Hoja 3 de Problemas
(Homomorfismos (aplicaciones lineales) entres espacios vectoriales)

1. [Concepto de homomorfismo] Estudiar si las siguientes aplicaciones son lineales:

   1.1. $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y)=(x^2+1,y^2)$

   1.2. $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y)=(x^2,y^2)$

   1.3. $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y)=(xy,y)$

   1.4. $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y)=(x,y,x+y)$

   1.5. $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y)=(x+1,y,x+y)$

   1.6. $f:\mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{R}),\ f(A)=A^T$

   1.7. $f:\mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_3[t],\ f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)=a+b\,t^3$

   1.8. $f:\mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_3[t],\ f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)=1+b\,t^3$

   1.9. $f:\mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_3[t],\ f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)=a+b^2\,t^3$

   1.10. $f:\mathbb{R}_n[t] \to \mathbb{R}_n[t],\ f(p)=p'$.

   1.11. $f:\mathbb{R}_3[t] \to \mathbb{R}^3,\ f(p)=(p'(0),p''(0),\int_0^1 p(t)\,dt)$.

   1.12. $f:\mathbb{R}_1[t]^2 \to \mathbb{R}_1[t]\times\mathbb{R}^2,\ f((a+bt,c+dt))=(1+dt,(a+c,b+d))$.

   1.13. $f:\mathbb{R}_1[t]^2 \to \mathbb{R}_1[t]\times\mathbb{R}^2,\ f((a+bt,c+dt))=(a+dt,(ac,b+d))$.

   1.14. $f:\mathbb{R}_1[t]^2 \to \mathbb{R}_1[t]\times\mathbb{R}^2,\ f((a+bt,c+dt))=(a+dt,(a+c,b+d))$.

2. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ definido, en la base canónica, como:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1+x_2+x_4,x_1+x_2+x_3,x_3,-x_1-x_3+x_4)$$

   a) Determinar la representación matricial de f en la base canónica.

   b) Determinar $\mathscr{M}(f,\mathscr{B})$, donde $\mathscr{B}=\{(1,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,0,0),(1,0,0,0)\}$.

   c) Determinar el núcleo y la imagen de f.

   d) Estudiar si f es un automorfismo.

3. Sea considera la aplicación

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & (a,a+b+c,0) \end{array}$$

   a) Demostrar que f es un homomorfismo.

   b) Determinar la representación matricial A de f respecto a las bases canónicas.

   c) Obtener la dimensión, bases y ecuaciones del núcleo y de la imagen de f.

   d) Obtener la representación matricial B de f respecto a las bases

$$\mathscr{B}_1=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\},\ \mathscr{B}_2=\{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$$

   e) Determinar la relación del cambio de base de A a B.

4. Sean $\mathscr{U}$ y $\mathscr{V}$ $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de tipo finito y sean $\mathscr{B}_1 = \{u_1, u_2\}$ y $\mathscr{B}_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ bases de $\mathscr{U}$ y $\mathscr{V}$ respectivamente. Sea $f : \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ un homomorfismo que cumple que

$$f(u_1) = v_1 + v_2 + v_3,\ f(u_2) = \overline{0}_{\mathscr{V}}.$$

Determinar ecuaciones implícitas, paramétricas y bases (si existen) de $\operatorname{Ker}(f)$ e $\operatorname{Im}(f)$.

5. Sea f un homomorfismo entre dos $\mathbb{R}$-espacios vectoriales de dimensión 3 y 4, respectivamente, representado matricialmente por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \qquad a \in \mathbb{R}$$

Determinar los valores de a para los que f es homomorfismo inyectivo ¿Existe algún valor de a para el cual f sea suprayectivo?.

6. Sea $\mathscr{U}$ un $\mathbb{K}$-e.v. de dimensión 3 y sea $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ una base de $\mathscr{U}$. Se considera el endomorfismo $f \in \operatorname{End}(\mathscr{U})$ definido como:

$$f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = (y+z)e_1 + (x+z)e_2 + (y-x)e_3$$

Hallar:

   a) Representación matricial de f respecto a la base $\mathscr{B}$.
   b) Ecuaciones del $\operatorname{Ker}(f)$ y de la $\operatorname{Im}(f)$.
   c) Determinar una base del $\operatorname{Ker}(f)$ y ampliarla a una base de $\mathscr{U}$.

7. Determinar $\#(\operatorname{End}((\mathbb{Z}_3)^2))$.

8. Sea $\mathscr{V} = (\mathbb{Z}_5)_2[t]$ y $f : \mathscr{V} \longrightarrow \mathscr{V}$ el homomorfismo definido como

$$f([a_0] + [a_1]t + [a_2]t^2) = [a_0 + 3a_1 + a_2] + [a_0 + aa_1 + 3a_2]t + [aa_0 + 4a_1 + a_2]t^2,$$

donde $[a] \in \mathbb{Z}_5$. Determinar los valores de a para los que f es automorfismo. Para $[a] = [2]$ determinar el núcleo y la imagen de f.

9. Se considera el endomorfismo

$$\begin{array}{cccc} f & \mathbb{R}_1[t] \times \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_1[t] \times \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \\ & \left(a_0 + a_1 t, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) & \longmapsto & \left((a_0 + a_1 + a + b) + (a_0 + a_1 + a + b + c + d)t, \begin{pmatrix} c+d & 0 \\ c+d & d \end{pmatrix}\right). \end{array}$$

Determinar el núcleo y la imagen f.

10. En el espacio vectorial real $\mathscr{U}$, de dimensión 4, se considera el endomorfismo f definido como:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= me_1 + e_2 + e_3 + e_4 \\ f(e_2) &= e_1 + me_2 + e_3 + e_4 \\ f(e_3) &= e_1 + e_2 + me_3 + e_4 \\ f(e_4) &= e_1 + e_2 + e_3 + me_4 \end{aligned}$$

siendo $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base de $\mathscr{U}$ y $m \in \mathbb{R}$. Se pide:

   a) Determinar los valores de m para los que f es un isomorfismo.

b) Sea h el endomorfismo que se obtiene al particularizar $m = 1$ en la aplicación lineal f. Entonces se pide:

1) Ecuaciones paramétricas e implícitas, bases y dimensión del núcleo y la imagen de h.
2) Estudiar si $\mathscr{U} = \mathrm{Ker}(h) \oplus \mathrm{Im}(h)$.
3) Determinar $B = \mathscr{M}(h, \mathscr{B}^*)$, donde $\mathscr{B}^* = \{e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3 + e_4\}$.

11. En $\mathbb{R}^4$ se considera la base $\mathscr{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, y el endomorfismo f de $\mathbb{R}^4$ definido como:

$$\begin{aligned} f(u_1) &= u_1 + au_2 + au_3 \\ f(u_2) &= au_1 + u_2 + au_3 \\ f(u_3) &= au_1 + au_2 + u_3 \\ f(u_4) &= bu_1 + cu_2 + du_3 + eu_4, \quad a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Estudiar para que valores de a, b, c, d, e, el endomorfismo f es un isomorfismo.

12. Deducir si los siguientes espacios vectoriales son isomorfos y, en caso afirmativo, establecer un isomorfismo entre ellos

a) $\mathscr{W}_1 = \{A \in \mathscr{M}_{2\times2}(\mathbb{R}) \mid A = A^T\}$, $\mathscr{W}_2 = \{A \in \mathscr{M}_{2\times2}(\mathbb{R}) \mid A = -A^T\}$.
b) $\mathscr{W}_1 = \{A \in \mathscr{M}_{2\times2}(\mathbb{R}) \mid A = A^T\}$, $\mathscr{W}_2 = \mathbb{R}_2[t]$.
c) $\mathscr{W}_1 = \mathbb{R}_2[t]$, $\mathscr{W}_2 = \{A \in \mathscr{M}_{2\times2}(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Traza}(A) = 0\}$.
d) $\mathscr{W}_1 = \{A \in \mathscr{M}_{2\times2}(\mathbb{R}) \mid A = A^T\}$, $\mathscr{W}_2 = \{A \in \mathscr{M}_{2\times2}(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Traza}(A) = 0\}$.
e) $\mathscr{W}_1 = \mathbb{R}_2[t] \times \mathscr{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$, $\mathscr{W}_2 = \{A \in \mathscr{M}_{8\times8}(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Traza}(A) = 0\}$.

13. Se cosideran los endomorfismos

$$\begin{array}{cccc} f & \mathbb{R}_1[t] & \longrightarrow & \mathbb{R}_1[t], \\ & a + bt & \longmapsto & (a+b) + bt \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} g & \mathbb{R}_1[t] & \longrightarrow & \mathbb{R}_1[t] \\ & a + bt & \longmapsto & a + (a+b)t \end{array}$$

Determinar el núcleo y la imagen de $f^2 + 4fg + g^2$.