Discretización de Señales

Barco, Rodrigo Ricardo

Estudiante de Ingeniería en Sistemas de Computación
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
rodrigorbarco@gmail.com

Agosto 2013

Resumen: Se dan explicaciones de los aspectos generales para convertir una señal continua en una discreta, a través de la aplicación de series de Fourier, considerando su aplicación a diversos campos, desde el censado, hasta el procesamiento por voz de una computadora digital.

Palabras clave: Discretización, Serie de Fourier, Señal.

I. INTRODUCCIÓN

El procesamiento de señales es la disciplina que se encarga de desarrollar, estudiar, analizar y clasificar las señales. Surge a partir de los resultados de la teoría de la información, la matemática aplicada y la estadística. Una señal, es el flujo de información que proviene de una fuente, transformada a señales eléctricas a través de transductores.

La clasificación de las señales, en su forma más básica, se produce según la variables de las que dependen (tiempo, espacio, temperatura, entre otros). En el caso de las señales discretas, estas sólo tienen valores en una cantidad discreta de puntos. Estas señales provienen normalmente de conversores analógico-digitales, o su equivalente, la discretización de señales continuas. En este aspecto, las series de Fourier, entre otros métodos, juegan un papel muy importante como herramientas.

II. DISCRETIZACIÓN CON MODULADOR DE AMPLITUD DE PULSO

Los sistemas de control de tiempo discreto (STD), son sistemas dinámicos para los cuales una o más de sus variables solamente son conocidas en ciertos instantes. El hecho de que algunas funciones de tiempo del STD varíen discretamente, puede ser dada a una característica inherente al sistema, o que provenga dado el proceso de muestreo de alguna señal.

La discretización de una señal es el paso previo a su digitalización, proceso que agrega una determinada codificación a la señal muestreada.

A. Proceso de muestreo

La manera habitual de obtener una representación discreta en el tiempo de una señal continua es tomando muestras cada una determinado período de tiempo, de acuerdo a la relación

$$x[n] = x_c(t)|_{t=nT} \tag{1}$$

En la ecuación (1), T es el período de muestreo, y expresa que la señal discreta $x[n]$ se obtiene de tomar muestras cada T segundos de la señal continua $x_c(t)$. Esta transformación se puede observar en la Figura 1.

El sistema que permite llevar a cabo la operación de la ecuación (1) es un conversor continuo a discreto ideal, pero en la práctica, la operación de muestreo se lleva a cabo con un conversor analógico digital. La diferencia entre ambos radica principalmente en la resolución de los bits, la linealidad de los pasos de cuantización, la necesidad de circuitos mantenedores, y la frecuencia de muestreo máxima que se puede alcanzar.

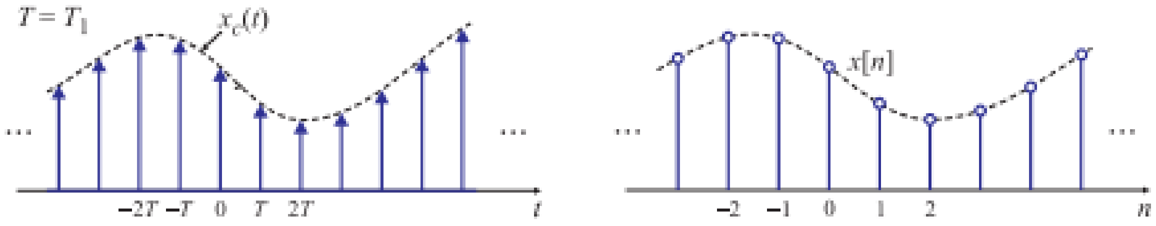

Figura 1: Señal continua vs. Señal discreta

Una aclaración importante es que generalmente, la operación de muestreo no se puede revertir, es decir, una vez que se posee la señal discretizada, es imposible volver a obtener la señal continua original. Esta ambigüedad, inherente al proceso, puede ser removida restringiendo el tipo de señales aplicadas al muestreador.

B. Representación en frecuencia del muestreo

Para obtener una relación entre la entrada y salida de un conversor ideal en el dominio de la frecuencia, debemos considerar convertir la señal continua en un tren de impulsos continuos, lo que se puede lograr modulando los mismos. Esto puede modelarse con un modulador de amplitud de pulso (PAM), o bien, $x(k)=p(k)*x(t)$, donde:

$$p(k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(k-j) \tag{2}$$

En la ecuación (2), $\delta(t)$ es la función Delta de Dirac. Es importante mencionar además, que al ser el tren de pulsos una función periódica en el tiempo, esta admite una representación en serie de Fourier:

$$p(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inwk} \tag{3}$$

El coeficiente c_n, está relacionado con la transformada de Fourier de la señal discreta $X^*(j\omega)$, lo que nos permitirá obtener su espectro de frecuencias.

C. Espectro de frecuencias

Además del espectro de frecuencias de la señal discreta, la señal analógica o de tiempo continuo tendrá su propio espectro, dado por su transformada de Fourier $X^*(j\omega)$, que irá desde $\omega=0$, hasta $\omega=\omega_c$, que será la máxima frecuencia de la señal continua. Es muy importante que la señal analógica tenga un ancho de banda limitado para que sea posible discretizarla. Si la frecuencia máxima fuera muy alta la discretización se complica, siendo imposible este proceso si el ancho de banda fuera infinito.

El muestreo, produce un espectro muy parecido a la señal continua, pero se despliega en una colección de réplicas del espectro fundamental, desplazada a intervalos que son múltiplos de la frecuencia de muestreo. Si esta es lo suficientemente elevada respecto de la frecuencia máxima, no habrá superposición de los espectros adicionales, lo cual es deseable. Las réplicas, así como la señal continua, pueden ser observadas con más detalle en la Figura 2.

Existe un teorema que establece cuál debe ser la frecuencia mínima de muestreo, comparada con la frecuencia de la señal analógica, que establece:

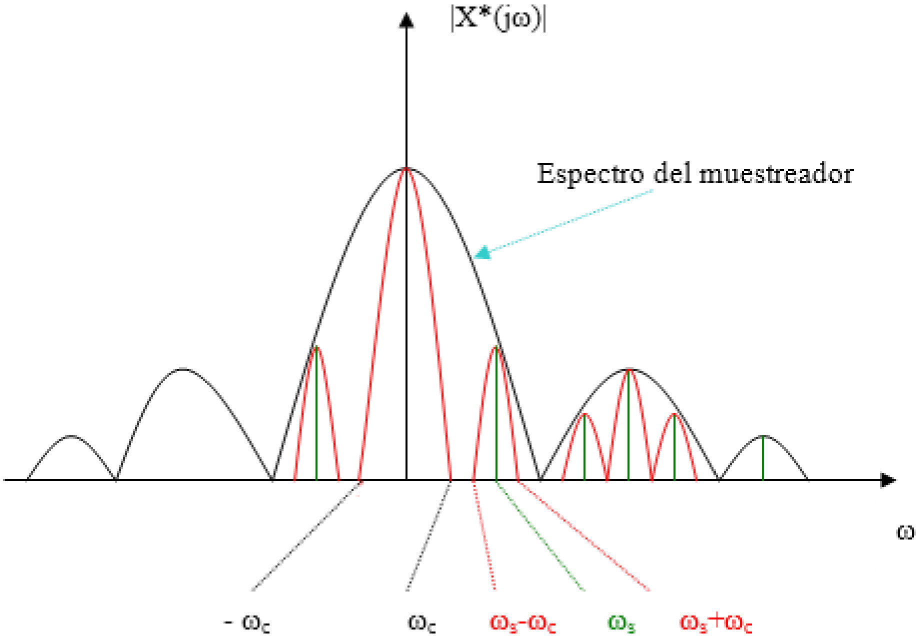

Figura 2: Espectro de señal continua vs. Espectro de señal discreta

Teorema 1 *La frecuencia de muestreo debe ser por lo menos igual o mayor que el doble de la máxima frecuencia de la señal analógica, para permitir la posterior recuperación de información a partir de la señal discreta. Esto es,* $\omega_s \geq 2\,\omega_c$.

Con el teorema 1, formulado por primera vez por Harry Nyquist y demostrado por Claude E. Shannon, se demuestra que la información completa de la señal original que cumple con el criterio, está descripto por la serie total de muestras que resultaron del proceso de muestreo. De esta forma, no hay nada de la evolución de señal entre muestras, que no esté perfectamente definido por la serie total de las muestras.

La idea intuitiva respecto al teorema 1, yace en que la muestra será mejor mientras los intervalos con que se toman las muestras sean más cortos.

En general, en la práctica es preferible que la frecuencia de muestreo se por lo menos entre 5 y 10 veces mayor que la máxima de la señal continua para discretizar de un modo confiable.

III. MÉTODO DE TUSTIN

Otro método para discretizar señales, también llamado, transformada bilineal, suele usarse para convertir un función de transferencia $H_a(s)$ de un filtro lineal e invariante en el tiempo, que se encuentra definido en el dominio continuo del tiempo, en una función de transferencia $H_a(d)$ perteneciente a un filtro lineal e invariante en el tiempo definido en el dominio discreto del mismo.

Esta transformada preserva la estabilidad y la posición de cada uno de los puntos correspondientes a la respuesta en frecuencia del filtro en el dominio de tiempo continuo, al correspondiente punto en la respuesta en frecuencia del filtro discreto, aunque a una frecuencia distinta. Este hecho será casi imperceptible a frecuencias bajas, pero se hará evidente en las altas.

La transformación bilineal es una aproximación de primer orden de la función logarítmica natural, que consiste en realizar una asignación exacta del plano Z al plano S. Cuando la transformada de Laplace se realiza sobre una señal de tiempo continuo el resultado es la transformada Z de la secuencia de tiempo discreto. Esto nos permite llegar al resultado:

$$H_d(z) = H_a\left(\frac{2}{T}\frac{2z-1}{z+1}\right) \tag{4}$$

En la ecuación (4), T el período de muestreo.

Finalmente, cabe aclarar que el método de Tustin no modifica las propiedades de estabilidad y fase mínima al llevar a cabo la transformación, ambas propiedades importantes de las señales.

IV. CONCLUSIÓN

Como concusión de este trabajo es posible afirmar que me permitió entender el uso que poseen todos los métodos vistos en clase. Además, el hecho de buscar un tema para realizar este trabajo, me permitió ver las aplicaciones de lo visto durante el cuatrimestre, muchas veces de manera indirecta.

REFERENCIAS

[1] Wikipedia, La enciclopedia libre, [internet], disponible en http://en.wikipedia.org, [acceso agosto de 2013].

[2] G. Calandrini, "Guía de Definiciones y Teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable Compleja". 1er. Cuatrimestre 2013, pp.54-63. 2013

[3] Sistemas Discretos, [internet], disponible en http://www.um.edu.ar/catedras, [acceso agosto de 2013].

[4] Discretización, [internet], disponible en http://materias.fi.uba.ar/7609/material/Clase%2002/03%20a%20Sistemas%20Discretos.pdf, [acceso agosto de 2013].

[5] Introducción al Procesamiento Digital de Señales, [internet], disponible en https://lc.fie.umich.mx/~jrincon/curdsp1.pdf, [acceso agosto de 2013].

[6] Muestreo de señales, [internet], disponible en http://www.ingelec.uns.edu.ar/pds2803/materiales/cap05/05-cap05.pdf, [acceso agosto de 2013].