidetasun-erlazioa.

ii.- Frogatu proiekzio naturala irekia ez dela baina itxia bai.

Izan bedi $A=\mathbb{S}^1\cup\big([1,2]\times\{0\}\big)\subseteq\mathbb{R}^2$.

iii.- Frogatu zatidura espazioa eta $\big(A,\tau_u\big)$ homeomorfoak direla.

22. ♣Izan bedi $\sim$ $[-1,2]$ multzoan 0 eta 1 identifikatzen dituen baliokidetasun-erlazioa.

i.- Deskribatu zatidura multzoa.

Izan bitez $\big([-1,2],\tau_u\big)$ espazio topologikoa eta $\sim$ aurreko baliokidetasun-erlazioa.

ii.- Frogatu proiekzio naturala irekia ez dela baina itxia bai.

Izan bedi $A=\mathbb{S}^1\cup\{(x,1-x):1\leq x\leq 2\}\cup\{(x,x-1):1\leq x\leq 2\}\subseteq\mathbb{R}^2$.

iii.- Frogatu zatidura espazioa eta $\big(A,\tau_u\big)$ homeomorfoak direla.

23. ♣Izan bedi $\sim$ $[-2,2]$ multzoan ondoko moduan definitutako baliokidetasun-erlazioa: $x \sim -x$ baldin eta soilik baldin $|x| \geq 1$ bada.

i.- Deskribatu zatidura multzoa.

Izan bitez $([-2,2],\tau_u)$ espazio topologikoa eta $\sim$ aurreko baliokidetasun-erlazioa.

ii.- Frogatu proiekzio naturala irekia ez dela baina itxia bai.

Izan bedi $A = \mathbb{S}^1 \cup ([1,2] \times \{0\}) \subseteq \mathbb{R}^2$.

iii.- Frogatu zatidura espazioa eta $\big(A,\tau_u\big)$ homeomorfoak direla.

24. ♣Izan bedi $\sim$ $[-2,2]$ multzoan ondoko moduan definitutako baliokidetasun-erlazioa: $x \sim -x$ baldin eta soilik baldin $|x| \leq 1$ bada.

i.- Deskribatu zatidura multzoa.

Izan bitez $([-2,2],\tau_u)$ espazio topologikoa eta $\sim$ aurreko baliokidetasun-erlazioa.

ii.- Frogatu proiekzio naturala irekia ez dela baina itxia bai.

Izan bedi $A = ([0,1] \times \{0\}) \cup (\{1\} \times [-1,1]) \subseteq \mathbb{R}^2$.

iii.- Frogatu zatidura espazioa eta $\big(A,\tau_u\big)$ homeomorfoak direla.

25. ♣Izan bedi $\sim$ $X = [-1,1] \times \{-1,1\}$ multzoan $(0,-1)$ eta $(0,1)$ identifikatzen dituen baliokidetasun-erlazioa.

ii.- Deskribatu zatidura multzoa.

Izan bitez (X,τ_u) espazio topologikoa eta $\sim$ aurreko baliokidetasun-erlazioa.

i.- Frogatu proiekzio naturala irekia ez dela baina itxia bai.

Izan bedi $A = ([-1,1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [-1,1]) \subseteq \mathbb{R}^2$.

ii.- Frogatu zatidura espazioa eta $\big(A,\tau_u\big)$ homeomorfoak direla.

26. ♣Izan bedi $\sim$ $X = [-1,1] \times \{-1,1\}$ multzoan $(-1,-1)$ eta $(1,1)$ identifikatzen dituen baliokidetasun-erlazioa.

i.- Deskribatu zatidura multzoa.

Izan bitez (X,τ_u) espazio topologikoa eta $\sim$ aurreko baliokidetasun-erlazioa.

ii.- Frogatu proiekzio naturala irekia ez dela baina itxia bai.

Izan bedi $A = [0,2] \subseteq \mathbb{R}$.

iii.- Frogatu zatidura espazioa eta $\big(A,\tau_u\big)$ homeomorfoak direla.

27. ♣Izan bedi $\sim$ $X = [-1,1] \times \{-1,1\}$ multzoan $(-1,-1)$ eta $(0,1)$ identifikatzen dituen baliokidetasun-erlazioa.

i.- Deskribatu zatidura multzoa.

Izan bitez (X,τ_u) espazio topologikoa eta $\sim$ aurreko baliokidetasun-erlazioa.

ii.- Frogatu proiekzio naturala irekia ez dela baina itxia bai.

Izan bedi $A = ([-1,1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0,2]) \subseteq \mathbb{R}^2$.

iii.- Frogatu zatidura espazioa eta $\big(A,\tau_u\big)$ homeomorfoak direla.