B ANÁLISIS (ING. Y EX.) 2^{do} PARCIAL 2^{do} CUATR. DE 2011   Tema 1

APELLIDO .... NOMBRES ANGELA MARÍA DNI ....

INSCRIPTO EN: | SEDE: C. Univ | DIAS: Lu-Ju-Sa | HORARIO: 10 a 13 | AULA: 326 |

NOTA del 1^{er} parcial: 6 (seis)

8 ocho

1	2	3	4	NOTA
B-	B-	B	B	8 (firma)

PROMOCIONA	RECUPERA 24/11/11 10hs 1^{ro} | 2^{do}
~~INSUFICIENTE~~	FINAL 07/12/11 10hs.

Los razonamientos usados para la resolución de los problemas deben figurar en la hoja.

1. Sea $f(x)$ una función tal que $P(x) = (x+1) - (x+1)^2$ es su polinomio de Taylor de orden 2 en $x_0 = -1$. Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 de $g(x) = 3 - \ln(4f(x) - x)$ en $x_0 = -1$.

2. La función f tiene derivada continua, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$ y satisface $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos(x)dx = 5$.
Calcular $\int_{(\frac{\pi}{2})^2}^{\pi^2} \frac{f'(\sqrt{t})\,\mathrm{sen}(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}dt$.

3. Sea $f(x) = \frac{25}{(x-6)^2} - 5$. Hallar $1 < a < 6$ de modo que $\int_1^a f(x)dx = 0$.

4. Hallar todos los $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{n}}{6^{n+1}(n+1)}(x-6)^n$ converge.

LEONETTI

FECHA

① $P(x) = (x+1) - (x+1)^2$ en $x_0 = -1$

$P(x) = f(-1) + f'(-1).(x+1) + \frac{f''(-1)}{2!}.(x+1)^2$

Datos:

$f(-1) = 0$

$f'(-1) = 1$

$\frac{f''(-1)}{2} = -1$

$f''(-1) = -2.$

$g(x) = 3 - \ln(4f(x) - x)$

$g'(x) = \frac{-1}{(4f(x)-x)} . (4f'(x)-1)$

$g''(x) = \frac{1}{(4f(x)-x)^2} . (4f'(x)-1)^2 + \left(\frac{-1}{(4f(x)-x)} . 4f''(x)\right)$

Ahora busco los valores de $g(-1)$; $g'(-1)$; $g''(-1)$ Para armar el polinomio de Taylor de $g(x)$ de orden 2 en $x_0 = -1$

$g(-1) = 3 - \ln(4f(-1)+1)$ $\qquad$ $g(-1) = 3.$

$g(-1) = 3 - \ln(4.0+1)$

$g(-1) = 3.$

$g'(-1) = \frac{-1}{(4f(-1)+1)} . (4f'(-1) - 1)$ $\qquad$ $g'(-1) = -3$

$g'(-1) = \frac{-1}{(4.0+1)} . 4-1$

$g'(-1) = -3$

$$g''(-1) = \frac{\cdots}{(4f(-1)+1)^2} \cdot (\cdots) + \left(\frac{\cdots}{(4f(-1)+1)} \cdots \right)$$

$$g''(-1) = \frac{1}{(4.0+1)^2} \cdot (4.1 - 1)^2 + \left(\frac{-1}{(4.0+1)} \cdot 4 \cdot (-2) \right)$$

$$g''(-1) = 1 \cdot 3^2 + \left[(-1) \cdot (-8) \right]$$

$$g''(-1) = 9 + 8$$

$$g''(-1) = 17.$$

$Q(x) \Rightarrow$ polinomio de Taylor de orden 2 en $x_0 = -1$ de $g(x)$.

$$Q(x) = \frac{g(x)}{0!} + \frac{g'(x)}{1!} \cdot (x - x_0) + \frac{g''}{2!} (x - x_0)^2$$

$$Q(-1) = \frac{g(-1)}{0!} + \frac{g'(-1)}{1!} \cdot (x+1) + \frac{g''(-1)}{2} (x+1)^2$$

$$Q(-1) = 3 - 3(x+1) + \frac{33}{2} (x+1)^2$$

Respuesta: $\boxed{Q(x) = 3 - 3(x+1) + \frac{17}{2} (x+1)^2}$ B

FECHA

② Dato = $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos(x)\,dx = 5$ y $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$.

Tengo que hallar: $\int_{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}^{\pi^2} \frac{f'(\sqrt{t})\,\text{sen}(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\,dt$.

Calculo la ... $\int_{(\pi/2)^2}^{\pi^2} \frac{f(\sqrt{t})\,\text{sen}(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\,dt =$

Uso el método de sustitución.

Tomo: $z = \sqrt{t}$

$dz = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$ $\quad t = \pi^2 \to z = \pi$ ✓ $\quad t = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \to z = \frac{\pi}{2}$

$2dz = \frac{dt}{\sqrt{t}}$

Entonces me queda que = (Aplico los nuevos límites de integración)

$2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f'(z)\,.\,\text{sen}(z)\,.\,dz$

ahora, utilizo el método de partes para calcular la integral =

Tomo: $u = \text{sen}(z) \rightarrow u' = \cos(z)$

$v' = f'(z) \longrightarrow v = f(z)$

Entonces =

Método de partes: $\int u.v' = u.v - \int u'.v$

$\int f'(z)\,.\,\text{sen}(z)\,.\,dz = \text{sen}(z)\,.\,f(z) - \int \cos(z)\,.\,f(z)\,.\,dz$.

$$2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f'(z)\,.\,\text{sem}(z)\,.\,dz = 2\Bigg(\text{sem}(z)\,.\,f(z)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(z)\,.\,f(z)\,.\,dz}_{\text{Dato } = 5}\Bigg)$$

$$2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f'(z)\,.\,\text{sem}(z) = 2\Bigg(\Big[\underbrace{\text{sem}(\pi)\,.\,f(\pi)}_{0}\Big] - \Big[\text{sem}\left(\tfrac{\pi}{2}\right).\,\underbrace{f\left(\tfrac{\pi}{2}\right)}_{4}\Big] - 5\Bigg)$$

$$2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f'(z)\,.\,\text{sem}(z) = 2\,(-4-5)$$

$$2\,.\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f'(z)\,.\,\text{sem}(z) = \overset{-18}{-9}$$

Respuesta :

$$\boxed{\int_{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}^{\pi^2} \frac{f'(\sqrt{t})\ \text{sem}(\sqrt{t})\ dt}{\sqrt{t}} = \overset{-18}{\frac{-9}{2}}}$$ B

LEONETTI

FECHA

③ $f(x) = \frac{25}{(x-6)^2} - 5.$ $\int_1^a f(x).\,dx = 0$

$1 < a < 6$ para que ...

Resolución:

$$\int_1^a \frac{25}{(x-6)^2} - 5\,dx = \int_1^a 25(x-6)^{-2}dx - \int_1^a 5\,dx.$$

$$\int 25(x-6)^{-2}\,dx = -25(x-6)^{-1}\Big|_1^a$$

$$\int^a 5\,dx = 5x\Big|_1^a$$

$$\frac{-25}{(x-6)}\Big|_1^a - 5x\Big|_1^a = 0.$$

$$\frac{-25}{(a-6)} - \left[\frac{-25}{(1-6)}\right] - (5a-5) = 0$$

$$\frac{-25}{(a-6)} - \cancel{5} - 5a + \cancel{5} = 0$$

$$\frac{-25}{(a-6)} - 5a = 0$$

Despejo a:

$$\frac{-25}{(a-6)} = 5a$$

$$-25 = 5a(a-6)$$

$$-25 = 5a^2 - 30a$$

$$5a^2 - 30a + 25 = 0$$

$a_1 = 1$ $\quad$ $a = 1$ descarto, porque el enunciado me pide que

$a_2 = 5$ $\quad$ $1 < a < 6$

me quedo con $a = 5$.

$\boxed{\text{Respuesta} = \quad a = 5}$ B/

④ $$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{2\sqrt{n}\cdot(x-6)^n}{6^{n+1}\,(n+1)}}_{a_n}$$

Analizo la convergencia absoluta.

Aplico cauchy:

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Si $\lim_{n\to\infty}$ $\begin{cases} < 1 & \text{la serie converge absolutamente, por lo tanto converge.} \\ = 1 & \text{El criterio no decide} \\ > 1 & \text{la serie diverge} \end{cases}$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{2\sqrt{n}\cdot|(x-6)|^n}{6^{n+1}\,(n+1)}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2}\cdot\left(\sqrt[n]{n}\right)^{1/2}\cdot\sqrt[n]{|x-6|^n}}{\sqrt[n]{6^n}\cdot\sqrt[n]{6}\cdot\sqrt[n]{n(1+1/n)}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{\sqrt[n]{2}}^{1}\cdot\overbrace{\left(\sqrt[n]{n}\right)^{1/2}}^{1}\cdot|x-6|}{6\cdot\underbrace{\sqrt[n]{6}}_{1}\cdot\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{1}\cdot\underbrace{\sqrt[n]{(1+1/n)}}_{1}} = \frac{|x-6|}{6}$$

Por el criterio de Cauchy, como quiero que la serie converja absolutamente y entonces converja, el $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ debe ser menor a 1, entonces:

$$\frac{|x-6|}{6} < 1$$

$|x-6| < 6$ → radio de convergencia.

$$-6 < x-6 < 6$$

Analizo que pasa en los extremos:

Si $x = 0$.

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m 2\sqrt{m} \cdot \cancel{6^m}}{\cancel{6^m} \cdot 6 \cdot (m+1)} \Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \cdot \frac{\cancel{2}\sqrt{m}}{3\cancel{6}(m+1)}$$

$$a_m = \frac{\sqrt{m}}{3m+3}$$

Uso el criterio de Leibnitz:

Para que la serie converja =

1) $a_m > 0$ ✓
2) a_m decreciente. ✓
3) $\lim\limits_{m\to\infty} a_m = 0$. ✓

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\sqrt{m}}{3m+3} = 0.$$

$a_{m+1} < a_m$.

$$\frac{\sqrt{m}}{3m+3} > \frac{\sqrt{m+1}}{3m+6}$$

$$\left(\frac{\sqrt{m}}{3m+3}\right)^2 > \left(\frac{\sqrt{m+1}}{3m+6}\right)^2$$

LEONEM

$$\frac{n}{(3n+3)^2} > \frac{n+1}{(3n+6)^2}$$

$$\frac{n}{9n^2+18n+9} > \frac{n+1}{9n^2+36n+36}$$

$$n(9n^2+36n+36) > (n+1)\cdot(9n^2+18n+9)$$

$$\cancel{9n^3}+36n^2+36n > \cancel{9n^3}+18n^2+9n+9n^2+18n+9$$

$$36n^2+36n > 18n^2+9n+9n^2+18n+9$$

$$9n^2+9n-9 > 0$$

$$9x^2+9x-9>0$$

$$x_1 = 0{,}618$$

$$\cancel{x_2 = -1{,}618}.$$

Como estoy trabajando con los números naturales
Tomo $n=1$. La serie converge a partir de $n=1$.

Para $x=0$ la serie converge.

$\underline{x = 12}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{n}\cdot \cancel{6^n}}{\cancel{6^n}\cdot 6\cdot(n+1)} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{3n+3}.$$

Comparo con $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (serie armónica) que diverge

$$\frac{\sqrt{n}}{3n+3} > \frac{1}{n}$$

$$\left(\frac{\sqrt{m}}{3m+3}\right)^2 > \frac{1}{m^2}$$

$$\frac{m}{9m^2+18m+9} > \frac{1}{m^2}$$

$$m^3 > 9m^2+18m+9 \quad \checkmark$$

La serie diverge para $x = 12$.

Respuesta: $\boxed{\text{la serie } \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{m}}{6^{m+1}(m+1)}(x-6)^m \text{ converge para } x \in [0;12)}$

B