Universidad de Murcia

Grado en Matemáticas

TRABAJO FIN DE GRADO

Matemáticas y ajedrez

Roberto Pérez González

Junio de 2015

Matemáticas y ajedrez

Roberto Pérez González

dirigido por

Víctor Jiménez López

Resumen

Este trabajo trata de poner de relieve la simbiosis que existe entre las matemáticas y el ajedrez. El objetivo que nos hemos marcado ha sido muy simple: dar una visión general de cómo el ajedrez ha convivido a lo largo de toda su vida con las matemáticas y como éstas han dejado sentir su peso en la larga carrera de este juego, deporte, arte o ciencia, casi desde que naciera allá por el siglo VI (tal es la controversia sobre el origen del ajedrez que todavía hoy los estudiosos no se ponen de acuerdo al respecto). Buena muestra de la relevancia de estas conexiones es el número de diferentes áreas de las matemáticas que, de un modo u otro, han interactuado con el ajedrez: a través de las páginas de nuestro trabajo, utilizaremos instrumentos y herramientas tan variopintas como la teoría de grafos, la combinatoria, la teoría de juegos e incluso ¡el álgebra moderna!

Antes de entrar en materia nos ha parecido conveniente proveer al lector de una breve introducción donde se explica la notación ajedrecística empleada; podrá seguir así, sin dificultad, las explicaciones en las que se haga mención a algún detalle técnico del juego. En todo caso, no se espera de él mucho más que un somero conocimiento de sus reglas básicas. A continuación, como ilustración y entrenamiento, mostramos un curioso problema de ajedrez cuya solución, aunque sencilla, exige ya usar un primer recurso matemático: la paridad.

El primer capítulo se centra en esa pieza cuyo movimiento tantos quebraderos de cabeza da a los que se acercan al ajedrez por ver primera: el caballo. Tal vez por la peculiaridad de su salto, hasta auténticas leyendas de las matemáticas como Euler (sección 1.1) se han interesado en investigar dicho movimiento. Era pues casi obligado comenzar nuestro trabajo ocupándonos de él y así, en el primer capítulo, abordamos en toda su generalidad (con el auxilio de la teoría de grafos) el célebre problema del tour del caballo cerrado, caracterizando qué dimensiones ha de tener un tablero para que dicho tour sea factible (teorema 1.4.12).

Como es bien sabido, cuando Cantor formalizó la noción del infinito, la idea de que algo no termina, el rumbo de las matemáticas cambió para siempre. A lo largo del grado de Matemáticas se lidia con él de diversas maneras y en la práctica totalidad de las materias. Más sorprendente resultará, seguramente, descubrir que jugó un papel decisivo para resolver una controversia práctica sobre las reglas del ajedrez de torneo a principios del siglo XX. En concreto, como veremos en el segundo capitulo, todo un campeón del mundo de ajedrez y a su vez matemático, Max Euwe, demostró (ver el teorema 2.2.2) que si se aplicaban estrictamente las normas que la Federación Internacional de Ajedrez (FIDE) fijaba por entonces, podía haber situaciones en las que una partida no acabara nunca. Curiosamente, Euwe demostró su afirmación explotando las propiedades de una sucesión de ceros y unos muy especial que, sin él saberlo y definida de un modo aparentemente diferente (la proposición 2.1.4 muestra diversas formas de construir esta sucesión) ya se había usado en contextos matemáticos muy distintos. Max Euwe, con su demostración en 1929, forzó a la FIDE a cambiar la normativa y expulsó para siempre al infinito del juego práctico. Nosotros iremos un poco más allá y, aprovechando un refinamiento que Marston Morse y Gustav Hedlund obtuvieron de los resultados de Euwe, mostraremos que es posible construir partidas infinitas incluso reduciendo de tres a dos el número de repeticiones que las reglas de la FIDE permitían (teorema 2.3.1). Por lo que sabemos, este último resultado no aparece mencionado en la literatura.

Del ajedrez suele decirse que es un juego de reyes y el rey de los juegos. Como corresponde a su aristocrática naturaleza, es de justicia que fuera él precisamente, y no cualquier otro, el que inspirara el nacimiento de la teoría de juegos, y así lo mostraremos en el tercer capítulo, que girará en torno a la piedra filosofal del ajedrez: ¿es éste decidible? En concreto, lo que nos planteamos aquí es si en una posición dada (por ejemplo la inicial) se tiene exactamente una de las siguientes tres situaciones: a) las blancas tienen una estrategia ganadora; b) las negras tienen una estrategia ganadora; c) tanto las blancas como las negras tienen una estrategia de tablas. Por "estrategia" entendemos lo que, informalmente hablando, llamaríamos un "libro de instrucciones", es decir, una regla que a cada jugada del contrario asigne una respuesta, por asi decir, óptima. También responderemos a la siguiente cuestión: en caso de que un bando tenga la posición ganada, ¿el número de jugadas en que puede ganarse la partida está limitado por el de las posiciones posibles? Ambas cuestiones tienen respuesta positiva (véanse los teoremas 3.5.3 y 3.5.4) y son la base de un muy influyente trabajo publicado por Ernst Zermelo en 1913. En este artículo Zermelo permitía incluso que el número posible de posiciones fuera infinito y que la partida tuviese duración infinita, es decir, no necesariamente estuviera sometida a reglas artificiales para detener la contienda como las estudiadas en el capítulo anterior (¡así que ajedrez e infinito vuelven a entremezclarse en nuestro trabajo!); la única restricción es que el número de respuestas *legales* a cada posición dada sea finito. De este modo, el formalismo de Zermelo puede aplicarse no solo al ajedrez sino a una amplia variedad de situaciones, incluso de la vida real, en las que se dirime un conflicto entre dos bandos.

Buena prueba de la novedad y la trascendencia de los resultados de Zermelo es el hecho de que éste los hiciera públicos en el V Congreso Internacional de Matemáticos de 1912 celebrado en Cambridge, Reino Unido. Recordemos que el Congreso Internacional de Matemáticos es el más importante de la comunidad matemática, algo así como sus "Juegos Olímpicos". Se celebra cada cuatro años bajo el patrocinio de la Unión Matemática Internacional y es allí donde se entregan las tradicionales Medallas Fields, consideradas junto al Premio Abel, de mucha más reciente creación, como el equivalente a los Nobel en otras disciplinas. (En 2006 se celebró en Madrid, siendo ésta la única vez que se ha realizado en España. Fue una edición especialmente mediática, recordada porque Grigori Perelman, tras haber resuelto la conjetura de Poincaré —uno de los llamados siete problemas del milenio— rechazó la Medalla Fields con estas palabras: "El premio es irrelevante para mí. Cualquiera puede entender que si la prueba es correcta no se necesita ningún otro reconocimiento".) Curiosamente el artículo de Zermelo contenía un error, que König y Kalmár pusieron de relieve y enmendaron quince años más tarde. El nacimiento de la teoría de juegos suele datarse en 1944, a raíz de la publicación del libro *The theory of games behavior* de Von Neumann y Morgenstern, pero Von Neumann estaba perfectamente al tanto, e incluso intervino, en las discusiones que mantuvieron Zermelo, König y Kalmár, así que el verdadero padre de la disciplina (o el "abuelo", si se prefiere) es Zermelo, y el ajedrez fue su inspiración.

En el capítulo hemos mezclado las ideas de estos pioneros con enfoques más modernos, mostrando que los resultados de Zermelo son igualmente válidos incluso si permitimos que el número de respuestas legales sea infinito, aunque hay que añadir ahora la restricción de que la duración de la partida esté acotada, como ocurre en el ajedrez de competición. Por el contrario, hemos evitado considerar partidas de longitud transfinita (aportación de Kalmár) pues la complicación técnica aumenta considerablemente y los resultados carecen de interés práctico. En general, nuestro tratamiento del capítulo ha sido bastante original.

Por último, estableceremos un vínculo entre ajedrez y álgebra de la mano de Emanuel Lasker, un legendario campeón mundial que, como Euwe, también fue un matemático muy competente. En concreto, en el capítulo final enunciamos y demostramos un teorema de gran importancia en el álgebra conmutativa y la geometría algebraica, probado primero por Lasker para anillos de polinomios y generalizado más adelante por Emmy Noether a los hoy llamados anillos noetherianos: hablamos, evidentemente, del bien conocido teorema de Lasker-Noether 4.2.17 (de hecho se explicaba en la antigua licenciatura de Matemáticas, aunque no en el actual grado), que demostraremos a través de las proposiciones 4.2.18 y 4.2.19. Lasker fue un personaje de una extraordinaria talla intelectual; baste decir que mantuvo con Albert Einstein una larga y entrañable amistad. En el prólogo de una biografía póstuma de Lasker, aquél escribió: “Emanuel Lasker es sin duda una de las personas más interesantes que he conocido en los últimos años... Llegué a conocerlo bien gracias a muchos paseos donde intercambiábamos opiniones sobre los temas más variados, un intercambio bastante unilateral en el que recibí más de lo que di.” Como testimonio de la vigencia de las ideas de este gran jugador, valga la siguiente anécdota: hace apenas una semana, el 22 de junio, Hikaru Nakamura jugó con negras una sólida defensa inventada por Lasker y Magnus Carlsen, el actual campeón mundial, fue incapaz de derrotarlo. Un siglo más tarde, en los torneos de élite y en los textos de álgebra, las ideas de Lasker siguen tan vivas como el primer día.

Abstract

This work intends to highlight the deep symbiosis linking mathematics and chess. Our goal is very simple: to provide a panoramic vision of how chess and mathematics have coexisted and interplayed along the years, since this game, sport, art or science was born around the sixth century (there is still such a controversy about the origin of the chess game that, even nowadays, scholars do not agree about it). The number of different mathematical areas involved in this interaction is a clear sign of how relevant these connections are. Throughout this study we will use techniques and tools from graph theory, combinatorics, game theory and even modern algebra!

Before we get down to business, we provide the reader with a brief introduction where chess notation is explained; in this way we ensure that he will easily follow our explanations as far as a chess technical point is concerned. Anyway, we just expect from him a basic knowledge of the rules of the game. Then, as an example and by way of illustration, we will present a bizarre chess problem whose solution, if simple, does require using a mathematical trick: parity.

The first chapter will focus on the knight, the piece of this game whose move usually worries the beginners the most. Maybe because of its peculiarity, even mathematical legends like Euler (section 1.1) have investigated this move; hence it was almost compulsory to start this work with it. Specifically, in this chapter we deal (with the help of graph theory) with the famous closed knight's tour problem, characterizing the dimensions of the boards where such a tour is feasible (theorem 1.4.12).

As is well known, mathematics changed forever when Cantor formalized the notion of infinity. Mathematics deals with it in different levels and almost in every subject. Yet it may come as a surprise that it played a starring role in the solution of a practical controversy about chess tournament rules at the beginning of the twentieth century. Namely, in the second chapter we will see (theorem 2.2.2) how the chess champion and mathematician Max Euwe showed that a game could possibly never end if the regulations of the World Chess Federation (FIDE) were strictly applied. Euwe proved his affirmation using the properties of a remarkable zeros and ones sequence which, unknowingly to him and in apparently different formulations (proposition 2.1.4 shows some alternative ways to generate this sequence), had been used in other mathematical contexts. Thus Max Euwe, in 1929, forced FIDE to change the rules and banish infinity from the practical game. We will go further and, using a refinement of Euwe's results by Marston Morse and Gustav Hedlung, we will show that it is possible to build infinite games even when the number of repetitions allowed by FIDE rules at that time is reduced from three to two (theorem 2.3.1). As far as we know, this last result is not mentioned in the literature.

It is often said that chess is a game of kings and the king of games. It is then only fitting that it was the game which inspired the birth of game theory. We will address this fact on the third chapter, dealing with the grial of chess: is it decidable? More precisely, we wonder whether, if a position is given (the initial one, for instance), then exactly one of the following three alternatives must occur: a) White has a winning strategy; b) Black has a winning

strategy; c) both White and Black have a draw strategy. When we talk about "strategy" we refer to what, informally speaking, could be called an "instruction booklet", that is, a rule proving an ideal answer to any opponent's move. We will also consider the following problem: assume that one side has a winning position. Is the number of required moves to win the game bounded by that of possible positions? We will answer both questions in the affirmative (see theorems 3.5.3 and 3.5.4), and this is precisely the content of a very influential paper published by Ernst Zermelo in 1913. In his article Zermelo even considers the case when there is an infinite number of possible positions and the game has an infinite length, that is, no artificial draw rules to stop the game, as those mentioned in the previous chapter, are needed (so chess and infinity pair up in our study again!). The only restriction is that the number of legal answers in every given position must be finite. Moreover, Zermelo's formalism can be applied not only to chess but also to a variety of situations, even from real life ones, where two sides strive against each other.

A proof of the novelty and significance of Zermelo's results is the fact that he communicated them at the Fifth International Congress of Mathematicians in Cambridge, United Kindom, in 1912. This conference is the most important one among the mathematic community, a kind of "Olympic Games" of mathematics. It is held every four years under the support of the International Mathematical Union, and it is here where the traditional Field Medals (considered, along with the Abel Prize, as the equivalent to the Nobel Prize in mathematics) are awarded. (In 2006 it took place in Madrid, being this the only time that this meeting has been held in Spain. It is famously remembered because Grigori Perelman, after solving the Poincaré conjecture —one of the so-called Millennium Problems— rejected the Field medal. His words: "It is completely irrelevant for me. Everybody understands that if the proof is correct then no other recognition is needed.") Curiously enough, Zermelo's article contained a mistake that König and Kalmár highlighted and corrected fifteen years later. The origin of game theory is usually dated on 1944, the year when Von Neumann and Morgenstern published their book *Theory of games behavior*. However, Von Neumann was well aware of (and took part in) the correspondence between Zermelo, König and Kalmár: thus, we can very well say that Zermelo was the actual father of this discipline, being inspired by no other subject than chess itself.

Throughout the chapter we have combined the original ideas of these pioneers with those in more modern approaches, showing that Zermelo's results hold as well even if the number of legal answers is allowed to be infinite. A restriction, however, must be imposed: the length of a game must be bounded from above, as it happens, for instance, in chess tournaments. On the other hand, transfinite games, first studied by Kalmár, will not be considered here; substantial technical difficulties arise and the conclusions are of no practical consequence. Generally speaking, the treatment of this chapter has been pretty original.

Finally, we will establish a link between chess and algebra thanks to Emanuel Lasker, a legendary world champion who, like Euwe, was also a very proficient mathematician. Specifically, in the final chapter we will formulate and demonstrate a very important theorem in commutative algebra and algebraic geometry, first stated by Lasker in the case on polynomial rings, and then extended by Emmy Noether to the setting of so-called noetherian rings. We are speaking, of course, about the well-known Lasker-Noether theorem 4.2.17 (in fact, this topic was taught in the former degree in Mathematics at our faculty, but not in the present one); we will prove it by means of propositions 4.2.18 and 4.2.19. Lasker was a man of a very high intellectual calibre; suffice it to say he had a long and close friendship with Albert Einstein. In the preface of a Lasker posthumous biography, Einstein wrote: "Emmanuel Lasker is, without any doubt, one of the most interesting people I have got to know during the last years... I got to know him well thanks to all our walks where we used to exchange opinions about the most varied topics, a pretty unilateral exchange where I received more than I gave." As a testimony of the validity of the ideas of this great player, an anecdote is worth telling: just one week ago, the 22nd of June, Hikaru Nakamura played with black a solid defense invented by Lasker against Magnus Carlsen, the present world champion, and Carlsen was unable to defeat him. A century later, in elite tournaments and algebra texts, Lasker's ideas still remain very much alive.

Índice general

Introducción

Notación algebraica

Asumimos que el lector está familiarizado con las reglas básicas del ajedrez y tiene un poco de conocimiento de la estrategia del juego. El lector deberá, no obstante, poder seguir la notación de los movimientos de ajedrez, visualizando cada movimiento en el diagrama mostrado o colocando la posición en un tablero. En lo que sigue nos guiamos parcialmente por [9].

A lo largo de la historia ha habido diversos tipos de notaciones (algunas de ellas no muy ortodoxas) pero la más común hoy en día y la que usaremos a continuación es la "notación algebraica", llamada así debido a que es un sistema de coordenadas quien denota el nombre de cada casilla del tablero. A continuación explicamos cómo se usa este sistema de notación a partir de la posición inicial del tablero:

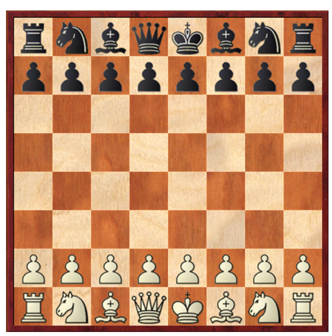


Figura 1: Posición inicial de una partida de ajedrez.

Cada escaque del tablero de ajedrez 8×8 está unívocamente determinado por su fila y su columna. Las filas están numeradas del 1 al 8 y las columnas de la letra "a" a la letra "h". Inicialmente, las filas 1 y 2 están ocupadas por las piezas y peones blancos, mientras que el ejército negro se ubica en las filas 7 y 8. Ambas damas se sitúan en la columna "d" y los dos reyes en la columna "e". Así, viendo el tablero desde el bando blanco (como los diagramas aquí presentes), las filas siguen un orden ascendente mientras que las columnas siguen un orden de izquierda a derecha. Describiremos a una casilla por su columna seguido de su fila.

Por ejemplo, en la figura 2, por parte de las Blancas el rey se encuentra en c3, la torre en e1 y los dos peones en e6 y g5. Las Negras en cambio sitúan en a3, b3 sus peones, su alfil de casillas negras en e7 y su monarca en b5.

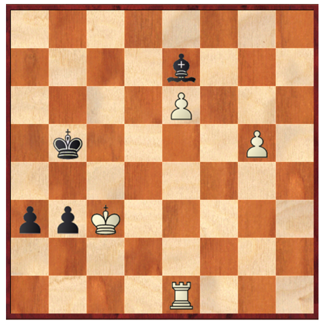


Figura 2: Posición final de la última partida del match por el Campeonato del mundo de ajedrez de 2014, disputado en Sochi (Rusia) del 7 al 28 de noviembre. Con Blancas el hoy campeón del mundo Magnus Carlsen y con negras Vishy Anand, su antecesor en el trono.

Nos referiremos a cada pieza (excepto al peón[1]) por su inicial: R, D, T, A, C. Para denotar un movimiento de ajedrez, escribiremos primero el nombre de cada pieza y su casilla de destino, entrelazando el signo "×" si el movimiento es una captura de otra pieza. Añadiremos a un movimiento el signo "+" si este da jaque al rey contrario y "#" si es mate.

Así, si la partida anterior hubiera continuado, las Negras podrían capturar con su alfil el peón de g5 mediante el movimiento A×g5. Sin embargo las Blancas responderían con Te5+, y tras cualquier movimiento del rey negro seguiría T×g5 mandando el alfil a la caja.

Un problema de ajedrez

Una vez dominada la notación algebraica, pasamos a mostrar un primer problema ajedrecístico en el que las matemáticas hacen ya acto de presencia gracias a la paridad. Fue compuesto (en una versión ligeramente diferente) por el húngaro Ottó Bláthy en 1922. El reto es: ¿cómo deben de jugar las Blancas para dar jaque mate a las Negras en el menor número posible de jugadas?

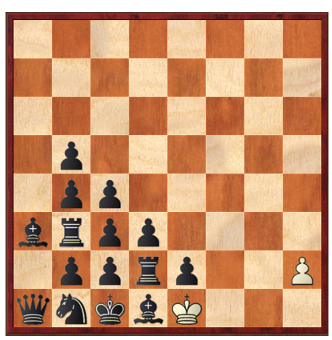


Figura 3: Juegan blancas y ganan.

El desequilibrio material es de lo más extremo, ya que las Negras conservan todas sus piezas excepto un caballo, pero las Blancas ganan con su solo peón.

[1]Para referirnos al peón simplemente usaremos la notación algebraica de la casilla en la que éste se encuentra.

Todas las piezas negras están paralizadas excepto la dama, que puede desplazarse entre a1 y a2. Las Blancas deben tener presente que si su monarca mueve el peón negro de e2 será sacrificado coronando y las piezas negras se liberarán acabando con cualquier opción de victoria blanca. Por tanto, las Blancas deben mover únicamente el peón y la pieza a la que éste promocione. Con eso bastaría para hacer tablas, pero ¿es posible ganar?

Sí. Para ello las Blancas deben promocionar su peón a caballo, capturar el peón de b5 y c4, y entonces dar mate con Cxb3 cuando la Dama esté en la casilla a1.

Figura 4: Posición tras la coronación del peón donde las Negras tienen que mover Da1.

Observemos desde h8 hasta b3 hay un número impar de movimientos para el caballo, pues son casillas de distinto color (veremos que el grafo del salto del caballo es bipartito 1.4.8), y como queremos que la dama esté en a1 cuando capturemos la torre, su repuesta a la coronación del peón ha de ser mover a dicha casilla a1. Como las Blancas mueven primero, se ha de coronar en un número par de movimientos para que las negras respondan a con Da1 (número par). En suma, 1.h3, perdiendo un tiempo, y no la natural 1.h4, es la única jugada que gana, pues consigue que la dama aterrice en a1 tras la promoción.

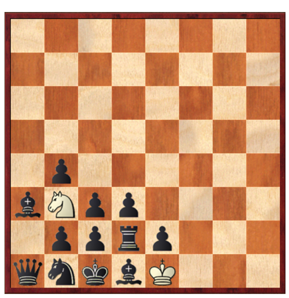


Figura 5: Posición tras 13.Cxb3#.

1	h3	Da2
2	h4	Da1
3	h5	Da2
4	h6	Da1
5	h7	Da2
6	h8C	Da1
7	Cf7	Da2
8	Cd6	Da1
9	Cxb5	Da2
10	Cd6	Da1
11	Cxc4	Da2
12	Ca5	Da1
13	Cxb3#	

Figura 6: Línea ganadora.

Capítulo 1

El problema del caballo

1.1. Un poco de historia

El llamado "problema del caballo" es un antiguo problema matemático relacionado con el ajedrez. Consiste en encontrar una secuencia de movimientos válidos de esta pieza para que recorra todas las casillas del tablero, visitando cada una solo una vez volviendo (o no) a la posición de partida. El problema ha sido planteado para tableros de diferentes tamaños y distintas condiciones iniciales, y sigue siendo tan atractivo como hace 1200 años. Si bien existen varios recorridos probados que satisfacen las condiciones enunciadas, lo cierto es que a pesar del esfuerzo de muchos matemáticos no se conoce con exactitud la cantidad de soluciones posibles para el problema del caballo.

El artículo [11] arroja un poco de luz sobre nuestro problema. Así, una de las primeras soluciones conocidas data del siglo IX. En efecto, en un manuscrito del árabe Abu Zakariya Yahya ben Ibrahim al-Hakim se encuentran documentados dos recorridos válidos. Uno de ellos pertenece a un jugador de ajedrez llamado Ali C. Mani y el otro a Al-Adli ar-Rumi, un aficionado del que se sabe también escribió un libro sobre una forma de ajedrez popular por esa época llamado "Shatranj".

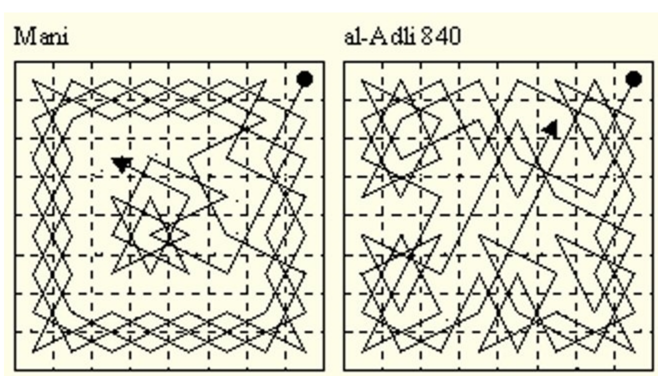


Figura 1.1: Dos recorridos válidos, uno de Ali C. Mani y otro de Al-Adli ar-Rumi.

Pueden utilizarse tableros de dimensiones diferentes a las 8x8 casillas tradicionales, o permitirse que la casilla de llegada no coincida con la de salida como hemos enunciado previamente.

Esta última variante facilita un tanto las cosas, y aumenta aun más la cantidad de soluciones posibles. Cuando el caballo debe llegar a la misma casilla de la que salió, se dice que el recorrido que efectúa es "cerrado". As-Suli, otro árabe que basó su análisis en los trabajos anteriores de Al-Adli, encontró allá por el año 900 de nuestra era dos recorridos cerrados.

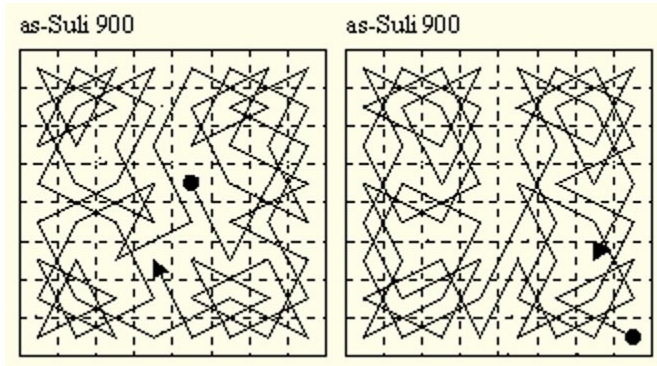


Figura 1.2: As-Suli basó su análisis en los trabajos anteriores de Al-Adli.

El primer estudio matemático importante sobre este problema se cree que es el que efectuó el gran matemático Leonhard Euler (1707–1783), quien presentó su trabajo a la Academia de las Ciencias de Berlín en 1759. En realidad Euler, una figura reconocida que publicó más de mil trabajos y libros brillantes durante su vida, sabía que la Academia ofrecía un premio de 4.000 francos a aquel que pudiese arrojar algo de luz al problema del caballo. Si bien se conocían muchas soluciones, nadie había logrado estimar el numero de ellas que existían ni un algoritmo que permitiese generarlas sin dificultad.

Los que habían abordado el problema sabían que encontrar una solución simplemente moviendo el caballo "al tanteo" era prácticamente imposible, pero tampoco eran capaces de encontrar un método que facilitase el proceso. Estando así las cosas, Euler encaró el problema y encontró que existían varios recorridos cerrados, que ofrecían la ventaja de permitir comenzar por una casilla cualquiera del tablero y completar el recorrido a partir de ella. Lamentablemente, en el momento en que publicó su trabajo, Euler era Director de Matemáticas de la Academia de Berlín, por lo que por una cuestión ética no pudo cobrar el premio.

Hoy sabemos que el numero de recorridos posible es realmente muy grande. A pesar de haberse utilizado los más grandes ordenadores disponibles para buscar todas las formas en que el caballo puede recorrer el tablero, no estamos seguros de que los valores hallados sean correctos. Hace 20 años, en 1995, Martin Löbbing e Ingo Wegener pusieron a trabajar 20 ordenadores Sun (muy potentes para la época) durante cuatro meses y publicaron un documento en el que proclamaban que el número de recorridos posibles en un tablero de 8×8 era 33.439.123.484.294.

Dos años más tarde, en 1997, Brendan McKay encaró el problema del caballo dividiendo el tablero en dos mitades y llego a un resultado algo menor: "solo" existirían 13.267.364.410.532 recorridos posibles. Para tener una idea de lo que significan estos números, basta saber que si un robot fuese capaz de mover el caballo para que complete un recorrido por segundo, demoraría más de 420 años en probarlos a todos.

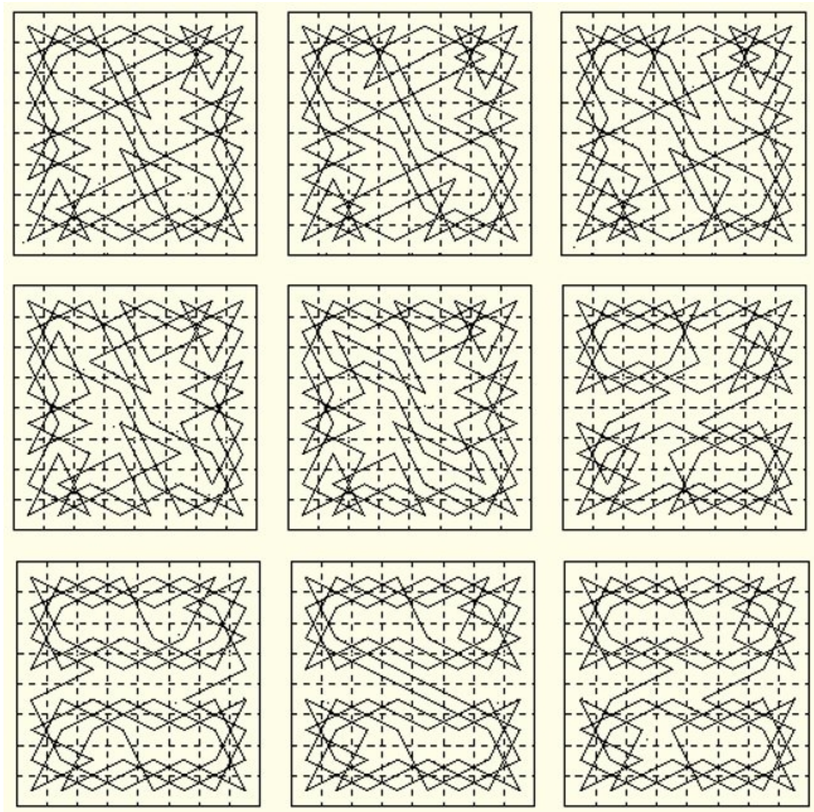


Figura 1.3: Euler encaró el problema y encontró que existían varios recorridos cerrados.

¿Y qué utilidad tiene para un jugador de ajedrez conocer estos recorridos? Muy poca. Pero esta clase de desafíos han impulsado a muchos aficionados o matemáticos a encarar problemas que finalmente suelen tener alguna aplicación práctica a la hora de encontrar rutas óptimas que pasen por un determinado número de lugares o que permitan, por ejemplo, ahorrar tiempo o combustible. Como sea, el problema del caballo ha logrado mantener interesados a los matemáticos durante siglos, y todo parece indicar que lo seguirá haciendo durante mucho tiempo...

1.2. Introducción al problema

Podemos ver un tablero de ajedrez de $m \times n$ dimensiones como una matriz de m filas y n columnas. El tablero estándar de ajedrez posee 8 filas y 8 columnas. Denotaremos a los elementos de la matriz del tablero de ajedrez, es decir, las casillas, como (i, j) siendo la primera fila y la primera columna la esquina superior izquierda de la matriz.

El caballo es una pieza del juego del ajedrez distinta a las otras piezas en su forma de moverse. Es la única pieza que puede saltar por encima de las demás, describiendo una trayectoria en forma de L. Es decir, se desplaza dos casillas en dirección horizontal o vertical y una en dirección perpendicular a la anterior.

Por tanto, si comenzamos en la casilla (i, j), podremos mover el caballo a alguna de las siguientes casillas: $(i \pm 2, j \pm 1)$ o $(i \pm 1, j \pm 2)$. Sin embargo, si el caballo se encuentra cerca de los bordes del tablero, algunos de estos movimientos podrían no existir.

La formulación precisa del problema del caballo es la siguiente:

Problema: *"¿Sobre qué tableros de $m \times n$ dimensiones podremos hacer movimientos legales del caballo pasando por cada una de las casillas solo una vez exactamente y regresando a la casilla de partida?"*

Existe también una versión del problema que consiste en buscar los llamados "tours abiertos", donde el caballo no tiene por qué volver a su casilla inicial. El problema es netamente distinto al del caso cerrado; así, en el lema 1.4.9 demostraremos que el tablero 3×4 dimensional no tiene un tour cerrado, pero la siguiente figura muestra que sí posee uno abierto.

8	11	6	3
1	4	9	12
10	7	2	5

Nos centraremos en el caso cerrado porque es el único que está completamente resuelto. Una condición suficiente para la existencia de un tour abierto es que el tablero tenga dimensiones $m \times n$ con $\min(m, n) \geq 5$ [6], pero como muestra el ejemplo anterior esta condición no es necesaria. En particular, hasta donde hemos podido investigar en la literatura, se desconoce qué tableros del tipo $3 \times n$ y $4 \times n$ admiten un tour abierto.

A lo largo del capítulo, vamos a encontrar los tableros donde podamos construir el recorrido cerrado del caballo, objeto de nuestro estudio, un problema nada trivial debido a la imposición del regreso a la casilla inicial del equino.

El primer paso será modelizar matemáticamente el tour del caballo. Así, la teoría de grafos es la herramienta apropiada para abordar y desarrollar nuestro problema.

1.3. Conceptos básicos en teoría de grafos

Empezaremos mostrando algunas nociones básicas de la teoría de grafos que aplicaremos al problema del caballo [7, pp. 2–6]. Consideraremos solamente los grafos simples y no dirigidos, es decir, aquellos que aceptan una sola arista uniendo dos vértices cualesquiera y no tienen una orientación para las aristas.

Definición 1.3.1. *Un* ***grafo*** *(simple no dirigido) es un par* (V, E) *formado por un conjunto finito* $V \neq \emptyset$*, a cuyos elementos denominaremos* ***vértices*** *o* ***nodos*** *y* E*, un conjunto de pares (no ordenados y formados por distintos vértices) de elementos de* V *a los que llamaremos* ***aristas****.*

A los nodos v_1 *y* v_2 *que forman una arista* $e = v_1 - v_2$ *se les llama* ***extremos*** *de* e*.*

Definición 1.3.2. *A dos nodos* v_1 *y* v_2 *que forman parte de una misma arista se les llama* ***adyacentes*** *(a veces vecinos).*

Definición 1.3.3. *Dado* $G = (V, E)$*, llamamos* ***entorno*** *(o vecindario) de un nodo* v *al conjunto* $N(v) := \{u \in V : u - v \in E\}$*.*

Definición 1.3.4. *Se llama* ***orden*** *de un grafo a* $|V|$ *y* ***tamaño*** *de un grafo a* $|E|$*. Un grafo con* $|V| = 1$ *(y consecuentemente* $|E| = 0$*) se llama* ***trivial****.*

Definición 1.3.5. *Se dice que una arista es* ***incidente*** *con un vértice* v *cuando* v *es uno de sus extremos.*

Definición 1.3.6. *El* ***grado de incidencia*** $g(v)$ *de un vértice* v *es el número de aristas que inciden en él. Un vértice de grado 0 se llama* ***aislado****. Un vértice con grado par (impar) se llama* ***vértice par (impar)****.*

Definición 1.3.7. *Si todos los vértices de un grafo tienen el mismo grado, el grafo se llama* ***regular****. Si el grado de los vértices es* k*, el grafo es* k***-regular****.*

Definición 1.3.8. *Dado un grafo* $G = (V, E)$*, se dice que otro grafo* $G' = (V', E')$ *es* ***subgrafo*** *de* G *si* $V' \subseteq V$ *y* $E' \subseteq E$*.*

Definición 1.3.9. *Se llama grafo* ***completo*** *a* $G = (V, E)$ *tal que* $v_1, v_2 \in V, v_1 \neq v_2 \Rightarrow v_1 - v_2 \in E$*. Al grafo completo de* n *nodos se le denota* K_n *(a veces* K^n*).*

Definición 1.3.10. *Un grafo* $G = (V, E)$ *es* ***bipartito*** *si* $V = V_1 \cup V_2$*,*$V_1 \neq \emptyset$*,*$V_2 \neq \emptyset$*,* $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ *y*

$$\forall v_1 - v_2 \in E \Rightarrow \begin{cases} v_1 \in V_1, v_2 \in V_2 & \textit{o bien} \\ v_1 \in V_2, v_2 \in V_1 \end{cases}$$

Definición 1.3.11. *Una* ***cadena (camino)*** *es un grafo* $P = (V, E)$ *definido por* $V = v_1, ..., v_n$ *y* $E = \{v_1 - v_2, v_2 - v_3, \ldots, v_{n-1} - v_n\}$*, es decir, una sucesión alternante de aristas y vértices distintos, que comienza en un vértice y termina en otro, tal que cada arista incide en el nodo anterior y posterior de la sucesión. Se dice que* P *conecta (o une)* v_1 *con* v_n*. Al camino con* m *aristas se le suele denominar* P_m*. Llamamos* ***longitud de la cadena*** *al número de aristas que la componen. Un subgrafo de* G *que sea cadena (camino) se denominará cadena (camino) en el grafo* G*.*

Definición 1.3.12. *Un* ***ciclo*** *es un grafo* $C = (V, E)$ *definido por* $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ $(n \geq 3)$ *y* $E = \{v_1 - v_2, v_2 - v_3, \ldots, v_{n-1} - v_n, v_n - v_1\}$*, es decir, una cadena más una arista entre los vértices unidos por la cadena. Al ciclo con* n *nodos (y aristas) se le suele denominar* C_n*. Llamamos* ***longitud del ciclo*** *al número de aristas que lo componen. Un subgrafo de* G *que sea ciclo se denominará ciclo en el grafo* G*.*

A continuación daremos un resultado clave para nuestro grafo del salto del caballo.

Proposición 1.3.13. $G = (V, E)$ *es un grafo bipartito si y sólo si todos sus ciclos son de longitud par.*

Demostración.

"$\Rightarrow$" Si G es bipartito entonces un ciclo contendrá alternativamente un nodo en la partición V_1 y otro nodo en la partición V_2. Por tanto, para que el primer y último nodo sean el mismo, tiene que haber un número par de vértices.

"$\Leftarrow$" Tomemos un nodo v_1 etiquetándolo con "+" e iteremos de la forma siguiente: Elegimos cualquier vértice v_i etiquetado y que no hayamos considerado previamente y etiquetamos sus nodos adyacentes con el signo contrario al de la etiqueta de v_i. Si todos los vértices no considerados están sin etiquetar, se elige uno cualquiera y se etiqueta con "+". Dejamos de iterar cuando:

1. Todos los nodos etiquetados y cualquier par de nodos adyacentes tiene signos contrarios. Entonces G es bipartito, siendo V_1 el conjunto de nodos con la etiqueta "+" y V_2 el conjunto de nodos con la etiqueta "-".

2. Se llega a un vértice marcado v_p y se tiene que etiquetar con el signo contrario. Este vértice ha sido alcanzado a través de dos sucesiones de vértices de signos alternos, una de tamaño par y otra de tamaño impar, cuya yuxtaposición forma un ciclo impar contradiciendo la paridad del ciclo.

□

Una de las propiedades más destacables de un grafo es su conexión.

Definición 1.3.14. *Un grafo es* ***conexo*** *si cualquier par de vértices (distintos) están conectados por una cadena. Un grafo que no es conexo suele llamarse* ***disconexo*** *(o desconectado). Diremos que un grafo trivial es conexo.*

Definición 1.3.15. *Definimos en* V *la relación siguiente:*

$$\forall v_i, v_j \in V, \quad i \sim j \Leftrightarrow \begin{cases} v_i = v_j \quad \textit{o bien} \\ \textit{existe una cadena en } G \textit{ que conecta } v_i \textit{ y } v_j. \end{cases}$$

La relación $\sim$ es de equivalencia, de forma que $V_{|\sim}$ constituye una partición de V. Cada una de cuyas clases de equivalencia se denomina **componente conexa**.

1.4. Saltando de nodo en nodo

Tras armar a nuestro caballo con los conocimientos matemáticos necesarios para su aventura por el tablero, nos disponemos a tomar la casilla de salida.

Definición 1.4.1. *Denotaremos al grafo $G(m,n)$ de mn vértices, el construido al reemplazar cada casilla del tablero de ajedrez por un nodo, donde dos vértices estarán unidos por una arista si están separadas en el tablero por un movimiento legal del caballo.*

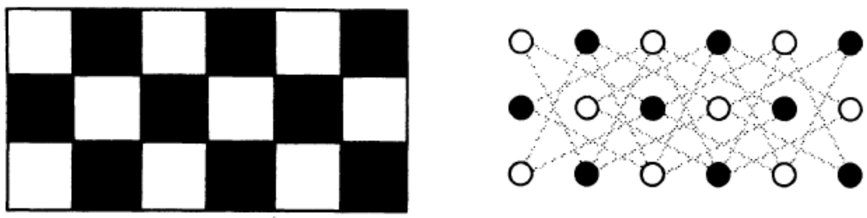


Figura 1.4: Paso de un tablero de ajedrez 3×6 al grafo $G(3,6)$.

Por todo lo anterior, podremos construir un tour del caballo en el tablero $m \times n$ si y solo si existe un ciclo que contenga a todos los vértices del grafo $G(m,n)$. Tal grafo se denomina hamiltoniano.

Definición 1.4.2. *Se denomina* ***ciclo hamiltoniano*** *al ciclo que contiene a todos los vértices del grafo.*

Definición 1.4.3. *Un* ***grafo*** *se llama* ***hamiltoniano*** *si tiene un ciclo hamiltoniano.*

Observación 1.4.4. *Si G contiene algún vertice de grado 1 no puede ser hamiltoniano.*

La alternancia de las casillas blancas y negras del tablero se hereda en los vértices blancos y negros del grafo. Podemos hablar por tanto de otra propiedad destacable de los grafos, su coloración.

Definición 1.4.5. *Una* ***coloración*** *de un grafo es una aplicación*

$$c : V \longrightarrow \{1, 2, \dots, l\}.$$

La cantidad $c(v_i)$ es el ***color*** *correspondiente al nodo v_i.*

Definición 1.4.6. *Una* ***coloración propia*** *de un grafo es una coloración que hace corresponder colores diferentes a vértices adyacentes:*

$$\forall (u,v) \in E \to c(u) \neq c(v).$$

Definición 1.4.7. *Llamaremos* ***número cromático*** *del grafo G, $\chi(G)$, al mínimo valor de l que permite una coloración de G, es decir, al mínimo número de colores necesarios para colorear los vértices de forma que los extremos de cada arista tengan colores distintos.*

Observación 1.4.8. *Un grafo G es bipartito si y solo si $\chi(G) = 2$.*

El grafo tiene nodos (i, j) que serán blancos si $i + j$ es par y negros si $i + j$ es impar. Es fácil ver que las aristas del grafo conectan vértices del color opuesto. En consecuencia, nuestro grafo $G(m, n)$ es bipartito y el color debe alternarse en cualquier ciclo. Así, por la proposición 1.3.13 el ciclo hamiltoniano, si existe, debe tener un número par de vértices.

Ahora podemos dar las condiciones que determinan qué tablero de ajedrez tiene un tour del caballo [20]. Primero comenzaremos presentando qué casos deben ser excluidos y entonces mostraremos como construir un tour para cada dimensión del tablero.

Lema 1.4.9. *Un tablero de ajedrez $m \times n$ dimensional con $m \leq n$ no tiene un tour si se cumple alguna de las tres siguientes condiciones:*

i) m y n son ambos impares.

ii) $m =$ 1,2 o 4.

iii) $m = 3$ y $n = 4, 6$ u 8.

Demostración.

i) Si m y n son impares, el orden de nuestro grafo es mn que es impar, pero por la proposición 1.3.13 todo ciclo bipartito debe tener un número par de vértices, por tanto, no puede existir un ciclo hamiltoniano.

ii) El caso $m = 1, 2$ es evidente, pues las dimensiones del tablero no permiten dicho tour.

Para $m = 4$ la contradicción es más sutil. Supongamos por reducción al absurdo que tenemos un ciclo hamiltoniano $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{4n}, v_1\}$. Si coloreamos de nuevo los nodos de tal forma que las filas 1 y 4 sean rojas y las filas 2 y 3 sean azules, esta coloración es propia, véase como ejemplo las casillas $(2, 1)$ y $(3, 3)$. Sin embargo, cada vértice rojo es adyacente solamente a los vértices azules. Así, en el ciclo hamiltoniano los vértices rojos deben ser vecinos de los azules. Como tenemos $2n$ vértices de cada color, se tiene que los vértices rojos y azules deben ir alternándose en el ciclo. Si denotamos por $v_1 = (1, 1)$ en nuestro ciclo hamiltoniano, todos los vértices impares en el ciclo son rojos. De hecho, volviendo al tablero original, tenemos que todos los vértices v_{2k+1} son blancos en el ciclo ya que $(1, 1)$ es blanco, luego todos los vértices rojos son blancos en contradicción con la coloración elegida.

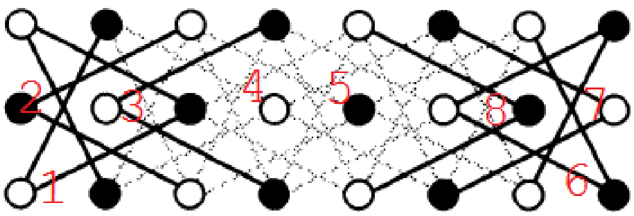
iii) El tablero de 3×4 es excluido por el apartado anterior. Veamos los dos casos restantes.

Cuando quitamos un nodo v de un grafo G, también eliminamos todas las aristas incidentes con v. Es claro pues, que para cualquier G que tenga un ciclo hamiltoniano, quitando un conjunto de k vértices pueden quedarse como mucho k componentes conexas.

Quitando los vértices $(1, 3)$ y $(3, 3)$ de $G(3, 6)$ quedan tres componentes conexas, que por la observación anterior, podemos concluir que no existen ciclos hamiltonianos para el tablero de 3×6.

Ahora, para $G(3,8)$ ocurre que los vértices $(1,1),(2,1),(3,1),(2,2),(1,8),(2,8),(3,8)$ y $(2,7)$ tienen todos grado dos, forzando a incluirlos en el presunto ciclo hamiltoniano de 16 aristas como muestra la figura 1.5. Estas aristas forman seis componentes conexas que deben permanecer en el ciclo hamiltoniano. Consideremos los dos vértices aislados $(2,4)$ y $(2,5)$ como componentes conexas triviales.

Definamos un nuevo grafo $G^*(3,8)$ derivado de estas 8 componentes conexas de tal manera que un nuevo vértice representa cada componente conexa y éstos se unen (nuevos vértices i y j) siempre que haya una arista en $G(3,8)$ conectando un extremo de la componente conexa i con otro extremo de la componente conexa j. El hecho de que exista un ciclo hamiltoniano en el grafo original $G(3,8)$ fuerza a que esté presente en $G^*(3,8)$. No obstante, $G^*(3,8)$ tiene dos vértices de grado tres que al quitarlos del grafo deja tres componentes conexas llegando a contradicción.



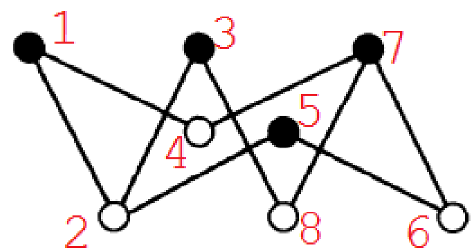


Figura 1.5: Las dieciséis aristas que deben pertenecer a cualquier ciclo hamiltoniano de $G(3,8)$ y el resultado del grafo derivado $G^*(3,8)$.

$\square$

Excluyendo por tanto, estas dimensiones para el tablero, todos los demás tienen un ciclo hamiltoniano. ¿Pero como podemos construir todos los tours? La clave es desarrollar un método que nos permita construir nuevos tours a partir de otros más pequeños.

El siguiente lema nos permitirá añadir 4 columnas o filas a un tour realizado con éxito, siempre que unas 10 aristas particulares pertenezcan al tour inicial.

Definición 1.4.10. *Llamaremos a $G(m,n)$ **prolongable** si tiene un ciclo hamiltoniano que incluye las 10 aristas:* $(1,n-1)-(3,n),(m-2,n-1)-(m,n),(m-1,1)-(m,3),(m-1,n-2)-(m,n),(4,n-1)-(2,n),(1,n)-(3,n-1),(m-2,n)-(m,n-1),(m,1)-(m-1,3),(m,n-2)-(m-1,n),(m,2)-(m-1,4)$.

Lema 1.4.11. *Si $G(m,n)$ es prolongable entonces $G(m,n+4)$ posee tambien un ciclo hamiltoniano incluyendo las siguientes 10 aristas:* $(1,n+3)-(3,n+4),(m-2,n+3)-(m,n+4),(m-1,1)-(m,3),(m-1,n+2)-(m,n+4),(4,n+3)-(2,n+4),(1,n+4)-(3,n+3),(m-2,n+4)-(m,n+3),(m,1)-(m-1,3),(m,n+2)-(m-1,n+4),(m,2)-(m-1,4)$.

Demostración.

Las 10 aristas que necesitamos se visualizan en la figura 1.6. Para $m=3$, estas 10 aristas degeneran en 7 debido al tamaño del grafo. De hecho, para todos los valores posibles de m

y n, cuatro de estas 10 aristas requeridas están forzadas a estar en el ciclo hamiltoniano (las aristas $(1, n) - (3, n-1)$, $(m, 1) - (m-1, 3)$, $(m-2, n-1) - (m, n)$ ya que uno de los extremos de cada arista está en alguna esquina del tablero). Así, vemos que la hipótesis adicional de las aristas impuestas para facilitar la inducción no es tan restrictiva como podriamos suponer a primera vista.

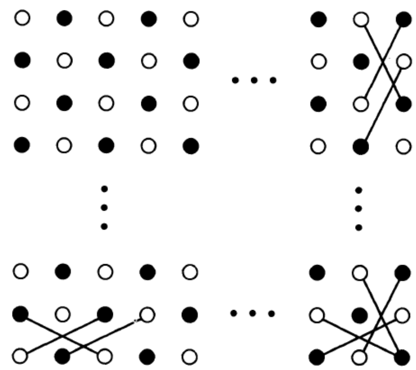


Figura 1.6: Las diez aristas que imponemos para la extensión del ciclo hamiltoniano por inducción.

Para añadir cuatro columnas a cualquier ciclo hamiltoniano en $G(3, n)$ que contiene las siete aristas por hipótesis, añadimos una nueva componente conexa de 3×4 con un camino que conecte todos los nodos. Eliminamos la arista $(1, n-1) - (3, n)$ del ciclo e insertamos las aristas $(1, n-1) - (2, n+1)$ y $(3, n) - (1, n+1)$ para incorporar la conexión al ciclo. La figura 1.7 representa la extensión de un ciclo hamiltoniano en $G(3, 10)$ a uno en $G(3, 14)$ para ilustrar esta construcción. El nuevo ciclo hamiltoniano también contiene las siete aristas que debíamos imponer, por lo que también se puede utilizar para otras extensiones.

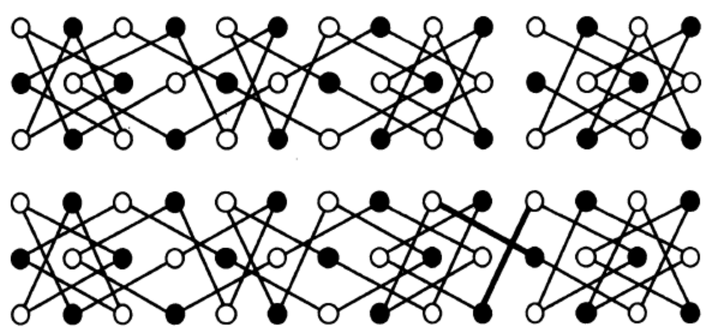


Figura 1.7: Extensión de un ciclo hamiltoniano de $G(3, n)$ a uno de $G(3, n+4)$ para $n = 10$.

Para $m \geq 5$, nos apoyaremos en un grafo del movimiento del caballo $m \times 4$ dimensional denotado por $H(m, 4)$. Éste es obtenido mediante $G(m, 4)$, eliminando todas las aristas que conectaban la columna dos de la columna y tres y cogiendo todas las aristas que unían los nodos de las otras dos columnas restantes excepto aquellas que incidían en la fila 1 y 2, así como en la fila $m-1$ y m.

El grafo resultante $H(m,4)$ es 2-*regular* [1], pero no hay un ciclo solamente. Es fácil comprobar que $H(m,4)$ tiene un par de $2m$-*ciclos* cuando m es impar y cuatro $m-ciclos$ cuando es impar. Este hecho es clave para nuestra construcción. Vamos a probarlo por inducción.

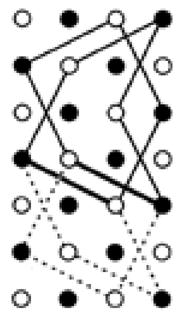


Figura 1.8: Uno de los ciclos en $H(5,4)$ y su extension a $H(7,4)$.

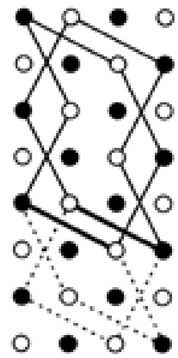


Figura 1.9: Dos de los ciclos en $H(6,4)$ y su extension a $H(8,4)$.

La figura 1.8 muestra uno de los ciclos en $H(5,4)$. El otro ciclo está formado por la reflexión del ciclo a través del eje vertical del centro del tablero. Las dos filas adicionales que añadimos a la última sugiere como extender el ciclo a $H(7,4)$. Así, de forma específica, eliminamos las aristas $(5,1)-(4,3)$ y $(5,2)-(4,4)$ e insertamos $(5,1)-(7,2),(7,2)-(6,4),(6,4)-(4,3),(5,2)-(7,1),(7,1)-(6,3),(6,3)-(4,4)$. La repetición de esta extensión muestra la estructura del par de ciclos en $H(m,4)$ cuando m es impar.

Análogamente, la figura 1.9 indica dos de los cuatro ciclos en $H(6,4)$, los otros dos se encuentran realizando la reflexión vertical respecto al centro del tablero. De forma similar como en el caso m impar, extendemos los ciclos eliminando las aristas $(6,1)-(5,3)$ y $(6,2)-(5,4)$ e insertamos $(6,1)-(8,2),(8,2)-(7,4),(7,4)-(5,3),(6,2)-(8,1),(8,1)-(7,3)$ y $(7,3)-(5,4)$. La repetición de esta extensión muestra la estructura de los cuatro ciclos en $H(m,4)$ cuando m es par.

Finalmente, para extender un ciclo hamiltoniano en $G(m,n)$ con m impar a uno en $G(m,n+4)$, colocaremos $H(m,4)$ junto a $G(m,n)$ tal y como muestra la figura 1.10. Quitamos las dos aristas $(1,n)-(3,n-1)$ y $(2,n)-(4,n-1)$ del ciclo hamiltoniano y $(1,n+2)-(3,n+1)$ y $(2,n+2)-(4,n+1)$ de $H(m,4)$ e incluimos las cuatro aristas $(1,n)-(2,n+2),(2,n)-(1,n+2),(3,n-1)-(4,n+1)$ y $(4,n-1)-(3,n+1)$. Esto hace que incorporemos los dos ciclos de $H(m,4)$ al ciclo hamiltoniano dado para crear un nuevo ciclo hamiltoniano en $G(m,n+4)$. El nuevo ciclo contiene las 10 aristas impuestas por hipótesis. La extension de $G(5,6)$ a $G(5,10)$ está ilustrada en la figura 1.10.

[1]Por su construcción, las aristas del ciclo hamiltoniano “envuelven” el borde del tablero lo más cerca posible.

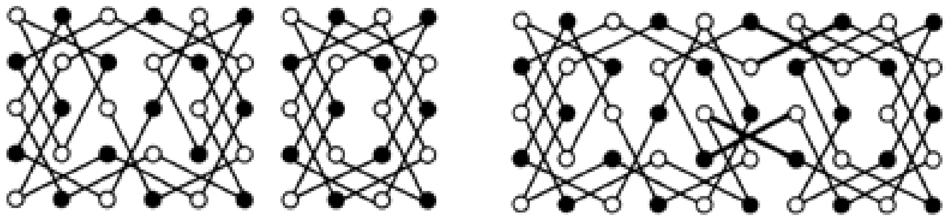


Figura 1.10: Extensión de un ciclo hamiltoniano de $G(5,n)$ a uno de $G(5,n+4)$ para $n=6$.

Para m par, como se muestra en la figura 8, incorporamos $H(m,4)$ en el ciclo hamiltoniano de $G(m,n)$ primero quitando las cuatro aristas $(1,n-1)-(3,n),(1,n)-(3,n-1),(m-2,n-1)-(m,n)$ y $(m-2,n)-(m,n-1)$ del ciclo hamiltoniano, seguidamente eliminando las cuatro aristas $(2,n+1)-(4,n+2),(2,n+2)-(4,n+1),(m-3,n+1)-(m-1,n+2)$ y $(m-3,n+2)-(m-1,n+1)$ de $H(m,4)$ y finalmente insertando las ocho aristas $(1,n-1)-(2,n+1),(1,n)-(2,n+2),(3,n-1)-(4,n+1),(3,n)-(4,n+2),(m-2,n-1)-(m-3,n+1),(m-2,n)-(m-3,n+2),(m,n-1)-(m-1,n+1)$ y $(m,n)-(m-1,n+2)$.

De nuevo, el ciclo formado contiene las 10 aristas impuestas por hipótesis. La extension de $G(6,6)$ a $G(6,10)$ está ilustrada en la figura 1.11. Esto completa la prueba del lema.

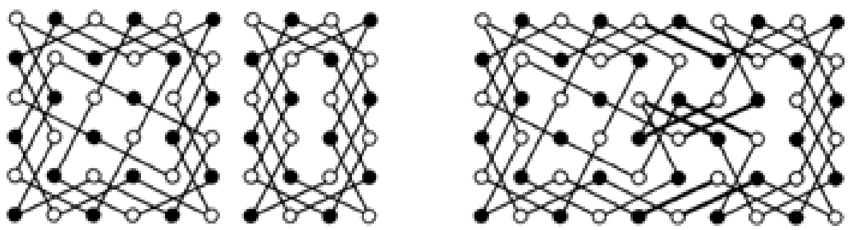


Figura 1.11: Extensión de un ciclo hamiltoniano de $G(6,n)$ a uno de $G(6,n+4)$ para $n=6$.

$\square$

Con toda la carne en el asador, finalmente vamos a completar la construcción del tour hamiltoniano.

Teorema 1.4.12. *Para cada tablero de ajedrez $m\times n$ dimensional, cuyo tour del caballo exista, se puede dar su solución.*

Demostración.

El lema 1.4.11 nos proporciona la seguridad para añadir cuatro filas o cuatro columnas a una solución conocida de dicho tour. Así, podemos construir soluciones para $G(m,n)$ siempre que tengamos una colección de casos resueltos para cada posible adición (podemos añadir entre 1,2,3,4 filas y columnas respectivamente) sobre la clase del par $[i,j]$ módulo 4. De hecho, podría parecer que necesitaríamos 16 casos para la base de nuestra construcción. No obstante, girando el tablero sobre su diagonal principal podemos intercambiar i y j reduciendo el número de casos posibles a 10.

00	01	02	03
10	11	12	13
20	21	22	23
30	31	32	33

Figura 1.12: Casos de filas y columnas añadidas módulo 4.

3x6	3x8	
5x6	5x8	
6x6	6x8	8x8

Figura 1.13: Tablero correspondientes a las clases módulo 4.

Afinando más por la condición $i)$ del lema 1.4.9, excluimos las clases $[1, 1], [1, 3], [3, 3]$. Quedan por tanto solamente 7 casos. Teniendo en cuenta que los casos $m = 1, 2$ y 4 no se contemplan, los posibles representantes de estas 7 clases son: $3\times 6, 3\times 8, 5\times 6, 5\times 8, 6\times 6, 6\times 8$ y 8×8. Pero la restricción $iii)$ del lema 1.4.9 excluye el tamaño 3×6. Para remplazarlo y poder generar todos los demás de la misma clase debemos pues incluir tanto 3×10 como 7×6. Por el mismo razonamiento, 3×8 debe ser reemplazado por 3×12 y 7×8.

Por ende, hay 9 casos específicos cuyos ciclos hamiltonianos deben ser construidos individualmente antes de poder utilizar el lema 1.4.11 para encontrar el tour del caballo por inducción. No hay un método particular para generar estas 9 soluciones, pero daremos las que guarden una mayor simetría como se muestran en la figura 1.14.

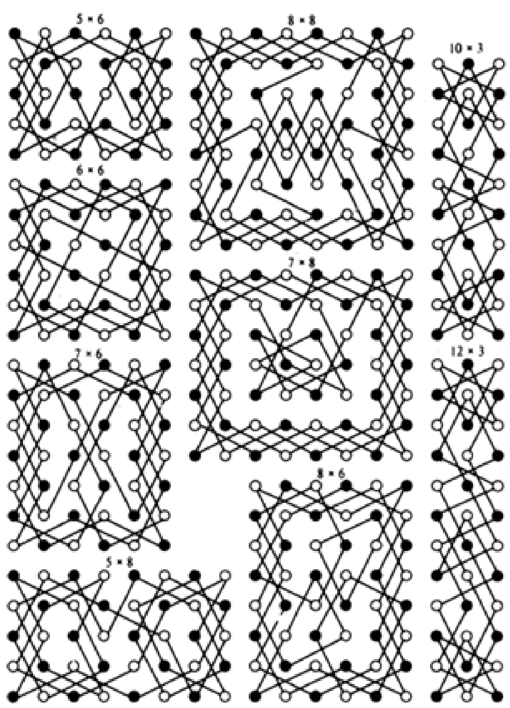


Figura 1.14: Los nueve ciclos hamiltonianos que constituyen la base de la construcción por inducción. Tal es la simetría, que podemos darlos de una forma casi compacta.

□

Capítulo 2

¿Puede ser infinita una partida de ajedrez?

2.1. La sucesión de Max Euwe

Max Euwe (1901-1981) fue campeón del mundo de ajedrez y matemático. Reinó en el tablero desde 1935 a 1937 destronando al gran Alexander Alekhine, el cual volvió a recuperar su trono hasta su muerte nueve años más tarde.

El nombre de Euwe está ligado a un problema matemático donde entran a jugar tres sucesiones. Los elementos de estas sucesiones son ceros y unos. (En esta sección y la siguiente seguimos parcialmente [5].)

Definición 2.1.1. *Sea x un elemento de la sucesión, denotamos por x^* a su* ***complementario binario****: $x^* = 1 - x$.*

Definición 2.1.2. *Denotamos las sucesiones a_n, b_n, c_n como sigue:*

- $a_n = q(n_2) \mod 2$. *Donde n_2 es n representado en forma binaria y $q(\cdot)$ denota la suma de los dígitos de la sucesión. Por tanto,*

$$\begin{cases} a_n = 0 \text{ si } n_2 \text{ contiene un número par de unos,} \\ a_n = 1 \text{ si } n_2 \text{ contiene un número impar de unos.} \end{cases}$$

- $$\begin{cases} b_0 = 0 \\ b_{2n} = b_n \\ b_{2n+1} = b_n^* \end{cases}$$

  Esta sucesión recurrente toma los primeros 2^k elementos de la sucesión $b_0, b_1, \ldots, b_{2^k-1}$ para generar los siguientes 2^k elementos.

- $$\begin{cases} c_0 = 0 \\ c_{2^k+i} = c_i^* \quad \text{para } 0 \leq i < 2^k \end{cases}$$

A partir de los primeros 2^k elementos se generan los siguientes 2^k.

Ahora bien, si comenzamos a calcular cada componente de las cuatro sucesiones, llegamos a un curioso resultado. ¡Las tres sucesiones son idénticas!

Observación 2.1.3. *Los primeros términos de la sucesión son: 0110 1001 1001 0110 1001 0110...*

Proposición 2.1.4. *Se tiene la identidad $a_n = b_n = c_n$.*

Demostración.

i) $a_n = b_n$. Vamos a probar que a_n tiene la propiedad recursiva de b_n:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{2n} = q((2n)_2) \mod 2 = q(n_2) \mod 2 = a_n \\ a_{2n+1} = q((2n+1)_2) \mod 2 = (q(n_2)+1) \mod 2 = ((q(n_2)) \mod 2)^* = a_n^* \end{cases}$$

En la recursividad de la ecuación se tiene el resultado deseado puesto que $(2n)_2$ y n_2 solo difieren en la anexión de un cero a la sucesión, y $(2n+1)_2$ y n_2 en adjuntar un 1.

ii) $a_n = c_n$. Análogamente con c_n:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{2^k+i} = q((2^k+i)_2) \mod 2 = (q(i_2)+1) \mod 2 = a_i^* \end{cases}$$

Esto es cierto puesto que $i < 2^k$, entonces $(2^k + i)_2)$ y i_2 solo difieren por la adición de un 1 en la primera posición de la sucesión (y quizás algunos ceros tras este 1).

□

Lema 2.1.5. *La sucesión está formada por bloques de cuatro elementos. Cada uno de estos bloques es 0110 o 1001.*

Demostración.

La sucesión comienza con 0110. La definición de c_n muestra que el paso recursivo de los miembros 2^k a 2^{k+1} se adjuntan como el complemento binario. Así, como el 0110 tiene como complemento binario el 1001, estos dos bloques son las piedras de construcción de la secuencia.

□

Lema 2.1.6. *La sucesión permanece invariante cuando suprimimos los términos pares (todos los términos c_n con n impar) e invierte todos sus términos cuando suprimimos los términos impares (todos los términos c_n con n par).*

Demostración.

Basta observar la definición de b_n. Eliminando todos los b_n con n impar queda la sucesión $b_{2n} = b_n$; eliminando todos los términos con n par queda la sucesión $b_{2n+1} = b_n^*$. □

Esta sucesión fue definida y utilizada por varios matemáticos en épocas diferentes. Si todos ellos deben ser nombrados, el nombre de la sucesión sería: la sucesión de **Prouhet-Thue-Euwe-Morse-Hedlund**. Como puede verse en [1], su historia toca algunas áreas matemáticas muy diferentes: Eugène Prouhet (1817-1867) usó la sucesión en teoría de números (1851) pero sus resultados no fueron tenidos en cuenta hasta años más tarde. Axel Thue (1863-1922) la definió para un problema de combinatoria (1906). El artículo de Thue fue escrito en noruego. Harald Calvin Marston Morse (1892-1977) y Gustav A. Hedlund (1904-1993) no la conocían cuando la volvieron a definir de nuevo, Morse en geometría diferencial (1921) y en un artículo junto con Hedlund argumentando las propiedades y aplicaciones de la sucesión (1944). Euwe construyó la sucesión en un artículo sobre las reglas del ajedrez en 1929. Max Euwe quería resolver un importante problema que surgió en el ajedrez y que estaba abierto por entonces.

2.2. Hasta el infinito y más allá

¿Puede ser infinita una partida de ajedrez? La respuesta a esta pregunta depende de las reglas del ajedrez, las cuales han ido cambiando (aunque no mucho) a lo largo del tiempo. Cuando Euwe publicó su articulo [10] entraron a debate varias reglas que debían restringir cada partida de ajedrez a un número finito de movimientos. Una de ellas (la que llevó a Euwe a su investigación) fue la siguiente:

“Una partida de ajedrez termina en tablas si una sucesión de movimientos (con todas las piezas exactamente en la misma posición) es jugada tres veces de forma consecutiva.”

Notemos que en esta regla no importa cuánta longitud tenga la sucesión. Los jugadores de ajedrez creían que una triple repetición como en la regla ocurrirá tarde o temprano en las partidas que no hayan terminado antes. Quizás, esta creencia fue apoyada por la experiencia de tantas partidas muy largas en los que ninguno de los jugadores se rendía no acordando tablas.

Una gran desventaja de esta regla es que todos los movimientos tienen que ser registrados y controlados con el fin de establecer un seguimiento idéntico de las sucesiones de movimientos. No obstante, esta regla ayuda a reducir el número (aparente) de un sinfín de partidas.

¿Pero esta regla hacía al ajedrez un juego finito? No. Max Euwe demostró en su artículo publicado en 1929 que esta regla no permite poner fin a las partidas de ajedrez. Su prueba se basa en la sucesión c_n definida anteriormente. Así, es fácil diseñar una sucesión de movimientos de ajedrez denotando por “0 ” a una posición y por “1 ” a otra, donde en cada extremo se dejan las piezas sin cambios y en su posición anterior, lo que conlleva a poder combinarlas para una sucesión infinita.

Vamos a dar un ejemplo de la posición inicial de una partida de ajedrez. En este caso, solo los caballos entran en acción.

0: 1.Cc3 Cc6 2.Cb1 Cb8
1: 1.Cf3 Cf6 2.Cf1 Cg8

Naturalmente, se pueden inventar situaciones más realistas en una partida de ajedrez (particularmente cerca del final de la partida) con el mismo objetivo. Ahora, la continuación del procedimiento para ver si existe infinitud se hace evidente: se trata de probar si podemos construir una sucesión de ceros y unos donde en ninguna parte de la sucesión se repitan tres veces consecutivamente algún 0 o 1. Así, probando lo anterior también seremos capaces de construir una partida de ajedrez infinita en la que ninguna secuencia de jugadas se produzca tres veces sucesivamente. Max Euwe estaba interesado en las matemáticas, así como en el ajedrez, y encontró una sucesión de este tipo.

Definición 2.2.1. *Llamamos **tripleta** a algún bloque de una sucesión del tipo AAA para una cierta secuencia de términos A. Llamamos **solapamiento** a un bloque de una sucesión del tipo AAa para una cierta secuencia de términos A, siendo a el primer término de la secuencia A.*

Una tripleta sería entonces un bloque del tipo 0110 0110 0110, por ejemplo; un solapamiento sería un bloque del tipo 0110 0110 0.

Teorema 2.2.2. *La sucesión c_n está libre de solapamientos (y por ende de tripletas).*

Demostración.
Supongamos por reducción al absurdo que la sucesión c_n tiene una p-cadena que genera un solapamiento, es decir, una parte de la sucesión con p elementos que se repite dos veces y viene seguida por el primer término de la cadena.

- $p = 1$: Las cadenas 000 o 111 no pueden existir por el lema 2.1.5.

- $p = 2$: El solapamiento solamente puede ocurrir en cuatro variaciones de la sucesión, todas ellas imposibles por el lema 2.1.5:

  00000 01010
  10101 11111

  No obstante hay una forma más elegante que también vamos a utilizar a la hora de ampliar p. Por el lema 2.1.6, se deduce que para $p = 2$, un solapamiento induciría también un solapamiento $p = 1$, o bien en c_n, o bien en su complementaria c_n^*, lo que por el apartado anterior es absurdo.

- $p = 3$: Existen cuatro posibilidades para el solapamiento en las 3-cadenas tal y como se muestra en la siguiente tabla. Las celdas están formadas por 0110 o 1001 y la 3-cadena es abc, donde los términos a, b y c pueden coincidir o no.

• • • •	$a\,b\,c\,a$	$b\,c\,a$ •	• • • •
• • • •	• $a\,b\,c$	$a\,b\,c\,a$	• • • •
• • • •	• • $a\,b$	$c\,a\,b\,c$	a • • •
• • • •	• • • a	$b\,c\,a\,b$	$c\,a$ • •

En cada celda de la tabla los dos elementos del medio son idénticos, mientras que los dos primeros y los dos últimos son distintos. Esto nos lleva una contradicción porque en la primera fila, por ejemplo, debería tenerse a la vez $c \neq a$ y $c = a$,

- $p = 4$: Análogamente como en el caso $p = 2$: Un solapamiento para $p = 4$ induciría un solapamiento para $p = 2$ a causa del lema 2.1.6 entrando en contradicción.

- $p \geq 5$: Vamos a demostrar primero que p debe ser par. Cualquier p-cadena debe contener un par 00 o 11. Así, el lema 2.1.5 muestra que el primer elemento de cada uno de los pares anteriores debe estar en una posición impar de la sucesión. Si suponemos que p es impar, la primera repetición de la p-cadena podría comenzar en una posición par llegando a un absurdo. Luego p es par.

  En consecuencia, la prueba para $p = 4$ se utiliza de nuevo en un proceso iterativo. La longitud de la cadena se reduce a la mitad varias veces hasta $p < 5$ llegando a una contradicción siempre al suponer que había un solapamiento.

□

Ésta es la razón por la que esta regla ya no está incluida en las reglas de la FIDE [1]. Por todo ello, hay otras dos normas en vigor que hace garantizar el ajedrez como un juego finito:

- **“Una partida es tablas si el jugador que está en juego reclama correctamente, cuando por lo menos por tercera vez la misma posición va a repetirse o acaba de producirse.”**

- **“Una partida acaba en tablas cuando tras 50 movimientos (completados por blancas-negras o negras-blancas) no se ha movido peón alguno y ninguna pieza ha sido capturada.”**

En ambos casos, uno de los jugadores debe reclamar las tablas. Las normas de la FIDE dan las instrucciones precisas para estas reclamaciones.

Estas dos reglas son obviamente eficaces. La primera resuelve finalmente la finitud de las posiciones. La segunda regla obliga a los jugadores a realizar movimientos irreversibles si quieren evitar el empate, habiendo únicamente un número finito de movimientos irreversibles.

2.3. La jugada que no vio Euwe

Como hemos mencionado anteriormente, Morse y Hedlund llegaron a la misma sucesión que Euwe definiéndola de forma diferente en 1944 e incluso, desconocedores del trabajo del campeón holandés, ¡resaltan su relevancia en cuanto al problema de las partidas infinitas en ajedrez! [16] Sin embargo ellos van un poco más lejos y prueban el resultado siguiente, que

[1]La Federación Internacional de Ajedrez (más conocida por FIDE, del acrónimo de su nombre en francés: “Fédération Internationale des Échecs”), es una organización internacional que conecta las diversas federaciones nacionales de ajedrez. Se fundó en París, Francia, el 20 de julio de 1924. Además de organizar el Campeonato del mundo de ajedrez, la FIDE calcula el rango Elo de los jugadores, redacta las reglas del ajedrez, publica libros y nombra a maestros internacionales, grandes maestros y árbitros.

de hecho había sido el objetivo principal del trabajo de Thue. Para la demostración seguimos [2, p. 16].

Teorema 2.3.1. *Existe una sucesión con los tres símbolos 0,1,2 libre de repeticiones, es decir, de bloques del tipo AA.*

Demostración.

Para cada $n \geq 1$, sea t_n el número de unos entre el cero n-ésimo y el $n+1$-ésimo de la sucesión c_n de Prouhet-Thue-Euwe-Morse-Hedlund. Obtenemos así la sucesión $t_1 t_2 t_3 \ldots = 210201\ldots$. Probamos que esta es la sucesión que andamos buscando.

Notemos primero que t_n solo puede valer 0, 1 o 2; de otro modo la sucesión c_n tendría tres o más unos seguidos, lo que no es posible según sabemos ya. Supongamos ahora, por reducción al absurdo, que t_n contiene un bloque del tipo AA con $A = x_1 x_2 \ldots x_k$ y $k \geq 1$. Entonces, de acuerdo con la definición de t_n, la sucesión c_n tendría un bloque del tipo

$$01^{x_1}01^{x_2}0\cdots01^{x_k}01^{x_1}01^{x_2}0\cdots01^{x_k}0,$$

donde con 1^{x_s} representamos un bloque de x_s unos seguidos. Este bloque no es otra cosa que un solapamiento, por lo que llegamos a una contradicción con el teorema. $\square$

Aunque Morse y Hedlund no lo mencionan, este resultado permite darle otra vuelta de tuerca al problema de las partidas infinitas, ya que incluso la siguiente más restrictiva regla las permitiría:

"Una partida de ajedrez termina en tablas si una sucesión de movimientos (con todas las piezas exactamente en la misma posición) es jugada DOS veces de forma consecutiva."

Bastaría con considerar las siguientes tres combinaciones de movimientos en la posición inicial:

0: 1.Cc3 Cc6 2.Cb1 Cb8
1: 1.Cf3 Cf6 2.Cf1 Cg8
2: 1.Cc3 Cf6 2.Cb1 Cg8

Capítulo 3

¿Un arte decidible?

Según afirma Lars Bo Hansen en el prólogo de su libro *Fundamentos de la estrategia ajedrecística* [4] el ajedrez es un juego absoluto en el que el vencedor lo gana todo. Y como juego absoluto que es, se enlaza con la teoría de juegos, rama de las matemáticas de la que todo el mundo ha oído, pues todos conocemos el famoso dilema del prisionero, pero en la práctica es un concepto más complejo de lo que parece.

La teoría de juegos es un área matemática que trata de resolver una situación en la que se produce un conflicto de intereses. Pretende averiguar las posibles estrategias que los jugadores han de seguir para en nuestro caso ganar la partida. Siguiendo con Hansen, el ajedrez es un juego absoluto y secuencial, es decir, los jugadores toman jugadas (decisiones) alternativas por turnos. Los juegos secuenciales pueden analizarse y estudiarse utilizando árboles de variantes. En teoría, el ajedrez es un juego que puede ser eventualmente estudiado hasta el final empleando este método. Entonces, ¿es decidible? ¿Está determinado por una estrategia ganadora para cada contendiente? En este capítulo abordaremos estas cuestiones.

El estudio sistemático de los juegos de pensar como el ajedrez, las damas o el Go dio comienzo en 1913 con Ernst Zermelo.[1] Los juegos en la vida real siempre tienen una duración finita, están destinados a acabar tras un número finito de turnos, por lo que en nuestro formalismo matemático admitiremos en primera instancia que esta condición se cumple. Por el contrario, no será relevante si el número posible de posiciones y respuestas es finito o no; podríamos pensar, por ejemplo, en un tablero de ajedrez con infinitas casillas e infinitas piezas. En su trabajo Zermelo permitió incluso que las partidas tuviesen longitud infinita, a costa de añadir la restricción de que el número de respuestas posibles en cada posición dada fuese finito: podríamos imaginar, por ejemplo, un tablero infinito en el que el número de piezas sea 32 como en una partida normal de ajedrez y cada pieza tenga permitidos únicamente los movimientos que son posibles en un tablero de 64 escaques. Examinaremos la situación específica considerada por Zermelo en la sección 3.5.

Este capítulo mezcla ideas [14, pp. 1–8] y [19] en clave bastante personal.

[1](1871–1953) Matemático alemán cuya contribución más importante fue la axiomatización de la teoría de conjuntos para la cual propuso siete axiomas: el de extensionalidad, el de conjuntos elementales, el de separación, el del conjunto-potencia, el de unión, el de elección y el de infinitud [18].

3.1. La puesta en escena

Comencemos con unas primeras nociones en teoría de juegos.

La "puesta en escena" es la siguiente: hay dos jugadores, llamados *Jugador I* y *Jugador II*, que están jugando a un juego **mental** por turnos (por ejemplo, con piezas en un tablero) el uno contra el otro. A partir de una posición inicial predeterminada, el *Jugador I* siempre comienza la partida realizando algún movimiento, a continuación el *Jugador II* efectuará el suyo, por lo que ambos por turnos continuarán con el juego. En algún punto de éste, la **partida terminará** y uno de los dos jugadores habrá ganado el juego. Para simplificar, solo consideraremos los juegos de *suma-cero*, lo que significa que exactamente uno de los dos jugadores gana el juego y no hay empates. En otras palabras:

Jugador I gana la partida si y solo si
Jugador II pierde la partida, y viceversa.

Como no estamos considerando otras alternativas debemos excluir la posibilidad de un empate. Así, el empate significará la victoria de uno de los dos jugadores, por ejemplo, daremos la victoria al jugador de piezas negras en el ajedrez (puesto que éste parte con una ligera desventaja al no mover el primero). Esta restricción es necesaria, pero veremos que se omite con facilidad y no afectará a nuestro modelo matemático.

Asumimos también que los dos jugadores tienen una *información perfecta* del juego. Es decir, ambos jugadores poseen un conocimiento y acceso completo a la forma y desarrollo del juego hasta el momento. En el ajedrez en concreto, supondremos que la posición dada contiene toda la información hasta el momento.

Este marco incluye juegos de pensar tales como el ajedrez, las damas, el Go o las tres en raya; y algunos menos conocidos como el reversi o el juego del molino entre otros.

3.2. Juegan blancas y...

Tras establecer nuestro punto de partida, es claro que el ajedrez cumple todos nuestros requisitos: tenemos a dos jugadores, *Blancas* y *Negras* en este caso, las *Blancas* realizan el primer movimiento y los jugadores se van alternando los turnos. Al cabo de cada movimiento cada jugador sabe perfectamente toda la información del juego, y al concluir la partida, las *Blancas* ganan o las *Negras* ganan (recordemos que las tablas darían la victoria al bando de las *Negras*). Finalmente, si aceptamos las reglas de tablas que estipula la normativa moderna y ya comentadas en el capítulo anterior, tenemos que el ajedrez es un juego finito. De hecho, como hay 64 casillas, donde cada una de ellas puede ser ocupada como máximo por una pieza, y a su vez habrán 32 piezas al empezar la partida, entonces podemos dar la cota más alta de las diferentes posiciones en el ajedrez. Esta cota viene dada por el gigantesco número $50 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2^4 \cdot 2^{16} \cdot 64^{33} = K$ (estamos teniendo en cuenta las reglas de los cincuenta movimientos y las tres repeticiones, el turno, la posibilidad de enroque o la captura al paso para cada bando; es decir, dos posiciones con una idéntica distribución de piezas pueden ser diferentes para nosotros). Observemos que con este criterio generalizado de "posición" una misma posición no puede darse dos veces en el tablero (serían tablas y por tanto ganarían las *Negras*), así que la duración de la partida estará también acotada por K.

¿Cómo podemos dar un modelo o formalizar el ajedrez para luego estudiar el caso de Zermelo? Obviamente hay muchas formas de hacerlo. Una de las más naturales sería usar la notación algebraica que explicamos en la introducción de este trabajo, que permite describir una partida de ajedrez como una sucesión de movimientos. A continuación se muestra un ejemplo de una partida muy breve de ajedrez, el famoso mate del Pastor:

Blancas	e4		Qh5		Ac4		Dxf7#	
Negras		e5		Cc6		Cf6		

Una forma alternativa de describir los movimientos de cada jugador (la cual utilizaremos) será la de asignar un número natural a cada posición única de las piezas en el tablero y escribir por tanto las posiciones en lugar de los movimientos. De este modo, a partir de la posición inicial n_0, la partida se describiría así:

Blancas	b_1		b_2		b_3		b_4	
Negras		n_1		n_2		n_3		$\ldots$

Definición 3.2.1. *Llamaremos* ***juego finito*** *a una cuaterna $G = (P, D, B, N)$ donde P, el conjunto de* ***posiciones*** *del juego, es un subconjunto de $\mathbb{N}$, el número natural D es la* ***duración*** *del juego, y las aplicaciones $B : P \to 2^P$ y $N : P \to 2^P$ (siendo 2^P el conjunto de las partes de P) asignan a cada posición $p \in P$ dos conjuntos $B(p), N(p) \subset P$ que representan el conjunto de las respuestas* ***legales*** *de las* Blancas *(respectivamente, de las* Negras*) en la posición p.*

Resaltamos que en el ajedrez convencional $P = \{1, 2, \ldots, K'\}$ con K' acotado por el número K anteriormente indicado y por tanto los conjuntos $B(p), N(p)$ son también finitos. Sin embargo nuestro formalismo permite que P pueda ser también el conjunto de todos los números naturales y que los conjuntos $B(p), N(p)$ sean arbitrarios (posiblemente infinitos).

Definición 3.2.2. *Si $N(p) = \emptyset$ (respectivamente, $B(p) = \emptyset$), diremos que las* Blancas *(respectivamente, las* Negras*)* ***dan mate*** *con p.*

Definición 3.2.3. *Llamaremos* ***partida*** *en G con* ***posición inicial*** *$n_0 \in P$ (o simplemente* ***partida*** *en G si se sobreentiende n_0) a todo vector $\mathbf{j}$ de P^{2D+1} cuyo primer término es n_0. La representaremos como $\mathbf{j} = (n_0, b_1, n_1, \ldots, b_D, n_D)$ y llamaremos a sus términos (excepto n_0) las* ***jugadas*** *de la partida $\mathbf{j}$.*

Definición 3.2.4. *Diremos que una partida es* ***tablas*** *si todas sus jugadas son legales, es decir $b_k \in B(n_{k-1})$ y $n_k \in B(n_k)$ para todo $1 \leq k \leq D$.*

Definición 3.2.5. *Diremos que las* Blancas ***ganan*** *la partida $\mathbf{j}$ si dan mate con b_k para algun $1 \leq k \leq D$ y las jugadas precedentes son legales. En caso contrario, diremos que las* Negras ***ganan*** $\mathbf{j}$.

Observación 3.2.6. *Nótese que las* Negras *ganan una partida $\mathbf{j}$ cuando o bien dan mate en n_k para algún k y las jugadas precedentes son legales, o bien $\mathbf{j}$ es tablas. Así pues, con nuestro formalismo, todas las partidas tienen un único ganador.*

Algunos detalles adicionales en relación al modo de aplicar nuestro formalismo al ajedrez convencional:

- Si fijamos como duración D del juego el número K del que hablamos antes, no puede haber una partida de "tablas" porque antes ya se habrá llegado a alguna posición ilegal por parte de algún bando; a partir de entonces es irrelevante lo que ocurra (los contendientes mueven "al azar" hasta completar sus D jugadas). Si el número D es mucho menor que K, podría ocurrir que se llegara al final del juego sin que ninguno de los bandos haya dado mate o se haya producido una de las situaciones de empate previstas por la normativa. En tal caso estaríamos en una situación de "tablas" en el sentido de la definición 3.2.4 que, según nuestro formalismo, cuenta como una victoria de las *Negras*.

- Como queremos que las *Negras* ganen si ninguno de los bandos da mate, el ahogado se resuelve así: las *Negras* también "dan mate" si ahogan al rey blanco; en cambio ahogar al rey negro es ilegal.

3.3. Estrategia

Hasta ahora sólo hemos formulado las nociones básicas de los juegos finitos, pero no hemos visto ningún resultado importante todavía. El principal concepto en el estudio de los juegos finitos (e infinitos) es el de una *estrategia*. Informalmente, una estrategia para un jugador es un método de determinación del siguiente movimiento basado en la posición actual del tablero.

Definición 3.3.1. *Una **estrategia** es una aplicación $e : P \to P$.*

Ahora, ya somos capaces de introducir uno de los conceptos más cruciales de toda la teoría de juegos: *la estrategia ganadora*. En lo que sigue consideramos un juego finito G de duración D.

Definición 3.3.2. *Decimos que una posición n_0 **está estratégicamente ganada por las** **Blancas** si existe una estrategia e tal que, para cada secuencia de posiciones $(n_k)_{k=1}^{D}$, las* Blancas *ganan la partida $(n_0, e(n_0), n_1, e(n_1) \dots, n_{D-1}, e(n_{D-1}), n_D)$. Llamaremos a e una **estrategia ganadora para las** **Blancas** en la posición n_0.*

Definición 3.3.3. *Decimos que una posición n_0 **está estratégicamente ganada por las** **Negras** si existe una estrategia f tal que, para cada secuencia de posiciones $(b_k)_{k=1}^{D}$, las* Negras *ganan la partida $(n_0, b_1, f(b_1), \dots b_D, f(b_D))$. Llamaremos a f una **estrategia ganadora para las** **Negras** en la posición n_0.*

Definición 3.3.4. *Decimos que la posición n_0 es **decidible** si existen $M \geq 1$ y $b_1 \in P$ tales que*

$$\forall n_1 \exists b_2 \forall n_2 \cdots \exists b_{M-1} \forall n_{M-1} \exists b_M : \textit{las } \text{Blancas } \textit{ganan } (n_0, b_1, n_1, b_2, n_2, \dots, b_{M-1}, n_{M-1}, b_M),$$

es decir, ganan cualquier partida que empiece por $(n_0, b_1, n_1, b_2, n_2, \dots, b_{M-1}, n_{M-1}, b_M)$.

*Si M es minimal con esta propiedad diremos que n_0 es M-**decidible** y diremos que la posición b_1 es **óptima** para n_0. Si n_0 no es decidible la llamaremos **indecidible**.*

El siguiente lema es inmediato.

Lema 3.3.5. *Si n_0 es M-decidible, b_1 es óptima para n_0 y $n_1 \in N(b_1)$, entonces n_1 es L-decidible con $L < M$.*

Proposición 3.3.6. *Supongamos que n_0 es M-decidible. Entonces las* Blancas *tienen una estrategia ganadora para n_0. Más aún, las* Blancas *ganan a lo sumo en M jugadas aplicando dicha estrategia e, es decir, las* Blancas *ganan cualquier partida que empiece con $(n_0, e(n_0), n_1, e(n_1), n_2, e(n_2) \ldots, n_{M-1}, e(n_{M-1}))$ independientemente de como se elija la secuencia $(n_k)_{k=1}^{M-1}$.*

Demostración.

Sea H el conjunto de posiciones n para las que hay una secuencia legal $(n_0, b_1, n_1, \ldots, b_l, n_l)$, $l \geq 0$, tal que $n = n_l$ y cada b_k es óptima para n_{k-1}. Notemos que si $n \in H$ entonces es L-decidible con $L \leq M - l$ (lema 3.3.5). Ahora basta definir $e : P \to P$ de manera que si $n \in H$ entonces $e(n)$ sea óptima para n (si $p \notin H$, entonces $e(p)$ puede definirse arbitrariamente). Es claro que e es una estrategia ganadora en n_0 con la que se gana en M jugadas a lo sumo. □

3.4. Decibilidad de un juego finito

Tras haber introducido el concepto de estrategia ganadora es natural preguntarse la siguiente cuestión: ¿Ocurre que alguno de los jugadores tiene una estrategia ganadora en una partida dada?

Proposición 3.4.1. *Sea $n_0 \in P$. Entonces las* Blancas *y las* Negras *no pueden tener al mismo tiempo estrategias ganadoras para n_0.*

Demostración.

Supongamos que existieran dichas estrategias ganadoras e y f y considérese la partida $\mathbf{j}$ definida inductivamente mediante $b_k = e(n_{k-1})$ y $n_k = f(b_k)$. Por la definición de e y f, $\mathbf{j}$ estaría a la vez ganada por las *Blancas* y por las *Negras*, lo que nos lleva a una contradicción. □

Teorema 3.4.2 (Primer teorema de Zermelo, versión finita)**.** *Sea G un juego finito de duración D. Entonces toda posición inicial n_0 es decidible, es decir, o bien las* Blancas *tienen una estrategia ganadora para n_0 o bien las* Negras *tienen una estrategia ganadora para n_0, y ambas cosas no pueden ocurrir a la vez.*

Demostración.

Por la proposición anterior 3.4.1 solo uno de los jugadores puede tener una estrategia ganadora. Ahora bien, en vista de la proposición 3.3.6, es claro que las *Blancas* tienen una estrategia ganadora si se cumple lo siguiente:

$$\exists b_1 \forall n_1 \exists b_2 \forall n_2 \ldots \exists b_D \forall n_D : \text{las } \textit{Blancas} \text{ ganan } \mathbf{j} = (n_0, b_1, n_1, b_2, n_2, \ldots, b_D, n_D).$$

Supongamos entonces que las *Blancas* no tienen una estrategia ganadora. Se tendrá:

$$\neg(\exists b_1 \forall n_1 \exists b_2 \forall n_2 \ldots \exists b_D \forall n_D : \text{las } \textit{Blancas} \text{ ganan } \mathbf{j}).$$

Por la dualidad de la lógica de primer orden sobre la negación de cuantificadores, esto implica:

- $\forall b_1 \neg(\forall n_1 \exists b_2 \forall n_2 \ldots \exists b_D \forall n_D$: las *Blancas* ganan $\mathbf{j}$).
- $\forall b_1 \exists n_1 \neg(\exists b_2 \forall n_2 \ldots \exists b_D \forall n_D$: las *Blancas* ganan $\mathbf{j}$).
- $\forall b_1 \exists n_1 \forall b_2 \neg(\forall n_2 \ldots \exists b_D \forall n_D$: las *Blancas* ganan $\mathbf{j}$).
- $\forall b_1 \exists n_1 \forall b_2 \exists n_2 \neg(\ldots \exists b_D \forall n_D$: las *Blancas* ganan $\mathbf{j}$).

  ...
- $\forall b_1 \exists n_1 \forall b_2 \exists n_2 \ldots \forall b_D \exists n_D$: las *Negras* ganan $\mathbf{j}$.

Pero en este último caso, razonando como en la proposición 3.3.6, es fácil deducir que las *Negras* tienen una estrategia ganadora en n_0. □

Si el conjunto de posiciones P es finito podemos decir algo más (denotamos por $|P|$ la cardinalidad de P):

Teorema 3.4.3 (Segundo teorema de Zermelo, versión finita)**.** *Independientemente de la posición de inicio n_0, o bien las* Blancas *tienen una estrategia con la que ganan en a lo sumo $|P|$ jugadas, o bien las* Negras *tienen una estrategia con la que ganan en a lo sumo en $|P|$ jugadas.*

Demostración.

Podemos suponer que son las *Blancas* las que tienen la estrategia ganadora (el otro caso es análogo): Sea H la familia de posiciones decidibles y H_M la familia de posiciones M-decidibles para cada $M \geq 1$. Entonces $|H| = \sum_{M=1}^{\infty} |H_M|$. Como H es finito, existe M' (minimal) tal que $H_M = \emptyset$ para todo $M > M'$. Sea $n_0 \in H_{M'}$ y sea b_1 óptima para n_0. Por la definición de M'-decidibilidad, existe $n_1 \in N(b_1)$ $(M'-1)$-decidible; en particular, $H_{M'-1} \neq \emptyset$. Reiterando el argumento, $H_M \neq \emptyset$ para todo $1 \leq M \leq M'$. Entonces $M' \leq |H| \leq |P|$, como queríamos demostrar. □

Este curioso resultado nos viene a decir que cuando una partida está ganada, lo está a sumo en P jugadas. Así pues, guardemos la calma: del ajedrez siempre se ha dicho que es un juego donde no cabe la prisa.

En nuestra formalización del ajedrez con posiciones finitas, acabamos de ver que las *Blancas* tienen una estrategia ganadora o las *Negras* tienen una estrategia para ganar o hacer tablas. Por supuesto, ahora parece insatisfactorio equiparar un empate a una victoria de las *Negras*, así que esto es lo que podemos hacer para evitarlo: simplemente definimos dos juegos diferentes, los llamaremos "*ajedrez blanco*" y "*ajedrez negro*", que serán como el ajedrez pero en el primer caso, un empate se considera una victoria para el blanco y en el segundo caso, una victoria para el negro. Ambos juegos son finitos y decidibles, de hecho hay cuatro posible combinaciones de asignar estrategias ganadoras a los dos jugadores. La siguiente tabla muestra las cuatro posibilidades y la conclusión para el ajedrez real en cada caso. ("e.g." es la abreviatura de estrategia ganadora,"e.t." para tablas):

Ajedrez Blanco	**Ajedrez Negro**	**Ajedrez Real**
Blancas tienen e.g.	*Blancas* tienen e.g.	*Blancas* tienen e.g.
Negras tienen e.g.	*Blancas* tienen e.g.	Imposible
Blancas tienen e.g.	*Negras* tienen e.g.	*Blancas* y *Negras* tienen e.t.
Negras tienen e.g.	*Negras* tienen e.g.	*Negras* tienen e.g.

Esto nos lleva al siguiente corolario.

Corolario 3.4.4. *En ajedrez, o las* Blancas *tienen una estrategia ganadora, o las* Negras *tienen una estrategia ganadora, o ambas tienen una estrategia para tablas.*

Hay que tener en cuenta que, por supuesto, el corolario anterior solo es un hecho matemático, esto es, se sabe de la existencia de una estrategia ganadora ¡pero no nos dice cuál es ni quién la tiene! De conocerse dicha estrategia el ajedrez habría perdido su carácter de ser un juego real. Para llevar a cabo esto, uno tendría que analizar a través de un árbol todas las posibles partidas de ajedrez, una hazaña que implica analizar un número de partidas tan enorme que es prácticamente imposible (aunque hay juegos más fáciles que el ajedrez que han sido resueltos en este sentido). Claude Shannon, ingeniero y matemático estadounidense, es recordado como "el padre de la teoría de la información". Entre otras cosas, en 1950 publicó un artículo donde bosquejaba los algoritmos básicos para desarrollar un programa que jugara al ajedrez. Y de hecho, la mayoría del software de ajedrez actual se basa en estos principios [21].

Claude Shannon hizo un cálculo del número total de partidas posibles, que formarían el árbol completo del juego del ajedrez. Obtuvo la cifra de 10^{20} (actualmente se estima que este número es "algo"mayor, 10^{23}).

Por otra parte, tal método del árbol de análisis solo es posible en los juegos con un número finito de posibles movimientos (como el ajedrez), pero el teorema 3.4.2 se puede aplicar igualmente a los juegos finitos con una posibilidad infinita de movimientos.

3.5. Coqueteando con el infinito

Los resultados de las secciones anteriores se pueden generalizar sin dificultad a situaciones más generales, tal como hizo Zermelo. Así, llamaremos ahora **juego infinito** a una terna $G = (P, B, N)$ donde, como antes, el conjunto de posiciones P es un subconjunto (posiblemente infinito) de los naturales y las jugadas legales de *Blancas* y *Negras* están determinadas por sendas aplicaciones $B : P \to 2^P$, $N : P \to 2^P$. Sin embargo, añadiremos una restricción que no era necesaria en el caso anterior: todos los conjuntos $B(p)$ y $N(p)$ son finitos. Por el contrario, las partidas **j** son ahora infinitas, es decir, sucesiones (infinitas) de elementos de P, y una partida sería tablas cuando es una sucesión de jugadas legales por ambos bandos. Notemos que este es el formalismo que en puridad mejor se adapta al ajedrez, ya que no se necesitan condiciones artificiales de tablas que, en cierto modo, son ajenas a la esencia del juego. La noción de victoria no cambia, esto es, las *Blancas* ganan cuando dan mate tras una secuencia finita de movimientos legales (el resto de términos hasta completar la sucesión son irrelevantes), mientras que las *Negras* ganan o bien dando mate o bien defendiéndose todo el tiempo (tendríamos tablas). Los conceptos de estrategia ganadora, M-decibilidad e indecibilidad también se extienden del modo obvio.

A continuación mostramos cómo extender los teoremas de Zermelo 3.4.2 y 3.4.3 a este contexto. La novedad es que la indecibilidad no es simplemente la M-decibilidad en versión *Negras*. Necesitamos los siguientes resultados. El primer lema es inmediato, pero obsérvese que es justo ahí donde se necesita que los conjuntos $B(p)$ y $N(p)$ sean finitos.

Lema 3.5.1. *Supongamos que n_0 es indecidible. Entonces, para cada $b \in B(n_0)$, existe $n \in N(b)$ indecidible.*

Proposición 3.5.2. *Supongamos que n_0 es indecidible. Entonces las* Negras *tienen una estrategia ganadora para n_0.*

Demostración.

Definimos $f : P \to P$ como sigue. Sea H la unión de todos los conjuntos $B(n)$ con n indecidible y sea $b \in H$. Entonces usamos el lema 3.5.1 para encontrar $n \in N(b)$ indecidible y definimos $f(b) = n$. Si $p \in P \setminus H$ entonces definimos $f(p)$ arbitrariamente.

Consideremos la partida $\mathbf{j} = (a_0, b_1, f(b_1), \dots, b_k, f(b_k), \dots)$ para una cierta sucesión $(b_k)_{k=1}^{\infty}$. Mostramos que las *Negras* ganan **j**. Supongamos que $(a_0, b_1, f(b_1), \dots, b_k)$ es una secuencia de jugadas legales para un cierto k. Entonces es sencillo comprobar por inducción, usando la definición de f, que todas las posiciones $b_1, \dots, b_k$ están en H y todas las posiciones $f(b_1), \dots, f(b_k)$ son indecidibles. En particular, la secuencia $(a_0, b_1, f(b_1), \dots, b_k, f(b_k))$ también es legal.

Hemos probado que la primera jugada no legal de **j**, si existe, es de las *Blancas*. Esto, unido a que las *Negras* ganan por definición si la partida es tablas, concluye la demostración. $\square$

Las proposición 3.5.2, así como las adaptaciones obvias a nuestra situación de las proposiciones 3.3.6 y 3.4.1, implican inmediatamente:

Teorema 3.5.3 (Primer teorema de Zermelo, versión infinita)**.** *Sean G un juego infinito y n_0 una posición inicial arbitraria. Entonces se da una y sólo una de las siguientes posibilidades:*

a) n_0 es M-decidible para algún $M \geq 1$ y las Blancas tienen una estrategia ganadora para la posición n_0.

b) n_0 es indecidible y las Negras tienen una estrategia ganadora para la posición n_0.

La prueba de nuestro último resultado del capítulo es la misma que la del teorema 3.4.3:

Teorema 3.5.4 (Segundo teorema de Zermelo, versión infinita)**.** *Si* $|P|$ *es finito y la posición de partida es decidible, entonces las* Blancas *tienen una estrategia con la que ganan en a lo sumo* $|P|$ *jugadas.*

Capítulo 4

Jaque al álgebra abstracta

4.1. "Cuando veas un buen movimiento, busca uno mejor."(Emanuel Lasker)

A cualquier matemático que le preguntemos por una conexión entre el ajedrez y las estructuras algebraicas como las de grupo, anillo, cuerpo o espacio vectorial podría afirmar que hemos perdido la cordura. No obstante, solamente hasta cierto punto.

Esta conexión viene de la mano de Emanuel Lasker (1868-1941), matemático alemán y gran dominador del ajedrez mundial en su época. Fue campeón mundial durante 27 años, de 1894 a 1921, estableciendo un récord que todavía no ha sido superado. Como decimos su reinado comienza en 1894, cuando derrota contundentemente a Wilhelm Steinitz, campeón del mundo en ese momento. A partir de ahí, Lasker fue devorando rivales en las sucesivas defensas de su trono hasta que en 1921 el cubano José Raúl Capablanca lo derrotó de forma estrepitosa, Lasker no ganó ninguna de las 14 partidas disputadas [13].

Su trabajo más importante, véase [15], sobre la descomposición de ideales en ideales primarios para el caso de anillos de polinomios, fue generalizado por Emmy Noether constituyendo lo que ahora se conoce como teorema de Lasker-Noether, un resultado de gran importancia para la geometría algebraica moderna. La prueba de este teorema constituye el objetivo central del capítulo.

4.2. El teorema de Lasker-Noether

El significado e importancia del teorema de Lasker-Noether se basa en la noción de descomposición primaria. Ésta constituye la generalización de dos ideas fundamentales:

- En geometría algebraica, la descomposición de una variedad algebraica en componentes irreducibles se corresponde por el paso de ideales con descomposiciones primarias. Consideremos los conjuntos algebraicos afines $\mathcal{V}(I) \subseteq K^n$ para $I \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ un ideal, con K algebraicamente cerrado. Por el teorema de la base de Hilbert —mencionado al final del capitulo— todos estos ideales son finitamente generados, digamos $I = (f_1, \ldots, f_k)$ con $f_i \in I$. Se sigue que $\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(f_1) \cap \ldots \cap \mathcal{V}(f_k)$, es decir, todos los conjuntos algebraicos afines son la intersección de un número finito de hipersuperficies $\mathcal{V}(f_i) \subseteq K^n$. En otras palabras, en la definición de los conjuntos algebraicos afines $\mathcal{V}(I)$ basta considerar conjuntos finitos de polinomios (que generen el ideal I).

- Existen anillos de enteros que no siendo *Dominio de Factorización Única*, si son *Dominios de Dedekind* y por tanto admiten factorizaciones de cada ideal como producto de primos debido a la descomposición primaria.

Sea a partir de ahora A un anillo conmutativo (resultados parcialmente basados en [3, Cap. IV] y [8, Cap. VII]).

Definición 4.2.1. *Un subcojunto I de A es un **ideal** de A si contiene al 0 y es cerrado para sumas y A-múltiplos ($a, b \in I, x \in A \Rightarrow a + b \in I, ax \in I$). Esto último es equivalente a que I sea cerrado para combinaciones A-lineales ($a_1, \ldots, a_n \in I, x_1, \ldots, x_n \in A \Rightarrow a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \in I$).*

Definición 4.2.2. *Se llamará **ideal propio** a todo ideal no trivial distinto de A.*

Observación 4.2.3. *La intersección de ideales de A es un ideal de A.*

Definición 4.2.4. *Fijado un subconjunto $S \subseteq A$, el **ideal de A generado por S** es la intersección de todos los ideales de A que contienen a S, y por tanto es el menor ideal de A que contiene a S. Se suele denotar por (S) y se puede describir como el conjunto de todas las combinaciones A-lineales de (un número finito de) elementos de S.*

Observación 4.2.5. *La unión de una familia $\{I_\alpha\}$ de ideales de A no es, en general, un ideal. El ideal generado por esa unión consiste en sumas finitas de elementos tomados de los I_α, por lo que se le llama la **suma** de esos ideales y se denota por $\sum_\alpha I_\alpha$. En particular, la suma de dos ideales es*

$$I + J = \{a + b\}_{a \in I, b \in J}$$

Definición 4.2.6. *Un ideal I es **finitamente generado** si está generado por un conjunto finito $\{a_i, \ldots, a_n\}$. En este caso se tiene $I = (a_i, \ldots, a_n) = (a_1) + \ldots + (a_n) = \{x_1a_1 + \ldots + x_na_n : x_1, \ldots, x_n \in A\}$.*

Definición 4.2.7. *Dados dos ideales I, J de A, se define el ideal **cociente** como*

$$(I : J) = \{x \in A : xJ \subseteq I\}$$

Observación 4.2.8. *Denotaremos al ideal cociente $(I : (a))$, donde $a \in I$, como $(I : a)$.*

Proposición 4.2.9. *Para I, J_1, J_2 ideales de A se tienen las siguientes propiedades:*

i) *Si* $J_1 \subseteq J_2 \Rightarrow (I : J_1) \supseteq (I : J_2)$

ii) *Si* $J_1 \subseteq J_2 \Rightarrow (J_1 : I) \subseteq (J_2 : I)$

Definición 4.2.10. *Un anillo A es **noetheriano** si todos sus ideales son finitamente generados.*

Veamos un resultado que será útil para la prueba del teorema.

Proposición 4.2.11. *Si A es un anillo, son equivalentes:*

i) *A es noetheriano.*

ii) *Toda cadena ascendente de ideales*

$$I_1 \subset I_2 \subset \ldots \subset \ldots$$

se estaciona, i.e., existe un entero m tal que $I_m = I_{m+1} = \ldots$.

iii) *Todo conjunto no vacío de ideales de A tiene un elemento máximo, i.e, un ideal que no está contenido en ninguno de los ideales de la familia dada.*

Demostración.

$i) \Rightarrow ii)$: Sea $I := \bigcup I_j$. Como los ideales I_j están encadenados, entonces I es un ideal de A. Por hipótesis I es finitamente generado, digamos $I = (a_1, \ldots, a_n)$, donde notamos que para m suficientemente grande se tiene que $a_i \in I_m$ y por lo tanto $I \subset I_m$, i.e., $I_k = I_m$ para toda $k \geq m$.

$ii) \Rightarrow iii)$: Supongamos por reducción al absurdo que $\mathscr{F}$ es una familia no vacía de ideales propios de A que no contiene un elemento máximo, entonces para cualquier $I_1 \in \mathscr{F}$ existe un $I_2 \in \mathscr{F}$ tal que $I_1 \subsetneq I_2$. De esta manera se construye una cadena que no se estaciona.

$iii) \Rightarrow i)$: Si $I \subsetneq A$ es un ideal propio, sea $\mathscr{F}$ la familia de ideales contenidos en I de la forma $(a_1, \ldots, a_m)$. Por hipótesis esta familia tiene un elemento máximo, digamos $(a_1, \ldots, a_n)$. Entonces, para todo $a \in I$ se tiene que $(a_1, \ldots, a_n, a) \subseteq (a_1, \ldots, a_n)$, y como éste es máximo se sigue que $(a_1, \ldots, a_n, a) = (a_1, \ldots, a_n)$ y por lo tanto $a \in (a_1, \ldots, a_n)$ y así $I = (a_1, \ldots, a_n)$. $\square$

Observación 4.2.12. *En el resultado anterior no es necesario que los ideales sean propios ya que si $I = A$, el $1 \in I$, lo que implica que en la cadena $1 \in I_j$ para algún j, luego $I_j = A$ y la cadena de ideales se estaciona y tiene un elemento máximo.*

Definición 4.2.13. *Un ideal I de A es **irreducible** si para cualesquiera ideales J_1, J_2 tales que $I = J_1 \cap J_2$ se tiene que $I = J_1$ o $I = J_2$.*

Definición 4.2.14. *Un ideal I propio de un anillo A es **primario** si se cumple que $ab \in I \Rightarrow a \in I$ o $b^n \in I$ para algún $n > 0$.*

Definición 4.2.15. *Llamamos **descomposición primaria** de un ideal I en A a una expresión de I como una intersección finita de ideales primarios, es decir*

$$I = \bigcap_{i=1}^{n} J_i$$

Definición 4.2.16. *Un ideal es **descomponible** si tiene descomposición primaria.*

Tras estas definiciones pasemos a atacar al rey adversario.

Teorema 4.2.17 (Lasker-Noether)**.** *Sea A un anillo conmutativo noetheriano con $1 \neq 0$. Entonces todo ideal en A es descomponible.*

Demostración.

La prueba del teorema consta de dos etapas:

Proposición 4.2.18. *Todo ideal en A puede ser escrito como una intersección finita de ideales irreducibles.*

Demostración.

Por reducción al absurdo, sea S el conjunto de todos los ideales de un anillo noetheriano A que no puede ser expresado como intersección finita de ideales irreducibles, supongamos que $S \neq \emptyset$. Por la proposición 4.2.11, denotemos por I al elemento máximo de esta S. Así, $I \in S$ es reducible, es decir, lo podemos escribir como $I = J_1 \cap J_2$ con $I \subsetneqq J_i$. Ahora bien, Si $J_1 \in S$, entonces I no puede ser máximo por lo que $J_1 \notin S$. Análogamente se llega a que $J_2 \notin S$. Por la maximalidad de I cada J_i es una intersección finita de ideales irreducibles y juntándolas se tiene que I es intersección finita de irreducibles lo que implica que $I \notin S$, una contradicción. Por ende, $S = \emptyset$. □

Proposición 4.2.19. *Todo ideal irreducible en A es primario.*

Demostración.

Si I es irreducible, supongamos que $ab \in I$ y que $a \notin I$, por la definición de ideal primario queremos probar que $b^n \in I$, para algún n.

Como

$$\ldots \subseteq (b^n) \ldots \subseteq (b^2) \subseteq (b),$$

tenemos por $i)$ de la proposición 4.2.9 una cadena de ideales

$$(I : b) \subseteq (I : b^2) \subseteq \ldots,$$

que por ser A noetheriano se estaciona, es decir, $(I : b^n) = (I : b^{n+1}) = \ldots$, para algún $n \geq 1$.

Veamos ahora que

$$((b^n) + I) \cap ((a) + I) = I \tag{4.1}$$

"$\supseteq$" Es obvio que $I \subseteq ((a) + I)$ y $I \subseteq ((b^n) + I)$.

"$\subseteq$" Si $r \in ((b^n) + I) \cap ((a) + I)$, escribiendo

$$r = b^n s + x \text{ y } r = at + x' \text{ con } x, x' \in I \text{ y } s, t \in A,$$

multiplicando por b, la primera igualdad implica que $b^{n+1}s = rb - xb \in I$ y la segunda igualdad implica que $rb = bat + x'b \in I$. Por lo tanto $s \in (I : b^{n+1}) = (I : b^n)$ y así $r = b^n s + x \in I$.

Ahora, como I es irreducible, la igualdad 4.1 junto con la hipótesis de que $a \notin I$ (por lo que $(a) + I \neq I$) implican que $(b^n) + I = I$. Por ende, $b^n \in I$ como se quería demostrar.

□

Esto completa la demostración del teorema pues ahora cada irreducible en A es primario y por tanto, cada ideal puede expresarse como intersección finita de ideales primarios cumpliendo así la definición de ideal descomponible.

□

Observación 4.2.20.

i) *El teorema fue demostrado primero para el caso de anillos de polinomios por Lasker, que introdujo la noción de ideal primario. A Emmy Noether*[1] *se debe el haber descubierto que el teorema es consecuencia de la condición de cadena ascendente.*

ii) *Se dice que un anillo es* ***Lasker*** *si todo ideal es descomponible. El teorema Lasker-Noether dice que cada anillo noetheriano conmutativo con $1 \neq 0$ es Lasker. No obstante, hay anillos Lasker que no son noetherianos. Veámos un ejemplo.*

Ejemplo 4.2.21. *Sea K un cuerpo y $\mathscr{R}$ el conjunto de las clases de equivalencia de los elementos de la forma $\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$ donde x, y son indeterminadas sobre K y $f, g \in K[x,y]$, donde x no divide a g (en $K[x,y]$) y $\dfrac{f(0,y)}{g(0,y)} \in K$. Así, $\mathscr{R}$ es un anillo por la usual adición y multiplicación de funciones racionales. Entonces podemos demostrar que R es un anillo conmutativo no noetheriano donde todo ideal de $\mathscr{R}$ tiene una descomposición primaria. La prueba se muestra en [12].*

En definitiva, gracias al gran Emanuel Lasker, una vez más matemáticas y ajedrez han vuelto a fusionarse, quedando el nombre de este gran personaje grabado con letras de oro en ambas disciplinas. Tras dar finalmente jaque al álgebra abstracta, cerramos el capítulo haciendo honor a la memoria y al legado de Lasker citando dos contextos en los que su nombre sale a menudo a colación:

- El anillo $\mathbb{Z}$ es un DIP (dominio de ideales principales) y por lo tanto es noetheriano en consecuencia es **Lasker**. En particular, si K es un cuerpo, entonces el anillo de polinomios $K[x_1, \ldots, x_n]$ es noetheriano por el teorema de la base de Hilbert luego es **Lasker**.

  Observación 4.2.22 (Teorema de la base de Hilbert). *Si A es un anillo noetheriano, entonces $A[x]$ tambiénn lo es. En particular, si K es un cuerpo, entonces el anillo de polinomios $K[x_1, \ldots, x_n]$ es noetheriano.*

[1](1882–1935) Matemática alemana de origen judío cuya aportación más importante a la investigación matemática fueron sus resultados en álgebra moderna. Está considerada como una de las mujeres más importantes de la historia de las matemáticas [17].

- En 1907 presentó una nueva defensa contra el gambito de dama que usó para derrotar contundentemente a Frank James Marshall (importante jugador de la época) y que ha conservado su popularidad hasta hoy. Gambito de Dama rehusado, defensa **Lasker**:

  1. d4 d5 2.c4 e6 3.Cc3 Ae7 4.Cf3 Cf6 5.Ag5 h6 6.Ah4 0-0 7.e3 Ce4!

Figura 4.1: Posición de la defensa Lasker tras 7...Ce4.

Infinito, no. Eterno, tampoco. Pero comparándolo con nuestra escala, con nuestro universo y con nuestra inteligencia e imaginación, podemos afirmar que el ajedrez es inagotable. Siempre se podrá descubrir algo nuevo, siempre nos seguirá sorprendiendo su enorme belleza escondida que nunca acabaremos de conocer.

"¿No se sintió nunca como uno de esos peones de ajedrez pasados, que se olvidan en un rincón del tablero y oyen apagarse a su espalda el rumor de la batalla mientras intentan mantenerse erguidos, preguntándose si queda en pie un rey al que seguir sirviendo?"

La piel del tambor. Arturo Pérez-Reverte.

Bibliografía

[1] Allouche, J.-P. y Shallit, J. “The ubiquitous Prouhet-Thue-Morse sequence”, en C. Ding. T. Helleseth y H. Niederreiter, eds., *Sequences and their applications: Proceedings of SETA ’98*, Springer-Verlag, Londres, 1999, pp. 1-16.

[2] Allouche, J.-P. y Shallit, J. *Automatic sequences. Theory, applications, generalizations.* Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[3] Atiyah, M.F. y Macdonald, I.G. *Introducción al álgebra conmutativa.* Reverté, Barcelona, 1973.

[4] Bo Hansen, L. *Fundamentos de la estrategia ajedrecística.* La Casa del Ajedrez, Madrid, 2007.

[5] Börgens, M.“Max Euwe’s sequence”, 2008. `http://homepages-fb.thm.de/boergens/english/problems/problem059engl.htm`

[6] Cull, P. y De Curtins, J. “Knight’s tour revisited”. *Fibonacci Quarterly*, Vol. 16, 1978, pp. 276–285.

[7] Diestel, R. *Graph theory.* Springer-Verlag, Nueva York, 2000.

[8] Dubreil, P. y Dubreil-Jacotin, M.L. *Lecciones de álgebra moderna.* Reverté, Barcelona, 1971.

[9] Elkies, N.D. y Stanley, R.P. “The mathematical knight”. *The Mathematical Intelligencer*, Vol. 25, 2003, pp. 22–34.

[10] Euwe, M. “Mengentheoretische Betrachtungen über das Schachspiel”. *Verhandelingen der Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen*, Amsterdam, Vol. 32, 1929, pp. 633–642.

[11] Friedel, F. “A vueltas con el caballo”, 2003. `http://es.chessbase.com/post/a-vueltas-con-el-caballo`

[12] Gilmer, R.W. “Rings in which the unique primary decomposition theorem holds”. *Proceedings of the American Mathematical Society*, Vol. 14, 1963, pp. 777–781.

[13] Kasparov, G. *Mis geniales predecesores. Parte I.* Merán, Albacete, 2003.

[14] Khomskii, Y. “Infinite games”. Universidad de Sofía, 2010. `http://www.logic.univie.ac.at/~ykhomski/infinitegames2010/InfiniteGamesSofia.pdf`

[15] Lasker, E. "Zur theorie der Moduln und Ideale". *Mathematische Annalen*, Vol. 60, 1905, pp. 20–116.

[16] Morse, M. y Hedlund, G.A. "Unending chess, symbolic dynamics, and a problem in semigroups". *Duke Mathematical Journal*, Vol 11, 1944, pp. 1–7.

[17] O'Connor, J.J. y Robertson, E.F. "Emmy Amalie Noether". `http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Noether_Emmy.html`

[18] O'Connor, J.J. y Robertson, E.F. "Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo". `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Biographies/Zermelo.html`

[19] Schwalbe, U. y Walker, P. "Zermelo and the early history of game theory". *Games and Economic Behavior*, Vol. 34, 2001, pp. 123–137.

[20] Schwenk, A.J. "Which rectangular chessboards have a knight's tour?". *Mathematics Magazine*, Vol. 64, 1991, pp. 325–332.

[21] Shannon, C. "Programming a computer for playing chess". *Philosophical Magazine*, Vol. 41, 1950, pp. 2–4.