3

Polinomioak

Helburuak

Hamabostaldi honetan hauxe ikasiko dugu:

- Polinomio baten adierazpena koefizienteetan aurkitu eta haiekin eragiketak egiten.
- Polinomio baten balio numerikoa kalkulatzen.
- Zenbait identitate nabarmen ezagutzen, binomio baten karratua eta kuboa.
- Ruffiniren araua eta Hondarraren Teorema.
- Zenbait polinomiorendeskonposakea faktoriala aurkitzen.

Hasi baino lehen

Zertarako erabiltzen dira polinomioak

Polinomioak informatikaren oinarrian egoteaz gain, ekonomian, interesen kalkuluak eta hipoteken iraupenak adierazteko erabiltzen dira, eta C kapitala 3 urtera x portzentajean $C\cdot(1+x)^3$ bihurtzen da, hau da, binomio baten kuboa.

Medikuntzak eta zientziaren bestelako adarrek ere aljebrako lanabes honen laguntzaz aurrera egiten dute. Iker ezazu web orrian zertarako erabiltzen diren polinomioak.

1. Polinomioak

Gradua eta koefizienteak

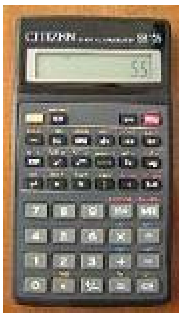
$\mathbf{x^3+4x+2}$ polinomioa hiru monomioen baturak osatzen du: x^3, $4x$ eta 2; bere gradua, edo x-ren berretzaile maximoa, 3 da eta **polinomiko honen koefizienteak 1, 0, 4 eta 2 dira**.

1a 3. mailako koefizientea da
0a 2. mailako koefizientea da
4a lehen mailako koefizientea da
2a 0. mailako koefizientea da

Zera egin behar da:
x^3+4x+2
identifikatu eta bere koefizienteak adierazi:
1 0 4 2

Zenbakizko balioa

Polinomio baten x aldagaia zenbaki baten ordez jartzean polinomioaren zenbakizko balioa lortzen da.



$P(x)=2x^3-x+4$ polinomioaren zenbakizko balioa 3 izanik

ondokoa da $\mathbf{P(3)=}\ 2\cdot3^3-3+4=55$

Kalkulagailua erabil dezakezu polinomio baten zenbakizko balioa aurkitzeko. Gogoratu 7^4 potentzia egiteko x^y tekla erabiltzen dela,
7 x^y 4 = →2041

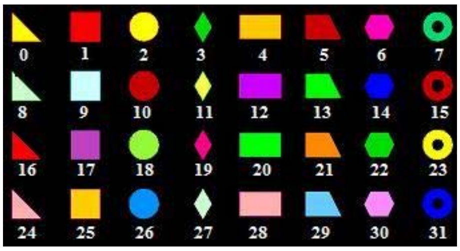
2 4 6 koefizienteen polinomioaren zenbakizko balioa 10 oinarrian 246 da, kointzidentzia hau gure sistemaren oinarria 10 delako da eta **246** berdin $\mathbf{2}\cdot10^2+\mathbf{4}\cdot10+\mathbf{6}$.

347 zenbakia 8 oinarrian adierazita baldin badago, gure ohiko sisteman, dezimalean, honelaxe adieraziko litzateke $\mathbf{3}\cdot8^2+\mathbf{4}\cdot8+\mathbf{7}=231$, hauxe baita **3 4 7** koefizienteen polinomioaren balioa 8 oinarrian.

Sistema bitarrean erabiltzen diren zifrak 0 eta 1 dira eta bitarrean 1000110ren balio hamartarra ondokoa da

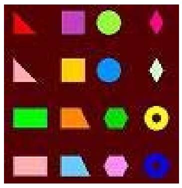
$\mathbf{1}\cdot2^6+\mathbf{1}\cdot2^2+\mathbf{1}\cdot2=70$

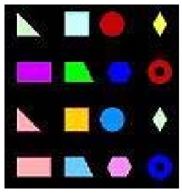
Kolore kopurua sistema hexadezimalean edo 16 oinarrian adierazten da, sistema honek 16 zifra ditu
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9, a=10, b=11, c=12, d=13, e=14, f=15 eta sistema honetan kolore urdineko**38** kopurua ondokoari dagokio $\mathbf{3}\cdot16+\mathbf{8}=56$ dezimalean.

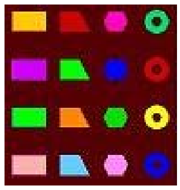


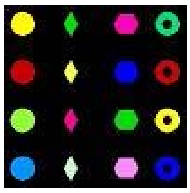
Eskatu lagun bati hauetako irudi bat memorizatzeko, baina zein den esan gabe. Zuk, telepatiaz, zein irudi den asmatuko duzu.

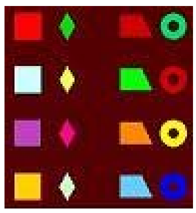
Galdetu ea aukeratutako irudia ondoko txartel bakoitzean dagoen.

BAI =1


EZ =0


EZ =0


BAI =1


EZ =0


Erantzuna baiezkoa denean idatzi, ezezkoa denean idatzi 0, **10010** emaitzarentzat irudia $\mathbf{1}\cdot2^4+\mathbf{1}\cdot2=18$ da, zirkulu berdea. Koefizienteak 1arekin edo 0arekin lortzen diren polinomioaren balioa 2 oinarrian bakarrik kalkulatu behar da, Bai edo Ez idatziz.

Ariketen emaitzak

1. Aurkitu ondoko polinomioen adierazpena koefizienteetan $P(x)=5x^2+2x+1$; $Q(x)=x^3-3x$;

$R(x)=0{,}5x^2-4$

Hurrenez hurren adierazpideak koefizienteetan ondokoak dira

P(x)→ 5 2 1; Q(x)→ 1 0 -3 0; R(x)→ 0,5 0 -4

2. Idatzi ondoko koefizienteetan adierazten diren polinomioen adierazpide polinomikoak: P(x)→ 2 1 3 -1; Q(x)→ 1 3 0 0; R(x)→ 3/4 -1 0 2

$P(x)=2x^3+x^2+3x-1$; $Q(x)=x^3+3x^2$; $R(x)=3/4\ x^3-x^2+2$

3. Osa ezazu taula:

ADIERAZPEN POLINOMIKOA	KOEFIZIENTEETAKO ADIERAZPENA	GRADUA
$-2x^3+x^5-3x^2$		
$x^2/3-1$		
	-2 π 0 0	
	-2 1,3 0 -1/7	
$3-\sqrt{2}\,x^2$		
Polinomio hauek aldagai baten, x, polinomioak dira eta zenbaki errealen gorputzean koefizienteak dituzte. Polinomio hauen multzoa IR[x]- ren bidez izendatzen da.		

POLINOMIKOA	KOEFIZIENTEAK	GRADUA
$-2x^3+x^5-3x^2$	1 0 -2 -3 0 0	5
$x^2/3-1$	1/3 0 -1	2
$\pi x^2 - 2x^3$	-2 π 0 0	3
$-2x^3+1{,}3x^2-1/7$	-2 1,3 0 -1/7	3
$3-\sqrt{2}\,x^2$	$-\sqrt{2}$ 0 3	2

4. Aurkitu aurreko ariketako polinomioen zenbakizko balioa 1 izanik, 0 izanik eta –2 izanik

POLINOMIOA	BALIOA 1 IZANIK	BALIOA 0 IZANIK	BALIOA -2 IZANIK
$x^5-2x^3-3x^2$	-4	0	-28
$x^2/3-1$	-2/3	-1	1/3
$-2x^3+\pi x^2$	$-2+\pi$	0	$16+4\pi$
$-2x^3+1{,}3x^2-1/7$	-59/70	-1/7	737/35
$-\sqrt{2}\,x^2+3$	$-\sqrt{2}+3$	3	$-4\sqrt{2}+3$

2. Eragiketak

Polinomioekin eragiketak egiteko eroso gerta daikete bere adierazpenak koefizienteetan jartzea, hauekin eragiketak egitea eta emaitza modu polinomikoan ematea.

Batuketa

$P(x)=8x^4+x^2-5x-4$
$Q(x)=3x^3+x^2-3x-2$

Maila bereko koefizienteak batzen dira:

P(x)→	8	0	1	-5	-4
Q(x)→		3	1	-3	-2
P(x)+Q(x)→	8	3	2	-8	-6

$P(x)+Q(x)=8x^4+3x^3+2x^2-8x-6$

Biderketa

$P(x)=3x^3+5x-4$
$Q(x)=x^2-x+2$

Koefizienteka biderkatzen da:

P(x)→			3	0	5	-4
Q(x)→				1	-1	2
			6	0	10	-8
		-3	0	-5	4	
	3	0	5	-4		
P(x)·Q(x)→	3	-3	11	-9	14	-8

$P(x)\cdot Q(x)=3x^5-3x^4+11x^3-9x^2+14x-8$

Zatiketa

$P(x)=3x^3-x^2+5x-4$
$Q(x)=x^2-3x+2$

3	-1	5	-4	1	-3	2
-3	9	-6		3	8	
	8	-1	-4			
	-8	24	-16			
		23	-20			

Zatidura=3x+8   Hondarra=23x-20

$P(x)=12x^3+6x-5$
$Q(x)=4x^2+3$

12	0	6	-5	4	0	3
-12	0	-9		3	0	
	0	-3	-5			
		0	0			
		-3	-5			

Zatidura=3x   Hondarra=-3x-5

Diferentzia

$P(x)=3x^3+x^2+5x+4$
$Q(x)=3x^3+3x+2$

Maila bereko koefizienteak kentzen dira:

P(x)→	3	1	5	4
Q(x)→	3	0	3	2
P(x)-Q(x)→		1	2	2

$P(x)-Q(x)=x^2+2x+2$

Begira emaitzaren gradua:
maila(P ± Q) ≤ max(maila(P), maila(Q))

maila(P·Q)=maila(P)+maila(Q)

Bi polinomio zatitu D(x), zatikizuna zati d(x), zatitzailea eginez c(x) zatidura eta r(x) hondarra lortu ondoko baldintzak betez

- Zatikizuna=zatitzailea·zatidura+hondarra
- r(x)-en maila<d(x)-en maila

maila(c)=maila(D)-maila(d)

Adibide bat aldagaiarekin eragiketa eginez, maila handieneko potentziak zatitzen hasiko gara

$$x^3+2x^2-3x+5 \quad \big| \; 3x^2+x$$
$$\frac{x^3}{3x^2}=\frac{1}{3}x$$

jarraituko dugu

$$x^3+2x^2-3x+5 \quad \big| \; 3x^2+x$$
$$x^3+\frac{1}{3}x^2 \qquad \frac{1}{3}x+\frac{5}{9}$$
zatidura
$$\frac{5}{3}x^2-3x+5$$
$$\frac{5}{3}x^2+\frac{5}{9}x$$
$$-\frac{32}{9}x+5$$
hondarra

Ariketen emaitzak

5. Aurkitu P(x)+Q(x) eta 2·P(x)-Q(x)

$P(x)=x^4+x^3+3x$ $Q(x)=2x^3+x^2-4x+5$

P(x)→	1	1	0	3	0
Q(x)→		2	1	-4	5
P(x)+Q(x)→	1	3	1	-1	5

2·P(x)→	2	2	0	6	0
Q(x)→		2	1	-4	5
2·P(x)-Q(x) →	2	0	-1	10	-5

$P(x)+Q(x)=x^4+3x^3+x^2-x+5$ **$2·P(x)-Q(x)=2x^4-x^2+10x-5$**

6. Zein da zatiduraren maila 5. mailako polinomio bat 2. mailako beste batekin zatitzen badugu?
Zatiduraren maila 3 da: zatikizunaren maila, 5, ken zatitzailearen maila, 2.

7. Biderkatu $P(x)=x^3+6x^2+4x-6$ bider $Q(x)= x^3+3x^2+5x-2$

P(x)→				1	6	4	-6
Q(x)→				1	3	5	-2
				-2	-12	-8	12
			5	30	20	-30	
		3	18	12	-18		
	1	6	4	-6			
P(x)·Q(x)→	1	9	27	34	-10	-38	12

$P(x)·(Q(x)=x^6+9x^5+27x^4+34x^3-10x^2-38x+12$

8. Egin kasu bakoitzean P(x) zati Q(x)

$P(x)= 2x^3+4x^2+7x+3$

$Q(x)= 2x^2+x+3$

P(x) Zatikizuna

2	4	7	3
2	1	3	
	3	4	3
	3	1,5	4,5
		2,5	-1,5

hondarra
2,5x-1,5

Q(x)zatitzailea

2	1	3
1	1,5	

zatidura
x+1,5

$P(x)= 7x^2-2x+5$

$Q(x)=8x+7$

P(x) Zatikizuna

7	-2	5
7	$\frac{49}{8}$	
	$\frac{65}{-8}$	5
	$\frac{65}{-8}$	$\frac{455}{-64}$
		$\frac{775}{64}$

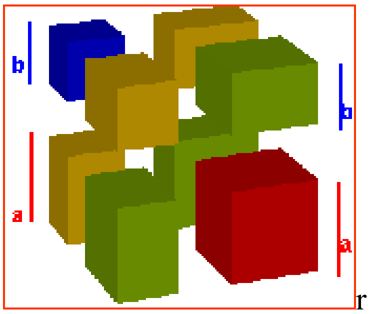
hondarra

Q(x)zatitzailea

8	7
$\frac{7}{8}$	$\frac{65}{-64}$

zatidura

3. Identitate nabarmenak



Baturaren karratua

$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2$

Azalpena

$$\begin{array}{rrr} & a & b \\ \times & a & b \\ \hline & ab & b^2 \\ a^2 & ab & \\ \hline a^2+ & 2ab+ & b^2 \end{array}$$

Kenduraren karratua berdin lehenengoaren karratua -lehenengoaren eta bigarrengoaren biderkaduraren bikoitza +bigarrengoaren karratua

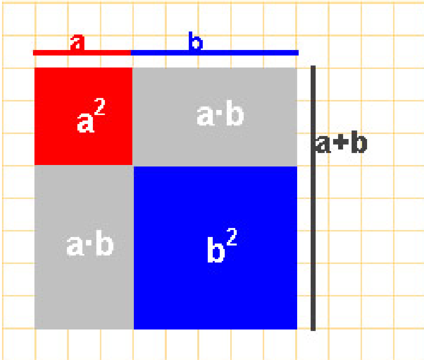
Kenduraren karratua

$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2$

Azalpena

$$\begin{array}{rrr} & a & -b \\ \times & a & -b \\ \hline & -ab & b^2 \\ a^2 & -ab & \\ \hline a^2 & -2ab+ & b^2 \end{array}$$

Kenduraren karratua berdin lehenengoaren karratua -lehenengoaren eta bigarrengoaren biderkaduraren bikoitza +bigarrengoaren karratua



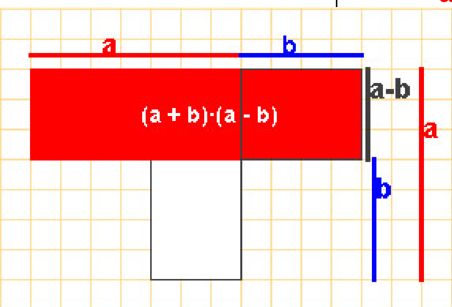
Batuketa bider kenketa

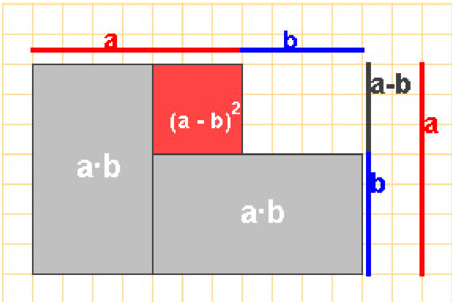
$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$

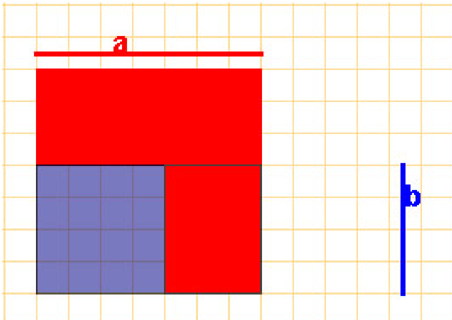
Batura bider kendura berdin karratuen arteko kenketa.

Azalpena

$$\begin{array}{rrr} & a & b \\ \times & a & -b \\ \hline & -ab & -b^2 \\ a^2 & ab & \\ \hline a^2 & & -b^2 \end{array}$$



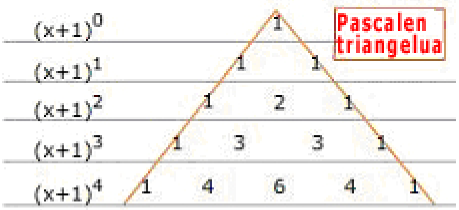




Binomio baten kuboa

$(a+b)^3=a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3$

Berdintasun hau argi ikusten da irudian (a+b) aldea duen kuboa deskonposatzen den 8 piezak ikusita



Triangelu honen gai bakoitza goiko biak batuz lortzen da.
Triangelu honen errenkadak (x+1) potentziaren koefizienteak dira
Beraz, hirugarren errenkada 1 3 3 1 $(x+1)^{3}$-ren koefizienteak dira

Ariketen emaitzak

9. Ikusi nola aplikatzen diren identitate nabarmenak

$(x+3)^2$ garatzeko
Lehenengoaren karratua →x^2 Lehenengoaren eta bigarrengoaren biderketaren bikoitza→$2\cdot x\cdot 3=6x$ Bigarrengoaren karratua→$3^2=9$
beraz, $(x+3)^2=x^2+6x+9$

Ondoko polinomioa deskonposatzeko $x^2-10x+25$,
identitate nabarmena duen atal baten bila joango gara,
koefizienteen zeinuak txandakakoak izatean, + - +, kenketaren karratuarekin alderatuko dugu.
$25=5^2$ eta $10x=x$ bider 5→en bikoitza $x^2-10x+25=(x-5)^2$

Ondoko polinomioa deskonposatzeko $x4^2-25x$,
identitate nabarmena den ikusiko dugu eta lehen mailako koefizientea 0 izanik karratuen kenketarekin konparatuko dugu
$4x^2=(2x)^2$; $25=5^2$ → $4x^2-25=(2x+5)\cdot(2x-5)$

10. Garatu ondoko adierazpenak

Expresión	Ebazpena	Expresión	Ebazpena
$(x+4)^2$	$x^2+8x+16$	$(x-2)^2$	x^2-4x+4
$(4x+3)^2$	$16x^2+24x+9$	$(3-2x)^2$ Binomioa ber hiru	$4x^2-12x+9$
$(2x/3+5)^2$	$4x^2/9+20x/3+25$	$(x/2-3)^2$	$x^2/4-3x+9$
$(\sqrt{2}x+1)^2$	$2x^2+2\sqrt{2}x+1$	$(x-\sqrt{3})^2$	$x^2-2\sqrt{3}x+3$

11. Aurkitu ondoko biderkaduren adierazpena koefizienteetan

Biderkadurak	Ebazpena	Biderkadurak	Ebazpena
$(x+4)\cdot(x-4)$	x^2-16; 1 0 -16	$(x-1/2)\cdot(x+1/2)$	1 0 -1/4
$(2x+5)\cdot(2x-5)$	4 0 -25	$(3+\sqrt{2}x)\cdot(3-\sqrt{2}x)$	-2 0 9

12. Ebatzi ondoko ekuazioa identitate nabarmenak aplikatuz $x^2+10x+16=0$

Lehen zatia konparatu, $\mathbf{x^2+10x}$, identitate nabarmen batekin, $(x+5)^2$rekin
$(x+5)^2=\mathbf{x^2+10x}+25$, beraz, $x^2+10x=(x+5)^2-2$
eta ekuazioaren lehen atala $\mathbf{x^2+10x}+16=\mathbf{(x+5)^2-25}+16$ da,
$(x+5)^2-9=0$→ $(x+5)^2-3^2=0$→ $(x+5+3)\cdot(x+5-3)=0$ → Emaitzak $x=-8$ eta $x=-2$

13. Kalkulatu binomio baten kuboa

Binomioa ber hiru	Ebazpena	Binomioa ber hiru	Ebazpena
$(x+2)^3$	$x^3+6x^2+12x+8$	$(x-1)^3$	x^3-3x^2+3x-1
$(2x-3)^3$	$8x^3-36x^2+18x-27$	$(3+x/3)^3$	$x^3/27+x^2+9x+27$

14. Aurkitu Pascalen triangeluko 5. errenkada eta kalkulatu $(x+1)^5$

Triangeluko 5. errenkada 1 5 10 10 5 1 da, eta $(x+1)^5$en koefizienteak direnez, $(x+1)^5=x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1$

4. (x-a)rekin zatitzea

Ruffiniren araua

Ruffiniren erregela baliagarria da polinomioak zatitzeko x-a binomio batekin.

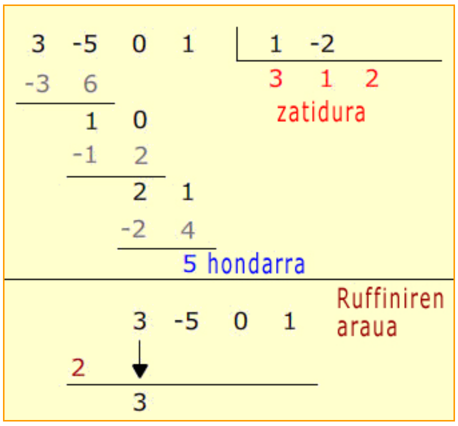
Eskuineko adibidean $3x^3-5x^2+1$ zati x-2 egiten da eta zatidura $3x^2+x+2$ da eta hondarra 5.

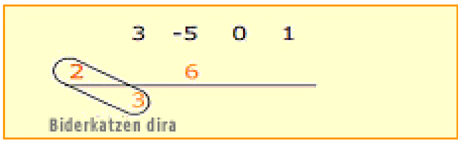
Araua, **a=2** denean azalduta, **a** zenbaki arrazionala edo erreala denean ere aplikatzen da. Ondoko adibidean **a=-3/2** hartzen da eta $4x^2+5x+2$ zati x+3/2 zatiketa irudikatzen du

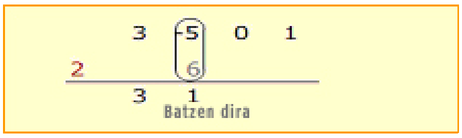
	4	5	2
-3/2		-6	3/2
	4	**-1**	**7/2 hondarra**

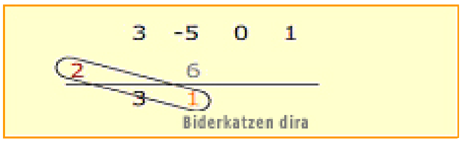
zatidura
4x-1

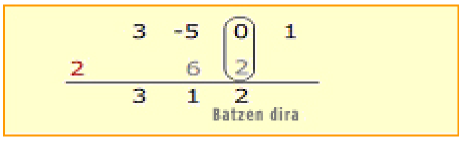
Ikus zatiketa eta Ruffiniren erregela nola burutzen den hurtases urrats



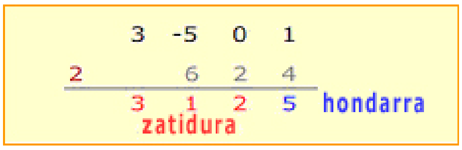








Berriz ere biderkatu eta batu egiten da ondokoa lortuz



Hondarraren teorema

ADIBIDEA

Zatikizuna=$\mathbf{x^4-2}$; zatitzailea=**x-4**

Egin ezazu zatiketa zure koadernoan

Emaitza: zatidura=$\mathbf{x^3+4x^2+16x+64}$ eta hondarra=**254**

Idazt ezazu berdintasuna, zatikizuna = zatitzailea zatidura+handarra

$\mathbf{x^4-2=(x-4)\cdot(x^3+4x^2+16x+64)+254}$

x ordez 4 jarriko dugu

$\mathbf{4^4-2=(4-4)\cdot(4^3+4\cdot4^2+16\cdot4+64)+254}$

$4^4-2=0\cdot(4^3+4\cdot4^2+16\cdot4+64)+254$

$4^4-2=0\cdot(\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)+254$

$4^4-2=0+254$

Ondorioa, **x-ren ordez 4 jartzean zatiketaren hondarra bidr x- ematen digu 4**

Hondarraren teorema. P(x) polinomio bat zati x-a zatiketaren hondarra kalkulatzeko, zati x-a nahikoa da P(x)-en x-ren ordez a jartzea.

Gogora ezazu

P(x) x-a monomioarekin zati daiteke <=> P(a)=0

Askotan, x-a monomioarekin zatitzearen hondarra aurkitzeko, erosoagoa da Ruffiniren araua aplikatzea, x ordezkatzea baino Hondarraren teoremari esker ondoko ariketen antzekoak ebatziko ditugu, aurkitu m $P(x)=x^3+mx-4$

x-2 binomioagatik zatigarria izan dadin, eta x-en ordez 2 jarriz ebazten da, berdin 0 eginez eta m bakanduz, beraz m=-2.

Kalkulagailuarekin

Kalkulagailuarekin polinomio baten zenbakizko balioa kalkulatzeko ondoko balioekin

$P(x)=3x^3-5x^2+1$ en x=2

Ruffiniren erregela aplika genezake, horretarako tekleatu ondoko sekuentzia:

2 M in x 3 → 3
-5 = → 1
x MR + 0 = → 2
x MR + 1 =5

Ondokoa lortuko dugu: 5 eta hau P(x) zati x-2 eginez lortzen da x=2 izanik.

Bitartean zatiduraren koefizienteak irten dira = sakatzen zen bakoitzean.

cidead

Ariketen emaitzak

15. Aplica la regla de Aplikatu Ruffiniren erregela ondokoak zatitzeko $P(x)=x^3+5x^2-2x+1$, $Q(x)=2x^4-5$ eta $R(x)=x^3-4x+3x^2$ zati x-3

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 5 & -2 & 1 \\ 3) & & 3 & 24 & 66 \\ \hline & 1 & 8 & 22 & 67 \end{array}$$

Zatidura $x^2+8x+22$

Hondarra 67

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 3) & & 6 & 18 & 54 & 162 \\ \hline & 2 & 6 & 18 & 54 & 157 \end{array}$$

Zatidura $2x^3+6x^2+18x+54$

Hondarra 157

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -4 & 0 \\ 3) & & 3 & 18 & 42 \\ \hline & 1 & 6 & 14 & 42 \end{array}$$

Zatidura $x^2+6x+14$

Hondarra 42

16. Aplikatu Ruffiniren erregela ondokoak zatitzeko $P(x)=x^3+3x^2-2x+1$, $Q(x)=x^4-2$ eta $R(x)=x^3-4x^2-x$ zati x+1

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -2 & 1 \\ -1) & & -1 & -2 & 4 \\ \hline & 1 & 2 & -4 & 5 \end{array}$$

Zatidura x^2+2x-4

Hondarra 5

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ -1) & & -1 & 1 & -1 & 1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{array}$$

Zatidura x^3-x^2+x-1

Hondarra -1

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & -1 & 0 \\ -1) & & -1 & 5 & -4 \\ \hline & 1 & -5 & 4 & -4 \end{array}$$

Zatidura x^2-5x+4

Hondarra -4

17. Aplikatu Ruffiniren erregela ondokoak zatitzeko $P(x)=3x^3+5x^2-2x+1$ eta $Q(x)=6x^4-2$ eta zati x+2/3

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 5 & -2 & 1 \\ -2/3) & & -2 & -2 & 8/3 \\ \hline & 3 & 3 & -4 & 11/3 \end{array}$$

Zatidura $3x^2+3x-4$

Hondarra 11/3

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 6 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ -2/3) & & -4 & 8/3 & -16/9 & 32/27 \\ \hline & 6 & -4 & 8/3 & -16/9 & -22/27 \end{array}$$

Zatidura $6x^3-4x^2+\frac{8}{3}x-\frac{16}{9}$

Hondarra –22/27

18. 2 balioa emanez polinomio baten zenbakizko balioa 3 baldin bada eta x-2-gatik zatitu ondoren zatidura x baldin bada, ba al dakizu zein den polinomioa?

Zatikizuna = zatitzailea·zatidura +hondarra, zatitzailea x-2 denez, zatidura x eta hondarra 3, polinomioa x^2-2x+3 da.

19. Aurkitu m mx^2+2x-3 zatigarria izan dadin x+1-ekin

Polinomioa x+1egatik zatigarria izango da -1en balioa 0 baldin bada, beraz

m-2-3=0, izan behar du, hau da, m=5

20. Ba al dago m-ren baliorik $x^3+mx^2-2mx+5$ polinomioa x-2-gatik zatigarria izan dadin?

Hondarraren teorema jarraituz nahikoa da $2^3+m\cdot2^2-2m\cdot2+5=0$ ekuazioa ebaztea, eta ezinezkoa den berdintasuna ematen du 13=0, beraz, polinomioa x-2-gatik zatigarria izan daitekeen m-ren baliorik ez dago.

5. Deskonposaketa faktoriala

x-ren potentzia baten faktore komuna ateratzea

IR-ko koefizienteak dituen P(x) polinomio baten zatitzaile inpropio esaten zaie zenbaki errealei eta P(x) zenbaki erreal batekin biderkatuta lortzen diren polinomioei.

IR[x] polinomioaren lehenak lehen eta bigarren mailako polinomioak dira, $\mathbf{ax^2+bx+c,\ b^2-4ac<0}$ izanik

Polinomio batek zatitzaile propiorik ez badu eta bere maila zero baino handiagoa bada, **lehena** dela esango da (zero mailako polinomioak unitateak edo alderantzikagarriak dira, alderantzizkoa dute eta). Polinomio bat faktore lehenetan deskonposatzeko lehen urratsa x-ren potentzia baten faktore komuna ateratzea da, posible denean. Halaxe ikus daiteke eskuinaldeko animazioan.

$$2x^9+x^6-3x^4=$$
$$=2\cdot x^4\cdot x^5+x^4\cdot x^2-3\cdot x^4$$

x^4 batugai guztietan dago.

$$2x^9+x^6-3x^4=$$
$$=x^4\cdot(2x^5+x^2-3)$$

x-en potentzia baten faktore comuna atera da.

Deskonposaketa faktorialaren adibideak

$\mathbf{x^5-5x^4+6x^3}=x^3\cdot(x^2-5x+6)=\mathbf{x^3\cdot(x-2)\cdot(x-3)}$

Batugai edo monomio guztien x^3 faktore komuna lortu da, bigarren urratserako bigarren mailako ekuazioa ebatzi da $x^2-5x+6=0$, eta hondarraren teoremaren arabera, x^2-5x+6 zati (x-a) egin daiteke baldin eta a^2-5a+6 berdin 0 bada, beraz, ekuazioaren emaitza a da $x^2-5x+6=0$

$\mathbf{x^2-6x+9=(x-3)^2}$ Deskonposatzeko identitate nabarmena aplikatu da.

$\mathbf{x^3-1=(x-1)\cdot(x^2+x+1)}$ ekuazioak $x^2+x+1=0$ ez dauka ebazpen errealik, orduan polinomioa lehena da.

$\mathbf{2x^2+3x+1=2\cdot(x+1)\cdot(x+1/2)}$ $2x^2+3x+1=0$ ekuazioaren emaitzak -1 eta -1/2 dira. **Arreta handiz ibili behar da**, mota honetako faktorizazioetan, **x^2-ko faktorea ez ahazteko**.

Polinomio baten erroak

x-a P(x) polinomioaren zatitzailea baldin bada, a P(x)-ren **erroa** P(x)-ren erroa dela esaten da. Hondarraren teoremaren arabera, badakigu honek P(a)=0 esan nahi duela.

$P(x)=p_n\mathbf{x}^n+p_{n-1}\mathbf{x}^{n-1}+\ldots+p_1\mathbf{x}+p_0$ eta P(x)-eko **erroa**,

$p_n\mathbf{a}^n+p_{n-1}\mathbf{a}^{n-1}+\ldots+p_1\mathbf{a}+p_0=0$,

eta p_0 askatuz

$p_0=-p_n\mathbf{a}^n-p_{n-1}\mathbf{a}^{n-1}-\ldots-p_1\mathbf{a}$

Beraz, P(x)-eko koefizienteak zenbaki osoak baldin badira eta **a** ere bai, p_0 **a**-ren multiploa da.

Koefiziente osoak dituen polinomio baten **erro** ez nuluak, polinomioaren **gradu txikieneko koefizientearen zatitzaileak** dira.

Erroa	Erroa
2	-2
Zatitzailea	Zatitzailea
x -2	x +2

$x^4-15x^2+10x+24$ren deskonposaketa faktoriala

Polinomio honen erro arrazional posibleak 24-ren zatitzaileak dira

±1 ±2 ±3 ±4 ±6 ±8 ±12 ±24

Ruffiniren erregelari esker ikusiko dugu zein zatitzaile diren erroak

	1	0	-15	10	24
-1)		-1	1	14	-24
	1	**-1**	**-14**	**24**	**0**
2)		2	2	-24	
	1	1	-12	**0**	
3)		3	12		
	1	4	**0**		

$\mathbf{x^4-15x^2+10x+24}=$
$(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x+4)$

4, 1 eta -2 erroak dituen hirugarren mailako polinomio baten deskonposaketa honakoa izango da: $a\cdot(x-4)\cdot(x-1)\cdot(x+2)$.

Erro baten **anizkoiztasuna** deitzen zaio deskonposaketan agertzen den aldi kopuruari.

Ariketen emaitzak

21. Atera x-en potentzia faktore komuna ondoko polinomio bakoitzean :
$P(x)=2x^3+3x$ $\quad$ $Q(x)= x^4+2x^6-3x^5$ $\quad$ $R(x)=2x^6+6x^5+8x^3$

Ebazpena: $P(x)=x\cdot(2x^2+3)$ $\quad$ $Q(x)=x^4\cdot(2x^2-3x+1)$ $\quad$ $R(x)=2x^3\cdot(x^3+3x^2+4)$, azken kasu honetan faktore komuna zenbakia ere atera ahal izan da.

22. Aurkitu $\mathbf{x^7-x^6-4x^4}$**-ren deskonposaketa faktoriala.**

$\mathbf{x^7-x^6-4x^4}=x^4\cdot(x^3-x^2-4)$. x^4 faktore komuna atera da.
x^3-x^2**-4**-ko erro posible osoak **-4**-ko **zatitzaileak** dira:

$\boxed{1,-1,\ 2,-2,\ 4,-4}$

Ikus dezagun Ruffiniren arauaren bidez 1 P-ko erroa den

	1	-1	0	-4
1)		1	0	0
	1	0	0	**-4 ≠ 0,**

1 ez da P-ko erroa

Ikus dezagun Ruffiniren arauaren bidez -1 P-ko erroa den

	1	-1	0	-4
-1)		-1	2	-2
	1	-2	2	**-6 ≠ 0**

-1 ez da P-ko erroa

Ikus dezagun Ruffiniren arauaren bidez **2** P-ko erroa den

	1	-1	0	-4
2)		2	2	4
	1	1	2	**0**

2 P-ko **erroa da**

1 1 2 = x^2+x+2 $\quad x^2+x+2=0$ ekuazioak ez dauka ebazpen errealik.
Beraz, ez da lehena

$\boxed{\mathbf{x^7-x^6-4x^4}=x^4\cdot(x-\mathbf{2})\cdot(x^2+x+2)}$

23. Aurkitu $\mathbf{x^4+x^3-x^2-2x-2}$-ren deskonposaketa faktoriala.

$x^4+x^3-x^2-2x$**-2** polinomioaren erro oso posibleak **-2** ren **zatitzaileak** dira:

$\boxed{1,-1,\ 2,-2}$

Ikus dezagun Ruffiniren arauaren bidez 1 P-ren erroa den

	1	-1	-1	-2	-2
1)		1	0	-1	-3
	1	0	-1	-3	**-5 Ez da 0,**

1 ez da P-ko erroa

Ikus dezagun Ruffiniren arauaren bidez -1 P-ren erroa den

	1	-1	-1	-2	-2
-1)		-1	2	-1	3
	1	-2	1	-3	**1 Ez da 0,**

-1 ez da P-ko erroa

Ikus dezagun Ruffiniren arauaren bidez 2 P-ren erroa den

	1	-1	-1	-2	-2
2)		2	2	2	0
	1	1	1	0	**-2 Ez da 0,**

2 ez da P-ko erroa

Ikus dezagun Ruffiniren arauaren bidez 1 P-ren erroa den

	1	-1	-1	-2	-2
-2)		-2	6	-10	24
	1	-3	5	-12	**22 Ez da 0,**

-2 ez da P-ko erroa

$\boxed{\mathbf{x^4+x^3-x^2-2x-2} \text{ Ez dauka erro osorik}}$

Polinomio honen deskonposaketa faktoriala ezin dugu aurkitu.

Ariketen emaitzak

25. $P(x)=p_n x^n+p_{n-1}x^{n-1}+...+p_1 x+p_0$ polinomioaren koefizienteak zenbaki osoak badira, P(x)-ren erro arrazional posibleak era honetakoak dira

$$\frac{p_0 \text{ zatitzailea}}{p_n \text{ zatitzailea}}$$

Aurkitu $\mathbf{12x^3+4x^2-17x+6}$ -ren deskonposaketa faktoriala.

$\mathbf{12x^3+4x^2-17x+6}$ polinomioaren Q-ko erro posibleak 6ren zatitzaileak 12ren zatitzaileekin zatitzearen emaitza dira,

$$\frac{\text{6ren zatitzaileak}}{\text{12ren zatitzaileak}};\qquad \frac{\pm1 \quad \pm2 \quad \pm3 \quad \pm6}{\pm1 \quad \pm2 \quad \pm3 \quad \pm4 \quad \pm6 \quad \pm12}$$

$$\pm1 \quad \pm\frac{1}{2} \quad \pm\frac{1}{3} \quad \pm\frac{1}{4} \quad \pm\frac{1}{6} \quad \pm\frac{1}{12} \quad \pm2 \quad \pm\frac{2}{3} \quad \pm3 \quad \pm\frac{3}{2} \quad \pm\frac{3}{4} \quad \pm6$$

Ruffiniren arauaren bidez erraza da ikustea ez 1 ez -1 ez direla P-ren erroak.

Ikus dezagun Ruffiniren arauaren bidez 1/2 P-ren erroa da

	12	4	-17	6
1/2)		6	5	-6
	12	10	-12	**0**

1/2 P-ren erroa da.

$12x^2+10x-12=0$ ekuazioa ebaztean ikus daitekeenez, -3/2 eta 2/3 P-ren erroak dira.

$$\boxed{\mathbf{12x^3+4x^2-17x+6}=12\cdot(x-1/2)\cdot(x+3/2)\cdot(x-2/3)}$$

26. Aurkitu $\mathbf{x^4-4}$-ren deskonposaketa faktoriala.

Bila ditzagun $\mathbf{x^4-4}$ monomioaren erro arrazionalak. Q-ko erro posibleak -4ren (maila txikieneko koefizientearen) zatitzaileak 1ekin (maila handieneko koefizientearekin) zatitzearen emaitza,

$$\frac{\text{-4ren zatitzaileak}}{\text{1en zatitzaileak}};\qquad \frac{\pm1 \qquad \pm2 \qquad \pm4}{\pm1}$$

$$\pm1 \quad \pm2 \quad \pm4$$

Ruffiniren arauaren bidez erraza da ikustea balio posibleak ez direla x^4-4-ko erroak. Polinomioak ez dauka erro arrazionalik.

x^4-4 karratuen kendura bezala ezagutzen bada, $(\mathbf{x^2})^2-\mathbf{2}^2$ deskonposaketa faktoriala errazago gertatuko da:
$x^4-4=(x^2+2)\cdot(x^2-2)$
Lehen faktorea primoa da, baina bigarrena berriro karratuen kendura da $x^2-2=(x+\sqrt{2})\cdot(x-\sqrt{2})$

$$\boxed{\mathbf{x^4-4}=(x^2+2)\cdot(x+\sqrt{2})\cdot(x-\sqrt{2})}$$

Ariketen emaitzak

27. Aurkitu $\mathbf{x^3-7x^2+4x+12}$-ren deskonposaketa faktoriala.

Polinomio honen erro arrazional posibleak 12-ren zatitzaileak dira

$\pm1 \quad \pm2 \quad \pm3 \quad \pm4 \quad \pm6 \quad \pm12$

Ruffiniren erregelarekin polinomioaren erroak zein zatitzaile diren ikusiko dugu

	1	-7	4	12
-1)		-1	8	-12
	1	**-8**	**12**	**0**
2)		2	-12	
	1	-6	**0**	

$$\boxed{\mathbf{x^3-7x^2+4x+12}=(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x-6)}$$

28. Aurkitu $\mathbf{(2x^3+x+3/2)^2-(x^3+5x-3/2)^2}$-ren deskonposaketa faktoriala

Identitate nabarmenak erabiltzen dira:

karratuen kendura=batura bider kendura

$(2x^3+x+3/2)^2-(x^3+5x-3/2)^2=(3x^3+6x)\cdot(x^3-4x+3)$

Lehen faktorea $(3x^3+6x)$ deskonposatzen da **faktore komuna ateraz** $3x$, $(3x^3+6x)=3x\cdot(x^2+2)$; x^2+2 primoa da, $x^2+2=0$ bigarren graduko ekuazioak ez duelako erro errealik.

(x^3-4x+3) **-en erro arrazionalak aurkitu behar dira**

$1 \quad -1 \quad 3 \quad -3$

1 erroa dela ikusten dugu

	1	0	-4	3
1)		1	1	-3
	1	1	-3	**0**

$(x^3-4x+3)=(x-1)\cdot(x^2+x-3)$

x^2+x-3 deskonposatzeko, **bigarren graduko ekuazioa** ebazten da $x^2+x-3=0$ eta ondoko ebazpenak ditu:

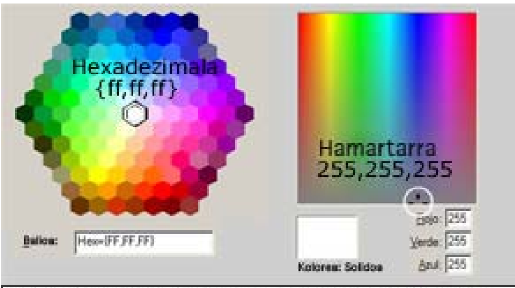
$\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$ y $\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}$

$$\boxed{\mathbf{(2x^3+x+\tfrac{3}{2})^2-(x^3+5x-\tfrac{3}{2})^2}=3x\cdot(x^2+2)\cdot(x-1)\cdot\left(x-\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)}$$

Praktikatzeko

1. 5352 zenbakia 7 oinarrian dago, zein da bere balioa sistema hamartarrean? 5 3 5 2 koefizienteen polinomioak 7 balioan duen zenbakizko balioa aurkitu behar da.

2. Kolore kopurua sistema hexadezimalean edo 16ko oinarrian adierazten da, sistema honek 16 zifra ditu:0 1 2 3 4 5 6 7 8 9, a=10, b=11, c=12, d=13, e=14, f=15 eta sistema honetan kolore urdineko 38 kopurua hamartarrean ondokoari dagokio **3**·16+**8**=56



Irudi hauek Word-en kolorea aukeratzean ikus daitezke. Gorri, berde eta urdinaren kantitateak edozein kolore definitzen du.

Adierazi hamartarrean kolore urdineko 62 eta 5d kopuru hexadezimalak.

3. Aurkitu P(x)-5·Q(x), $P(x)=4x^2+4x$ eta $Q(x)=6x^2+2x$ izanik.

4. Biderkatu polinomioak $P(x)=4x^2-7x+3$ eta $Q(x)=-x^2+5$.

5. Aurkitu ondoko zatiketaren zatidura eta hondarra $-4x^3+7x^2-x-5$ zati $-2x^2-5x-2$.

6. Egin zatiketa hau Ruffiniren erregela erabiliz x^3+x-4 zati $x+2$.

7. Aplikatu hondarraren teorema ondoko zatiketaren hondarra kalkulatzeko $3x^3-5x^2+7$ zati $x-5$.

8. a) Aurkitu m $x^3+mx^2-3mx+3$ x+5-gatik zatigarria izan dadin.

   b) Aurkitu m $x^3+mx^2-5mx+6$ x-5-gatik zatigarria izan dadin.

9. Egin itzazu potentziak
   a) $(2x+3)^2$
   b) $(2x-1)^3$
   c) $(x-3)^2$
   d) $(x+2)^3$

10. Ebatzi ondoko ekuazioak identitate nabarmenak aplikatuz:
    a) $x^2+4x-21=0$
    b) $x^2-10x+9=0$

11. Aurkitu Pascalen triangeluaren 4. errenkada, zein da $(x+1)^4$-ren bigarren mailako koefizientea?

12. Sinplifikatu ondoko frakzio aljebraikoak
    a) $\dfrac{x^2+8x+16}{3x+12}$
    b) $\dfrac{3x^2-12}{x^2-4x+4}$
    c) $\dfrac{4x^2+4x+1}{12x^2-3}$

13. Aurkitu ondoko polinomioen deskonposaketa faktore lehenetan
    a) $4x^7+12x^6-4x^5-12x^4$
    b) $3x^8+9x^7-12x^5$
    c) $12x^3-16x^2-7x+6$
    d) $8x^3-20x^2+22x-7$
    e) $2x^3-9x^2+5x+5$

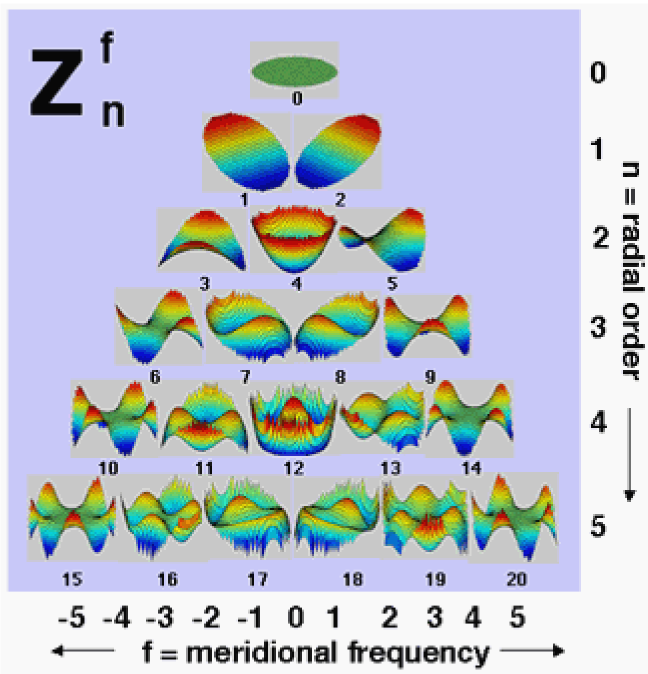
14. Aplikatu identitate nabarmenak ondoko polinomioak deskonposatzeko
    a) x^4-6^4
    b) $x^4-x^2-24x-12^2$
    c) $x^4-98x^2+49^2$

15. 3. mailako polinomio baten erroak –1, 4 eta 1 dira. Aurkitu deskonposaketa faktoriala 2 balioa emanez -24 dela jakinda.

Gehiago jakiteko

Polinomioak beste zientzietan

Web orrian ikertu baldin bazenuen baliteke izen berezia duten polinomioak aurkitzea: Lagrangeren, Hermiteren, Newtonen, Chevicheven... polinomioak. Hemen Zernikere polinomioei buruz eta akats bisualak zuzentzeko optikan dituen aplikazioei buruz aritzen den blog baten zatia kopiatu dugu.



... Matematikek, Zernikeren polinomioekin, azalera konplexuak osagai sinpleetan deskonposatzeko metodoa ematen digute. **Horrela, prozedura matematiko honekin, ikusizko aberrazio guztiak sailkatu eta definitu ditzakegu**. Sarritan zirugia errefraktiboko kontsultetan agertzen den eskema da aberrazio desberdinak sailkatzen eta taldekatzen dituena:

Sailkapena funtsezkoa da, aberrazioaren taldearen arabera, garrantzi handiagoa edo txikiagoa izango du, zuzentzeko zailagoa edo errazagoa izango da, e.a. Adibidez, 4. miopiari dagokio (eta bere alderantzizkoari, hipermetropia), eta 3.a eta 5.a astigmatismoari dagozkio...

Orri honetako lagina
http://ocularis.es/blog/?p=29

Euklidesen algoritmoa

Zenbaki edo polinomioen deskonposaketa faktorialak balio du zatikiak sinplifikatzeko.

Numerikoak	Polinomikoak
$\frac{18}{30}=\frac{2\cdot 3^2}{2\cdot 3\cdot 5}=\frac{3}{5}$	$\frac{x^2-x}{x^2+x-2}=\frac{x\cdot(x-1)}{(x+2)\cdot(x-1)}=\frac{x}{x+2}$

Baina metodo honekin edozein zatiki sinplifikatzea ez da erraza izango, deskonposaketa faktoriala kalkulatzea zail gerta daiteke eta. Euklidesen algoritmoa z.k.h. aurkitzeko eta ondorioz edozein frakzio sinplifikatu ahal izateko metodo segurua da, zatikizunaren eta zatitzailearen z.k.h. eta zatitzailearen eta hondarraren z.k.h. berdina dela dio.

D | d
r   c

Zatikizun =zatitzaile·zatidura+hondarra
Beraz
z.k.h.(D,d)=z.k.h.(d,r)
Horrela z.k.h. kalkulatzeko elementuak murrizten dira
Gogoan izan berdintasun hau

Aurkitu $x^4+2x^3+7x^2+6x+9$ko z.k.h eta $x^4+2x^3+6x^2+5x+6$

Zatiketa egiten dugu

1 2 7 6 9 | 1 2 6 5 6
0 1 1 3 | 1

z.k.h.(D,d)=z.k.h.(d,r) dela aplikatzen dugu eta berriro zatitzen dugu

1 2 6 5 6 | 1 1 3
1 3 5 | 1 1 2
2 2 6
0 0

Eskatu den zkh 1 1 3 = x^2+x+3 da

Aurkitu **1219** eta **299ko zkh**

1219 | 299
23 | 4

z.k.h.(D,d)=z.k.h.(d,r) dela aplikatzen dugu
Gero nahikoa da **z.k.h.(299,23) kalkulatzea(299,23)**

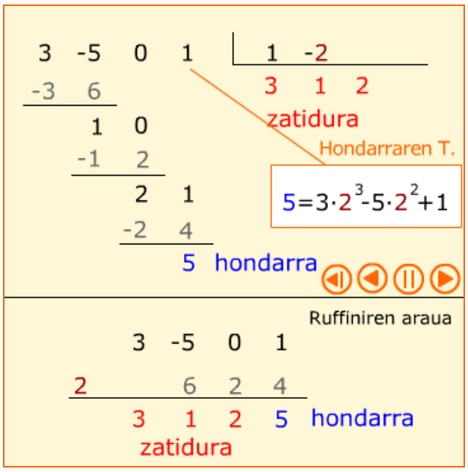
299 | 23
69 | 13
0

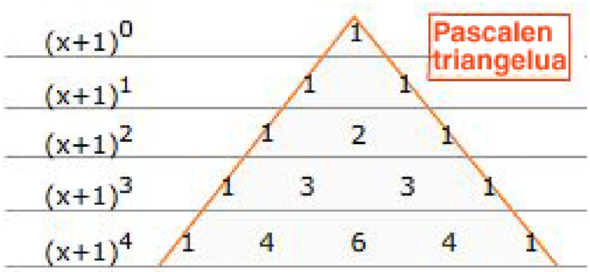
z.k.h.(299,23)=z.k.h.(13,0)=13

Gogora ezazu garrantzitsuena

Eragiketak polinomioekin Ruffiniren erregela eta Hondarrarren teorema

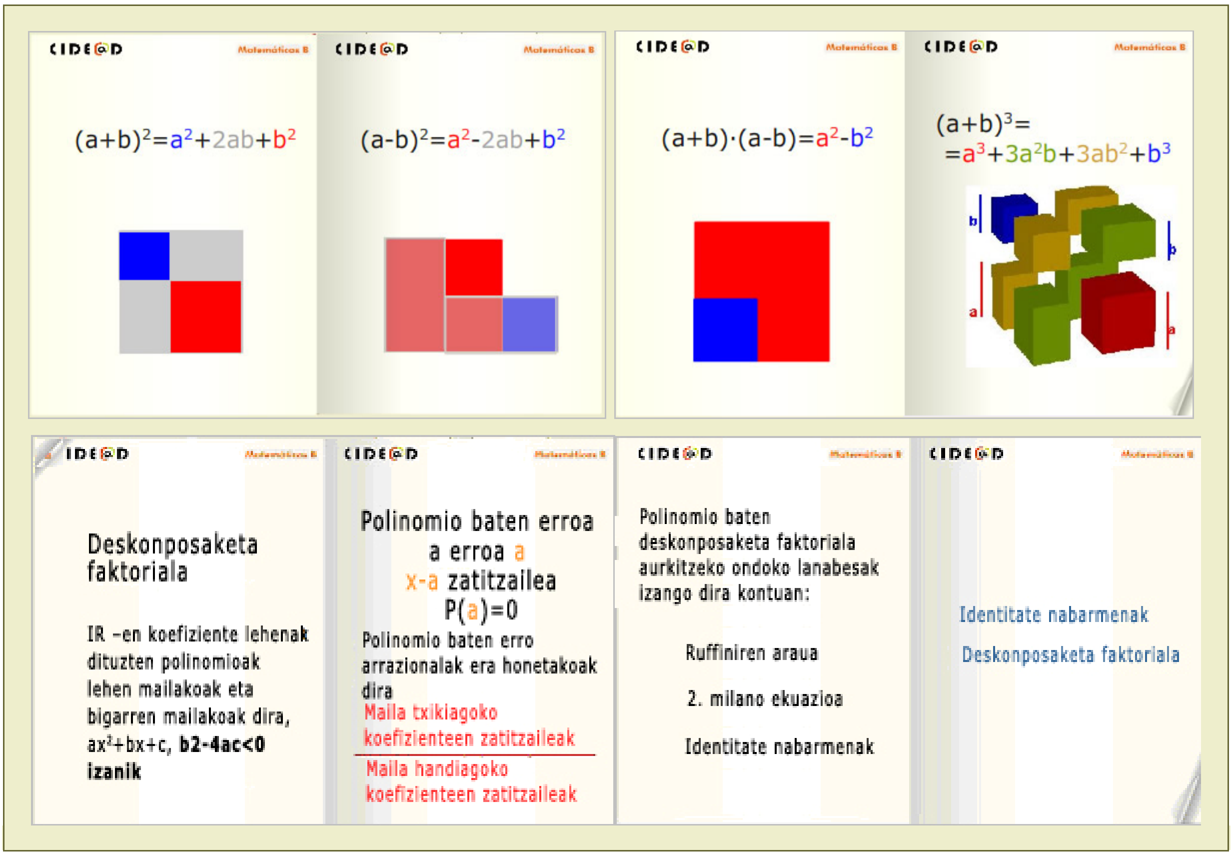
x-a-gatik zatitu ondoren hondarra zatikizunaren a-n zenbakizko balioa da





Polinomio baten erroak

P(2)=0 **P(-2)=0**



Autoebaluazioa

1. Aurkitu $P(x)\cdot Q(x) + P(x)\cdot R(x)$ -ren koefizienteak $P(x)=2x+1$, $Q(x)=5x^2-5$ eta $R(x)=x^2+11x$ izanik.

2. Kalkulatu ondoko zatiketaren zatidura eta hondarra $6x^3-5x^2+4$ zati x^2+3.

3. Zeintzuk dira $(x+4)^3$-ren koefizienteak?

4. Egia al da berdintasuna $4x^2+10x+25=(2x+5)^2$?

5. Kalkula ezazu m, $8x^2+mx+3$ zati $x+2$ zatiketaren hondarra hnakoa izan adin: 3.

6. $P(x)=ax^2+bx+5$ eta $a\cdot 6^2+b\cdot 6=4$ baldin bada, zein da $P(x)$ zati $x-6$ zatiketaren hondarra?

7. Aurkitu ondoko polinomioaren erro oso bat x^3+5x^2+6x+8

8. Aurkitu ondoko polinomioaren erro arrazional bat $4x^3+5x^2+25x+6$

9. $5x^3+7x^2-28x-12$ polinomioaren erroak 2 eta –3 badira, zein da beste erroa?

10. 3. mailako polinomio baten erroak –5, 0 eta 6 dira. Kalkulatu 7 balioa duen polinomioaren zenbakizko balioa maila handieneko koefizientea 3 dela jakinik.

Praktikatzeko ariketen ebazpenak

1. 1899

2. 98, 93

3. $-26x^2-6x$

4. $-4x^5+7x^4-17x^2-35x+15$

5. Zatidura$=2x-17/2$,

hondarra$=\frac{-79}{2}x-22$

6. Zatidura 3 -6 13 **hondarra -30**

7. $3\cdot5^3-5\cdot5^2+7=257$

8. a) $m=61/20$,

b) x-5-gatik zatigarria ezin daiteke izan.

9. a) $4x^2+12x+9$

b) $8x^3-12x^2+6x-1$

c) x^2-6x+9

d) $x^3+6x^2+12x+8$

10. a) $(x+2)^2-5^2=(x+2+5)\cdot(x+2-5)$;

-7 y 3

b) $(x-5)^2-4^2=(x-5+4)\cdot(x-5-4)$;1 y 9

1 4 **6** 4 1

11. a) $\frac{x+4}{3}$

b) $\frac{3x+6}{x-2}$

c) $\frac{2x+1}{6x-3}$

12. a) $4x^4\cdot(x+3)\cdot(x+1)\cdot(x-1)$

b) $3x^5\cdot(x+2)^2\cdot(x-1)$

c) $12\cdot(x+2/3)\cdot(x-3/2)\cdot(x-1/2)$

d) $(x-1/2)\cdot(8x^2-16x+14)$

e) $(x+\frac{1}{2})\cdot2\cdot(x-\frac{5-\sqrt{5}}{2})\cdot(x-\frac{5+\sqrt{5}}{2})$

13. a) $(x^2+36)\cdot(x+6)\cdot(x-6)$

b) $(x^2+x+12)\cdot(x-4)\cdot(x+3)$

c) $(x+7)^2\cdot(x-7)^2$

14. $4\cdot(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x-4)$

Autoebaluazio-ebazpenak

1. 12 28 1 -5

2. Zatidura 6x-5, hondarra –18x+19

3. 1 12 48 64

4. Ez, $(2x+5)^2=4x^2+20x+25$

5. $m=16$

6. 9

7. –4

8. –1/4

9. –2/5

Jarduerak tutoreari bidali, ahaztu gabe. ▶