ÁLGEBRA LINEAL I — Soluciones a la Práctica 6

Aplicaciones lineales (Curso 2011–2012)

1.– *De las siguientes aplicaciones definidas entre espacios vectoriales reales, determinar cuáles son homomorfismos, monomorfismos, epimorfismos o isomorfismos. Obtener también, con respecto a bases que se definirán, la expresión matricial, base y ecuaciones del núcleo y la imagen de todos los homomorfismos.*

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 3x + 2$

NO ES HOMOMORFISMO porque no lleva el neutro en el neutro, es decir, $f(0) = 2 \neq 0$.

(b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad g(x, y) = (x,\ y,\ x + y)$

SI ES HOMOMORFISMO. Veámoslo. Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$. Hay que verificar que $g(\lambda(x, y) + \mu(x', y')) = \lambda g(x, y) + \mu g(x', y')$:

$$\begin{aligned} g(\lambda(x, y) + \mu(x', y')) &= g(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y') = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y') \\ &= \lambda(x, y, x + y) + \mu(x', y', x' + y') = \lambda g(x, y) + \mu g(x', y') \end{aligned}$$

En las bases canónicas $\{(1, 0), (0, 1)\}$ en $\mathbb{R}^2$ y $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ en $\mathbb{R}^3$, la expresión matricial es:

$$g(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

El núcleo son los vectores que van al cero. Es decir los (x, y) tales que $\bar{0} = g(x, y) = (x, y, x + y)$. Por tanto el núcleo es el espacio $\{\bar{0}\}$ y la aplicación ES un MONOMORFISMO.

La imagen son los vectores $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que verfican $z = x + y$. NO es un EPIMORFISMO, porque la dimensión de la imagen es 2 (menor que la dimensión 3 del espacio final).

NO es ISOMORFISMO, por no ser epimorfismo.

(c) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad h(x, y) = (xy,\ x - 2y)$

NO es HOMORFISMO. No verifica que $h((x, y) + (x', y')) = h(x, y) + h(x', y')$. Por ejemplo:

$$h((1, 1) + (-1, -1)) = h(0, 0) = (0, 0)$$

y sin embargo

$$h(1, 1) + h(-1, -1) = (1, -1) + (1, 1) = (2, 0) \neq (0, 0)$$

(d) $u : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R}), \quad u(p(x)) = p'(x)$

SI es HOMOMORFISMO. Sean $p(x), q(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Por las propiedades de la derivación se tiene:

$$u(\lambda p(x) + \mu q(x)) = (\lambda p(x) + \mu q(x))' = \lambda p'(x) + \mu q'(x) = \lambda u(p(x)) + \mu u(q(x))$$

Consideramos en $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ la base canónica $\{1, x, x^2, x^3\}$ y en $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ la base canónica $\{1, x, x^2\}$. Si $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$, su derivada es $p'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2$. Por tanto en las bases canónicas el homomorfismo se expresa matricialmente como:

$$u(p(x)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

El núcleo son aquellos polinomios con derivada cero, es decir, las constantes $p(x) = a_0$. Por tanto sus ecuaciones son:

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

NO es un MONOMORFISMO porque hay polinomios no nulos con derivada nula, es decir, el núcleo es distinto de $\{\bar{0}\}$.

La imagen es todo el espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, porque todo polinomio de grado menor o igual que 2 es derivada de uno de grado menor o igual que 3. Dado $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$ basta tomar $p(x) = b_0x + (b_1/2)x^2 + (b^2/3)x^3$, y $u(p(x)) = q(x)$. Por tanto la apliación ES un EPIMORFISMO.

Finalmente NO es un ISOMORFISMO, porque no es un monomorfismo.

(e) $v : \mathcal{M}_{2\times 3} \to \mathcal{S}_3, \quad v\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a-b & c \\ a-b & d & e+f \\ c & e+f & e-f \end{pmatrix}$

(*Notaciones: $\mathcal{M}_{m\times n}$ es el espacio vectorial de las matrices $m \times n$ con elementos reales; $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, el espacio de los polinomios con coeficientes reales y grado menor o igual que n; $\mathcal{S}_n$, el espacio de las matrices simétricas $n \times n$ con elementos reales).*

Veamos que es un homomorfismo. Sean $A, A' \in \mathcal{M}_{2\times 3}$ con:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}; \quad A' = \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}$$

y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tenemos que comprobar que

$$v(\lambda A + \mu B) = \lambda v(A) + \lambda v(B)$$

Pero:

$$\begin{aligned}
v(\lambda A + \mu B) &= v(\lambda \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \end{pmatrix}) \\
&= v(\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ \lambda d & \lambda e & \lambda f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu a' & \mu b' & \mu c' \\ \mu d' & \mu e' & \mu f' \end{pmatrix}) \\
&= v(\begin{pmatrix} \lambda a + \mu a' & \lambda b + \mu b' & \lambda c + \mu c' \\ \lambda d + \mu d' & \lambda e + \mu e' & \lambda f + \mu f' \end{pmatrix}) \\
&= \begin{pmatrix} \lambda a + \mu a' - \lambda b - \mu b' & \lambda a + \mu a' - \lambda b - \mu b' & \lambda c + \mu c' \\ \lambda a + \mu a' - \lambda b - \mu b' & \lambda d + \mu d' & \lambda e + \mu e' + \lambda f + \mu f' \\ \lambda c + \mu c' & \lambda e + \mu e' + \lambda f + \mu f' & \lambda e + \mu e' - \lambda f - \mu f' \end{pmatrix} \\
&= \lambda \begin{pmatrix} a+b & a-b & c \\ a-b & d & e+f \\ c & e+f & e-f \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} a'+b' & a'-b' & c' \\ a'-b' & d' & e'+f' \\ c' & e'+f' & e'-f' \end{pmatrix} \\
&= \lambda v(A) + \mu v(B)
\end{aligned}$$

Consideramos las bases canónicas B y B' en $\mathcal{M}_{2\times 3}$ y $\mathcal{S}_3$ respectivamente:

$$\begin{aligned}
B &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \{e_1, \ldots, e_6\}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
B' &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \{E_1, \ldots, E_6\}
\end{aligned}$$

Veamos cual es la matriz de la aplciación con respecto a estas bases. Para ello calculamos las imágenes de cada e_i y las escribimos en la base B':

$$\begin{aligned}
v(e_1) &= E_1 + E_2;\\
v(e_2) &= E_1 - E_2;\\
v(e_3) &= E_3;\\
v(e_4) &= E_4;\\
v(e_5) &= E_5 + E_6;\\
v(e_6) &= E_5 - E_6;
\end{aligned}$$

Por tanto la matriz de v con respecto a las bases B_1 y B_2 es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Recordemos que esto significa que si denotamos a las coordenadas en la base B por $(x^1, \ldots, x^6)$ y las coordenadas de su imagen en la base B' por $(y^1, \ldots, y^6)$, estas se calculan como:

$$\begin{pmatrix} y^1\\ y^2\\ y^3\\ y^4\\ y^5\\ y^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1\\ x^2\\ x^3\\ x^4\\ x^5\\ x^6 \end{pmatrix}$$

El núcleo de la aplicación corresponde a aquellos vectores cuya imagen es cero, es decir, a la solución del sistema:

$$A \begin{pmatrix} x^1\\ x^2\\ x^3\\ x^4\\ x^5\\ x^6 \end{pmatrix} = \bar{0}$$

Dado que la matriz asociada al sistema es precisamente la matriz A de la aplicación v y esta es no singular, el sistema es determinado con única solución la trivial. Por tanto el núcleo del homomorfismo es el subespacio $\{\bar{0}\}$ y ES un MONOMORFISMO.

Además utilizando las fórmulas de la dimensión vemos que

$$dim(Im\, v) = dim(\mathcal{M}_{2\times 3}) - dim(Ker\, v) = 6.$$

Pero $\mathcal{S}_3$ también tiene dimensión 6. Deducimos que la aplicación ES un EPIMORFISMO.

Finalmente por ser monomorfismo y epimorfismo, ES un ISOMORFISMO de espacios vectoriales.

Nota: Como el núcleo es $\{\bar{0}\}$ no tiene sentido dar sus ecuaciones. En todo caso sus ecuaciones cartesianas serían obviamente $x^1 = x^2 = x^3 = x^4 = x^5 = x^6 = 0$. Así mismo como la imagen es todo el espacio $\mathcal{S}_3$, una base de ella es cualquier base de $\mathcal{S}_3$; por ejemplo, la base B'.)

2.– *Dada la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

y las bases $B_1 = \{(2,\ 1),\ (1,\ 1)\}$ *en* $\mathbb{R}^2$ *y* $B_2 = \{(0,\ 1,\ 1),\ (1,\ 1,\ 1),\ (-1,\ -2,\ 0)\}$ *en* $\mathbb{R}^3$*, se pide hallar las matrices, en las bases canónicas respectivas, de las siguientes aplicaciones lineales* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$*:*

Denotamos por C_1 y C_2 respectivamente las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. En todos los casos nos piden la matriz $F_{C_2C_1}$.

(a) *la que tiene asociada la matriz* A *considerando en* $\mathbb{R}^2$ *la base* B_1 *y en* $\mathbb{R}^3$ *la canónica,*

Tenemos en cuenta que para pasar de coordenadas en la base B_1 a la base canónica hay que multiplicar por la matriz:

$$M_{C_1B_1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Además el dato que nos dan es que $F_{C_2B_1} = A$. Por tanto la matriz que buscamos es:

$$F_{C_2C_1} = F_{C_2B_1}M_{B_1C_1} = F_{C_2B_1}M_{C_1B_1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -2 & 4 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

(b) *la que tiene asociada la matriz* A *considerando en* $\mathbb{R}^2$ *la canónica y en* $\mathbb{R}^3$ *la base* B_2*,*

Ahora para pasar de coordenadas en la base B_2 a la base canónica hay que multiplicar por la matriz:

$$M_{C_2B_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Además el dato que nos dan es que $F_{B_2C_1} = A$. Por tanto la matriz pedida es:

$$F_{C_2C_1} = M_{C_2B_2}F_{B_2C_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

(c) *la que tiene asociada la matriz* A *considerando en* $\mathbb{R}^2$ *la base* B_1 *y en* $\mathbb{R}^3$ *la base* B_2*.*

Finalmente el dato que nos dan ahora es que $F_{B_2B_1} = A$. Teniendo en cuenta lo anterior, la matriz buscada será:

$$F_{C_2C_1} = M_{C_2B_2}F_{B_2B_1}M_{C_1B_1}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}$$

3.– *Sea* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *el espacio vectorial de polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que dos. Consideramos las aplicaciones lineales:*

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (x+y, y+z, x+z)$$
$$g : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad g(ax^2+bx+c) = (a-b, c+a-b, 2b-a)$$

y las bases de $\mathbb{R}^3$ *y* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$*,* $B = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ *y* $C = \{1, x, x^2\}$*.*

Hallar la matriz asociada a la aplicación $f \circ g$ *respecto de las bases* C *y* B*.*

La composición es una aplicación lineal que va de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}^3$:

$$(f \circ g) : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3.$$

Llamamos $C' = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ a la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Si denotamos por $h = f \circ g$ se tiene:

$$H_{C'C} = F_{C'C'}G_{C'C}$$

y por la fórmula de cambio de base:

$$H_{BC} = M_{BC'}H_{C'C} = M_{C'B}^{-1}H_{C'C} = M_{C'B}^{-1}F_{C'C'}G_{C'C}$$

siendo

$$M_{CB'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Comenzamos entonces, calculando la matriz asociada a f con respecto a la base C', es decir, la matriz $F_{C'C'}$. Se tiene:

$$f(1,0,0) = (1,0,1)$$
$$f(0,1,0) = (1,1,0)$$
$$f(0,0,1) = (0,1,1)$$

Por tanto:

$$F_{C'C'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora hallamos $G_{C'C}$:

$$g(1) = g(0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1) = (0,1,0)$$
$$g(x) = g(0 \cdot x^2 + 1 \cdot x + 0) = (-1,-1,2)$$
$$g(x^2) = g(1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0) = (1,1,-1)$$

de donde:

$$G_{C'C} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, la matriz pedida es:

$$H_{BC} = M_{C'B}^{-1}F_{C'C'}G_{C'C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

4.– *En el espacio vectorial real de las matrices 2×2 con elementos reales, $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, se consideran los subconjuntos*

$$U = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) |\, traza(A) = 0\}$$
$$V = \mathcal{L}\{Id\}$$

(c) *Calcular la matriz asociada respecto a la base canónica de la aplicación proyección sobre U paralelamente a V:*

$$p : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

Escogemos una base formada por las bases de U y V que obtuvimos antes:

$$B = \{(1,0,0,-1),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(1,0,0,1)\}.$$

Con respecto a esta base la matriz asociada a la aplicación proyección pedida es:

$$P_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora la cambiamos a la base canónica:

$$P_{CC} = M_{CB}P_{BB}M_{BC} = M_{CB}P_{BB}M_{CB}^{-1},$$

donde

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Operando queda:

$$P_{CC} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

(d) *Calcular la proyección de la matriz* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *sobre* V *paralelamente a* U.

Aprovechamos la matriz calculada en el apartado anterior para calcular la proyección sobre U paralelamente a V:

$$P(1,0,0,0) = P_{CC}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

Por tanto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}}_{\in U} + \underbrace{X}_{\in V},$$

donde X es la matriz que nos piden. Finalmente:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

5.–

(a) *Decidir si existe alguna aplicación lineal* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ *tal que*

$$\begin{aligned} ker\, f &= \{(x^1,x^2,x^3) \in \mathbb{R}^3 : x^1 - x^3 = x^2 = 0\}, \\ Im\, f &= \{(y^1,y^2,y^3,y^4) \in \mathbb{R}^4 : y^1 - y^2 = y^2 - y^3 = 0\}. \end{aligned}$$

Si existe, dar la matriz (con respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ *y* $\mathbb{R}^4$*) de una que verifique estas condiciones. Si no existe, demostrarlo.*

Para que exista la aplicación lineal pedida, la suma de la dimensión del núcleo y la dimensión de la imagen tiene que ser igual a la dimensión del espacio origen.

En este caso el núcleo está definido por dos ecuaciones independientes en $\mathbb{R}^3$ y por tanto tiene dimensión $3 - 2 = 1$.

La imagen está definida también por dos ecuaciones independientes en $\mathbb{R}^4$ y por tanto tiene dimensión $4 - 2 = 2$.

Deducimos que si existe la aplicación que nos piden.

Para definir una aplicación lineal basta tener en cuenta como actúa sobre los vectores de una base. Sabemos que sobre vectores del núcleo la aplicación es cero. Además sabemos cual es la imagen:

Base del núcleo: $\{(1,0,1)\}$
Base de la imagen: $\{(1,1,1,0),(0,0,0,1)\}$

Por tanto para definir f completamos la base del núcleo hasta una base de $\mathbb{R}^3$:

$$\{(1,0,0),(0,1,0),(1,0,1)\}$$

(es una base porque son vectores independientes), y definimos f sobre sus vectores, llevando el núcleo al cero y los otros dos a los generadores de la imagen:

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= (1,1,1,0)\\ f(0,1,0) &= (0,0,0,1)\\ f(1,0,1) &= (0,0,0,0) \end{aligned}$$

Como nos piden la matriz de f con respecto a las bases canónicas nos interesa conocer la imagen de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Sólo nos falta la imagen de $(0,0,1)$, pero:

$$f(0,0,1) = f(1,0,1) - f(1,0,0) = (-1,-1,-1,0)$$

Por tanto la matriz de f respecto de las bases canónicas es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nota: La aplicación no es única. Podríamos haber escogido otros generadores de la imagen y definir de esta forma una aplicación diferente verificando las propiedades deseadas.

(b) *Idem para*

$$\begin{aligned} ker f &= \{(x^1,x^2,x^3)\in\mathbb{R}^3 : 2x^1 - x^2 + x^3 = 0\},\\ Im f &= \{(y^1,y^2,y^3,y^4)\in\mathbb{R}^4 : y^1 + 2y^2 = y^1 - y^3 = 0\}. \end{aligned}$$

Ahora el núcleo está definido por una ecuación en $\mathbb{R}^3$, luego su dimensión es $3-1=2$.

La imagen está definida por dos ecuaciones independientes en $\mathbb{R}^4$, luego su dimensión es $4-2=2$.

Se tiene $dim(\ker f) + dim(\mathrm{Im}\, f) = 4 > dim(\mathbb{R}^3)$ y por tanto no puede existir la aplicación lineal que nos piden.

(Primer parcial, febrero 2001)

6.– *En el espacio vectorial* $\mathbb{R}_3$ *consideramos las bases* $C=\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$ *y* $B=\{\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3\}$.

$$\begin{aligned} &\bar{e}_1 = (1,0,0); \quad \bar{e}_2 = (0,1,0); \quad \bar{e}_3 = (0,0,1).\\ &\bar{u}_1 = (1,1,0); \quad \bar{u}_2 = (1,0,0); \quad \bar{u}_3 = (-1,0,1). \end{aligned}$$

Consideramos la aplicación lineal $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *dada por:*

$$f(\bar{e}_1) = \bar{u}_1 + \bar{u}_2; \quad f(\bar{e}_2) = \bar{u}_3 - \bar{u}_1; \quad f(\bar{e}_3) = \bar{u}_2 + \bar{u}_3.$$

Calcular:

(a) *La matriz asociada a* f *respecto a la base canónica* C.

Teniendo en cuenta los datos que nos dan, la matriz asociada a f respecto a las bases C y B es:

$$F_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora la matriz pedida es:

$$F_{CC} = M_{CB} F_{BC}$$

donde M_{CB} es la matriz de cambio de base:

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Obtenemos:

$$F_{CC} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) *La matriz asociada a f respecto a la base B.*

Buscamos la matriz F_{BB}. De nuevo tenemos que hacer un cambio de base:

$$F_{BB} = F_{BC} M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) *Calcular las ecuaciones paramétricas e implícitas del núcleo y de la imagen de f respecto a las bases B y C.*

Trabajemos primero respecto a la base canónica. Utilizamos la matriz F_{CC}.

El núcleo es:

$$F_{CC} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ x - y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Eliminamos las ecuaciones dependientes y obtenemos las ecuaciones implícitas del núcleo:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Para obtener las paramétricas resolvemos el sistema. El núcleo tiene dimensión $3 - 2 = 1$. Tendremos un sólo parámetro:

$$\begin{cases} x = y \\ z = -y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

Por otra parte sabemos que la imagen de f está generada por las columnas de la matriz F_{CC}. Eliminamos las dependientes:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vemos que la imagen está generada por los vectores $(2,1,0), (0,0,1)$. Las ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

Ahora eliminamos parámetros para obtener la ecuación implícita:

$$x = 2y \iff x - 2y = 0.$$

Trabajamos ahora respecto a la base B. Utilizaremos por tanto la matriz F_{BB}. Repetimos los razonamientos que hicimos para la base canónica.

El núcleo es:

$$F_{BB}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} y' - z' = 0 \\ x' + y' = 0 \\ x' + z' = 0 \end{cases}$$

Eliminamos las ecuaciones dependientes y obtenemos las ecuaciones implícitas del núcleo:

$$\begin{cases} y' - z' = 0 \\ x' + y' = 0 \end{cases}$$

Para obtener las paramétricas resolvemos el sistema.

$$\begin{cases} z' = y' \\ x' = -y' \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x' = -\lambda \\ y = \lambda \\ z' = \lambda \end{cases}$$

La imagen de f está generada por las columnas de la matriz F_{BB}. Eliminando como antes las dependientes, vemos que la imagen está generada por los vectores $(0,1,1),(1,1,0)$. Las ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = \mu \\ y = \lambda + \mu \\ z = \lambda \end{cases}$$

Ahora eliminamos parámetros para obtener la ecuación implícita:

$$y = x + z \iff x - y + z = 0.$$

7.– *Sea* $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ *un endomorfismo del que se sabe:*

(i) $Im(f) \subset Ker(f)$.

(ii)

$$f(1,0,1,1) = (1,-1,0,0).$$
$$f(0,0,0,1) = (1,0,-1,1).$$

Entonces:

(a) *Calcular la matriz asociada a* f *respecto de la base canónica.*

Por (ii) sabemos que $(1,-1,0,0),(1,0,-1,1) \in Im(f)$, y por (i) que $(1,-1,0,0),(1,0,-1,-1) \in Ker(f)$. Por tanto:

$$f(1,-1,0,0) = (0,0,0,0), \quad f(1,0,-1,1) = (0,0,0,0).$$

Sabemos como funciona la aplicación sobre cuatro vectores:

$$B' = \{(1,-1,0,0),(1,0,-1,1),(1,0,1,1),(0,0,0,1)\}$$

Si estos forman base la tenemos perfectamente definida. Lo comprobamos viendo que son linealmente independientes; equivalentemente comprobando que su matriz de coordenadas tiene determinante no nulo:

$$det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 > 0.$$

Entonces tenemos que:

$$F_{CB'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hacemos el cambio de base para obtener F_{CC}:

$$F_{CC} = F_{CB'}M_{B'C} = F_{CB'}M_{CB'}^{-1},$$

con

$$M_{CB'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Operando queda:

$$F_{CC} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & -1/2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) *Calcular la matriz asociada a f respecto de la base:*

$$B = \{(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1),(0,0,0,1)\}.$$

Simplemente hacemos el cambio de base:

$$F_{BB} = M_{BC}F_{CC}M_{CB} = M_{CB^{-1}}F_{CC}M_{CB},$$

donde:

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Operando obtenemos:

$$F_{BB} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3/2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) *Hallar las ecuaciones implícitas y paramétricas de $ker(f), Im(f)$ con respecto a la base canónica.*

Usando la matriz hallada en (a) podríamos identificar la imagen como el subespacio generado por sus columnas; el núcleo como los vectores que multiplicados por ella dan el vector cero. Sin embargo de los datos del enunciado hay un camino más inmediato. Por la fórmula de las dimensiones:

$$dim(Ker(f)) + dim(Im(f)) = 4 \qquad (*)$$

Además:

- De (i) deducimos que $dim(Ker(f)) \geq dim(Im(f))$.

- De (ii) deducimos que $dim(Im(f)) \geq 2$.

Por tanto, susituyendo en (*) obtenemos que:

$$4 = dim(ker(f)) + dim(Im(f)) \geq 2 + 2 = 4$$

y así las desigualdades son en realidad igualades es decir $dim(Ker(f)) = dim(Im(f)) = 2$ y por (i), $Ker(f) = Im(f))$. Por tanto sólo debemos de calcular las ecuaciones de uno de los dos subespacios ya que el otro es exactamente el mismo. Sabemos además que tiene dimensión 2. Pero entonces por (ii):

$$Im(f) = \mathcal{L}\{(1,-1,0,0),(1,0,-1,1)\}.$$

Las paramétricas son por tanto:

$$x = a + b, \quad y = -a, \quad z = -b, \quad t = b$$

Y las $4 - 2 = 2$ ecuaciones impícitas:

$$x = -y + t, \quad z + t = 0.$$

8.– *En $\mathbb{R}^2$ se definen los endomorfismos $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ como:*

$$f(u_1) = 2u_1 - u_2, \quad f(u_2) = e_1 - e_2; \qquad g(e_1) = u_1 + u_2; \quad g(e_2) = e_1 - e_2$$

donde $\{e_1, e_2\}$ son los vectores de la base canónica y $u_1 = (1,2)$, $u_2 = (2,3)$.

(a) *Calcular las matrices asociadas a f y g respecto a la base canónica.*

Primero fijamos notación. Llamaremos B a la base $B = \{u_1, u_2\}$ y $C = \{e_1, e_2\}$ a la base canónica. Las matrices de cambio de base de una a otra son:

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad M_{BC} = M_{CB}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vayamos primero con la aplicación f. Tenemos:

$$\begin{aligned} f(u_1) =& 2u_1 - u_2 = 2(1,2) - (2,3) = (0,1) = 0e_1 + 1e_2 \\ f(u_2) =& e_1 - e_2 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$F_{CB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

y

$$F_{CC} = F_{CB}M_{BC} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ahora con la aplicación g. Tenemos:

$$\begin{aligned} g(e_1) =& u_1 + u_2 = (1,2) + (2,3) = (3,5) = 3e_1 + 5e_2 \\ g(e_2) =& e_1 - e_2 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$G_{CC} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) *Calcular la matriz asociada respecto a la base $\{u_1, u_2\}$ de $f \circ g$.*

La matriz asociada a la composición $h = f \circ g$ es el producto de ambas matrices (construidas respecto a la misma base):

$$H_{CC} = F_{CC}G_{CC} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Ahora simplemente la cambiamos de base:

$$H_{BB} = M_{BC}H_{CC}M_{CB} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -53 & -81 \\ 30 & 46 \end{pmatrix}.$$

9.– *Encontrar la (única) respuesta correcta, de entre las indicadas, a las siguientes cuestiones:*

(a) *Dado un espacio vectorial real V de dimensión n y en él un endomorfismo f que cumple que $f^2 = f \circ f = \theta$ (homomorfismo nulo)*

◯ Ker $f \subset$ Im f.

FALSO. Por ejemplo si tomamos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, con $f(x, y) = 0$ para cualquier $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Está claro que $f^2 = \theta$, pero $Kerf = \mathbb{R}^2$ y $Imf = \{0\}$.

cuya matriz con respecto a la base canónica es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se tiene que $f^2 = \theta$, $f(1, 0) = \bar{0}$, pero $(1, 0) \notin \text{Im } f$.

◯ Im $f \subset$ Ker f.

VERDADERO. Sea $y \in \text{Im } f$. Entonces $y = f(x)$ para algún $x \in V$. Utilizando que $f^2 = \theta$, $f(y) = f(f(x)) = \bar{0}$ y por tanto $y \in \text{Ker } f$.

◯ Ker $f = V$.

FALSO. Por ejemplo si tomamos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cuya matriz con respecto a la base canónica es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se tiene que $f^2 = \theta$, pero $Kerf = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2, y \in \mathbb{R}\} \neq V$.

◯ Ker $f \oplus$ Im $f = V$.

FALSO. En el ejemplo anterior $Kerf = Imf = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2, y \in \mathbb{R}\}$. Por tanto Ker $f \oplus$ Im $f = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2, y \in \mathbb{R}\} \neq V$.

(Primer parcial, febrero 1997)

(b) *De las aplicaciones lineales de* $\mathbb{R}^3$ *en* $\mathbb{R}^4$

◯ Todas son inyectivas.

FALSO. Por ejemplo la aplicación θ no es inyectiva.

◯ Ninguna es sobreyectiva.

VERDADERO. Dada $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ se tiene $dim(Im(f)) = 3 - dim(Ker(f)) \leq 3$. Luego la dimensión de la imagen nunca puede ser 4.

◯ Algunas son biyectivas.

FALSO. Ninguna puede ser biyectiva, porque ninguna es sobreyectiva.

◯ Ninguna de las restantes respuestas es correcta.

FALSO.

(Primer parcial, enero 2004)

(c) *Sea $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo de un espacio vectorial V tal que $f \circ f = f$,*

◯ $Kerf = Imf$.

FALSO. Por ejemplo si tomamos $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = x$. Entonces $f(f(x)) = f(x)$ luego es cierto que $f \circ f = f$. Por otra parte, $Ker(f) = \{0\}$ e $Im(f) = \mathbb{R}$ luego es falso que $Ker(f) = Im(f)$.

◯ $(f - id) \circ (f - id) = f$.

FALSO. Como contraejemplo basta considerar la misma función de antes.

◯ $(f - id) \circ (f - id) = f - id$.

FALSO. Basta tomar $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = 0$. Entonces $f - id = -id$ y $(-id) \circ (-id) = id$.

○ $(id - f) \circ (id - f) = id - f$.

VERDADERO. Se tiene que:

$$(id - f) \circ (id - f) = id \circ id - f \circ id - id \circ f + f \circ f = id - f - f + f = id - f.$$

(d) *Sean $B_1 = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ y $B_2 = \{\bar{v}_2, \bar{v}_1\}$ dos bases de un espacio vectorial V. Sea $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo de V. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ es la matriz de f respecto a la base B_1, entonces la matriz de f respecto a la base B_2 es:*

Método I: Si la matriz $F_{B_1 B_1} = A$ significa que:

$$f(\bar{v}_1) = 1 \cdot \bar{v}_1 + 3 \cdot \bar{v}_2$$
$$f(\bar{v}_2) = 2 \cdot \bar{v}_1 + 4 \cdot \bar{v}_2$$

Por tanto, reordenando:

$$f(\bar{v}_2) = 4 \cdot \bar{v}_2 + 2 \cdot \bar{v}_1$$
$$f(\bar{v}_1) = 3 \cdot \bar{v}_2 + 1 \cdot \bar{v}_1$$

y deducimos que:

$$F_{B_2 B_2} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Método II: La matriz de cambio de base de B_2 a B_1 es:

$$M_{B_1 B_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto:

$$F_{B_2 B_2} = M_{B_2 B_1} F_{B_1 B_1} M_{B_1 B_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

○ $F_{B_2 B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

FALSO.

○ $F_{B_2 B_2} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

VERDADERO.

○ $F_{B_2 B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

FALSO.

○ $F_{B_2 B_2} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

FALSO.

(Primer parcial, enero 2006)

(e) *Sean U y V espacios vectoriales reales tales que $dim(U) = 15$, $dim(V) = 10$. Sea $f : U \to V$ un aplicación lineal de U en V:*

○ *f siempre es sobreyectiva.*

FALSO. Por ejemplo si f es la aplicación 0, no es sobreyectiva, porque $Im(f) = \{\bar{0}\} \neq V$.

◯ *f puede ser inyectiva.*

FALSO. Recordemos que una aplicación lineal es inyectiva precisamente si el núcleo es $\{\bar{0}\}$. Si consideramos la fórmula de las dimensiones:

$$\begin{aligned} &dim(Im(f)) + dim(ker(f)) = dim(U) = 15 \quad \Rightarrow \\ &\quad \Rightarrow \quad dim(ker(f)) = 15 - dim(im(f)) \geq 15 - dim(V) = 5 \end{aligned}$$

Por tanto $dim(ker(f)) \geq 5$ y f no puede ser inyectiva.

◯ $dim(ker(f)) \geq 5$.

VERDADERO.

◯ $dim(ker(f)) \leq 5$.

FALSO. Por ejemplo si f es la apliación 0, $ker(f) = U$ y $dim(ker(f)) = 15$.

(Primer parcial, enero 2006)

II.– *Sea f una aplicación lineal del espacio vectorial real S_2 de las matrices simétricas de dimensión 2, en el espacio vectorial real $M_{2\times 2}$ de las matrices cuadradas de dimensión 2, siendo:*

$$f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Se pide:

(a) *Matriz de f, indicando las bases en las que está definida.*

La forma más rapida de escribir la matriz de f es utilizar los vectores sobre los cuales está definida:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Estos forman una base por que sus coordenadas en la base canónica de S_2 son $(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)$ y estos tres vectores son independientes. Por tanto si consideramos la base B en S_2 y la base canónica C_1 en $M_{2\times 2}$, la matriz de f respecto a estas bases es:

$$F_{C_1B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Si quisiéramos la matriz en función de las bases canónicas en ambos espacios, bastaría multiplicar por la inversa de la matriz que transforma coordenadas en bases B a coordenadas en la base canónica de S_2. Es decir, quedaría:

$$F_{C_1C} = F_{C_1B}M_{CB}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) *Ecuaciones paramétricas de la imagen de f, en la base*
$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

La imagen está generada por las matrices cuyas coordenadas en la base canónica son $(2,0,1,1), (-1,1,-2,1), (0,2,-3,3)$. Primero veamos si estos vectores son independientes. Los colocamos matricialmente y calculamos el rango haciendo reducción por filas:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(2)} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Vemos que el rango es 2 y la imagen está generada por los vectores cuyas coordenadas en la base canónica son $(-1,1,-2,1), (0,2,-3,3)$.

Por otra parte la matriz para pasar de coordenadas en la base que nos dan a la base canónica es:

$$M_{C_1B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto las coordenadas de los vectores que generan la imagen expresadas en la base que nos dan serán:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dado que la dimensión de la imagen es 2, dichos vectores forman una base de la imagen. Las ecuaciones paramétricas en la base que nos dan serán:

$$\begin{aligned} y^1 &= -\lambda - \mu \\ y^2 &= \mu \\ y^3 &= -3\lambda/2 - 3\mu \\ y^4 &= -\lambda/2 \end{aligned}$$

(c) *Ecuaciones cartesianas del núcleo de f, en la base* $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Las ecuaciones del núcleo en la base canónica satisfacen:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dado que la dimensión de la imagen es 2 y la dimensión de S_2 es 3, el núcleo tiene dimensión 1, luego está definido por dos ecuaciones independientes. Basta tomar en la matriz anterior dos filas independientes:

$$\begin{aligned} -x^2 + 3x^3 &= 0 \\ 2x^1 - x^2 - x^3 &= 0 \end{aligned}$$

Ahora para expresarla en la base que nos dan tenemos en cuenta que si (x'^1, x'^2, x'^3) son coordenadas en dicha base se tiene:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix}$$

y por tanto las ecuaciones que definen al núcleo en la base dada son:

$$\begin{aligned} 4x'^1 - x'^2 - x'^3 &= 0 \\ -x'^2 + 3x'^3 &= 0 \end{aligned}$$

(d) *Encontrar un subespacio de S_2 y otro de $M_{2\times 2}$, ambos de dimensión 2, entre los que la restricción de f a ellos sea biyectiva.*

Basta tomar un subespacio de S_2 de dimensión 2 que no interseque al núcleo. Dado que las dos primeras columnas de la matriz de f con respecto a la base B_1 de S_2 y la base canónica de $M_{2\times 2}$ son independientes podemos tomar en S_2 el espacio generado por:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

La imagen es el subespacio generado por las matrices:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(Primer parcial, enero de 2002)

III.– *Sea V un espacio vectorial real de dimensión 3. Sean U y W dos subespacios suplementarios de V de dimensiones 2 y 1 respectivamente. Llamamos $f : V \longrightarrow V$ a la aplicación proyección sobre U paralelamente a W. Sea B una base de V. Probar que la matriz asociada a f respecto a la base B cumple:*

$$F_{BB}{}^n = F_{BB} \text{ para cualquier } n \geq 1.$$

Método I: La matriz $F_{BB}{}^n$ es la matriz asociada a la aplicación lineal:

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ veces}}.$$

respecto a la base B.

Dado un vector $\bar{v} \in V$ cualquiera sabemos que se descompone de manera única como:

$$\bar{v} = \bar{u} + \bar{w} \text{ con } \bar{u} \in U, \quad \bar{w} \in W.$$

Y teniendo en cuenta que f es la proyección sobre U paralelamente a W:

$$\begin{array}{l} f(\bar{v}) = \bar{u}. \\ f^2(\bar{v}) = f(f(\bar{v})) = f(\bar{u}) = \bar{u}. \\ f^3(\bar{v}) = f(f^2(\bar{v})) = f(\bar{u}) = \bar{u}. \end{array}$$

y en general, razonando por inducción, si $n \geq 2$

$$f^n(v) = f(f^{n-1}(\bar{v})) = f(\bar{u}) = \bar{u} = f(\bar{v}).$$

Vemos que $f^n = f$ y por tanto $F_{BB}{}^n = F_{BB}$.

Método II: Escogemos una base de U y otra de W:

$$\{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}, \{\bar{w}_1\}.$$

Por ser U y W suplementarios, todos estos vectores forman una base de V:

$$C = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{w}_1\}.$$

La matriz de f con respecto a C es:

$$F_{CC} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto $F_{CC}^n = F_{CC}$.

Ahora con respecto a cualquier otra base se tiene:

$$F_{BB} = M_{BC} F_{CC} M_{BC}{}^{-1} \quad \Rightarrow \quad F_{BB}{}^n = M_{BC} F_{CC}{}^n M_{BC}{}^{-1} = M_{BC} F_{CC} M_{BC}{}^{-1} = F_{BB}.$$

IV.– *Sea V el espacio vectorial de los polinomios reales de grados menor o igual que 2; sean:*

$$p(x) = 1 + x + x^2;\ q(x) = 1 + 2x^2;\ r(x) = x + x^2,$$

y sean

$$u = (2, 0, 1);\ v = (3, 1, 0);\ w = (1, -2, 3).$$

Considérese la aplicación lineal $f : V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$f(p(x)) = u;\ f(q(x)) = v;\ f(r(x)) = w.$$

(a) *Hallar la matriz de f respecto de las bases canónicas de V y $\mathbb{R}^3$.*

Llamamos $B_1 = \{p(x), q(x), r(x)\}$ al conjunto de polinomios dado. Veamos que es una base de V. Dado que $dim(V) = 3$, basta comprobar que la matriz de sus coordenadas con respecto a la base canónica tiene rango 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Entonces la matriz de F respecto a la base B_1 de V y la base canónica C_2 de $\mathbb{R}^3$, será:

$$\left.\begin{array}{ccr} p(x) & \longrightarrow & (2, 0, 1) \\ q(x) & \longrightarrow & (3, 1, 0) \\ r(x) & \longrightarrow & (1, -2, 3) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad F_{C_2B_1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Tenemos que cambiar de base en el primer espacio. La matriz de paso de la base B_1 a la canónica C_1 de V es:

$$M_{C_1B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto la matriz pedida es:

$$F_{C_2C_1} = F_{C_2B_1}M_{B_1C_1} = F_{C_2B_1}M_{C_1B_1}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Operando queda:

$$F_{C_2C_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3/2 & -1/2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) *Hallar una base B de V y otra base C de $\mathbb{R}^3$ tales que respecto de ellas, la matriz de f sea la identidad Id_3.*

Tenemos en cuenta que los vectores $B_2 = \{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\}$ forman una base de $\mathbb{R}^3$, ya que $dim(\mathbb{R}^3) = 3$ y la matriz de sus coordenadas tiene rango 3 (su determinante es no nulo):

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Por tanto la aplicación f lleva la base B_1 en la base B_2, y así la matriz de f respecto a estas bases es la identidad.

V.– *Sea* $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *una aplicación lineal dada por:*

$$f(a,b,c,d) = (a+b)x^2 + bx + (c-d)$$

a) *Hallar la matriz asociada a* f *respecto de las bases* B *y* B'*, con:*

$$B = \{(1,1,0,0),(1,-1,0,0),(0,0,1,1),(0,0,1,-1)\}, \quad B' = \{1+x+x^2, 1+x, 1\}.$$

Hallamos primero la matriz asociada respecto a las bases canónicas:

$$C = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}, \quad C' = \{1, x, x^2\}.$$

Se tiene:

$$\begin{array}{rcl} f(1,0,0,0) & = & x^2 \\ f(0,1,0,0) & = & x^2 + x \\ f(0,0,1,0) & = & 1 \\ f(0,0,0,1) & = & -1 \end{array}$$

Por tanto:

$$F_{C'C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora hacemos un cambio de base:

$$F_{B'B} = M_{B'C'} F_{C'C} M_{CB} = M_{C'B'}^{-1} F_{C'C} M_{CB}$$

Donde:

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_{C'B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Operando queda:

$$F_{B'B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) *Calcular las ecuaciones implícitas y paramétricas de* $Ker(f)$ *respecto de la base canónica.*

El núcleo está formado por aquellos vectores cuya imagen es nula. Equivalentemente por los vectores cuyas coordenadas en la base canónica multiplicadas por la matriz asociada $F_{C'C}$ son nulas:

$$F_{C'C} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff a+b=0, \quad b=0, \quad c-d=0.$$

Las implícitas son por tanto:

$$a+b=0, \quad b=0, \quad c-d=0.$$

Las paramétricas las obtenemos poniendo todas las variables en función de $4-3=1$ de ellas:

$$a=0, \quad b=0, \quad c=d,$$

y quedan:

$$\begin{array}{c} a=0 \\ b=0 \\ c=\lambda \\ d=\lambda \end{array}$$

VI.– *Sea $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de matrices reales simétricas 2×2. Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ el espacio de polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 2. Definimos la aplicación:*

$$f:\mathcal{P}_2(\mathbb{R})\longrightarrow\mathcal{S}_2(\mathbb{R});\qquad f(p(x))=\begin{pmatrix} p'(0) & p'(1)\\ p'(1) & p'(-1)\end{pmatrix}$$

(a) *Probar que f es una aplicación lineal y escribir la matriz asociada a f con respecto a las bases canónicas de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ y $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.*

Veamos primero que es una aplicación lineal. Hay que ver que para cualesquiera $p(x),q(x)\in\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ y $\lambda\in\mathbb{R}$, $f(p(x)+q(x))=f(p(x))+f(q(x))$ y $f(\lambda p(x))=\lambda f(p(x))$. Pero:

$$\begin{aligned} f(p(x)+q(x))&=\begin{pmatrix} (p+q)'(0) & (p+q)'(1)\\ (p+q)'(1) & (p+q)'(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p'(0)+q'(0) & p'(1)+q'(1)\\ p'(1)+q'(1) & p'(-1)+q'(-1)\end{pmatrix}=\\ &=\begin{pmatrix} p'(0) & p'(1)\\ p'(1) & p'(-1)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} q'(0) & q'(1)\\ q'(1) & q'(-1)\end{pmatrix}=f(p(x))+f(q(x))\end{aligned}$$

Y además:

$$f(\lambda p(x))=\begin{pmatrix} \lambda p'(0) & \lambda p'(1)\\ \lambda p'(1) & \lambda p'(-1)\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} p'(0) & p'(1)\\ p'(1) & p'(-1)\end{pmatrix}=\lambda f(p(x))$$

La base canónica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ es $C=\{1,x,x^2\}$ y la de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ es $C_1=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$.

Para calcular la matriz de f con respecto a dichas bases calculamos las imágenes de la primera y las expresamos en coordenadas con respecto a la segunda:

$$\begin{aligned} f(1)&=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\equiv(0,0,0)\\ f(x)&=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\equiv(1,1,1)\\ f(x^2)&=\begin{pmatrix}0&2\\2&-2\end{pmatrix}\equiv(0,2,-2)\end{aligned}$$

La matriz pedida es:

$$F_{C_1C}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&2\\0&1&-2\end{pmatrix}$$

(b) *Probar que $B=\{x^2,(x-1)^2,(x+1)^2\}$ es base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.*

Escribimos las coordenadas de los polinomios de B expresadas en la base canónica:

$$\begin{aligned} x^2&\equiv(0,0,1)\\ (x-1)^2=1-2x+x^2&\equiv(1,-2,1)\\ (x+1)^2=1+2x+x^2&\equiv(1,2,1)\end{aligned}$$

Tenemos:

$$\begin{vmatrix}0&0&1\\1&-2&1\\1&2&1\end{vmatrix}=4$$

Vemos que los tres vectores son independientes porque el determinante de la matriz que forman sus coordenadas es no nulo. Pero, dado que $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tiene dimensión 3, tres vectores independientes forman una base.

(c) *Calcular las ecuaciones cartesianas del núcleo de f expresadas en coordenadas en la base B.*

La matriz de cambio de base de B a C es:

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

de donde si (x, y, z), (x', y', z') son respectivamente coordenadas en las bases C y B se tiene:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M_{CB} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Método I: Calculamos primero el núcleo trabajando en la base canónica. Son los vectores cuya imagen por f es el 0:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{r} y = 0 \\ y + 2z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right.$$

Estas son las ecuaciones cartesianas del núcleo en la base canónica. Ahora cambiamos cada ecuación de coordenadas en la base canónica a coordenadas en la base B utilizando la expresión anterior. Obtenemos:

$$\left\{ \begin{array}{r} -2y' + 2z' = 0 \\ x' + y' + z' = 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} y' = z' \\ x' = -2z' \end{array} \right.$$

Método II: Calculamos la matriz asociada a f respecto a la base B en $\mathcal{P}_2\mathbb{R}$ y la canónica en $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, bien directamente o bien haciendo el cambio de base:

$$F_{C_1B} = F_{C_1C}M_{CB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos el núcleo pero trabajando directamente en la base B:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{r} -2y' + 2z' = 0 \\ 2x' + 4z' = 0 \\ -2x' - 4y' = 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} y' = z' \\ x' = -2z' \end{array} \right.$$

(d) *Calcular una base de la imagen de f y escribir las ecuaciones cartesianas de un espacio suplementario.*

Trabajamos con coordenadas en la base canónica de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. Las denotaremos por (a, b, c). La imagen está generada por los vectores columna de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Por tanto una base de la imagen está formada por los vectores cuyas coordenadas en la base canónica del espacio $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ son $\{(1, 1, 1), (0, 2, -2)\}$ o equivalentemente por las matrices $\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\}$.

Para calcular un espacio suplementario basta completar dicha base a una base de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. Basta añadir el vector $(1, 0, 0)$ ya que los vectores $\{(1, 1, 1), (0, 2, -2), (1, 0, 0)\}$ son independientes. Por tanto un espacio suplementario estará generado por el vector $(1, 0, 0)$. Sus ecuaciones paramétricas serán:

$$a = \lambda; \quad b = 0; \quad c = 0$$

y las cartesianas:

$$b = 0; \quad c = 0$$

(e) *Sea*

$$U = \{A \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})/traza(A) = 0\}.$$

Probar que U es un subespacio vectorial de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. Calcular las ecuaciones paramétricas y cartesianas de $U, U \cap Im(f)$ y $U + Im(f)$.

Veamos primero que U es subespacio vectorial:

- Es no vacío, porque $\Omega \in U$.

- Si $A, B \in U$, es decir $traza(A) = traza(B) = 0$, entonces:

$$traza(A + B) = traza(A) + traza(B) = 0$$

y $A + B \in U$.

- Si $A \in U$ (es decir $traza(A) = 0$) y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces:

$$traza(\lambda A) = \lambda traza(A) = 0$$

y $\lambda A \in U$.

Ahora sea

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

una matriz simétrica de dimensión 2. Se tiene $A \in U$ cuando $a + c = 0$. Por tanto en la base canónica, la ecuación cartesiana de U es:

$$a + c = 0$$

Las paramétricas serán:

$$a = \lambda; \quad b = \mu; \quad c = -\lambda$$

Luego una base de U viene dada por los vectores $\{(1, 0, -1), (0, 1, 0)\}$.

Calculemos $U \cap Im(f)$. Vimos que una base de $Im(f)$ es $\{(1, 1, 1), (0, 2, -2)\}$. Por tanto todo vector de $Im(f)$ es de la forma:

$$(a, b, c) = \lambda(1, 1, 1) + \mu(0, 2, -2)$$

Imponemos que dicho vector esté en U, es decir, que verifique su ecuación cartesiana:

$$\lambda + \lambda - 2\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\lambda = 2\mu$$

Por tanto los vectores de $U \cap Im(f)$ son de la forma:

$$(a, b, c) = \mu(1, 1, 1) + \mu(0, 2, -2) = \mu(1, 3, -1)$$

Deducimos que una base de $U \cap Im(f)$ está formada por el vector $\{(1, 3, -1)\}$.

Sus ecuaciones paramétricas son:

$$a = \lambda; \quad b = 3\lambda; \quad c = -\lambda;$$

Y las cartesianas:

$$a + c = 0; \quad 3a - b = 0;$$

Finalmente tenemos:

$$dim(U + Im(f)) = dim(U) + dim(Im(f)) - dim(U \cap Im(f)) = 2 + 2 - 1 = 3 = dim(\mathcal{S}_2(\mathbb{R}))$$

Por tanto $U + Im(f)$ es todo el espacio $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ y una base puede ser la propia base canónica de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. Las ecuaciones paramétricas son:

$$a = \lambda; \quad b = \lambda; \quad c = \lambda;$$

Las cartesianas no tiene sentido escribirlas porque $U + Im(f)$ es todo el espacio vectorial $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. **(Examen parcial, enero 2004)**

VII.– *Sea el espacio vectorial V de las funciones reales de una variable, definidas sobre $\mathbb{R}$, con las operaciones habituales de suma de funciones y producto por un escalar. Si ϕ es la aplicación que hace corresponder a cada terna de números reales (a, b, c) la función $f_{(a,b,c)}$ definida por:*

$$f_{(a,b,c)}(x) = a\text{sen}^2 x + b\cos^2 x + c, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Se pide:

a) *Probar que ϕ es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en V.*

Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^3$ y $(a, b, c), (a', b', c') \in \mathbb{R}^3$. Queremos ver que $\phi(\lambda(a, b, c) + \mu(a', b', c')) = \lambda\phi(a, b, c) + \mu\phi(a', b', c')$. Pero:

$$\begin{aligned}\phi(\lambda(a, b, c) + \mu(a', b', c'))(x) =& \phi(\lambda a + \mu a', \lambda b + \mu b', \lambda c + \mu c')(x) = \\ &= (\lambda a + \mu a')\text{sen}^2 x + (\lambda b + \mu b')\cos^2 x + (\lambda c + \mu c') = \\ &= \lambda(a\text{sen}^2 x + b\cos^2 x + c) + \mu(a'\text{sen}^2 x + b'\cos^2 x + c') = \\ &= \lambda\phi(a, b, c)(x) + \mu\phi(a', b', c')(x)\end{aligned}$$

b) *Hallar una base de la imagen y otra del núcleo, analizando si ϕ es inyectiva o sobreyectiva.*

Es claro que la imagen está generada por las funciones $\{\text{sen}^2\text{x}, \cos^2\text{x}, 1\}$. Hay que ver si estos tres vectores forman una base. Pero sabemos que hay una relación de dependencia lineal:

$$1 = \text{sen}^2\text{x} + \cos^2\text{x}.$$

Luego a lo sumo formarán base de la imagen los vectores $\{\text{sen}^2\text{x}, \cos^2\text{x}\}$. Comprobemos que son independientes. Supongamos $\lambda_1\text{sen}^2\text{x} + \lambda_2\cos^2\text{x} = 0$. Entonces tomando $x = 0$, obtenemos que $\lambda_2 = 0$ y tomando $x = \pi/2$ obtenemos que $\lambda_1 = 0$. Vemos que efectivamente son independientes y por tanto forman una base de la imagen.

La aplicación no es sobreyectiva porque el espacio vectorial de funciones reales no tiene dimensión finita, mientras que la imagen de esta aplicación tiene dimensión 3. En particular, teniendo en cuenta que las funciones seno, coseno y la función constante 1 son períodicas de período 2π, deducimos que todas las funciones de la imagen son períodicas de período 2π. Por tanto la función identidad $f(x) = x$ no está en la imagen, porque no es períodica.

Dado que la dimensión de la imagen es 2 y la dimensión del espacio origen es 3, sabemos que el núcleo tiene dimensión 1. Basta encontrar un vector que sea enviado por ϕ a la función 0. Pero teniendo en cuenta la relación de dependencia vista antes, tenemos que $\phi(1, 1, -1) = 0$ y por tanto una base del núcleo está formanda por el vector $(1, 1, -1)$.

Por tanto la aplicación no es inyectiva porque el núcleo no es nulo.

c) *Comprobar que el conjunto U formado por las funciones constantes es un subespacio vectorial de V. Hallar su dimensión y una base.*

Es claramente un subespacio vectorial. Basta tener en cuenta que si f y g son funciones constantes, $\lambda f + \mu g$ es una función constante para cualquier $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Dada una función constante $g(x) = k$, $k \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$, puede escribirse como $g(x) = k \cdot 1$, representando en este caso 1, la función constantemente igual a 1. Por tanto el subespacio de funciones constantes tiene dimensión 1 y una base del mismo puede ser la función constante 1.

d) *Hallar el conjunto origen de U, si es un subespacio vectorial dar una base.*

Se trata de hallar la imagen inversa del subespacio vectorial U, es decir, los $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tal que $\phi(a, b, c) \in U$. Recordemos que la imagen inversa de un subespacio vectorial por una aplicación lineal siempre es un subespacio vectorial. En este caso ha de verificarse que:

$$a\text{sen}^2 x + b\cos^2 x + c$$

sea una función constante. Esto sólo ocurre si $a = b$ y por tanto una base del conjunto origen (o imagen inversa) de U es la formada por los vectores $(1, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$.

Nota. Comprobemos que dada una aplicación lineal $f : U \longrightarrow V$ y un subespacio vectorial $W \subset V$ siempre se cumple que $f^{-1}(W)$ es un subespacio vectorial de U:

- $f^{-1}(W)$ es no vacío porque $f(0) = 0 \in W$ y por tanto $0 \in f^{-1}(W)$.

- Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $w, w' \in f^{-1}(W)$. Veamos que $\lambda w + \mu w' \in W$. Pero:

$$\left.\begin{array}{lll} w \in f^{-1}(W) & \Rightarrow & f(w) \in W \\ w' \in f^{-1}(W) & \Rightarrow & f(w') \in W \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \lambda f(w) + \mu f(w') \in W \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad f(\lambda w + \mu w') \in W \quad \Rightarrow \quad \lambda w + \mu w' \in f^{-1}(W)$$

(Primer parcial, febrero 1999)

VIII.– *Sean $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ y $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ aplicaciones lineales no nulas tales que $g \circ f$ es idénticamente cero y dim Img $= 3$. Calcular dim Kerf.*

Como $g \circ f$ es la aplicación nula, Imf $\subset$Ker$g$ (ésta es simplemente otra forma de escribir el hecho de que $g(f(\bar{x})) = 0$ para todo $\bar{x}$).

$g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ es una aplicación lineal y por tanto, dim Ker$g$+dim Img =dim$\mathbb{R}^4 = 4$. Dado que dim Im$g = 3$, deducimos dim Ker$g$=1.

El subespacio Imf está contenido en el subespacio unidimensional Ker$g$, luego Imf tiene dimensión 0 ó 1. No puede tener dimensión 0 porque en ese caso f sería la aplicación nula, cosa que se excluye en el enunciado. Por lo tanto dim Im$f = 1$.

$f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ es una aplicación lineal y por tanto, dim Ker$f$+dim Imf =dim$\mathbb{R}^5 = 5$. Dado que dim Im$f = 1$, deducimos dim Ker$f = 4$.

(Examen final, septiembre 2007)

IX.– Encontrar la (única) respuesta correcta, de entre las indicadas, a las siguientes cuestiones:

(a) *En el espacio vectorial real de las funciones derivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se considera el subespacio V generado por las funciones senx y cosx. La aplicación $t : V \to V$ que lleva cada función de V a su derivada*

○ *no está bien definida porque su imagen no está contenida en V.*

FALSO. Si que está bien definida, porque:

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$

y por tanto la imagen está contenida en el subespacio V que generan las funciones sen$x$ y cos$x$.

○ *es inyectiva pero no sobreyectiva.*

FALSO. Si que es sobreyectiva. Dado cualquier vector de V, $a\operatorname{sen} x + b\cos x$ con $a, b \in \mathbb{R}$, es imagen por t del vector de V, $-a\cos x + b\sin x$.

○ *es sobreyectiva pero no inyectiva.*

FALSO. Si es inyectiva, porque la dimensión de V es 2 y la dimensión de la imagen (que vimos coincide con V) es también 2. Por tanto la dimensión del núcleo es $2 - 2 = 0$.

○ *es un automorfismo.*

VERDADERO. Es un automorfismo por ser una aplicación lineal del espacio V sobre él mismo, inyectiva y sobreyectiva.

(Examen final, junio 2000)

(b) *Sean dos espacios vectoriales reales U y V y dos homomorfismos $f : U \to V$ y $g : V \to U$, que cumplen $g \circ f = \theta$*

◯ $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} g$

VERDADERO. Veámoslo:

$$\begin{array}{llll} y \in Im(f) & \Rightarrow & y = f(x), x \in U \quad \Rightarrow \quad g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = 0 & \Rightarrow \\ & \Rightarrow & y \in Ker(g) & \end{array}$$

◯ $\mathrm{Im} g \subset \mathrm{Ker} f$

FALSO. Por ejemplo: $U = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, $f(x) = (x, 0)$ y $g(x, y) = y$. Entonces $Im(g) = \mathbb{R}$ y $Ker(f) = \{0\}$.

◯ $\mathrm{Ker} f \subset \mathrm{Im} g$

FALSO. Por ejemplo: $U = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}$, $f = \theta$ y $g = \theta$. Entonces $Im(g) = \{0\}$ y $Ker(f) = \mathbb{R}$.

◯ $\mathrm{Ker} g \subset \mathrm{Im} f$

FALSO. Por ejemplo: $U = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}$, $f = \theta$ y $g = \theta$. Entonces $Im(f) = \{0\}$ y $Ker(g) = \mathbb{R}$.

(Primer parcial, enero 2004)

(c) Si U es un espacio vectorial y f, g endomorfismos de U entonces.

◯ $Ker(f) + Ker(g) \subset Ker(f + g)$.

FALSO. Por ejemplo si tomamos:

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & f(x, y) = (x, x). \\ g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & g(x, y) = (y, y). \end{array}$$

Entonces:

$$(f + g)(x, y) = (x + y, x + y)$$

y por tanto:

$$ker(f) = \mathcal{L}\{(0, 1)\}, \qquad ker(g) = \mathcal{L}\{(1, 0)\}, \qquad ker(f + g) = \mathcal{L}\{(1, -1)\}$$

y

$$ker(f) + ker(g) = \mathcal{L}\{(0, 1), (1, 0)\} = \mathbb{R}^2.$$

Pero:

$$Ker(f) + Ker(g) = \mathbb{R}^2 \not\subset \mathcal{L}\{(1, -1)\} = Ker(f + g).$$

◯ $Ker(f) \cup Ker(g) \subset Ker(f + g)$.

FALSO. En el ejemplo anterior:

$$Ker(f) \cup Ker(g) = \mathcal{L}\{(0, 1)\} \cup \mathcal{L}\{(1, 0)\} \not\subset \mathcal{L}\{(1, -1)\} = Ker(f + g).$$

◯ $Ker(f) \cap Ker(g) \subset Ker(f + g)$.

VERDADERO. Probémoslo en general. Sean $f, g : U \longrightarrow U$ endomorfismos de U. Veamos que todo elemento de $Ker(f) \cap Ker(g)$ está también en $ker(f + g)$:

$$\bar{u} \in Ker(f) \cap Ker(g) \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{u} \in ker(f) \\ \text{y} \\ \bar{u} \in ker(g) \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} f(\bar{u}) = \bar{0} \\ \text{y} \\ g(\bar{u}) = \bar{0} \end{array} \right. \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (f + g)(\bar{u}) = f(\bar{u}) + g(\bar{u}) = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad \bar{u} \in ker(f + g).$$

◯ *Ninguna de las anteriores afirmaciones es correcta.*

FALSO.

(Primer parcial, enero 2006)

(d) *Entre dos espacios vectoriales reales de dimensión finita V y W se define una aplicación lineal $f : V \to W$.*

◯ *Si $V = W$ entonces $Ker(f) \subset Im(f)$.*

FALSO. Por ejemplo $V = \mathbb{R}$ y f la aplicación nula.

◯ *Si $Ker(f) = V$ entonces $W = \{\bar{0}\}$.*

FALSO. El mismo ejemplo anterior no cumple esta afirmación.

◯ *Si $W = \{\bar{0}\}$ entonces $Ker(f) = V$.*

VERDADERO. Si $W = \{\bar{0}\}$ todo elemento de V necesariamente tiena a $\bar{0}$ por imagen por f.

◯ *Si $V = W$ e $Im(f) \subset Ker(f)$ entonces $f = \theta$.*

FALSO. Por ejemplo $V = \mathbb{R}^2$ y f la aplicación lineal que tiene por matriz respecto de la base canónica:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se verifica que $Im(f) = \mathcal{L}\{(1,0)\} = Ker(f)$ y sin embargo $f \neq \theta$.

(Primer parcial, enero 2005)