Hipocicloides de n puntas

Wilfredo Zuleta R. [1]

"Saber que sabemos lo que sabemos y saber que no sabemos lo que no sabemos, ese es el verdadero conocimiento". Nicolás Copérnico[2].

Este pequeño artículo está inspirado en un no muy conocido teorema adjudicado a Nicolás Copérnico en el área de la Geometría, y que establece que si dentro de una circunferencia rueda en sentido horario (sin deslizarse) otra circunferencia que tiene un radio que es la mitad del radio de la circunferencia grande, entonces un punto sobre la circunferencia rodante describe una recta que justamente es una diámetro de la circunferencia mayor y que uno de sus extremos es el primer punto de contacto entre las dos circunferencias.

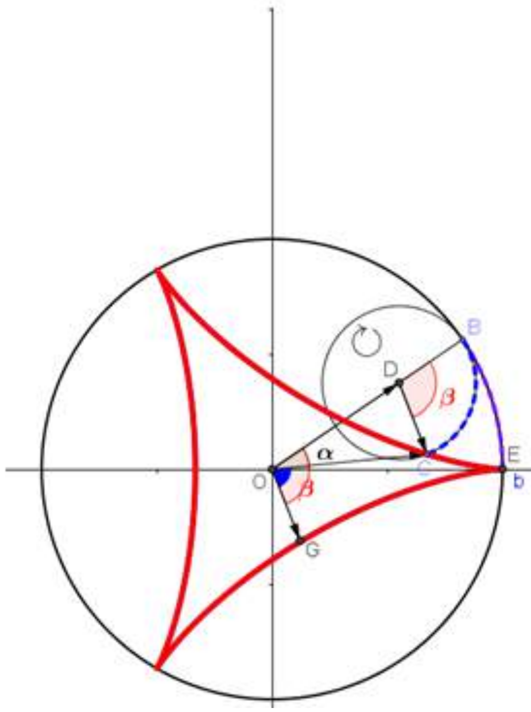
Así que, lo que vamos a construir son los lugares geométricos que describe este punto sobre la circunferencia cuando su radio es la enésima parte del radio de la circunferencia sobre la cual rueda, y donde contemplaremos casos particulares de estas curvas generadas y en particular los casos n=2 el cual es el diámetro señalado por el *teorema de Copérnico*. Para cuando n=4, encontramos el conocido *Astroide,* así como otros casos a los cuales denominaremos *Hipocicloide de n puntas.* El método de construcción de estos lugares geométricos nos ofrece una manera de cómo dividir una circunferencia en n partes iguales y por tanto nos permite la construcción de polígonos regulares de n lados.

Todo lo que se presenta en imágenes han sido realizadas con el programa Geogebra 5.0.306.0-3D y cuyos archivos están disponibles al lector a través del correo indicado en la nota a pie de página.

A continuación se te presentan una serie de imágenes donde se ofrece la información pertinente, que con el uso de elementos básicos de geometría, trigonometría y vectores en el plano se han encontrado las correspondientes ecuaciones de tales lugares geométricos. La figura 1 nos muestra el caso particular para n=3, lo que se conoce como *hipocicloide de 3 puntas,* o *Deltoide*.

[1] Profesor jubilado del NURR. Universidad De Los Andes. Trujillo-Venezuela. Email:wrzr2001us@hotmail.com

[2] El astrónomo polaco **Nicolás Copérnico** fue el primero que demostró que la Tierra gira alrededor del Sol, que es conocida como la *teoría heliocéntrica*, rompiendo con la teoría dominante, *teoría geocéntrica*, con Aristóteles y Ptolomeo como sus máximos representantes, la cual establecía que alrededor de la Tierra giran todos los planetas y el sol.



Ecuaciones paramétricas

$$x(\alpha)=\frac{n-1}{n}\,a\cos\alpha+\frac{a}{n}\cos(n-1)\alpha$$

$$y(\alpha)=\frac{n-1}{n}\,a\,sen\alpha-\frac{a}{n}\,sen(n-1)\alpha$$

$$0\leq\alpha\leq 2\pi$$

$$\beta=n\alpha$$

$$\delta=\beta-\alpha=(n-1)\alpha$$

$$\overrightarrow{OD}=<\frac{n-1}{n}\,a\cos\alpha,\ \frac{n-1}{n}\,a\,sen\alpha>$$

$$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OG}=<\frac{a}{n}\cos(n-1)\alpha,-\frac{a}{n}\,sen(n-1)\alpha>$$

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DC}$$

$$\overset{\frown}{EB}=\overset{\frown}{BC}\qquad \overline{OB}=a\qquad \overline{DB}=\frac{1}{n}\overline{OB}$$

$$\alpha a=L=\beta\frac{a}{n}\qquad \overline{OD}=\frac{n-1}{n}a$$

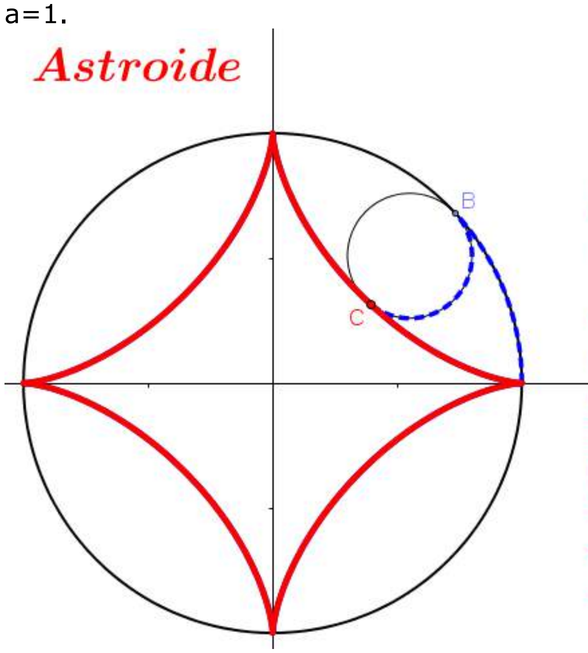
$$\beta=n\alpha$$

Figura 1

La condición de que la circunferencia rodante no deslice lo garantiza de que la longitud de los arcos EB y EC sean iguales, esto es $\overset{\frown}{EB}=\overset{\frown}{BC}$.

Te presentamos (figura 2) la imagen correspondiente al *hipocicloide de cuatro puntas* o simplemente *Astroide*, como es conocido. Estos es, para n=4 y se ha tomado a=1.

Astroide



Tomando $a=1$; $n=4$ *y teniendo en cuenta*

$$\cos(3\alpha)=\cos^3\alpha-3sen^2\alpha\cos\alpha$$

y

$$sen(3\alpha)=3\cos^2\alpha\,sen\alpha-sen^3\alpha$$

Ecuaciones paramétricas

$$x(\alpha)=\frac{3}{4}\cos\alpha+\frac{1}{4}\cos(3\alpha)=\cos^3\alpha$$

$$y(\alpha)=\frac{3}{4}\,sen\alpha-\frac{1}{4}\,sen(3\alpha)=sen^3\alpha$$

$$0\leq\alpha\leq 2\pi$$

Ecuación cartesiana

$$x=\cos^3\alpha$$

$$y=sen^3\alpha$$

$$x^{2/3}=\cos^2\alpha$$

$$y^{2/3}=sen^2\alpha$$

$$x^{2/3}+y^{2/3}=1$$

Figura 2

El siguiente caso (mostrado en figura 3) corresponde al lugar geométrico garantizado por el *teorema de Copérnico.*

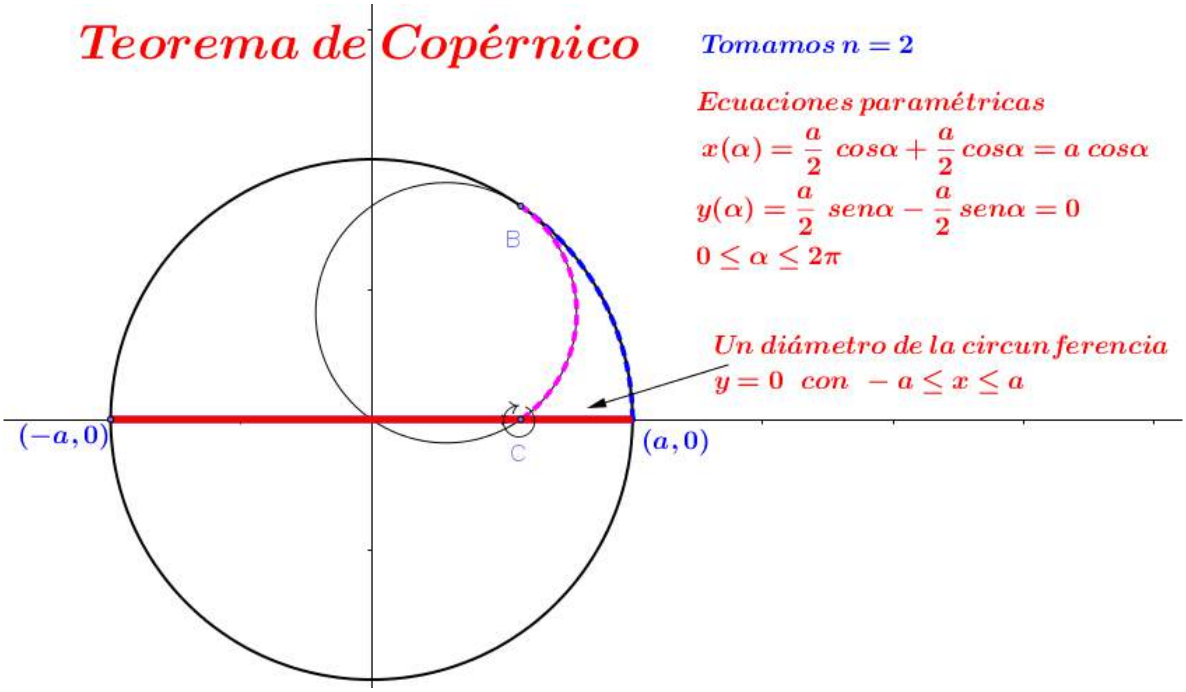


Figura 3

En la figura 4 se muestra una hipocicloide de diez puntas.

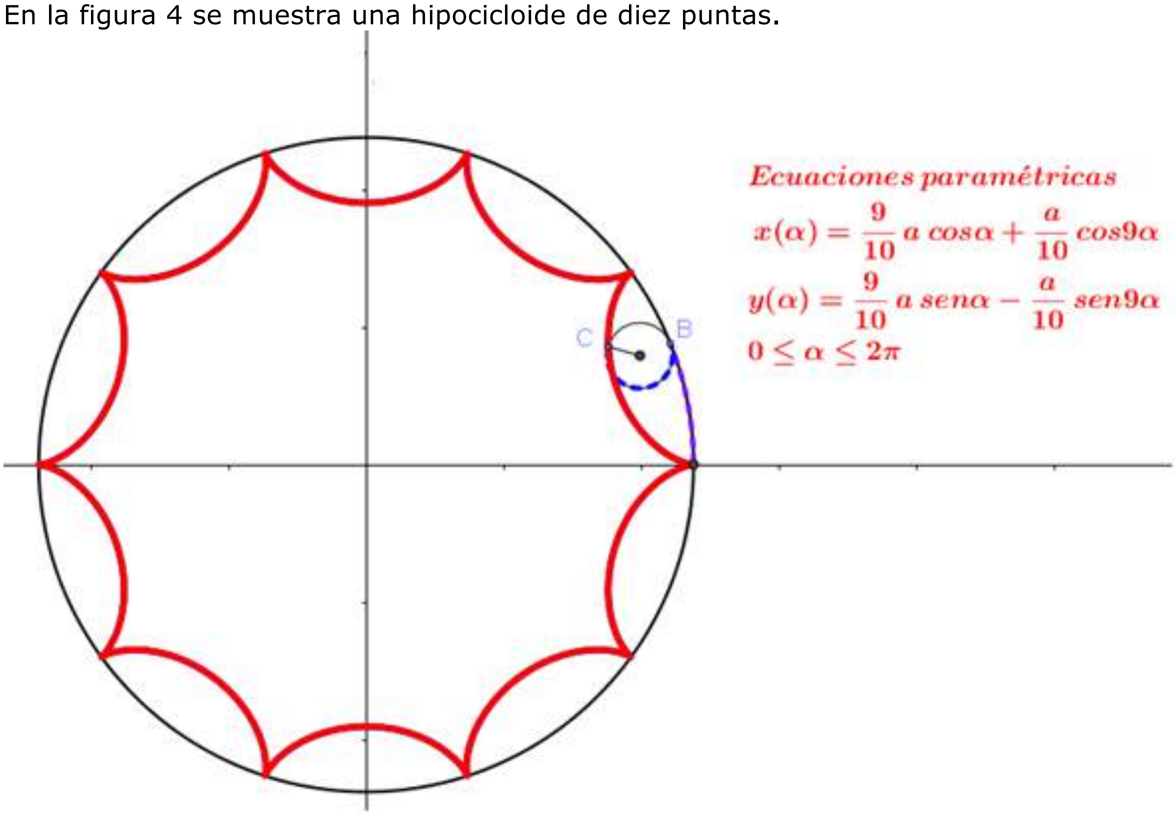


Figura 4

Si ahora ponemos a rodar (sin deslizamiento) a la circunferencia interior en sentido anti horario, obtenemos curvas que tienen la siguiente forma. Veamos el caso para cuando n=6 (Figura 5)

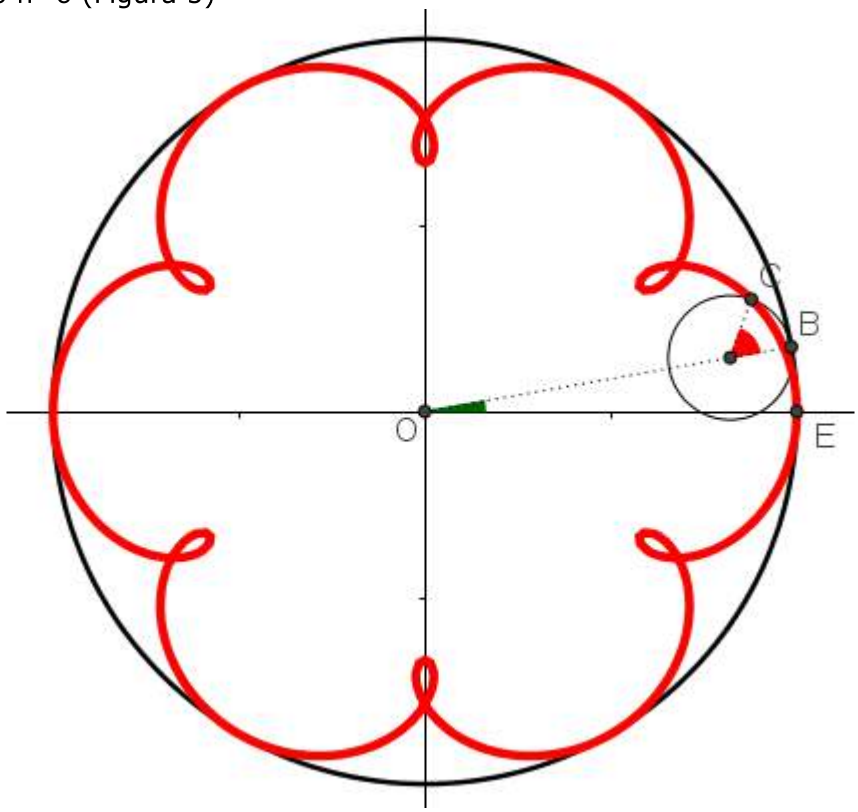
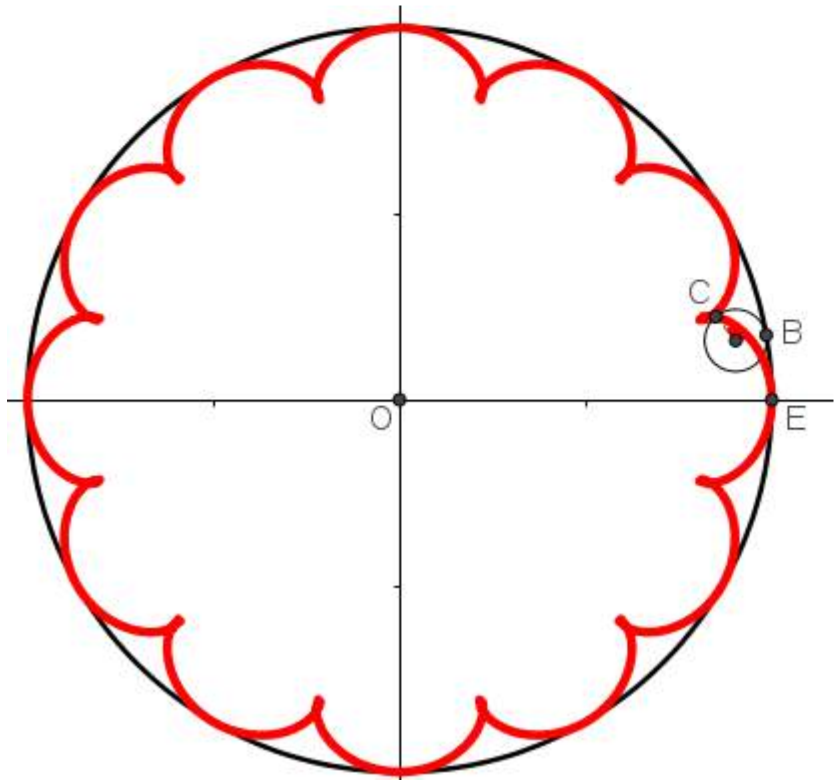


Figura 5

Para n=12 (Figura 6)



Propuesta

Queda planteado al lector conseguir las ecuaciones paramétricas para este tipo de *curvas hipocicloidales*.