Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea in Matematica

GRAFI E LORO AUTOMORFISMI

Tesi di Laurea in Algebra

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Libero Verardi

Presentata da:
Leonardo Valori

♯ Sessione III
Anno Accademico 2008/2009

A mio padre e mia madre
con tutto il cuore

Introduzione

Il primo lavoro sulla teoria dei grafi fu scritto dal celebre matematico svizzero Eulero e apparve nel 1736: dal punto di vista matematico la teoria dei grafi sembrava allora piuttosto futile, dato che si applicava in gran parte a indovinelli e giochi che servivano soltanto a divertirsi; ma recenti sviluppi della matematica, e in particolare delle sue applicazioni, hanno dato un forte impulso alla teoria dei grafi.
Attualmente vi sono argomenti di matematica pura, per esempio la teoria dei circuiti elettrici, per i quali la teoria dei grafi è lo strumento naturale, ma essa si applica anche a numerosi problemi di carattere molto pratico: a problemi di assegnazione, di trasporti, di flussi in una rete di tubazioni e in generale ai cosidetti problemi di programmazione.
In particolare, nel primo capitolo di questa tesi di laurea, daremo le nozione di grafo orientato, grafo non orientato e isomorfismo. Parleremo poi di catene, cicli, cammini e circuiti.
Nel secondo capitolo daremo le definizioni di azione di un gruppo su un insieme, di rappresentazione di un gruppo e mostreremo che sono equivalenti. Daremo poi la definizione di stabilizzatore e arriveremo a dimostrare un'importante formula per il calcolo dell'ordine di un gruppo.
Infine, dopo aver dato la nozione di automorfismo, ci occuperemo di due importanti problemi:

a) dato un grafo trovare il gruppo dei suoi automorfismi;

b) dato un gruppo trovare un grafo del quale il gruppo iniziale sia il gruppo degli automorfismi.

Indice

Elenco delle figure

Capitolo 1

Generalità sui grafi

1.1 Prime definizioni. Isomorfismo

Ogni volta che si ha un insieme i cui elementi siano in relazione fra loro si ha un grafo: la teoria dei grafi studia tutte le proprietà della configurazione, costituita da quegli elementi con i loro legami, che non dipendono dalla natura o particolarità degli elementi stessi.
Una definizione matematica precisa di grafo è la seguente

Definizione 1.1. Si chiama *grafo orientato* G la coppia $(V, \mathscr{C})$ formata da un insieme V e da una relazione $\mathscr{C}$ di V in sé.

Gli elementi di V diconsi *vertici* (o *nodi*) e si scrive $G = (V, \mathscr{C})$. Si dice, nel caso attuale, che il grafo è orientato in quanto la relazione $\mathscr{C}$ non è simmetrica (in generale) e quindi stabilisce un ordine fra due elementi che si corrispondono. È necessario stabilire ora alcuni termini di uso costante in tutto quanto seguirà. Consideriamo dunque un grafo $G = (V, \mathscr{C})$; se a e b sono due *vertici* e risulta che

$$b \in \mathscr{C}(a)^1 \text{ oppure } a\mathscr{C}b, \tag{1.1}$$

[1] $\mathscr{C}(a) = \{b \in V \mid a\mathscr{C}b\}$

cioè b è un vertice corrispondente mediante $\mathscr{C}$ del vertice a, si dirà che la coppia ordinata (a, b) è un *arco* del grafo G di *estremi* i vertici a e b. Il vertice a si dice *iniziale* e il vertice b *finale* o *terminale* dell'arco. Indicheremo gli archi di G con lettere dell'alfabeto greco e l'insieme degli archi di G con Ω. Un caso speciale di arco è quello per cui coincidono gli estremi (a, a): esso dicesi *cappio* o *laccio*.
Considerati due vertici a e b di un grafo G, si dice che sono *adiacenti* in G se il grafo contiene almeno uno degli archi (a, b) oppure (b, a) cioè se è vera una almeno delle affermazioni

$$(a, b) \in \Omega, \quad (b, a) \in \Omega. \tag{1.2}$$

Se nessuna delle due affermazioni 1.2 è vera, i vertici a e b sono *non adiacenti*. Ma se vale che $(a, b) \in \Omega$, per esempio, e allora a e b sono adiacenti, si dirà inoltre che a e b sono collegati dall'arco (a, b) e che a precede b (oppure che b segue a; a è *precedente* di b, b è *successivo* di a).
Siano α, β due archi di un grafo G; se uno almeno degli estremi di α è anche estremo di β si dice che i due archi sono *incidenti*. Se si ha

$$\alpha = (a, b), \quad \beta = (b, c), \tag{1.3}$$

si dice che gli archi α e β sono *consecutivi* e che α *precede* β (o che β *segue* α). Nei grafi orientati $G = (V, \mathscr{C})$ due vertici a e b possono essere collegati al più da due archi: l'arco (a, b) e l'arco (b, a), che si dicono fra loro *opposti*. Nelle applicazioni pratiche si è presentata l'opportunità di avere due elementi a e b di V collegati da più archi. Risulta dunque conveniente dare una definizione più estensiva di grafo.

Definizione 1.2. Si chiama grafo orientato $G = (V, \Omega, f)$ l'ente costituito da: un insieme V di elementi detti *vertici*, un insieme Ω di elementi detti *archi*, un'applicazione f dell'insieme Ω nell'insieme $V^2 = V \times V$.

L'applicazione f associa ad un arco $\alpha \in \Omega$ una coppia ordinata (a, b) di vertici che sono gli estremi di α; ma non è escluso che associ la coppia

(a, b) anche ad altri archi. Se più archi sono associati alla medesima coppia ordinata (a, b) di vertici si dice che sono *archi in parallelo*.
Quando gli insiemi V e Ω dei vertici e degli archi di un grafo G sono insiemi finiti il grafo stesso si dice *finito*.
Di un grafo G si può dare un'immagine grafica, che si chiama anch'essa *grafo*, nel modo seguente: si segnano su un piano n punti distinti, immagini degli n vertici di V, in modo arbitrario. Per ogni arco $\alpha = (a, b)$ di Ω si segna poi nel piano un arco α continuo di curva che congiunga i punti immagini dei vertici a, b. L'arco α viene dotato di una freccia per indicare il senso da a (estremo iniziale) a b (estremo finale). Come esempio consideriamo il seguente grafo G: l'insieme dei vertici è $V = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}$, l'insieme degli archi $\Omega = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10}\}$. La corrispondenza $\mathscr{C}$ che descrive G è determinata dalla tabella seguente:

$$\begin{array}{ll}
\mathscr{C}(a_1) = \{a_2\} & \mathscr{C}(a_5) = \{a_6, a_7\} \\
\mathscr{C}(a_2) = \{a_1, a_3\} & \mathscr{C}(a_6) = \{a_5, a_6, a_7\} \\
\mathscr{C}(a_3) = \varnothing & \mathscr{C}(a_7) = \{a_6\} \\
\mathscr{C}(a_4) = \{a_5\} & \mathscr{C}(a_8) = \varnothing
\end{array}$$

Si può anche descrivere G assegnando l'applicazione f di Ω in V^2 mediante la tabella

$$\begin{array}{ll}
f(\alpha_1) = (a_1, a_2) & f(\alpha_6) = (a_5, a_7) \\
f(\alpha_2) = (a_2, a_1) & f(\alpha_7) = (a_6, a_5) \\
f(\alpha_3) = (a_2, a_3) & f(\alpha_8) = (a_6, a_6) \\
f(\alpha_4) = (a_4, a_5) & f(\alpha_9) = (a_6, a_7) \\
f(\alpha_5) = (a_5, a_6) & f(\alpha_{10}) = (a_7, a_6)
\end{array} \tag{1.4}$$

Nelle figure 1.1 e 1.2 abbiamo disegnato due grafi che sono immagini del grafo G.

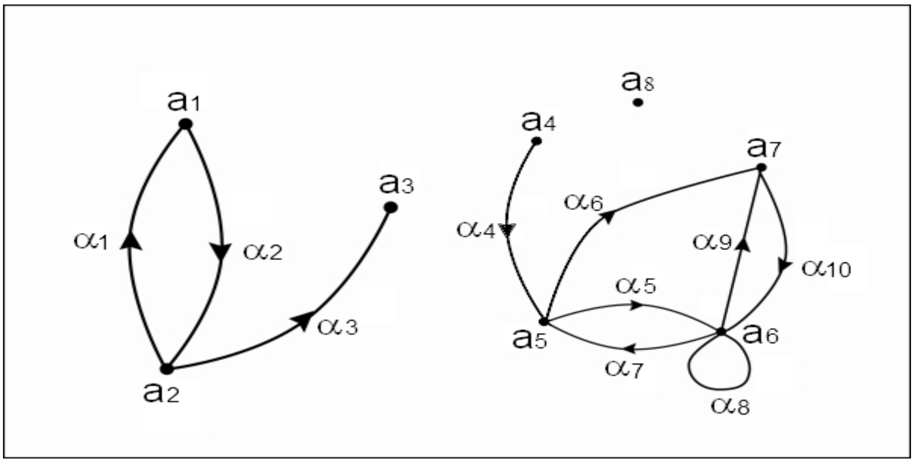

Figura 1.1: grafo orientato 1

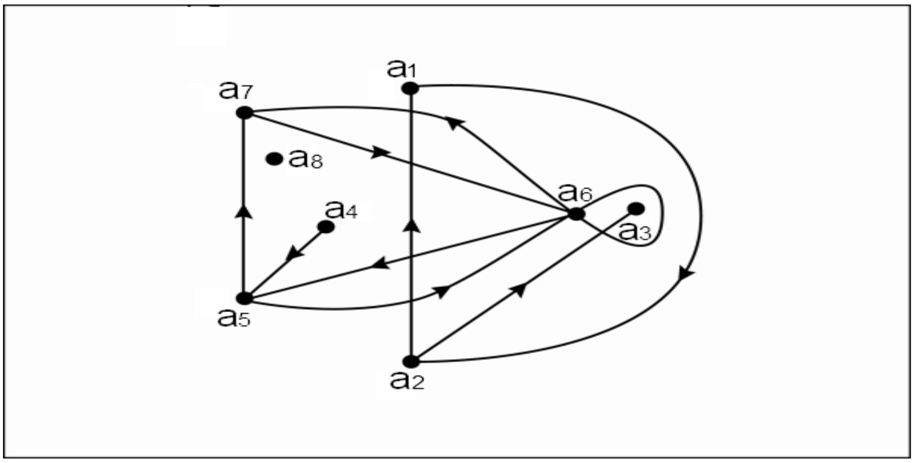

Figura 1.2: grafo orientato 2

Introduciamo ora una nozione importantissima: quella di *isomorfismo* fra grafi.

Definizione 1.3. Due grafi G_1 e G_2 aventi rispettivamente gli insiemi di vertici e archi V_1, Ω_1, V_2, Ω_2, si dicono *isomorfi* se:
a) si può porre una corrispondenza o applicazione F biunivoca fra gli insiemi V_1 e V_2 e una corrispondenza o applicazione Φ biunivoca fra gli insiemi Ω_1 e Ω_2;
b) se, e solo se, è vera l'affermazione $(a_1, b_1) = \alpha_1$, dove $a_1, b_1 \in V_1$ e $\alpha_1 \in \Omega_1$, allora è vera anche la $(a_2, b_2) = \alpha_2$, dove

$$a_2 = F(a_1), \quad b_2 = F(b_1), \quad \alpha_2 = \Phi(\alpha_1).$$

È importante notare che i grafi delle figure 1.1 e 1.2 sono isomorfi e le corrispondenze F e Φ sono quelle che associano vertici o archi contrassegnati dal medesimo indice. Più in generale, sono isomorfi fra loro tutti i grafi che si possono tracciare in un piano per fornire immagini di un medesimo grafo G. La nozione di isomorfismo fra grafi è molto importante in quanto nella teoria dei grafi si considerano identici due grafi isomorfi, nel senso che interessano (in generale) soltanto le proprietà di un grafo che esso ha in comune con tutti quelli che gli sono isomorfi.

1.2 Grafi non orientati. Sottografi. Grafi parziali

Definizione 1.4. Un grafo orientato si dice *simmetrico* quando è vera l'affermazione seguente:

$$(a, b) \in \Omega \Rightarrow (b, a) \in \Omega \tag{1.5}$$

per ogni arco (a, b) del grafo.

La seguente figura mostra un grafo orientato simmetrico H:

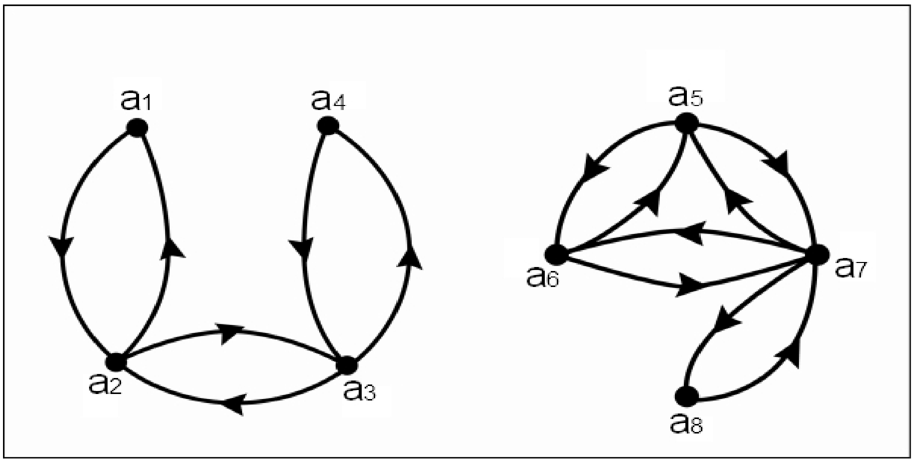

Figura 1.3: grafo orientato simmetrico

Comunque, quando ci troviamo di fronte a questo tipo di grafo, è più conveniente e naturale introdurre nell'insieme Ω una relazione che lega fra loro gli archi opposti, ossia una relazione $\mathscr{R}$ cosí definita:

$$(a,b)\mathscr{R}(b,a) \quad \forall (a,b) \in \Omega.$$

In questo modo le coppie di archi opposti vengono pensate come ad un solo elemento che è detto *spigolo* (talvolta anche *lato*) e, il grafo che si ottiene, è detto *grafo non orientato.* Una definizione generale astratta di grafo non orientato è la seguente:

Definizione 1.5. Si chiama *grafo non orientato* $G = (V, \sum, \Phi)$ l'ente costituito da:
un insieme V di elementi detti *vertici*, un insieme $\sum$ di elementi detti *spigoli*, un'applicazione dell'insieme $\sum$ nell'insieme $V^{(2)}$ (insieme delle coppie *non* ordinate di elementi di V)

La terminologia relativa ai grafi non orientati è simile a quella introdotta per i grafi orientati. Due vertici si dicono *adiacenti* se sono estremi di uno spigolo del grafo; due spigoli sono *incidenti* se hanno almeno un estremo in comune, si dicono *in parallelo* se hanno i due estremi in comune; uno spigolo *collega* o *congiunge* i suoi estremi.

Anche la definizione di isomorfismo è analoga a quella dei grafi orientati.

Definizione 1.6. Due grafi G_1 e G_2 non orientati sono *isomorfi* se si può porre una corrispondenza biunivoca F fra i loro vertici e una corrispondenza biunivoca Ψ fra i loro spigoli tali che a uno spigolo congiungente due vertici a, b del primo grafo la Ψ faccia corrispondere lo spigolo del secondo grafo che collega i due vertici corrispondenti in F dei vertici a, b.

Per quanto riguarda la rappresentazione dei grafi non orientati vale quanto detto in precedenza per quelli orientati, salvo che ora gli archi di curva immagini degli spigoli non saranno dotati di alcuna freccia. Un'osservazione importante è la seguente: ad ogni grafo G orientato assoceremo un grafo non orientato $(G)_0$ astraendo dalla orientazione degli archi di G. Dicendo *spigolo di* G intenderemo uno spigolo di $(G)_0$ cioè un arco di G privato della sua orientazione. È chiaro che: *se due grafi orientati* G_1 *e* G_2 *sono isomorfi allora sono isomorfi anche* $(G_1)_0$ *e* $(G_2)_0$, ma non il viceversa. Infatti se si considera un grafo non orientato G^* si può costruire un grafo orientato G attribuendo arbitrariamente un'orientazione a ciascuno spigolo do G^* (che non sia un cappio); ovviamente G non è, in generale, univocamente determinato ma si ha in ogni caso

$$G^* = (G)_0.$$

Per definire un grafo G non orientato basta elencarne i vertici e gli spigoli e dare la tabella indicante gli estremi di ciascuno spigolo. Ad esempio, il grafo non orientato $(G)_0$, associato al grafo G del paragrafo 1.1 rappresentato nelle figure 1.1 e 1.2, è definito dalla tabella 1.4 nella quale le coppie di vertici si pensano non ordinate. La figura 1.4 dà un'immagine di $(G)_0$.

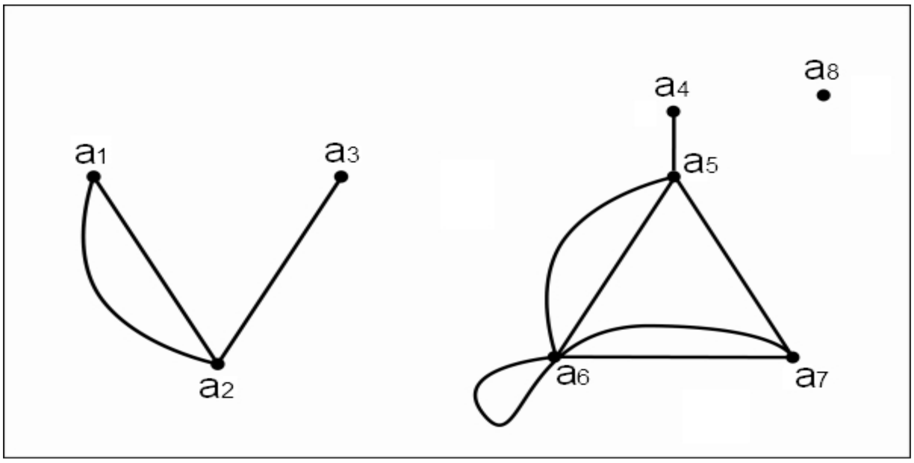

Figura 1.4: grafo non orientato $(G)_0$ associato al grafo orientato G

Si osserverà che i vertici a_5 e a_6, per esempio, sono collegati da due spigoli in parallelo.
Il grafo non orientato H_1 che si ottiene dal grafo orientato simmetrico H della figura 1.3 pensando come spigoli le coppie di archi opposti è rappresentato nella figura 1.5.

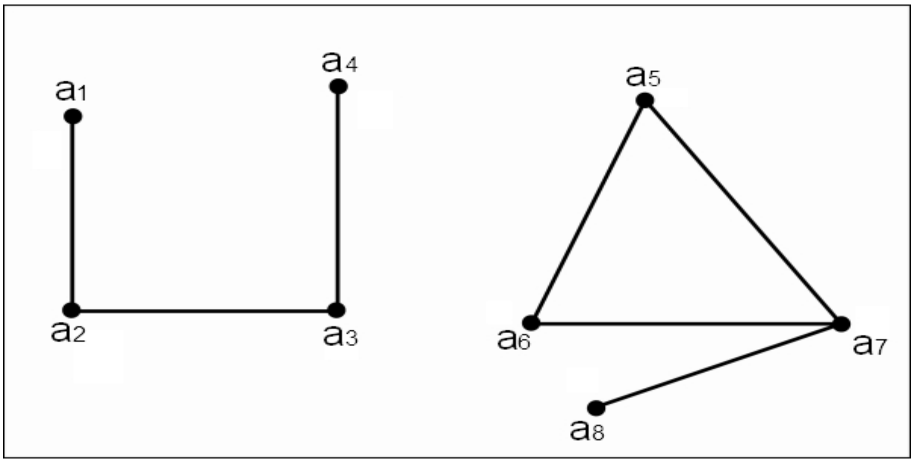

Figura 1.5: grafo non orientato

Si noti che H_1 non ha nulla a che vedere col grafo $(H)_0$ associato ad H. Diamo ora due importanti definizioni.

Definizione 1.7. Dato un grafo G avente un insieme V di vertice si dice *sottografo* H di G ogni grafo che abbia come insieme dei vertici W un sottoinsieme di V, $W \subseteq V$ e tale che due vertici a e $b \in W$ siano adiacenti in H se, e solo se, lo sono in G ed eventualmente nel medesimo ordine.

Definizione 1.8. Dato un grafo G avente un insieme di archi (o spigoli, secondo i casi) Ω si dice *grafo parziale* K di G ogni grafo che abbia come insieme degli archi (o spigoli) Ω_1 un sottinsieme di Ω, $\Omega_1 \subseteq \Omega$.

Due vertici che sono adiacenti in K lo sono anche in G e nel medesimo ordine, *ma non viceversa*.
Mettendo insieme le nozioni di grafo parziale e di sottografo si ottiene quella di *sottografo parziale*.
Abbiamo già detto che cosa si intenda per grafo orientato simmetrico, caratterizzato dall'affermazione 1.5. Si dirà invece che il grafo orientato G è *antisimmetrico* se è vera l'affermazione

$$\forall (a,b) \in G, \quad (a,b) \in \Omega \Rightarrow (b,a) \notin \Omega, \tag{1.6}$$

cioè se non vi sono mai in G due archi opposti.
Si dice che il grafo G orientato è *completo* se è vero che

$$\forall a \in V, \quad b \in V, \quad (a,b) \notin \Omega \Rightarrow (b,a) \in \Omega, \tag{1.7}$$

cioè se per *ogni* coppia di vertici a, b del grafo G esiste in G un arco almeno di estremi i due vertici considerati. Un grafo G *non* orientato si dice *completo* se due vertici qualsiasi sono *sempre* adiacenti e inoltre non vi sono cappi né spigoli in parallelo. In generale diremo che un grafo G *non* orientato è *semplice* se non ha cappi né spigoli in parallelo; per ciò che riguarda i grafi G orientati, si dirà che G è semplice se tale è il grafo associato $(G)_0$.

1.3 Catene, cicli, cammini e circuiti

Consideriamo ora grafi non orientati G oppure, nel caso di grafi G orientati, i relativi grafi associati $(G)_0$.

Definizione 1.9. Sia $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r\} = \mathscr{C}$ una r-pla ordinata di spigoli del grafo G: si dice che $\mathscr{C}$ è una *catena* se ciascuno spigolo α_k è incidente in uno dei suoi estremi al precedente $\alpha_{k-1}(k > 1)$ e nell'altro estremo al seguente $\alpha_{k+1}(k < r)$, il primo spigolo α_1 essendo incidente soltanto al secondo α_2 e l'ultimo spigolo α_r soltanto al penultimo α_{r-1}.

Ne discende che esiste una $(r+1)$-pla ordinata di vertici $\{x_1, x_2, \ldots, x_{r+1}\}$ tale che lo spigolo α_k della catena abbia come estremi i vertici $\{x_k, x_{k+1}\}(k = 1, 2, \ldots, r)$; lo spigolo α_k avrà il vertice x_k in comune con α_{k-1} e il vertice x_{k+1} in comune con α_{k+1}. Si potrà rappresentare la catena $\mathscr{C}$ nei due modi

$$\mathscr{C} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\} \quad \text{oppure} \quad \mathscr{C} = \{x_1, x_2, \ldots, x_{r+1}\}; \tag{1.8}$$

ma soltanto il primo modo è sempre privo di ambiguità. Si dice che la catena $\mathscr{C}$ in 1.8 *congiunge* il vertice x_1 col vertice x_{r+1} o viceversa e che questi due vertici sono gli *estremi* della catena. Si possono considerare anche *catene infinite* prendendo, invece che una r-pla di spigoli, una successione infinita di spigoli soddisfacente alle medesime condizioni enunciate sopra. Se gli spigoli α_k che figurano in una catena sono *tutti diversi* si dice che la catena è *semplice*; se i vertici x_k di una catena sono tutti diversi si dice che la catena è *elementare* (ovviamente è anche semplice, ma non viceversa). Il numero r degli spigoli di una catena $\mathscr{C}$ si chiama *lunghezza* della catena $l(\mathscr{C})$.
Se l'ultimo spigolo α_r della catena $\mathscr{C} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ è incidente al primo spigolo, cioè se l'ultimo vertice x_{r+1} coincide col primo vertice x_1, si dice che la catena è *chiusa* e che costituisce un *ciclo*; come le catene, anche i cicli possono essere *semplici* o *elementari*. Come per una catena, la *lunghezza* di un ciclo è il numero degli spigoli che ne fanno parte. Un ciclo è *elementare*

se soltanto il primo e l'ultimo vertice coincidono, mentre gli altri sono tutti diversi. Un ciclo nel quale ogni spigolo figura *un numero pari di volte* si chiamerà *ciclo nullo* e converremo di considerare ciclo nullo anche un *insieme vuoto* di spigoli.
Per quanto riguarda i grafi orientati abbiamo una definizione analoga.

Definizione 1.10. Sia $\mathscr{F} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ un insieme di *archi*.
Sia $\alpha_i = (x_i^{'}, x_i^{''})$(per $i = 1, 2, \ldots, r$); se risulta

$$x_i^{''} = x_{i+1}^{'} \quad \forall i = 1, 2, \ldots, r-1 \tag{1.9}$$

cioè se il vertice *finale* dell'arco α_i è *iniziale* per l'arco α_{i+1} oppure anche, secondo la terminologia del precedente paragrafo, se gli archi di $\mathscr{F}$ sono ciascuno il consecutivo del precedente (salvo il primo ovviamente) allora l'insieme si dice *cammino* (talvolta anche *itinerario*).

Nel grafo G orientato si possono considerare *catene* e *cammini*; possiamo dire che questi ultimi sono catene nelle quali gli archi sono tutti orientati *concordemente*. Il vertice $x_1^{'}$ si dice *iniziale* di $\mathscr{F}$ e il vertice $x_r^{''}$ *finale*; si dice che $\mathscr{F}$ *conduce* da $x_1^{'}$ a $x_r^{''}$. Se si verifica che

$$x_1^{'} = x_r^{''}, \tag{1.10}$$

si dice che il cammino $\mathscr{F}$ *si chiude* e costituisce un *circuito*. Quando tutti i vertici del circuito sono diversi (salvo $x_1^{'}$ che coincide con $x_r^{''}$) il circuito è *elementare*; un singolo *cappio* verrà considerato come un circuito elementare. Il numero r degli archi di $\mathscr{F}$ è la *lunghezza* del cammino $l(\mathscr{F})$; un singolo cappio è un circuito di lunghezza 1.
Anche nel caso dei cammini se ne possono considerare di *infiniti*, con la stessa definizione che nel caso finito.

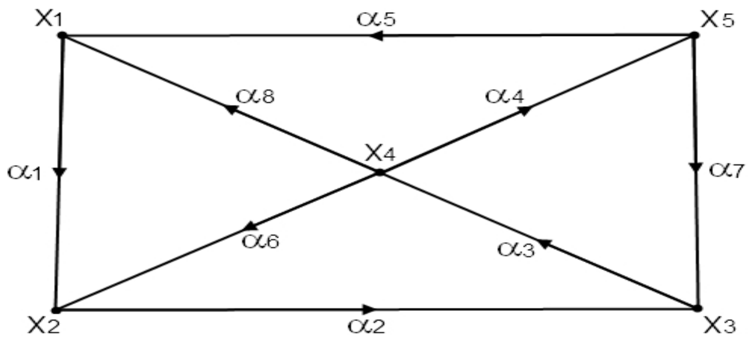

Figura 1.6: cicli e circuiti

Nel grafo G, rappresentato nella figura 1.6, si ha che

$$\mathscr{C}_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_7, \alpha_5\} = \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_1\}$$

è un *ciclo* (non circuito) *elementare*. Inoltre

$$\mathscr{C}_2 = \{\alpha_1, \alpha_6, \alpha_3, \alpha_7, \alpha_4, \alpha_8\} = \{x_1, x_2, x_4, x_3, x_5, x_4, x_1\}$$

è un *ciclo* (non circuito) *semplice* ma non elementare. Si ha poi che

$$\mathscr{F} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_1\}$$

è un *circuito elementare*; così pure

$$\mathscr{F} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_8\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_1\}.$$

Invece il circuito

$$\mathscr{F} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_7, \alpha_3, \alpha_8\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_3, x_4, x_1\}$$

non è elementare e nemmeno semplice.

Sia $\mathscr{C}_1 = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ una catena di un grafo G congiungente i vertici x_1 e x_{r+1} e sia poi $\mathscr{C}_2 = \{\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_{r+s}\}$ una catena congiungente i vertici x_{r+1} e x_{r+s}. È chiaro che l'insieme

$$\mathscr{C} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_{r+s}\}$$

è ancora una catena e che congiunge i vertici x_1 e x_{r+s}. Si dice che la catena $\mathscr{C}$ è *somma* delle catene $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ e si scrive

$$\mathscr{C} = \mathscr{C}_1 + \mathscr{C}_2.$$

1.4 Connessione e componenti di un grafo

Sia G un grafo (orientato o non orientato) e sia V l'insieme dei vertici di G. Nell'insieme V possiamo introdurre la *relazione* $\mathscr{R}$ seguente: se $a, b \in V$,

$$a\mathscr{R}b \Rightarrow \begin{cases} a = b \text{ oppure se } a \neq b \text{ esiste almeno} \\ \text{una catena } \mathscr{C}(a,b) \text{ che congiunge } a \text{ e } b. \end{cases}$$

La relazione $\mathscr{R}$ è una *relazione di equivalenza.* Infatti è chiaro intanto che

1. $a\mathscr{R}a, \quad \forall a \in V$,
   inoltre

2. $a\mathscr{R}b \Rightarrow b\mathscr{R}a$,
   perché la catena $\mathscr{C}(a,b)$ che congiunge a e b ovviamente congiunge b e a. Infine

3. $a\mathscr{R}b, \quad b\mathscr{R}c \Rightarrow a\mathscr{R}c$,
   perché la catena
   $$\mathscr{C} = \mathscr{C}(a,b) + \mathscr{C}(b,c)$$
   congiunge a e c.

Si possono dunque considerare la *classi di equivalenza* determinate da $\mathscr{R}$ nell'insieme V: ciascuna classe risulterà, in base a quanto precede, formata

da vertici che si possono sempre congiungere a due a due mediante catene, mentre invece due vertici appartenenti a classi diverse non si possono mai congiungere mediante una catena del grafo. Dunque se $V^{'}, V^{''}, \ldots$ sono le classi di equivalenza predette, potremo considerare i *sottografi* $G^{'}, G^{''}, \ldots$ che hanno come insieme dei vertici rispettivamente $V^{'}, V^{''}, \ldots$; ciascuno dei sottografi $G^{'}, G^{''}, \ldots$ risulterà completamente disgiunto da tutti gli altri, non potendosi congiungere nessuno dei suoi vertici con qualcuno di quelli degli altri mediante qualche catena. Invece ciascuno dei sottografi $G^{'}, G^{''}, \ldots$ è tale che si può andare da qualsivoglia dei suoi vertici a un altro percorrendo almeno una catena. Si dice che ciascuno dei sottografi $G^{'}, G^{''}, \ldots$ è *connesso* e che essi *compongono* il grafo G oppure che $G^{'}, G^{''}, \ldots$ sono le *componenti connesse* di G; se lo stesso G è dotato di una sola componente connessa, si dice che G è *connesso.* Quando il numero delle componenti connesse di un grafo G è *finito* (ciò accade necessariamente se G è finito), esso si dice *numero di connessioni p del grafo.* Il grafo G della figura 1.1 ha tre componenti connesse:
$G^{'}$ ha i vertici a_1, a_2, a_3; $G^{''}$ ha i vertici a_4, a_5, a_6, a_7; infine $G^{'''}$ ha un solo vertice a_8. I grafi delle figure 1.3, 1.4, 1.5 hanno due componenti connesse; il grafo della figura 1.6 è invece *connesso.*
Utilizzando la nozione di cammino invece che quella di catena, otteniamo le nozioni seguenti: un grafo orientato G si dice *fortemente connesso* se comunque si scelgano due vertici a, b distinti di G, esiste sempre *almeno un cammino* che inizia in a e termina in b. Si dice che G è *semi-fortemente* connesso se, scelti comunque due vertici a e b di G, esiste in G almeno un cammino che inizia in a (*oppure in* b) e termina in b (*oppure termina in* a, rispettivamente). Una nozione più precisa di quella di *connessione* è quella di *k-connessione*: si dice che G è *k-connesso* se, comunque si scelgano due vertici a e b di G, esistono *almeno k* catene che congiungono a e b e non hanno in comune alcun vertice, esclusi naturalmente i vertici a e b.
Diamo ora una definizione che ha grande importanza nelle applicazioni della teoria dei grafi.

Definizione 1.11. Sia V l'insieme dei vertici di un grafo G e sia

$$V = V_1 \cup V_2, \quad V_1 \cap V_2 = \varnothing \tag{1.11}$$

ma nessuno degli insiemi V_1, V_2 sia vuoto, allora *l'insieme di tutti gli spigoli (o archi) di G che hanno un estremo appartenente a V_1 mentre l'altro appartenente a V_2 si chiama cociclo.*

Nella seguente figura l'insieme degli spigoli $\{\alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$ è un *cociclo* dove si ha $V_1 = \{a_1, a_2\}$ e $V_2 = \{a_3, a_4\}$.

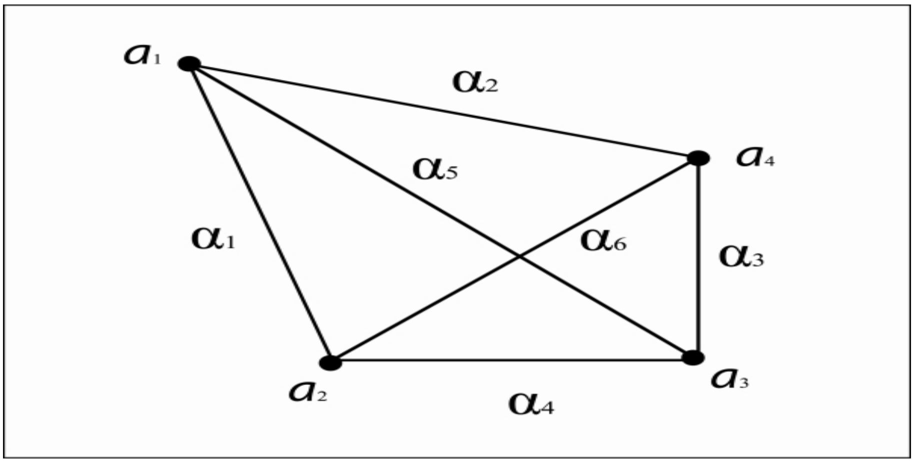

Figura 1.7: cociclo

Osservazione 1. Se si sopprimono in un grafo G tutti gli spigoli di un cociclo il numero di connessione di G aumenta almeno di un unità.

Quando aumenta di una unità *esattamente* si dice che il cociclo è *elementare.* Se uno spigolo α da solo costituisce un cociclo, esso si dice *spigolo separante.*

Osservazione 2. Se si sopprime in un grafo G un suo spigolo separante non è più possibile collegarne gli estremi a, b mediante alcuna catena di G.

Anche per i cocicli si introduce la nozione di *cocicli nulli* che sono tutti i cocicli nei quali ogni spigolo figura un numero pari di volte e anche per convenzione l'insieme vuoto.

Capitolo 2

Grafi e loro automorfismi

Diamo ora alcune nozioni della teoria dei gruppi che applicheremo ai grafi.

2.1 Alcune nozioni dalla teoria dei gruppi

Definizione 2.1. Siano G un gruppo ed X un insieme. Chiamiamo *azione* di G su X ogni funzione $\mu : X \times G \to X$ tale che:

a) per ogni $x \in X$, $\mu(x, 1_G) = x$;

b) per ogni $x \in X$ e $g_1, g_2 \in G$, $\mu(x, g_1 g_2) = \mu(\mu(x, g_1), g_2)$.

Scriveremo x^g anziché $\mu(x, g)$. Con questa notazione, le due proprietà a) e b) diventano rispettivamente:

a) $x^{1_G} = x$;

b) $x^{g_1 g_2} = (x^{g_1})^{g_2}$.

Definizione 2.2. Una *rappresentazione di G come gruppo di permutazione su X* è un omomorfismo $\rho : G \to S_X$. Inoltre, una rappresentazione si dice *fedele* se è iniettiva.

Le azioni e le rappresentazioni sono legate fra loro dal seguente teorema.

Teorema 2.1.1. *a) Ad ogni azione $\mu : X \times G \to X$ si può associare una rappresentazione ρ_μ;*

b) ad ogni rappresentazione $\rho : G \to S_X$ si può associare un' azione μ_ρ.

Dimostrazione. a) Per ogni $g \in G$ la funzione $\rho(g) : x \to x^g$ è una permutazione di X, infatti ha come inversa $\rho(g^{-1})$. La funzione $\rho_\mu : G \to S_X$, $\rho_\mu(g) = \rho(g)$ è un omomorfismo, infatti:

1) $\rho_\mu(1_G) = \rho(1_G) = id_X$;

2) $\rho_\mu(g_1)\rho_\mu(g_2)(x) = \rho_\mu(g_2)(x^{g_1}) = x^{g_1 g_2} = \rho_\mu(g_1 g_2)(x)$

b) La funzione $\mu_\rho : X \times G \to X$ tale che per ogni $x \in X$ e $g \in G$, $\mu_\rho(x, g) = \rho(g)(x)$, è un' azione, infatti:

1) $\mu_\rho(x, 1_G) = \rho(1_G)(x) = id_X(x) = x$;

2) $\mu_\rho(x, g_1 g_2) = \rho(g_1 g_2)(x) = \rho(g_1)\rho(g_2)(x) = \mu_\rho(\mu_\rho(x, g_1), g_2)$.

□

Osservazione 3. Risulta che $\mu_{\rho_\mu} = \mu$ e $\rho_{\mu_\rho} = \rho$.

Esempio 2.1. Applicando tale teoria ai grafi la nostra azione sarà:

$$\mu : V \times G \to V, \quad \mu(a, g) = F_g(a)$$

dove V è l'insieme dei vertici, G è il gruppo degli automorfismi e F_g è la funzione biunivoca dell'automorfismo g che agisce sui vertici del grafo.

Definizione 2.3. Sia data un'azione di G sull'insieme X e sia $x \in X$. Si chiama *stabilizzatore* $St_G(x)$ in G l' insieme $\{g \in G \mid x^g = x\}$.

Si ha che $\forall x \in X, St_G(x)$ è un sottogruppo di G. Infatti:

1) $x^{1_G} = x \Longrightarrow 1_G \in St_G(x)$;

2) $g_1, g_2 \in St_G(x), \quad x^{g_1 g_2} = x^{g_2} = x \Longrightarrow g_1 g_2 \in St_G(x)$.

Inoltre, essendo il nucleo della rappresentazione associata $\{g \in G \mid \forall x \in X, x^g = x\}$, risulta che $ker\rho = \bigcap_{x \in X} St_G(x)$.
Un'azione si dice *semiregolare* se per ogni $x \in X$ si ha $St_G(x) = 1_G$. Ne segue che ogni rappresentazione associata ad un'azione semiregolare è fedele.
Siano ora $x, y \in X$ e poniamo $x \sim y$ se esiste $g \in G$ tale che $y = x^g$. Questa è una relazione d'equivalenza in X, le cui classi prendono il nome di G-orbite e sono denotate con $[x]_G$. Il numero di elementi di $[x]_G$ si dice *lunghezza* della G-orbita.
L'azione si dice transitiva se $X/ \sim = X$. Ciò significa che per ogni coppia di oggetti $x, y \in X$, esiste $g \in G$ tale che $y = x^g$.
L'azione si dice *regolare* se è transitiva e semiregolare.

Osservazione 4. a) Sia data un'azione μ di un gruppo G su un insieme X, sia $x \in X$ e sia $[x]_G$ la sua G-orbita. Allora è indotta da μ su $[x]_G$ un'azione, e tale azione è transitiva.

b) Si dimostra facilmente che $\forall x \in X$ e $g \in G$ si ha $St_G(x^g) = g^{-1} St_G(x) g$. Infatti, preso $h \in St_G(x)$ si ha che:

$$(x^g)^{g^{-1}hg} = x^{hg} = x^g.$$

Ne segue che due sottogruppi di G sono stabilizzatori di elementi di una stessa orbita se e solo se sono coniugati. [1]

[1]Due sottogruppi H,K di un gruppo G si dicono coniugati se $\exists g \in G$ tale che $K = \{g^{-1}hg \mid h \in H\}$ e si scrive $K = g^{-1}Hg$.
Inoltre, come si dimostra facilmente, il coniugio è una relazione di equivalenza.

Teorema 2.1.2. *Sia data un'azione del gruppo G su un insieme X e sia $x \in X$. Allora:*

a) l' insieme D dei laterali destri di $St_G(x)$ è equipotente a $[x]_G$;

b) se G è finito si ha $\mid G \mid = \mid St_G(x) \mid \cdot \mid [x]_G \mid$. In particolare, se l'azione è transitiva e G è finito si ha $\mid G \mid = \mid St_G(x) \mid \cdot \mid X \mid$;

c) se l' azione è regolare allora $\mid X \mid = \mid G \mid$

Dimostrazione. a) La relazione tra $D = \{St_G(x)g \mid g \in G\}$ e $[x]_G$ definita da:
$St_G(x)g \to x^g$, è una funzione ed è biiettiva. Infatti risulta iniettiva in quanto $\forall g, h \in G$ si ha:

$$x^g = x^h \Longleftrightarrow x^{gh^{-1}} = x \Longleftrightarrow gh^{-1} \in St_G(x) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow g \in St_G(x)h \Longleftrightarrow St_G(x)g = St_G(x)h.$$

La suriettività è poi ovvia.

b) Segue a) e dal teorema di Lagrange [2].

c) Segue da b) e dal fatto che, qualunque sia $x \in X$, si ha $St_G(x) = 1$.

□

[2]Il teorema di Lagrange per i gruppi finiti afferma che, se G è un gruppo, H un sottogruppo e $[G : H]$ il numero dei laterali destri Hg di H in G, allora:
$\mid G \mid = \mid H \mid\mid [G : H] \mid$

2.2 Esempi sui grafi e i gruppi dei loro automorfismi

Diamo subito una definizione fondamentale per la nostra trattazione.

Definizione 2.4. Un automorfismo di un grafo è un isomorfismo da un grafo a se stesso. Gli automorfismi di un grafo formano un gruppo, detto *automorfo del grafo*.

La definizione di automorfismo di un grafo è al centro dei problemi che tratteremo in questo paragrafo, che sono:

a) dato un grafo determinare il gruppo dei suoi automorfismi;

b) dato un gruppo determinare un grafo di cui esso è il gruppo degli automorfismi.

Iniziamo la nostra trattazione prendendo in considerazione i circuiti elementari.

Osservazione 5. Dato un circuito elementare avente n vertici si ha che $\mid G \mid = n$.

Dimostrazione. Abbiamo l'insieme dei vertici $V = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ e l'insieme degli archi $\Omega = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n,\}$ i quali sono legati fra loro nel seguente modo:

$$\alpha_i = (a_i, a_{i+1}) \quad \forall i = 1, \dots, n-1, \quad \alpha_n = (a_n, a_1). \tag{2.1}$$

A questo punto la dimostrazione discende direttamente dal punto b) del teorema 2.1.2, infatti:

$$\mid G \mid = \mid [a_1]_G \mid\mid St_G(a_1) \mid = n \tag{2.2}$$

in quanto $\mid [a_1]_G \mid = n$ e $\mid St_G(a_1) \mid = 1$. □

Esempio 2.2.

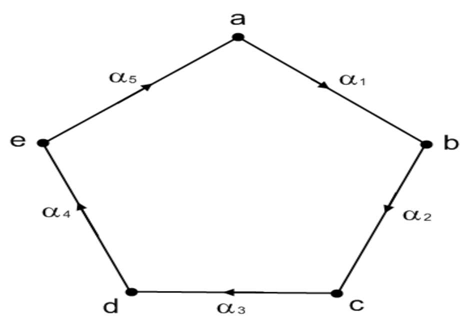

Figura 2.1: Circuito a 5 vertici

Abbiamo $V = \{a, b, c, d, e\}$ e $\Omega = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$.
Sappiamo che

$$| G | = | St_G(a) | | [a]_G | \, . \tag{2.3}$$

È chiaro che $| [a]_G | = 5$ in quanto a è in relazione con ogni elemento di V e $| St_G(a) | = 1$ in quanto se a viene fissato vengono, di conseguenza, fissati tutti gli altri elementi di V e quindi $St_G(a) = \{id\}$.
Otteniamo dunque che $| G | = 5$.
Il gruppo $(\mathbb{Z}_5, +)$ è isomorfo al gruppo degli automorfismi del grafo della figura 2.1.
L'isomorfismo è quello che manda $[1]_5$ in g_1 dove g_1 è l'automorfismo che manda ogni vertice iniziale di un arco nel vertice finale. Chiaramente questo esempio può essere facilmente esteso al gruppo $(\mathbb{Z}_n, +)$ prendendo come grafo un circuito composto da n vertici.

Così come abbiamo fatto per i circuiti elementari si può giungere ad un risultato analogo per i cicli elementari.

Proposizione 2.2.1. *Dato un ciclo elementare avente n vertici si ha che $| G | = 2n$*

Dimostrazione. Analogamente alla proposizione precedente abbiamo che:

$$\begin{aligned} \mid G \mid &= \mid [a_1]_G \mid\mid St_G(a_1) \mid = \\ &= n \cdot \mid [a_2]_G \mid\mid St_G(\{a_1, a_2\}) \mid = 2n \end{aligned}$$

Infatti , $\mid [a_1]_G \mid = n$, $\mid St_G(\{a_1, a_2\}) \mid = 1$ e, bloccato il vertice a_1, $\mid [a_2]_G \mid = 2$. □

Esempio 2.3.

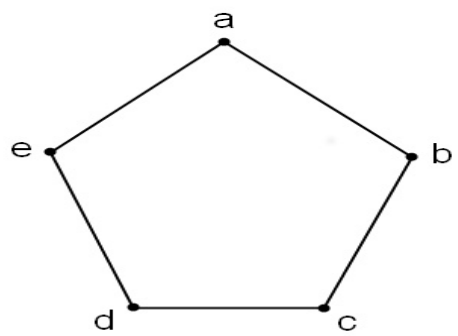

Figura 2.2: Ciclo a 5 vertici

Consideriamo il ciclo elementare della figura sopra avente $V = \{a, b, c, d, e\}$. In questo caso abbiamo, come nell'esempio 2.2, $\mid [a]_G \mid = 5$ ma $\mid St_G(a) \mid > 1$ dunque:

$$\mid G \mid = 5 \cdot \mid [b]_G \mid\mid St_G(\{a, b\}) \mid . \tag{2.4}$$

Considerando a fissato, l'elemento b può scambiarsi solo con l'elemento e e $\mid St_G(\{a, b\}) \mid = 1$. Dunque si ha che:

$$\mid G \mid = 10 \tag{2.5}$$

Il gruppo ottenuto è il gruppo diedrale D_5. Analogamente un ciclo elementare composto da n vertici è il grafo di cui, il gruppo del poligono regolare con n lati, è il gruppo degli automorfismi. Si può ottenere un grafo che ha $(\mathbb{Z}_5, +)$ come gruppo degli automorfismi modificando il grafo della figura 2.3 nel seguente modo:

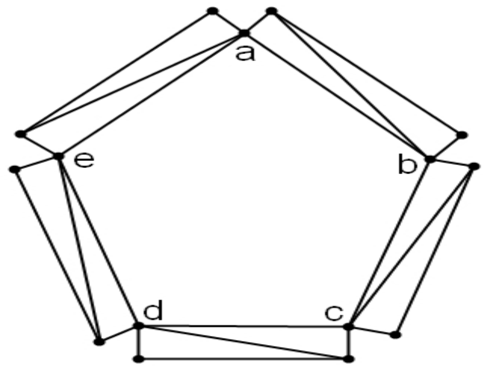

Figura 2.3: Grafo del gruppo $\mathbb{Z}_5$

Infatti si ha che $\mid [a]_G \mid = 5$, $\mid St_G(a) \mid = 1$ e quindi $\mid G \mid = 5$. L'isomorfismo fra i due gruppi è quello che manda $[1]_5$ in g_1, dove g_1 è l'automorfismo che manda il vertice a in b, b in c, c in d e d in e. Anche in questo caso possiamo estendere il nostro esempio al gruppo $(\mathbb{Z}_n, +)$ partendo da un ciclo elementare composto da n vertici e modificandolo come fatto sopra.

A questo punto è interessante studiare i solidi platonici, infatti, gli spigoli che delimitano le facce di questi costituiscono dei cicli elementari che hanno la particolare proprietà di avere ogni spigolo in comune con un altro ciclo elementare.

Esempio 2.4 (Tetraedro)**.**

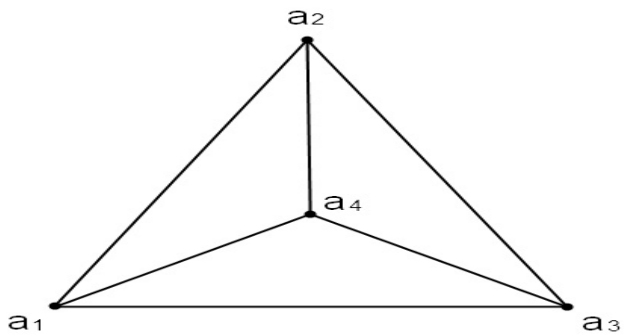

Figura 2.4: Tetraedro

Abbiamo $V = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ e $\Omega = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$.
Calcoliamo l'ordine del gruppo degli automorfismi.

$$\begin{aligned}
\mid G \mid &= \mid [a]_4 \mid\mid St_G(a_4) \mid= \\
&= 4\cdot \mid [a_1]_G \mid\mid St_G(\{a_1, a_4\}) \mid= \\
&= 4 \cdot 3\cdot \mid [a_2]_G \mid\mid St_G(\{a_1, a_2, a_4\}) \mid= \\
&= 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24
\end{aligned}$$

Infatti possiamo portare il vertice a_4 in tutti gli altri vertici del tetraedro e quindi si ha $\mid [a]_4 \mid= 4$.
Bloccando a_4, rimangono tutte le possibili permutazioni fra i vertici a_1, a_2 e a_3 che sono 6.
Il gruppo G, degli automorfismi del tetraedro, è isomorfo a S_4.

Esempio 2.5 (Cubo).

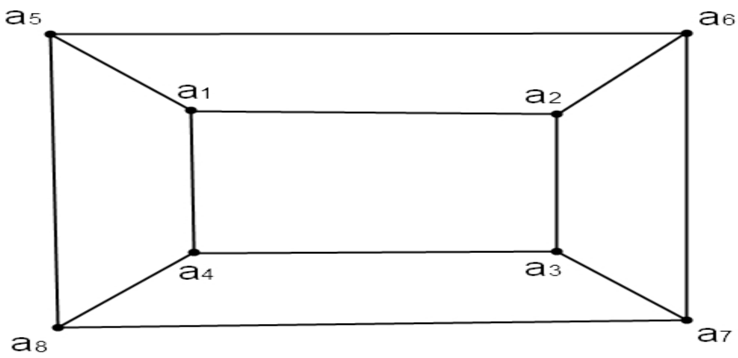

Figura 2.5: Cubo

Abbiamo $V = \{a_1, a_2, \ldots, a_8\}$, $\Omega = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{12}, \}$.
Prendiamo in considerazione a_1. Questo è in relazione con tutti gli elementi di V e quindi $\mid [a_1]_G \mid = 8$.
Fissato a_1 gli unici elementi con i quali a_2 è in relazione, oltre a se stesso, sono a_4 e a_5 e quindi $\mid [a_2]_G \mid = 3$.
Prendendo in considerazione a_3 e fissando a_1 e a_2 abbiamo che $[a_3]_G = \{a_3, a_6\}$ e dunque $\mid [a_3]_G \mid = 2$. Inoltre, bloccando anche a_3 tutti gli altri elementi sono bloccati e si ha che $\mid St_G(\{a_1, a_2, a_3\}) \mid = 1$.
Dunque abbiamo che:

$$\mid G \mid = 8 \cdot 3 \cdot 2 = 48 \tag{2.6}$$

Esempio 2.6 (Ottaedro)**.**

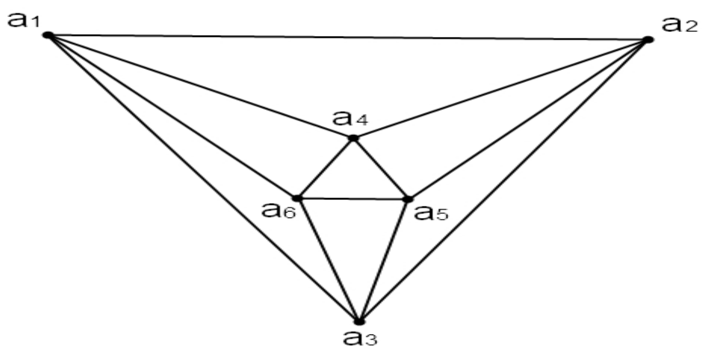

Figura 2.6: Ottaedro

$$
\begin{aligned}
\mid G \mid &= \mid [a_4]_G \mid\mid St_G(a_4) \mid= \\
&= 6\cdot \mid [a_1]_G \mid\mid St_G(\{a_1, a_4\}) \mid= \\
&= 6\cdot 4\cdot \mid [a_6]_G \mid\mid St_G(\{a_1, a_4, a_6\}) \mid= \\
&= 6\cdot 4\cdot 2 = 48
\end{aligned}
$$

Infatti a_4 è in relazione con tutti i vertici dell'ottaedro e, dunque, $\mid [a_4]_G \mid= 6$.
Quando blocchiamo a_4 il vertice a_1 può andare solo nei vertici adiacenti ad a_4, ossia a_2,a_5,a_6 e in se stesso.
A questo punto, bloccato anche il vertice a_1, il vertice a_6 può andare solo in a_2, così $\mid [a_6]_G \mid= 2$.
Infine, si ha che quando a_4, a_1 e a_6 sono bloccati, ogni vertice può andare solo in se stesso e dunque $\mid St_G(\{a_1, a_4, a_6\}) \mid= 1$.

Esempio 2.7 (Dodecaedro).

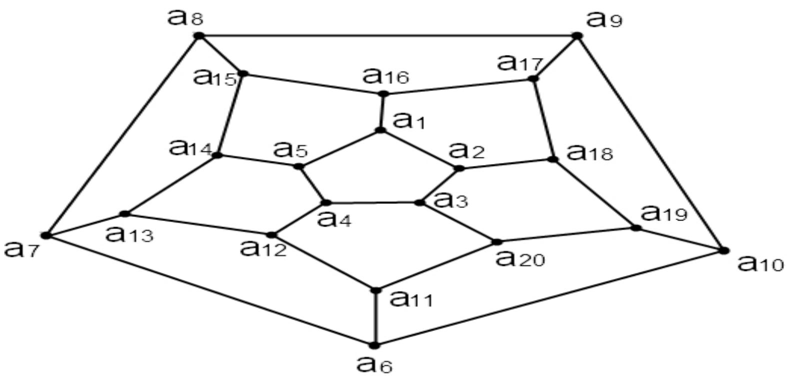

Figura 2.7: Dodecaedro

$$\begin{aligned}
|\ G\ | &= |\ [a_1]_G\ ||\ St_G(a_1)\ |= \\
&= 20\cdot\ |\ [a_2]_G\ ||\ St_G(\{a_1, a_2\})\ |= \\
&= 20\cdot 3\ |\ [a_3]_G\ ||\ St_G(\{a_1, a_2, a_3\})\ |= \\
&= 20\cdot 3\cdot 2 = 120
\end{aligned}$$

Infatti a_1 può essere mandato in ogni vertice del dodecaedro e quindi $|\ [a_1]_G\ |= 20$.
Bloccando il vertice a_1, abbiamo che a_2 può andare in a_3, a_{18} e in se stesso, dunque $|\ [a_2]_G\ |= 3$.
Quando anche a_2 viene bloccato, a_3 può scambiarsi solo con a_{18}.
Infine, quando i tre vertici sopra citati sono bloccati, vengono automaticamente bloccati tutti gli altri e si ha
$|\ St_G(\{a_1, a_2, a_3\})\ |= 1$.

Esempio 2.8 (Icosaedro).

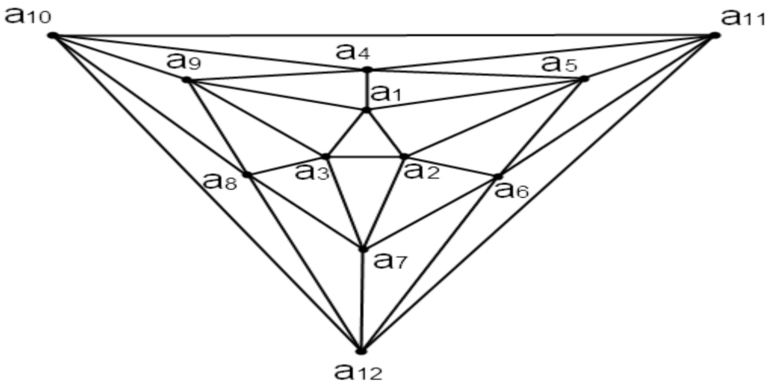

Figura 2.8: Icosaedro

$$
\begin{aligned}
\mid G \mid &= \mid [a_1]_G \mid\mid St_G(a_1) \mid= \\
&= 12 \cdot \mid [a_2]_G \mid\mid St_G(\{a_1, a_2\}) \mid= \\
&= 12 \cdot 5 \mid [a_3]_G \mid\mid St_G(\{a_1, a_2, a_3\}) \mid= \\
&= 12 \cdot 5 \cdot 2 = 120
\end{aligned}
$$

Infatti a_1 è in relazione con tutti i vertici e, quindi, $\mid [a_1]_G \mid = 12$.
Bloccato il vertice a_1 si ha che $[a_2]_G = \{a_2, a_3, a_4, a_5, a_9\}$.
Quando a_1 e a_2 sono bloccati a_3 può scambiarsi solo con a_5.
Infine, si ha che $\mid St_G(\{a_1, a_2, a_3\}) \mid = 1$.

Esempio 2.9. Per ottenere un grafo di cui $(S_n, \circ)$ sia il gruppo degli automorfismi bisogna prendere un grafo composto da n vertici e collegare, tramite degli spigoli, ogni vertici con tutti gli altri, ossia bisogna avere un grafo completo. Sotto è mostrato un grafo il cui gruppo degli automorfismi è S_5.

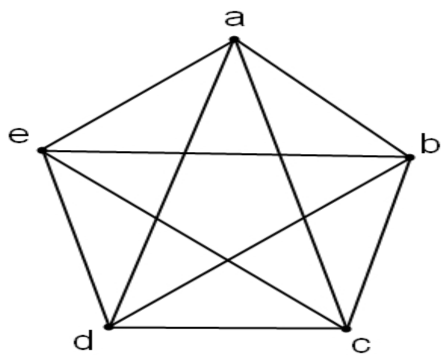

Figura 2.9: Grafo del gruppo S_5

È da notare che l'esempio 2.4 è un caso particolare di questo discorso dove si pone $n = 4$.

Come ultimo esempio vediamo una modalità di costruire, dato un gruppo finito, un grafo non orientato di cui esso è il gruppo degli automorfismi.

Esempio 2.10. Consideriamo il gruppo Q_8 dei quaternioni, così definito:

$$Q_8 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{tali che} \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}_3, \quad ad - bc = 1, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^4 = Id \right\}.$$

Possiamo riscrivere il gruppo nel seguente modo:

$$Q_8 = \{1, a, a^2, a^3, b, b^3, ab, (ab)^3\}$$

con $a^2 = b^2$, $a^4 = 1$ e $ba = a^3b$.
A questo punto disegniamo un grafo orientato, in modo che ogni vertice corrisponda a un elemento del gruppo. Inoltre, quando due vertici sono collegati da un arco continuo significa che il vertice finale è il risultato della moltiplicazione del vertice iniziale con a e quando sono collegati da un arco tratteggiato significa che il vertice finale è il risultato della moltiplicazione del vertice iniziale con b.

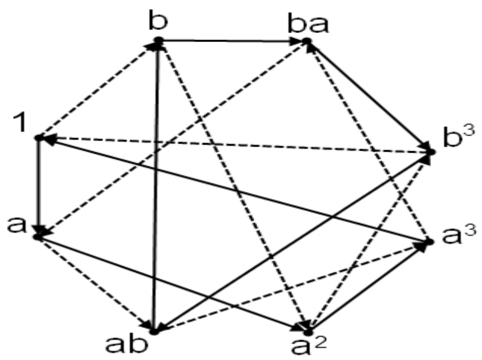

Figura 2.10: Primo grafo orientato del gruppo Q_8

Il gruppo degli automorfismi del grafo della figura sopra è appunto Q_8.

Per ottenere un grafo senza archi tratteggiati che ha sempre come gruppo degli automorfismi Q_8 aggiungiamo un vertice in ogni arco tratteggiato.
Il grafo ottenuto è mostrato nella figura sottostante.

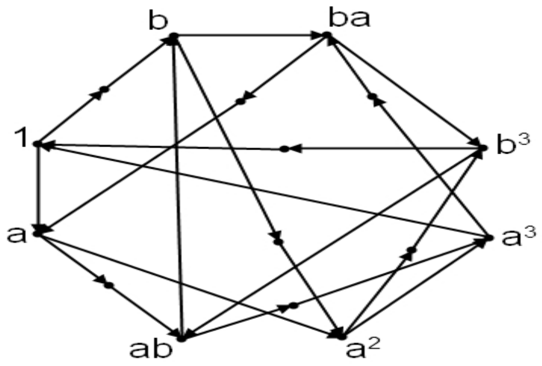

Figura 2.11: Secondo grafo orientato del gruppo Q_8

Infine per ottenere un grafo non orientato che ha ancora Q_8 come gruppo degli automorfismi dobbiamo inserire, in ogni arco, una struttura particolare come mostrato nella figure 2.3 dell'esempio 2.3. Infine, ovviamente, bisogna sostituire gli archi con gli spigoli.
Il grafo ottenuto è mostrato sotto.

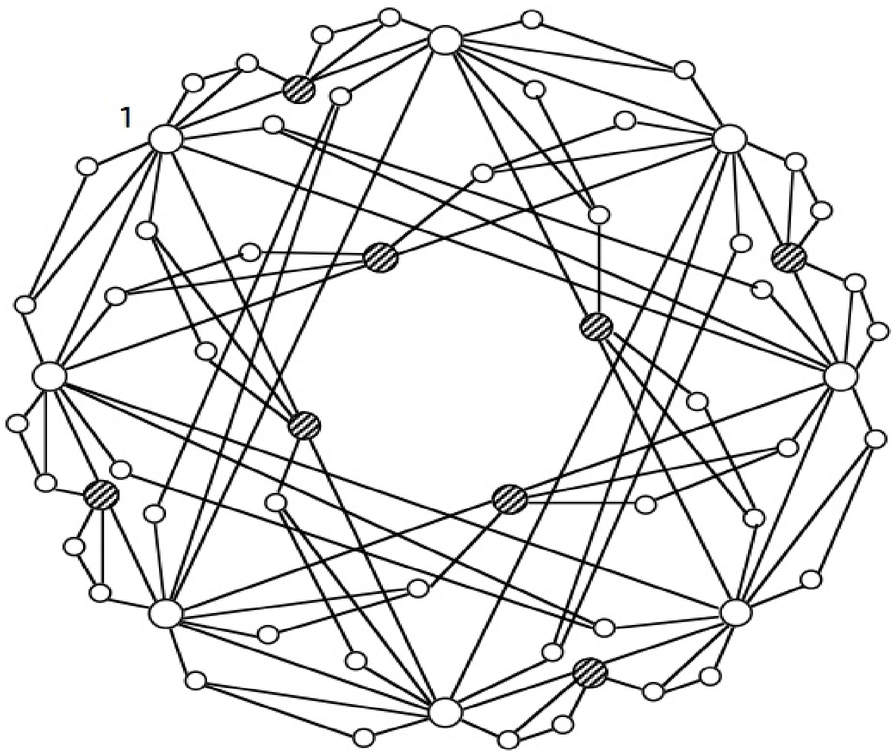

Figura 2.12: Grafo non orientato del gruppo Q_8

Conclusioni

Date le nozioni fondamentali del primo capitolo e dimostrato il teorema 2.1.2 è stato semplice trovare l'ordine dei gruppi degli automorfismi per i cicli, i circuiti elemantari e per i solidi platonici. Il discorso potrebbe certamente essere ampliato trovando i gruppi ai quali i gruppi dei loro automorfismi sono isomorfi.

Partendo da un gruppo finito, invece, abbiamo trovato i grafi dei gruppi $\mathbb{Z}_n$ e S_n. Inoltre, nell'ultimo esempio, abbiamo generalizzato il problema esplicando un metodo per mezzo del quale, dato un gruppo finito, si riesce a costruire un grafo non orientato di cui esso è il gruppo degli automorfismi.

Bibliografia

[1] L. Muracchini, Introduzione alla teoria dei grafi, Torino, Boringhieri, 1967.

[2] O. Ore, I grafi e le loro applicazioni, Bologna, Zanichelli, 1983.

[3] B. Bollobas, Graph Theory, Springer, 1979.

Inoltre, per la stesura della tesi, mi sono stati molto utili alcuni appunti del professor Libero Verardi.