Rozamiento

El rozamiento entre dos superficies en contacto ha sido aprovechado por nuestros antepasados más remotos para hacer fuego frotando maderas. En nuestra época, el rozamiento tiene una gran importancia económica, se estima que si se le prestase mayor atención se podría ahorrar muchísima energía y recursos económicos.

Históricamente, el estudio del rozamiento comienza con Leonardo da Vinci que dedujo las leyes que gobiernan el movimiento de un bloque rectangular que desliza sobre una superficie plana. Sin embargo, este estudio pasó desapercibido.

En el siglo XVII Guillaume Amontons, físico francés, redescubrió las leyes del rozamiento estudiando el deslizamiento seco de dos superficies planas. Las conclusiones de Amontons son esencialmente las que estudiamos en los libros de Física General:

- La fuerza de rozamiento se opone al movimiento de un bloque que desliza sobre un plano.
- La fuerza de rozamiento es proporcional a la fuerza normal que ejerce el plano sobre el bloque.
- La fuerza de rozamiento no depende del área aparente de contacto.

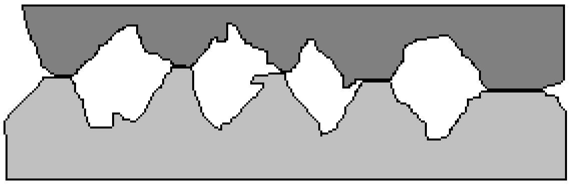
El científico francés Coulomb añadió una propiedad más

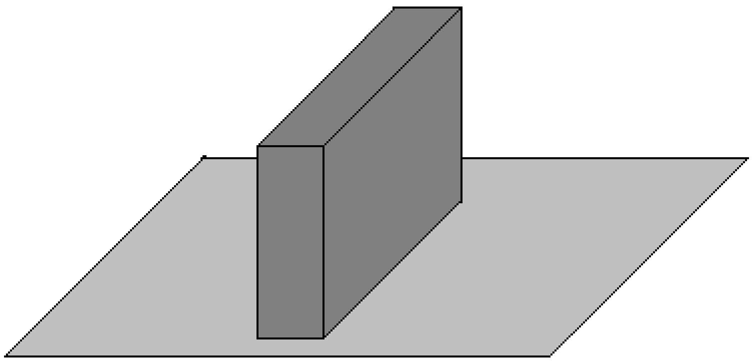
- Una vez empezado el movimiento, la fuerza de rozamiento es independiente de la velocidad.

Explicación del origen del rozamiento por contacto

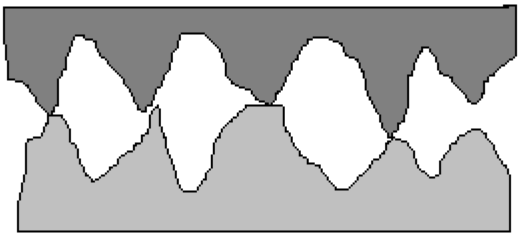
La mayoría de las superficies, aún las que se consideran pulidas son extremadamente rugosas a escala microscópica. Los picos de las dos superficies que se ponen en contacto determinan el área real de contacto que es una pequeña proporción del área aparente de contacto (el área de la base del bloque). El área real de contacto aumenta cuando aumenta la presión (la fuerza normal) ya que los picos se deforman.
Los metales tienden a soldarse en frío, debido a las fuerzas de atracción que ligan a las moléculas de una superficie con las moléculas de la otra. Estas soldaduras tienen que romperse para que el deslizamiento se produzca. Además, existe siempre la incrustación de los picos con los valles. Este es el origen del rozamiento estático.
Cuando el bloque desliza sobre el plano, las soldaduras en frío se rompen y se rehacen constantemente. Pero la cantidad de soldaduras que haya en cualquier momento se reduce por debajo del valor estático, de modo que el coeficiente de rozamiento cinético es menor que el coeficiente de rozamiento estático.
Finalmente, la presencia de aceite o de grasa en las superficies en contacto evita las soldaduras al revestirlas de un material inerte.

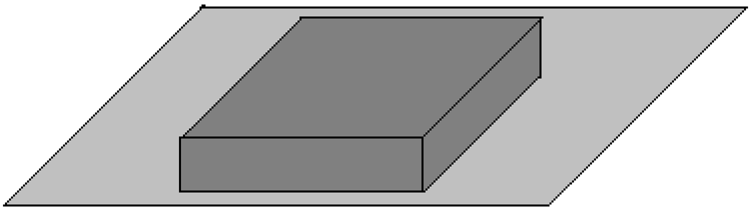
La explicación de que la fuerza de rozamiento es independiente del área de la superficie aparente de contacto es la siguiente:





En la figura, la superficie más pequeña de un bloque está situada sobre un plano. En el dibujo situado arriba, vemos un esquema de lo que se vería al microscopio: grandes deformaciones de los picos de las dos superficies que están en contacto. Por cada unidad de superficie del bloque, el área de contacto real es relativamente grande (aunque esta es una pequeña fracción de la superficie aparente de contacto, es decir, el área de la base del bloque).

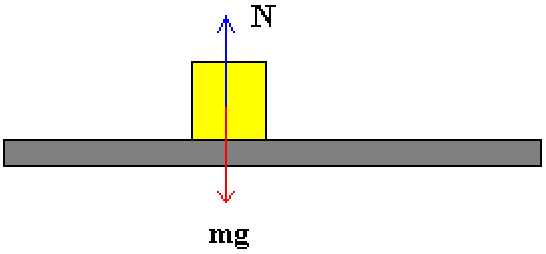




En la figura, la superficie más grande del bloque está situada sobre el plano. El dibujo muestra ahora que las deformaciones de los picos en contacto son ahora más pequeñas por que la presión es más pequeña. Por tanto, un área relativamente más pequeña está en contacto real por unidad de superficie del bloque. Como el área aparente en contacto del bloque es mayor, se deduce que el área real total de contacto es esencialmente la misma en ambos casos. Ahora bien, las investigaciones actuales que estudian el rozamiento a escala atómica demuestran que la explicación dada anteriormente es muy general y que la naturaleza de la fuerza de rozamiento es muy compleja (Véase el artículo titulado "Rozamiento a escala atómica" en la bibliografía de este capítulo.

La fuerza normal

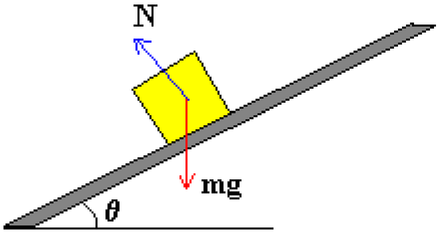
La fuerza normal, reacción del plano o fuerza que ejerce el plano sobre el bloque depende del peso del bloque, la inclinación del plano y de otras fuerzas que se ejerzan sobre el bloque.

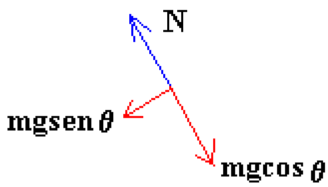


Supongamos que un bloque de masa *m* está en reposo sobre una superficie horizontal, las únicas fuerzas que actúan sobre él son el peso *mg* y la fuerza y la fuerza normal *N*. De las condiciones de equilibrio se obtiene que la fuerza normal *N* es igual al peso *mg*

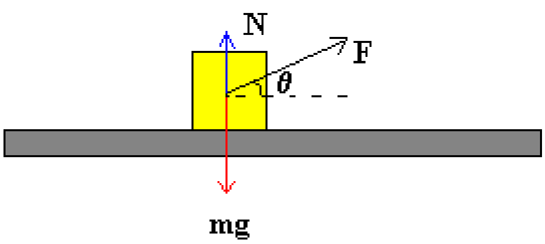
$N=mg$

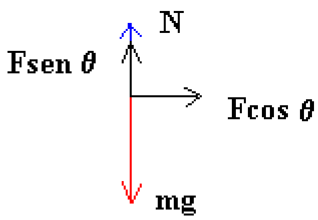
Si ahora, el plano está inclinado un ángulo q , el bloque está en equilibrio en sentido perpendicular al plano inclinado por lo que la fuerza normal N es igual a la componente del peso perpendicular al plano, $N=mg\cdot\cos q$





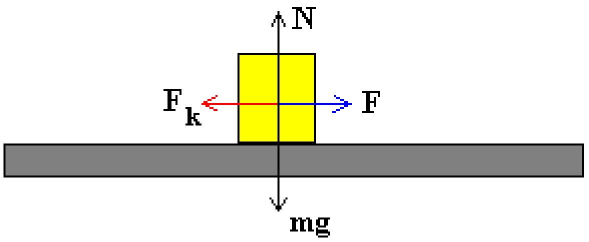
Consideremos de nuevo el bloque sobre la superficie horizontal. Si además atamos una cuerda al bloque que forme un ángulo q con la horizontal, la fuerza normal deja de ser igual al peso. La condición de equilibrio en la dirección perpendicular al plano establece $N+ F\cdot\text{sen}q =mg$





Fuerza de rozamiento por deslizamiento

En la figura, se muestra un bloque arrastrado por una fuerza F horizontal. Sobre el bloque actúan el peso mg, la fuerza normal N que es igual al peso, y la fuerza de rozamiento F_k entre el bloque y el plano sobre el cual desliza. Si el bloque desliza con velocidad constante la fuerza aplicada F será igual a la fuerza de rozamiento por deslizamiento F_k.



Podemos investigar la dependencia de F_k con la fuerza normal N. Veremos que si duplicamos la masa m del bloque que desliza colocando encima de éste otro igual, la fuerza normal N se duplica, la fuerza F con la que tiramos del bloque se duplica y por tanto, F_k se duplica.

La fuerza de rozamiento por deslizamiento F_k es proporcional a la fuerza normal N.

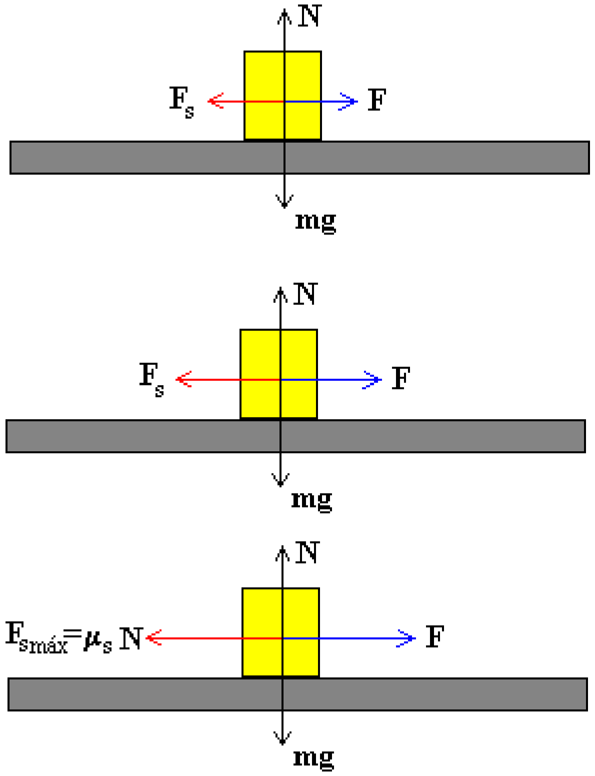
$F_k = m_k N$

La constante de proporcionalidad m_k es un número sin dimensiones que se denomina coeficiente de rozamiento cinético.

El valor de m_k es casi independiente del valor de la velocidad para velocidades relativas pequeñas entre las superficies, y decrece lentamente cuando el valor de la velocidad aumenta.

Fuerza de rozamiento estático

También existe una fuerza de rozamiento entre dos objetos que no están en movimiento relativo.



Como vemos en la figura, la fuerza *F* aplicada sobre el bloque aumenta gradualmente, pero el bloque permanece en reposo. Como la aceleración es cero la fuerza aplicada es igual y opuesta a la fuerza de rozamiento F_s.

$F=F_s$

La máxima fuerza de rozamiento corresponde al instante en el que el bloque está a punto de deslizar.

$F_{s\,máx}=m_sN$

La constante de proporcionalidad m_s se denomina coeficiente de rozamiento estático.

Los coeficientes estático y cinético dependen de las condiciones de preparación y de la naturaleza de las dos superficies y son casi independientes del área de la superficie de contacto.

Tablas de valores de los coeficientes

- Coeficientes de rozamiento por deslizamiento para diferentes materiales

Superficies en contacto	m_k
Acero sobre acero	0.18
Acero sobre hielo (patines)	0.02-0.03
Acero sobre hierro	0.19
Hielo sobre hielo	0.028
Patines de madera sobre hielo y nieve	0.035
Goma (neumático) sobre terreno firme	0.4-0.6
Correa de cuero (seca) sobre metal	0.56
Bronce sobre bronce	0.2
Bronce sobre acero	0.18
Roble sobre roble en la dirección de la fibra	0.48

Fuente: Koshkin N. I., Shirkévich M. G.. *Manual de Física Elemental*. Editorial Mir 1975.

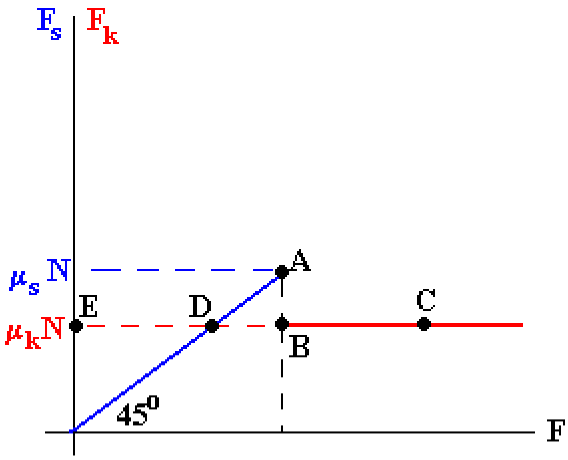
- Coeficientes de rozamiento estático y cinético

Superficies en contacto	m_s	m_k
Cobre sobre acero	0.53	0.36
Acero sobre acero	0.74	0.57
Aluminio sobre acero	0.61	0.47
Caucho sobre concreto	1.0	0.8
Madera sobre madera	0.25-0.5	0.2
Madera encerada sobre nieve húmeda	0.14	0.1
Teflón sobre teflón	0.04	0.04
Articulaciones sinoviales en humanos	0.01	0.003

Fuente: Serway R. A.. *Física*. Editorial McGraw-Hill. (1992)

Comportamiento de un cuerpo que descansa sobre un plano horizontal

Dibujemos una gráfica en la que en el eje horizontal representamos la fuerza *F* aplicada sobre el bloque y en el eje vertical la fuerza de rozamiento.



1. Desde el origen hasta el punto A la fuerza *F* aplicada sobre el bloque no es suficientemente grande como para moverlo. Estamos en una situación de equilibrio estático

   $F= F_s<m_sN$

   En el punto A, la fuerza de rozamiento estático F_s alcanza su máximo valor m_sN

   $F= F_{s\ máx}=m_sN$

2. Si la fuerza *F* aplicada se incrementa un poquito más, el bloque comienza a moverse. La fuerza de rozamiento disminuye rápidamente a un valor menor e igual a la fuerza de rozamiento por deslizamiento, $F_k=m_kN$

   Si la fuerza *F* no cambia, punto B, y permanece igual a $F_{s\ máx}$ el bloque comienza moviéndose con una aceleración

   $a=(F-F_k)/m$

Si incrementamos la fuerza *F*, punto C, la fuerza neta sobre el bloque F-F_k se incrementa y también se incrementa la aceleración.

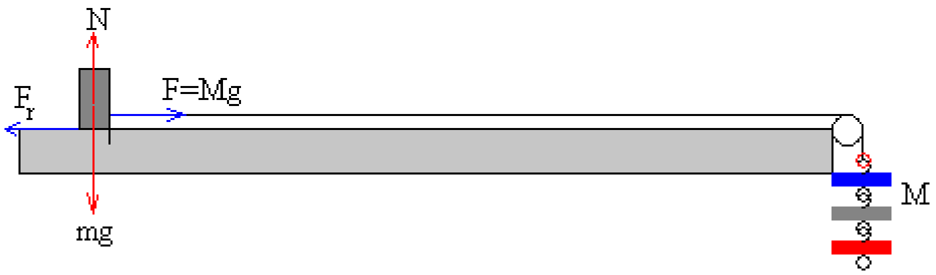
En el punto D, la fuerza *F* aplicada es igual a F_k por lo que la fuerza neta sobre el bloque será cero. El bloque se mueve con velocidad constante.

En el punto E, se anula la fuerza aplicada *F*, la fuerza que actúa sobre el bloque es - F_k, la aceleración es negativa y la velocidad decrece hasta que el bloque se para.

Experiencia

Un bloque de masa *m* descansa sobre un plano horizontal, el bloque está unido mediante un hilo inextensible y de peso despreciable que pasa por una polea a un platillo sobre el que se depositan pesas. Vamos a estudiar el comportamiento del bloque y a realizar medidas del coeficiente estático y cinético.

Medida del coeficiente estático



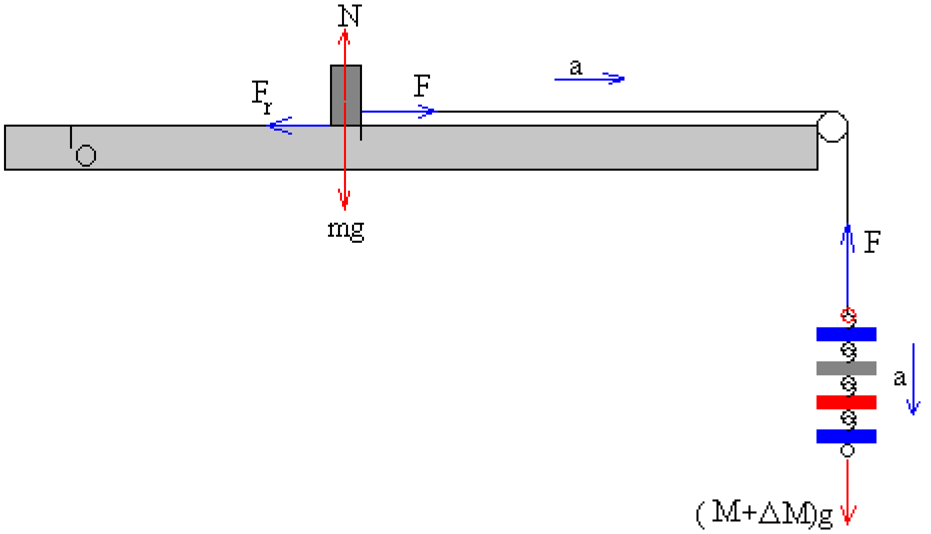
Se van colocando pesas en el platillo y el bloque permanece en reposo. La fuerza de rozamiento vale

$F_r=Mg$

donde *M* es la masa de las pesas que contiene el platillo

Cuando va a empezar a deslizar, la fuerza de rozamiento F_r adquiere el valor máximo posible $m_sN=m_smg$

Medida del coeficiente cinético



Añadimos una pesa más ? *M* y el bloque empieza a deslizar, desplazándose una longitud *x* en un *t*. La aceleración es

Aplicamos la segunda ley de Newton al movimiento del bloque

$F-F_r=ma$
$F_r=\mu_k \cdot N$
$N=mg$

Aplicamos la segunda ley de Newton al movimiento del platillo y las pesas

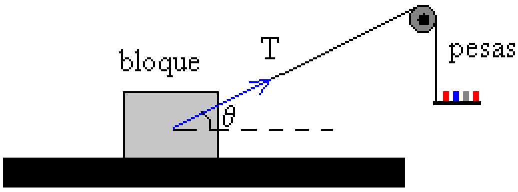
$(M+? M)g-F=(M+? M)a$

Despejamos el coeficiente cinético μ_k

El mejor angulo

La novedad de este ejemplo, es que la reacción del plano no es constante sino que cambia con el ángulo que forma la fuerza aplicada con la horizontal.

Sea un bloque rectangular de masa *m* que está situado sobre un plano horizontal. Si aplicamos una fuerza *T* que hace un ángulo *?* con la horizontal, ¿cuál debe ser el valor de dicha fuerza para que el bloque empiece a moverse?. Más aún, determínese el valor del ángulo *?* para el cual la fuerza aplicada es mínima.



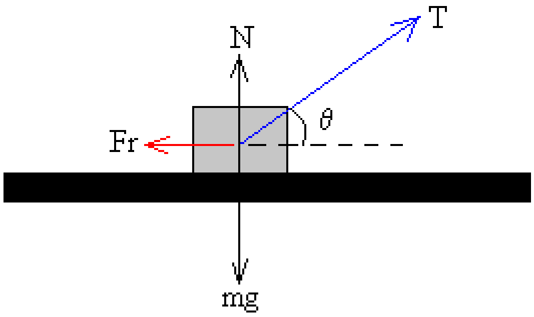
Habitualmente, los estudiantes tienden a identificar la reacción del plano o la fuerza normal *N* hacia arriba que ejerce el plano sobre el bloque, con el peso *mg* si el plano es horizontal, y con la componente perpendicular del peso *mg*cos*?* si el plano está inclinado un ángulo *?*. Vamos a ver en este ejemplo, que el valor de la reacción del plano *N* depende de las otras fuerzas que se aplican sobre el bloque.

Descripción de la experiencia

En el análisis de este problema solamente estamos interesados en la situación de equilibrio, mientras el bloque está en reposo sobre el plano horizontal, pero no estamos directamente interesados en el movimiento del bloque una vez que ha empezado a deslizar, no obstante, escribiremos las ecuaciones del movimiento.

- **El bloque en reposo**

Dibujamos las fuerzas que actúan sobre el bloque

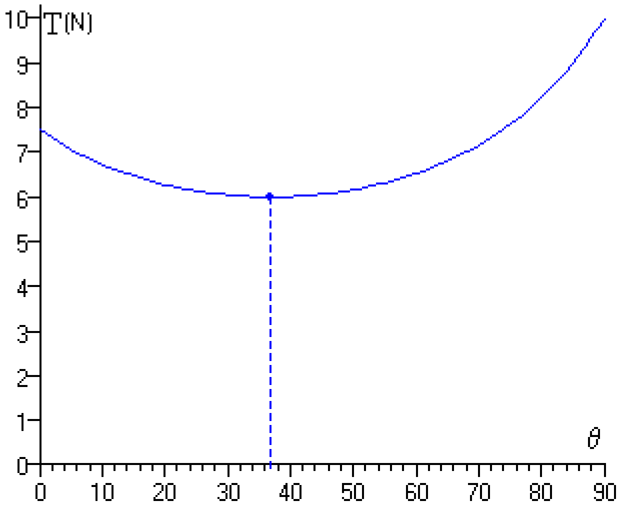


- El peso *mg*
- La fuerza aplicada *T* que forma un ángulo *?* con la horizontal.
- La fuerza *N* que ejerce el plano sobre el bloque
- La fuerza de rozamiento F_r.

Las condiciones de equilibrio se escriben

$T\cos ?-F_r=0$
$T\text{sen} ?+N-mg=0$

Cuando el bloque empieza a deslizar la fuerza de rozamiento alcanza un valor máximo dado por $F_r=\mu_s N$, siendo μ_s el coeficiente de rozamiento estático, y $N=mg-T\text{sen}?$



En esta situación, despejamos *T* del sistema de ecuaciones.

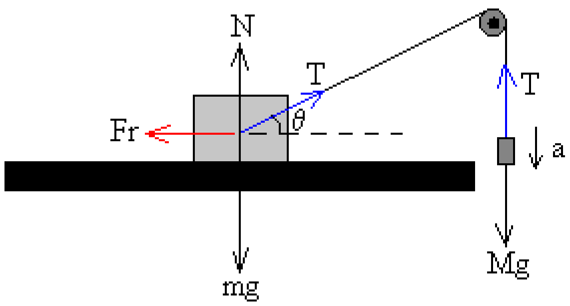
T es una función del ángulo *?*.

Esta función tiene un mínimo, el mejor ángulo para arrastrar el bloque, que se obtiene derivando *T* respecto de *?*, e igualando a cero.

El valor de la fuerza mínima *T* que tenemos que aplicar al cuerpo para que empiece a deslizar vale

- **El bloque en movimiento**

Una vez que el bloque empieza a moverse, la fuerza de rozamiento disminuye, ya que el coeficiente de rozamiento cinético μ_k es, de ordinario, menor que el estático μ_s. En la simulación hemos tomado arbitrariamente la siguiente relación μ_k=0.9 μ_s.



- Movimiento del bloque

  El bloque está en equilibrio en la dirección vertical

  *T*sen?+*N*-*mg*=*0*

  El bloque se mueve con aceleración *a* a lo largo del plano

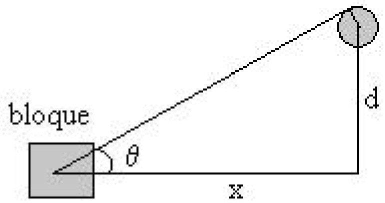
  *T*cos?-F_r=*ma* con F_r= μ_k·*N*

- Movimiento de las pesas

  Las pesas se mueven con aceleración *a*, ya que el platillo está unido al bloque mediante una cuerda inextensible que pasa por la polea.

  Mg-*T*=*Ma*

Se despeja *a* de las ecuaciones del movimiento del sistema bloque-pesas.

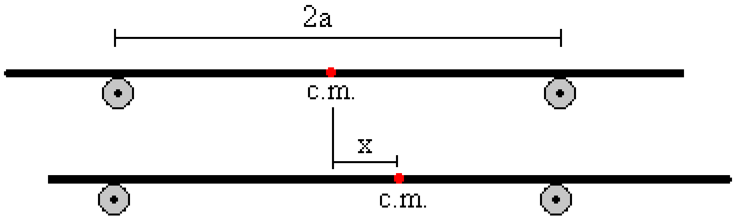


La aceleración *a* ya no es constante, depende del ángulo *?* que hace la cuerda con la horizontal, y este ángulo depende a su vez de la posición del bloque *x*.

Para determinar la posición *x* del bloque en función del tiempo *t*, hemos de resolver una ecuación diferencial por procedimientos numéricos con *t*=0, *x*=x_0, *v*=0.

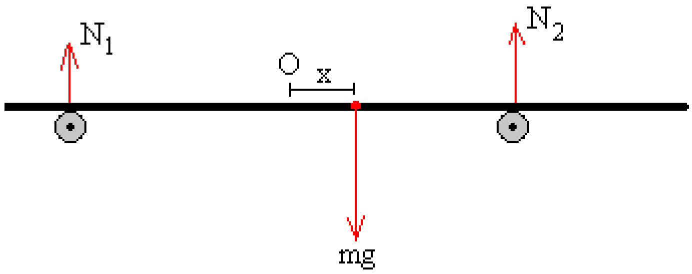
Oscilaciones de una placa horizontal apoyada en dos rodillos que giran

Una placa de masa *m*, descansa horizontalmente sobre dos rodillos que giran rápidamente, separadas una distancia 2*a*. El coeficiente de rozamiento entre cada una de las rodillos y la placa es *μ*. El centro de masas (c.m.) está situado entre las rodillos, equidistante de las mismas.



Descripción

Supongamos que el c.m. de la placa se desplaza *x* de la posición de equilibrio, hacia la derecha. Dibujamos las fuerzas que actúan sobre la placa y aplicamos las condiciones de equilibrio



1. Equilibrio de las fueras en la dirección vertical

   $N_1+N_2=mg$

   donde N_1 es la fuerza que ejerce el rodillo izquierdo y N_2 es la fuerza que ejerce el rodillo derecho sobre la placa.

2. El momento total respecto del cualquier punto debe ser cero. Si elegimos el punto de contacto de la placa con el rodillo derecho, como origen.

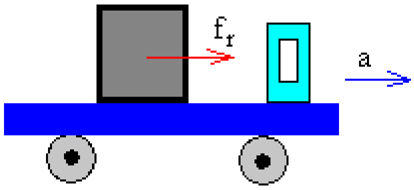
   $-N_1 \cdot 2a+mg \cdot (a-x)=0$

Despejamos N_1 y N_2 en este sistema de dos ecuaciones

Las fuerzas de rozamiento

Consideremos el efecto de las fuerzas de rozamiento

Las fuerzas de rozamiento en el punto de contacto de los rodillos y la placa son $f_1=\mu\cdot N_1$ y $f_2=\mu\cdot N_2$ y sus direcciones son las del movimiento de las ruedas.



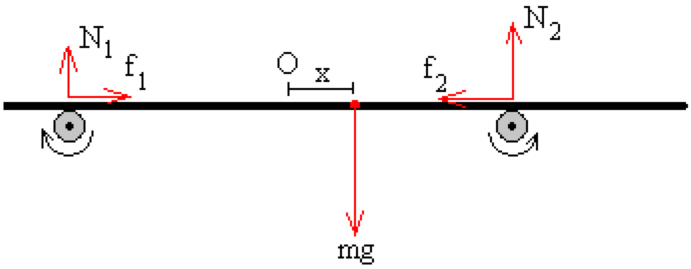
Para entender mejor el sentido de estas dos fuerzas, nos fijaremos que cuando un camión, que trasporta una caja de masa m sobre la plataforma, arranca, la fuerza de rozamiento $f_r=ma$ entre la caja y la plataforma hace que la caja permanezca en reposo sobre la plataforma, siempre que se cumpla que $f_r< \mu_s\cdot N$.

Cuando la aceleración a del camión es tal que f_r alcanza el valor máximo $\mu_s\cdot N$, la caja empieza a deslizar sobre la plataforma. La fuerza de rozamiento vale $f_r= \mu_k\cdot N$. La aceleración del camión es a y la aceleración de la caja es $a_c=f_r/m= \mu_k\cdot g$. La aceleración de la caja respecto del conductor del camión es a_c-a.

Ecuaciones del movimiento de la placa

Examinamos los distintos casos que pueden producirse.

1. **Las dos ruedas giran hacia dentro.**



Las fuerzas de rozamiento f_1 y f_2 tienen los sentidos indicados en la figura. La fuerza horizontal que actúa sobre la placa es

$f=f_1-f_2= \mu\cdot N_1- \mu\cdot N_2=-(\mu mg/a)\cdot x$

La fuerza f que actúa sobre la placa es proporcional a su desplazamiento x y de sentido contrario a éste. La ecuación diferencial del movimiento es

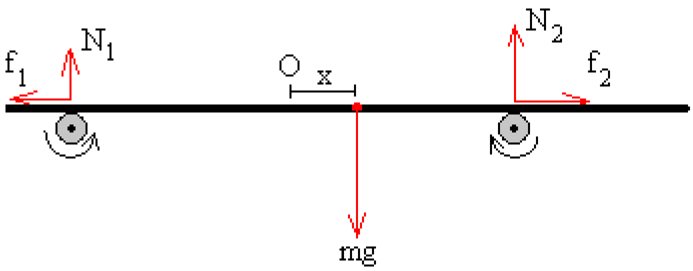
La placa describe un movimiento oscilatorio de frecuencia $?^2=\mu g/a$, y de periodo P

La solución de esta ecuación diferencial es

$x=A\cdot \text{sen}(?\,t+f\,)$

La amplitud A y la fase inicial f se determinan a partir de las condiciones iniciales.

2. **Las ruedas giran hacia fuera**



Las fuerzas de rozamiento f_1 y f_2 tienen los sentidos indicados en la figura. La fuerza horizontal que actúa sobre la placa es

$f=f_2-f_1= \mu\cdot N_2- \mu\cdot N_1=(\mu mg/a)\cdot x$

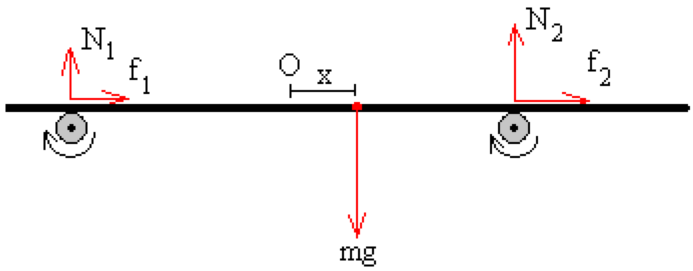
La fuerza f que actúa sobre la placa es proporcional a su desplazamiento x, pero del mismo de sentido. La ecuación diferencial del movimiento es

La solución de esta ecuación diferencial es

$x=A\cdot \exp(?\,t)+B\cdot \exp(-?\,t)$

donde A y B se determinan a partir de las condiciones iniciales

3. **Las ruedas giran en el mismo sentido, por ejemplo, hacia la derecha.**



Las fuerzas de rozamiento f_1 y f_2 tienen los sentidos indicados en la figura. La fuerza horizontal que actúa sobre la placa es

$f=f_2+f_1= \mu \cdot N_2+ \mu \cdot N_1=\mu mg$

La fuerza *f* es constante, la aceleración de la placa es constante, su movimiento es uniformemente acelerado

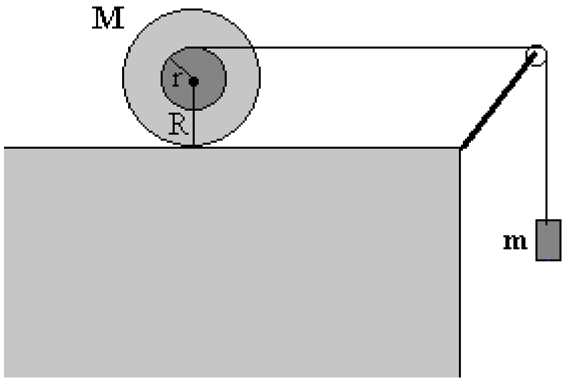
La solución es

$x=x_0+v_0 \cdot t+\mu g t^2/2$

donde x_0 y v_0 son la posición y la velocidad en el instante t=0.

La fuerza de rozamiento de rodadura

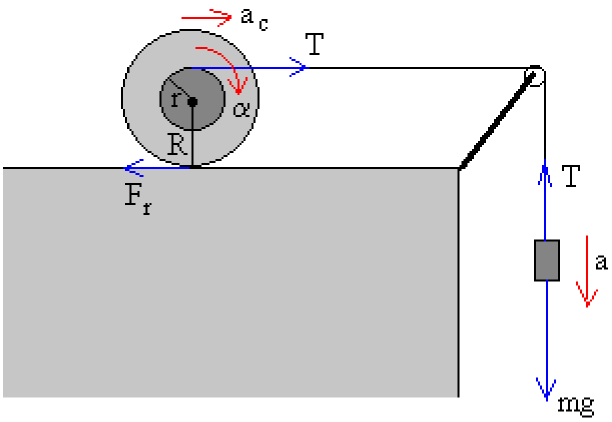
Vamos a resolver un problema que nos va a permitir profundizar acerca de la denominada fuerza de rozamiento de rodadura.



Un cilindro de masa *M* y radio *r* tiene enrollada una cuerda en una hendidura de radio *r*<*R*, y de masa despreciable que la hace rodar sin deslizar a lo largo de un plano horizontal. La cuerda pasa por una polea y de su extremo cuelga un bloque de masa *m*. Determinar la aceleración del bloque y su velocidad cuando haya descendido *h* metros partiendo del reposo.

Dinámica

Tenemos que plantear las ecuaciones de la dinámica de dos cuerpos, el bloque y el cilindro.



Sobre el bloque actúan dos fuerzas la tensión de la cuerda y el peso. La ecuación del movimiento es

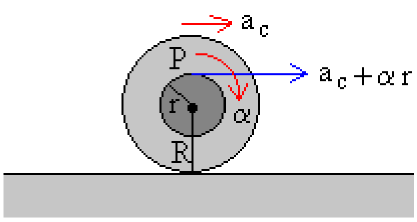
$mg-T=ma$

El cilindro rueda sin deslizar sobre el plano horizontal. Escribimos las ecuaciones correspondientes al movimiento de traslación y al movimiento de rotación

$T-F_r=ma_c$

$RF_r+rT=I_c a$

El momento de inercia de un cilindro es $I_c=MR^2/2$. La condición de rodar sin deslizar establece que $a_c=a\ R$



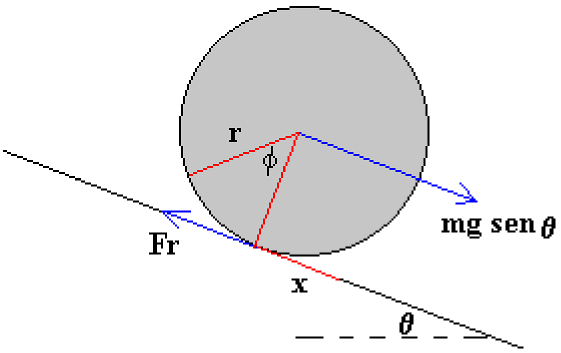
Nos queda finalmente establecer la relación entre la aceleración del bloque a y la aceleración del centro de masas del cilindro a_c. La aceleración del punto P es la suma de la aceleración debida al movimiento de traslación a_c y la aceleración debida al movimiento de rotación $a\ r$

$$a = a_c + \alpha r = a_c\left(1+\frac{r}{R}\right)$$

- **Trabajo de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo**

El trabajo total de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo que rueda es la suma del trabajo en el movimiento de traslación más el trabajo en el movimiento de rotación

$W=W_t+W_r$



El trabajo en el movimiento de traslación es

$W_t=(mgsenq - F_r)x=mgh-F_rx$

El trabajo en el movimiento de rotación es

$W_r=Mf =F_rRf =F_rx$

El trabajo total es

$W=mgh$

Como vemos la fuerza de rozamiento en el movimiento de rodar produce dos trabajos de la misma magnitud pero de signos opuestos. Esta es la razón por la que no tenemos que incluir el trabajo de la fuerza de rozamiento en el balance de energía.

El trabajo de la resultante de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo modifica su energía cinética.

$$mgh=\frac{1}{2}mv_c^2+\frac{1}{2}I_c\omega^2$$

Viscosidad en fluidos

En esta página, se describe el movimiento vertical de una esfera de masa *m* y de radio *R*, en el seno de un fluido viscoso, en régimen laminar.

Descripción

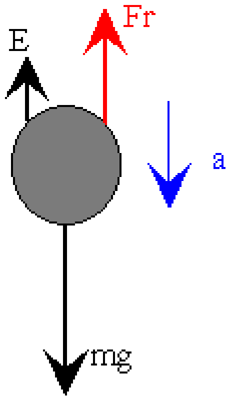
La esfera se mueve bajo la acción de las siguientes fuerzas: el peso, el empuje (se supone que el cuerpo está completamente sumergido en el seno de un fluido), y una fuerza de rozamiento que es proporcional a la velocidad de la esfera (suponemos que el flujo se mantiene en régimen laminar).

El peso es el producto de la masa por la aceleración de la gravedad *g*. La masa es el producto de la densidad del material $?_e$ por el volumen de la esfera de radio *R*.

$$mg = \rho_e \frac{4}{3}\pi R^3 g$$

De acuerdo con el principio de Arquímedes, el empuje es igual al producto de la densidad del fluido $?_f$, por el volumen del cuerpo sumergido, y por la aceleración de la gravedad.

$$E = \rho_f \frac{4}{3}\pi R^3 g$$



La fuerza de rozamiento es proporcional a la velocidad, y su expresión se denomina ley de Stokes

$$F_r = 6\pi R\eta v$$

donde *h* es la viscosidad del fluido.

La ecuación del movimiento será, por tanto,

$$ma = mg - E - F_r$$

La velocidad límite, se alcanza cuando la aceleración sea cero, es decir, cuando la resultante de las fuerzas que actúan sobre la esfera es cero.

$$mg - E = F_r$$

Despejamos la velocidad límite v_l

$$v_l = \frac{2g(\rho_e - \rho_f)R^2}{9\eta}$$

La ecuación del movimiento

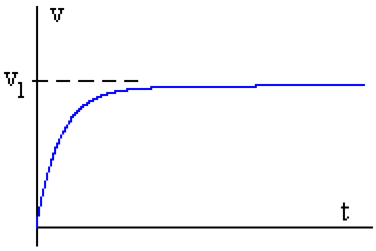
$$m\frac{dv}{dt} = F - kv$$

donde F es la diferencia entre el peso y el empuje $F=mg-E$, y k=6*pRh*

Integramos la ecuación del movimiento para obtener la velocidad de la esfera en función del tiempo.

$$\int_0^v \frac{dv}{\frac{F}{m} - \frac{k}{m}v} = \int_0^t dt$$

Obtenemos



Esta ecuación nos dice que se alcanza la velocidad límite v_l después de un tiempo teóricamente infinito. Si representamos v en función del tiempo t la gráfica tienen una asíntota horizontal en $v=v_l$.

Integramos la expresión de la velocidad en función del tiempo para obtener la posición x del móvil en función del tiempo t. Suponemos que la esfera parte del origen x=0, en el instante inicial t=0.

$$x = \int_0^t v\,dt$$

se obtiene

$$x = v_l\left(t - \frac{m}{k}\left(1 - \exp\left(\frac{-kt}{m}\right)\right)\right)$$

Dado que la exponencial tiende a cero rápidamente a medida que transcurre el tiempo, vemos que al cabo de un cierto tiempo, el desplazamiento x del móvil será proporcional al tiempo t.

Las diferencias entre el movimiento de un cuerpo en caída libre y cuando cae en el seno de un fluido viscoso se pueden resumir en el siguiente cuadro

Caída libre	**En el seno de un fluido viscoso**
La velocidad es proporcional al tiempo	La velocidad tiende hacia un valor constante
El desplazamiento es proporcional al cuadrado del tiempo.	El desplazamiento es proporcional al tiempo.

Medida de viscosidad

Supondremos que la bolita ha alcanzado la velocidad límite constante cuando pasa por la marca superior, momento en el que se empieza a contar el tiempo. El valor de dicha velocidad se obtiene dividiendo el desplazamiento *x* entre el tiempo en el que tarda el móvil en desplazarse *t*.

$$v_l = \frac{x}{t}$$

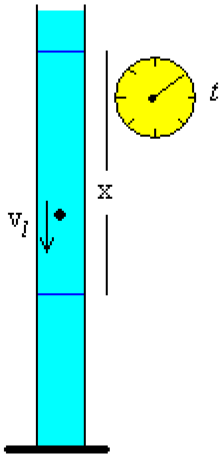
Como se ha explicado en la página anterior, la expresión de la velocidad límite se obtiene cuando la resultante de las fuerzas que actúan sobre la esfera es cero.

$$v_l = \frac{2g(\rho_e - \rho_f)R^2}{9\eta}$$

Antes de realizar el cálculo, se deberá expresar todos los datos en el Sistema Internacional de unidades de medida:

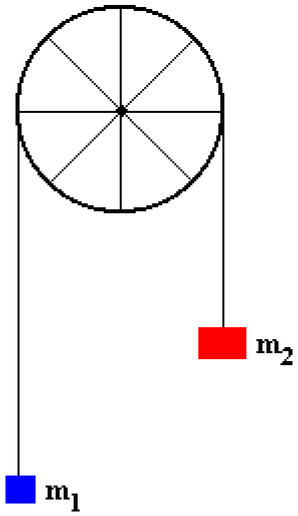
- La velocidad límite v_l en m/s,
- La densidad de la esfera $?_e$ y del fluido $?_f$ en kg/m^3 (se proporciona el dato de la densidad en g/cm^3).
- El radio *R* de la esfera en m (se proporciona el valor del diámetro en mm).
- Finalmente, se despejará la viscosidad *h* y se expresará en las unidades correspondientes.

Ejemplo:



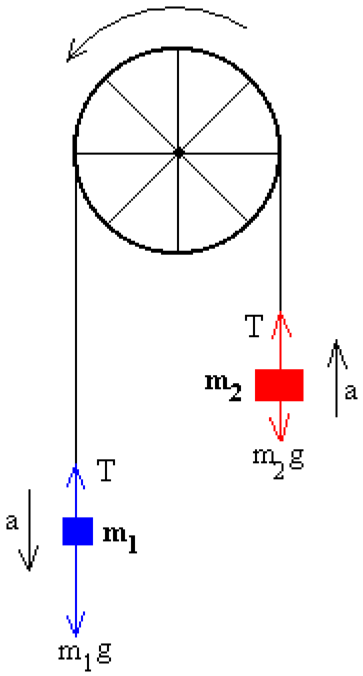
Empleamos una bolita de plomo ($?_e$=11.35 g/cm^3) de 3.7 mm de diámetro o R=1.85 mm, y la dejamos caer en una columna de aceite de densidad $?_f$=0.88 g/cm^3). El tiempo que tarda la esfera en desplazarse x=50 cm es de t=4.57 s. Calcular la viscosidad ?.

La máquina de Atwood



La máquina de Atwood es un clásico ejemplo de la aplicación de la segunda ley de Newton. Como vemos en la figura, consta de dos cuerpos de masas m_1 y m_2 unidos por una cuerda que pasa por una polea. En la versión más simplificada, se supone que la cuerda es inextensible y sin peso, y que la polea tiene masa despreciable y gira sin rozamiento en el eje.

En la página titulada "Dinámica de rotación y balance energético", se estudia la máquina de Atwood teniendo en cuenta la masa de la polea.



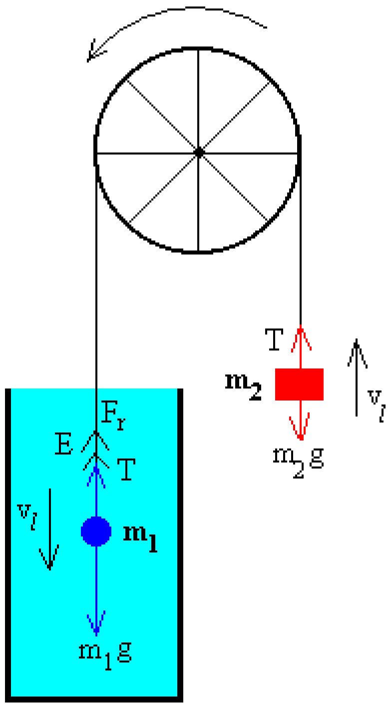
En esta figura, se representan las fuerzas que actúan sobre cada una de las masas, y la aceleración a, suponiendo que $m_1>m_2$. Si T es la tensión de la cuerda, la segunda ley de Newton para cada una de las dos cuerpos se escribe

$m_1a=m_1g-T$
$m_2a=T-m_2g$

En este sistema dos ecuaciones, despejamos la aceleración a

Medida de la viscosidad de un fluido

El cuerpo de masa m_1 es una pequeña esfera de radio R que cae en el seno de un fluido de densidad ?, cuya viscosidad ? deseamos determinar.



Las fuerzas que actúan sobre m_1 son:

- El peso m_1g
- La tensión de la cuerda T
- La fuerza de empuje E, que por el principio de Arquímedes vale
- La fuerza de rozamiento F_r. Según la ley de Stokes vale F_r=6pR·?·v, siempre que el número de Reynolds sea menor que la unidad, Re<1

Cuando la masa m_1 cae, alcanza rápidamente una velocidad límite constante Midiendo con un cronómetro el tiempo t, que tarda la esfera en descender una altura x, obtenemos la velocidad límite $v_l=x/t$. Conocida la velocidad límite calculamos la viscosidad ? del fluido.

Cuando la velocidad es constante o la aceleración es cero, las ecuaciones del movimiento de los dos cuerpos se escriben

m_1g-T-E-F_r=0
T-m_2g=0

Despejamos la velocidad límite v_l de fuerza de rozamiento F_r.

En la experiencia, vamos cambiando la masa m_2 y medimos la velocidad límite v_l. Si representamos v_l en función de m_2 obtendremos un conjunto de puntos que se situarán próximos a la recta

cuya pendiente es

Cuando la masa m_2 supera un valor límite, la esfera asciende en vez de descender. El valor de m_2 para el cual la velocidad límite v_l es cero es