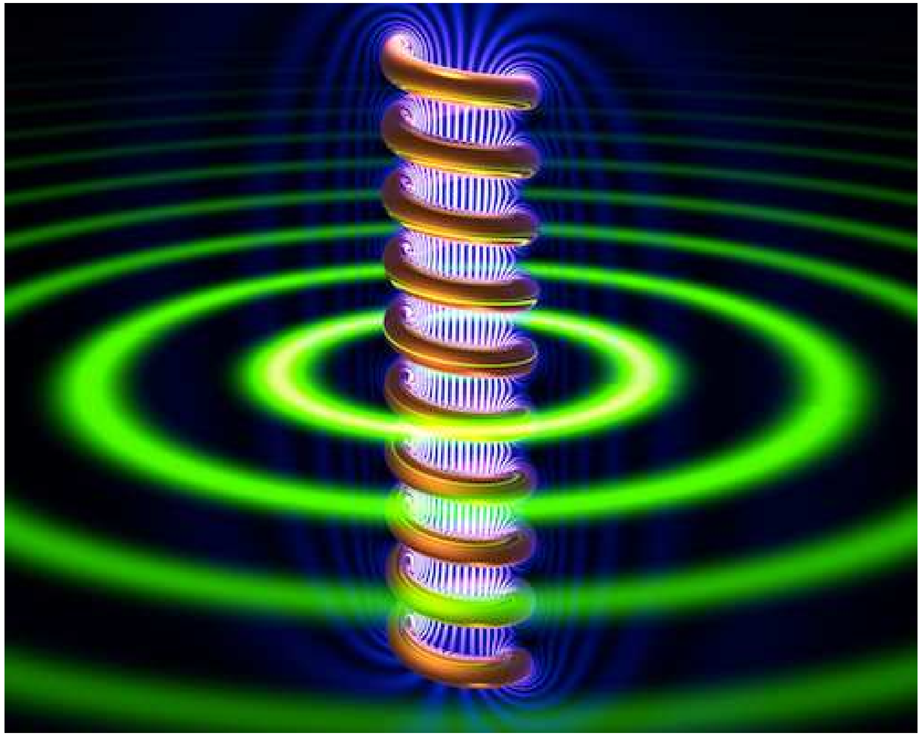
La historia de la invarianca gauge



Bert Janssen

Dep. Física Teórica y del Cosmos & CAFPE

Outlook

1. Introducción: ejemplo más sencillo (S. XVIII)

Outlook

1. Introducción: ejemplo más sencillo (S. XVIII)
2. Electromagnetismo (1820 - 1900)

Outlook

1. Introducción: ejemplo más sencillo (S. XVIII)

2. Electromagnetismo (1820 - 1900)

3. Mecánica Cuántica & Principio Gauge (1926 - 1929)

Outlook

1. Introducción: ejemplo más sencillo (S. XVIII)
2. Electromagnetismo (1820 - 1900)
3. Mecánica Cuántica & Principio Gauge (1926 - 1929)
4. Modelo Estándar (1954 - 1968)
5. Gravedad y Relatividad General (1956)

Outlook

1. Introducción: ejemplo más sencillo (S. XVIII)
2. Electromagnetismo (1820 - 1900)
3. Mecánica Cuántica & Principio Gauge (1926 - 1929)
4. Modelo Estándar (1954 - 1968)
5. Gravedad y Relatividad General (1956)
6. Miscelánea:
   - To gauge = calibrar
   - Teoría de Kaluza-Klein
   - Efecto Aharonov-Bohm
   - Monopolo de Dirac

Bibliografía

- J.D. Jackson & L.B. Okun,
  Historical roots of gauge invariance,
  Rev. Mod. Phys. 73: 663-680, 2001, `arXiv:hep-ph/0012061`.

- L. O'Raifeartaigh & N. Straumann,
  Gauge theory: Historical origins and some modern developments,
  Rev Mod. Phys 72:1, 2000.

- R.A. Alemañ Berenguer,
  El Desafío de Einstein - En busca de la unificación,
  URSS - Moscú 2011.

1. Introducción

Definiciones:

- Una teoría gauge es una teoría que usa campos gauge.
- Un campo gauge es un cantidad física que no es directamente observable, sino sólo expresiones derivadas de ello.

1. Introducción

Definiciones:

- Una teoría gauge es una teoría que usa campos gauge.
- Un campo gauge es un cantidad física que no es directamente observable, sino sólo expresiones derivadas de ello.

Nombre: *to gauge* (/geɪdʒ/) = calibrar
Original: *Eichinvarianz* = invariancia bajo recalibraciones
$\longrightarrow$ histórico (pero fructífero) error de H. Weyl en 1918

1. Introducción

Definiciones:

- Una teoría gauge es una teoría que usa campos gauge.
- Un campo gauge es un cantidad física que no es directamente observable, sino sólo expresiones derivadas de ello.

Nombre: *to gauge* (/geɪdʒ/) = calibrar
Original: *Eichinvarianz* = invariancia bajo recalibraciones
$\longrightarrow$ histórico (pero fructífero) error de H. Weyl en 1918

Principio Gauge (H. Weyl, 1929):

- Principio fundamental que describe todas las fuerzas fundamentales
- Aplicaciones en estado sólido, física nuclear, ...
- Influencia en matemáticas (teoría de formas, teoría de fibrados, ...)

1. Introducción

Definiciones:

- Una teoría gauge es una teoría que usa campos gauge.
- Un campo gauge es un cantidad física que no es directamente observable, sino sólo expresiones derivadas de ello.

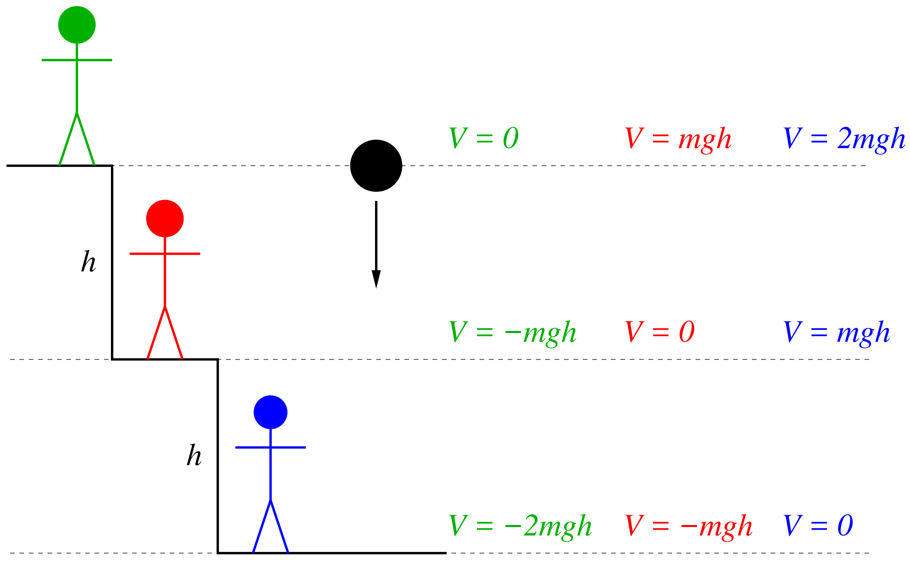
Nombre: *to gauge* (/geɪdʒ/) = calibrar
Original: *Eichinvarianz* = invariancia bajo recalibraciones
$\longrightarrow$ histórico (pero fructífero) error de H. Weyl en 1918

Principio Gauge (H. Weyl, 1929):

- Principio fundamental que describe todas las fuerzas fundamentales
- Aplicaciones en estado sólido, física nuclear, ...
- Influencia en matemáticas (teoría de formas, teoría de fibrados, ...)

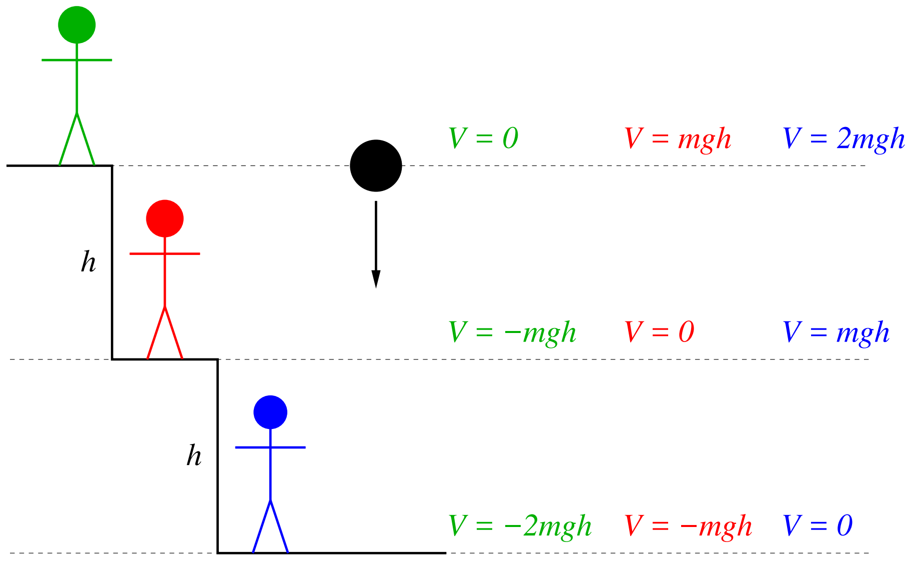
¿Por qué alguien quiere construir una teoría con campos inobservables?

Ejemplo más sencillo: energía potencial en mecánica newtoniana



Energía potencial sólo determinada módulo una constante

Ejemplo más sencillo: energía potencial en mecánica newtoniana

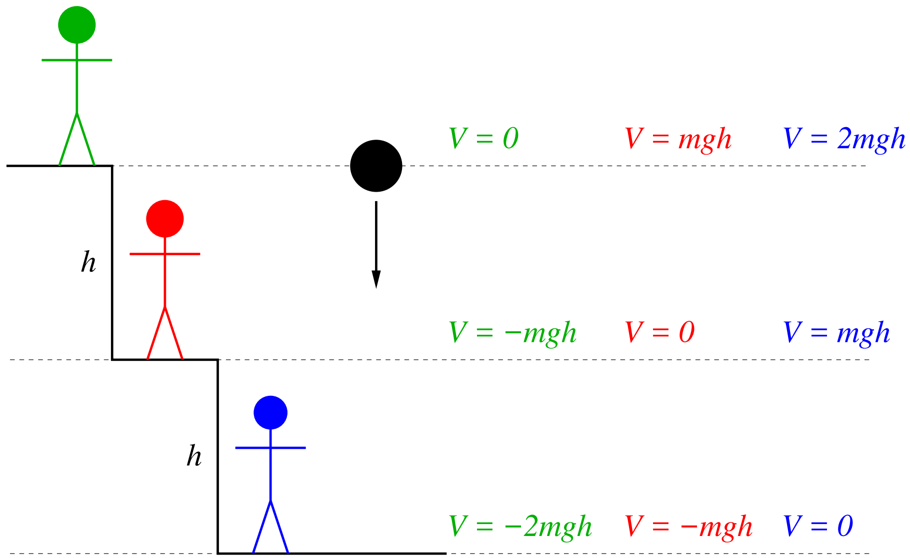


Energía potencial sólo determinada módulo una constante

Física invariante bajo $V(x) \rightarrow V'(x) = V(x) + V_0$

$$\vec{F} \;=\; -\vec{\nabla}\, V, \qquad\qquad v \;=\; \sqrt{2\, m^{-1}\, (V(x_2) \;-\; V(x_1))}$$

Ejemplo más sencillo: energía potencial en mecánica newtoniana



Energía potencial sólo determinada módulo una constante

Física invariante bajo $V(x) \to V'(x) = V(x) + V_0$

$$\vec{F} \;=\; -\vec{\nabla}\,V, \qquad\qquad v \;=\; \sqrt{2\,m^{-1}\,(V(x_2)\;-\;V(x_1))}$$

No se puede medir $V(x)$ o $V'(x)$ directamente

$V(x)$ es campo auxiliar, sin significado físico

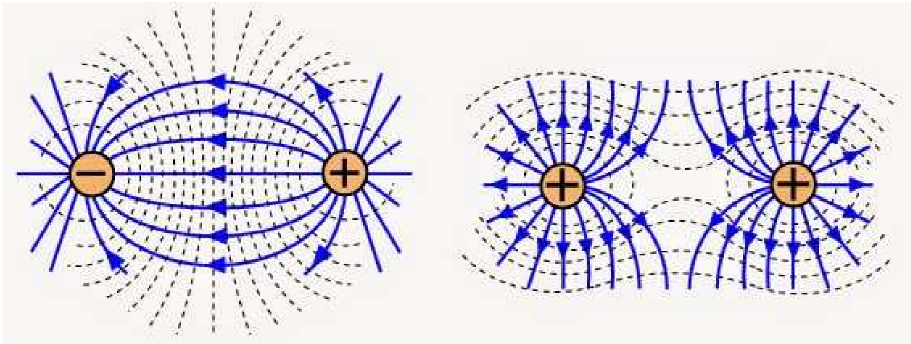
Sólo $\Delta V(x) = V(x_2)\;-\;V(x_1)$ tiene significado físico

2. Electromagnetismo

Directamente generalizable a electrostática: $\partial_t \vec{E} = \vec{B} = 0$

$\longrightarrow$ $\vec{E}$ es fuerza conservativa

$\longrightarrow$ $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi = -\vec{\nabla}(\phi + \phi_0)$

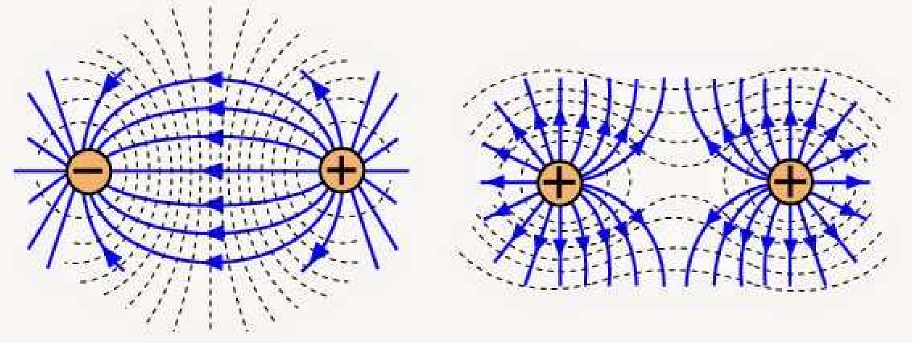


2. Electromagnetismo

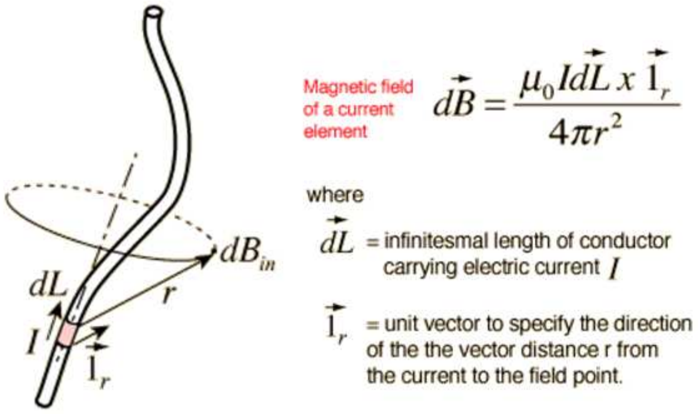
Directamente generalizable a electrostática: $\partial_t \vec{E} = \vec{B} = 0$

$\longrightarrow$ $\vec{E}$ es fuerza conservativa

$\longrightarrow$ $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi = -\vec{\nabla}(\phi + \phi_0)$



Problema al tratar corrientes eléctricas y magnetismo (1820):



Ørsted: corrientes desvían imanes

Ampère: espiras se comportan como imanes

Biot & Savart: expresión para $d\vec{B}$

$\longrightarrow$ ¿expresiones para fuerzas $d\vec{F}$
y potenciales dW?

- Franz E. Neumann (1847): inducción entre trozos de conductor

  Fuerza entre dos conductores infinitesimales:

$$
\begin{aligned}
d\vec{F} &= \frac{I\, I'}{r c^2}\, \vec{n} \times (\vec{n}' \times \vec{e}_r)\, ds\, ds' \\
&= \frac{I\, I'}{r c^2} \Big[(\vec{e}_r \cdot \vec{n})\, \vec{n}' \; - \; (\vec{n} \cdot \vec{n}')\, \vec{e}_r \Big]\, ds\, ds'
\end{aligned}
$$

$$
NB: \qquad \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{n}}{r} ds \; = \; -\vec{\nabla}\Big(\frac{1}{r}\Big) ds
$$

  Derivada total no contribuye al integrar sobre circuito cerrado!

- Franz E. Neumann (1847): inducción entre trozos de conductor

  Fuerza entre dos conductores infinitesimales:

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= \frac{I\,I'}{rc^2}\,\vec{n}\times(\vec{n}'\times\vec{e}_r)\,ds\,ds' \\ &= \frac{I\,I'}{rc^2}\Big[(\vec{e}_r\cdot\vec{n})\,\vec{n}' \;-\; (\vec{n}\cdot\vec{n}')\,\vec{e}_r\Big]\,ds\,ds' \end{aligned}$$

$$NB: \qquad \frac{\vec{e}_r\cdot\vec{n}}{r}ds \;=\; -\vec{\nabla}\Big(\frac{1}{r}\Big)ds$$

  Derivada total no contribuye al integrar sobre circuito cerrado!

  Fuerza central tiene potencial W

$$dW \;=\; \frac{I\,I'}{c^2}\frac{\vec{n}\cdot\vec{n}'}{r}\,ds\,ds', \qquad\qquad W \;=\; \frac{I\,I'}{c^2}\oint\!\!\oint \frac{\vec{n}\cdot\vec{n}'}{r}\,ds\,ds'$$

- Franz E. Neumann (1847): inducción entre trozos de conductor

  Fuerza entre dos conductores infinitesimales:

$$
\begin{aligned}
d\vec{F} &= \frac{I\,I'}{rc^2}\,\vec{n}\times(\vec{n}'\times\vec{e}_r)\,ds\,ds' \\
&= \frac{I\,I'}{rc^2}\Big[(\vec{e}_r\cdot\vec{n})\,\vec{n}' \;-\; (\vec{n}\cdot\vec{n}')\,\vec{e}_r\Big]\,ds\,ds'
\end{aligned}
$$

$$
NB: \qquad \frac{\vec{e}_r\cdot\vec{n}}{r}ds \;=\; -\vec{\nabla}\Big(\frac{1}{r}\Big)ds
$$

  Derivada total no contribuye al integrar sobre circuito cerrado!

  Fuerza central tiene potencial W

$$
dW = \frac{I\,I'}{c^2}\frac{\vec{n}\cdot\vec{n}'}{r}\,ds\,ds', \qquad\qquad W = \frac{I\,I'}{c^2}\oint\!\!\oint\frac{\vec{n}\cdot\vec{n}'}{r}\,ds\,ds'
$$

  En lenguaje moderno:

$$
W = \frac{I}{c}\oint\vec{n}\cdot\vec{A}_N ds \qquad \text{con} \qquad \vec{A}_N(x,t) = \frac{I'}{c}\oint\frac{\vec{n}'}{r}\,ds
$$

- Wilhelm Weber (1848): fuerza central entre cargas en movimiento

  Fuerza que ejerce una corriente sobre partícula en reposo

$$
\begin{aligned}
d\vec{F} &= -\frac{e}{c^2 r}\,(\vec{n}\cdot\vec{e}_r)\,\vec{e}_r\,\frac{dI'}{dt}\,ds' \\
dW &= \frac{I\,I'}{c^2 r}\,(\vec{n}\cdot\vec{e}_r)(\vec{n}'\cdot\vec{e}_r)\,ds\,ds'
\end{aligned}
$$

- Wilhelm Weber (1848): fuerza central entre cargas en movimiento

  Fuerza que ejerce una corriente sobre partícula en reposo

$$
\begin{aligned}
d\vec{F} &= -\frac{e}{c^2 r}\,(\vec{n}\cdot\vec{e}_r)\,\vec{e}_r\,\frac{dI'}{dt}\,ds' \\
dW &= \frac{I\,I'}{c^2 r}\,(\vec{n}\cdot\vec{e}_r)(\vec{n}'\cdot\vec{e}_r)\,ds\,ds'
\end{aligned}
$$

  En lenguaje moderno:

$$
\begin{aligned}
d\vec{A}_W &= \frac{I'}{cr}\,(\vec{n}'\cdot\vec{e}_r)\,\vec{e}_r\,ds' \\
\vec{A}_W(x,t) &= \frac{I}{c}\oint\frac{(\vec{n}'\cdot\vec{e}_r)\,\vec{e}_r}{r}ds
\end{aligned}
$$

- Wilhelm Weber (1848): fuerza central entre cargas en movimiento

  Fuerza que ejerce una corriente sobre partícula en reposo

$$
\begin{aligned}
d\vec{F} &= -\frac{e}{c^2 r}\,(\vec{n}\cdot\vec{e}_r)\,\vec{e}_r\,\frac{dI'}{dt}\,ds' \\
dW &= \frac{I\,I'}{c^2 r}\,(\vec{n}\cdot\vec{e}_r)(\vec{n}'\cdot\vec{e}_r)\,ds\,ds'
\end{aligned}
$$

  En lenguaje moderno:

$$
\begin{aligned}
d\vec{A}_W &= \frac{I'}{cr}\,(\vec{n}'\cdot\vec{e}_r)\,\vec{e}_r\,ds' \\
\vec{A}_W(x,t) &= \frac{I}{c}\oint\frac{(\vec{n}'\cdot\vec{e}_r)\,\vec{e}_r}{r}ds
\end{aligned}
$$

$\longrightarrow$ Distintos modelos de interacción llevan a expresiones distintas:

$$
\vec{A}_N(x,t) = \int\frac{\vec{j}(x',t)}{cr}\,d^3x', \qquad\qquad \vec{A}_W = \int\frac{\vec{e}_r\cdot\vec{j}(x',t)}{cr}\,\vec{e}_r\,d^3x'
$$

- Hermann von Helmholtz (1870's): compara expresiones anteriores

$$
\begin{aligned}
dW_N - dW_W &= \frac{I\,I'}{c^2 r}\Big[\vec{n}\cdot\vec{n}' \;-\; (\vec{n}\cdot\vec{e}_r)(\vec{n}'\cdot\vec{e}_r)\Big]\,ds\,ds' \\
&= \frac{I\,I'}{c^2}\,\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}\,ds\,ds'
\end{aligned}
$$

$\longrightarrow$ diferencia es derivada total!

$\longrightarrow$ diferencia disaparece al integrar sobre circuito cerrado!

$\longrightarrow$ dan mismas expresiones (integradas) para fuerza, energía, ...

- Hermann von Helmholtz (1870's): compara expresiones anteriores

$$
\begin{aligned}
dW_N - dW_W &= \frac{I\,I'}{c^2 r}\Big[\vec{n}\cdot\vec{n}' \;-\; (\vec{n}\cdot\vec{e}_r)(\vec{n}'\cdot\vec{e}_r)\Big]\,ds\,ds' \\
&= \frac{I\,I'}{c^2}\,\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}\,ds\,ds'
\end{aligned}
$$

$\longrightarrow$ diferencia es derivada total!

$\longrightarrow$ diferencia disaparece al integrar sobre circuito cerrado!

$\longrightarrow$ dan mismas expresiones (integradas) para fuerza, energía, ...

Familia de potenciales interpolando:

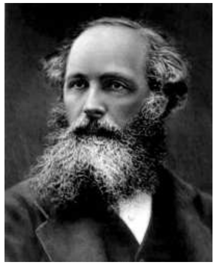
$$
\begin{aligned}
dW_\alpha &= \frac{I\,I'}{2c^2 r}\Big[(1+\alpha)\vec{n}\cdot\vec{n}' \;-\; (1-\alpha)(\vec{n}\cdot\vec{e}_r)(\vec{n}'\cdot\vec{e}_r)\Big]\,ds\,ds' \\
\vec{A}_\alpha &= \tfrac{1}{2}(1+\alpha)\vec{A}_N \;+\; \tfrac{1}{2}(1-\alpha)\vec{A}_W \\
\vec{A}_\alpha &= \vec{A}_N \;+\; \tfrac{1}{2}(1+\alpha)\vec{\nabla}\Lambda \qquad \text{con} \quad \Lambda \;=\; -\frac{1}{c}\int \vec{e}_r\cdot\vec{j}(x,t)d^3x \\
\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_\alpha &= -\frac{\alpha}{c}\partial_t\phi
\end{aligned}
$$

- James C. Maxwell (1865): teoría completa de electromagnetismo

$$\vec{E} = \varepsilon^{-1}\vec{D} \qquad \vec{E} = \sigma^{-1}\vec{j} \qquad \vec{E} = \mu\vec{v}\times\vec{H} - \partial_t\vec{A} - \vec{\nabla}\phi$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho \qquad \vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{j}_{tot} \qquad \mu\vec{H} = \vec{\nabla}\times\vec{A},$$

$$\vec{j}_{tot} = \vec{j} + \partial_t\vec{D} \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = -\partial_t\rho$$



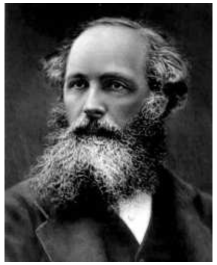
Ecns inhomogeneas: interacción entre campos y cargas
Ecns homogeneas: existencia de potenciales:

- James C. Maxwell (1865): teoría completa de electromagnetismo

$$\vec{E} = \varepsilon^{-1}\vec{D} \qquad \vec{E} = \sigma^{-1}\vec{j} \qquad \vec{E} = \mu\vec{v}\times\vec{H} - \partial_t\vec{A} - \vec{\nabla}\phi$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho \qquad \vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{j}_{tot} \qquad \mu\vec{H} = \vec{\nabla}\times\vec{A},$$

$$\vec{j}_{tot} = \vec{j} + \partial_t\vec{D} \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = -\partial_t\rho$$



Ecns inhomogeneas: interacción entre campos y cargas
Ecns homogeneas: existencia de potenciales:

$\longrightarrow$ Maxwell sabe de existencia de ϕ y $\vec{A}$,
$\longrightarrow$ sabe que $\vec{A}$ y $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda$ dan mismo $\vec{H}$,

$$\mu\vec{H} = \vec{\nabla}\times\vec{A},$$

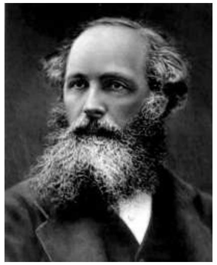
$$\mu\vec{H}' = \vec{\nabla}\times\vec{A}' = \vec{\nabla}\times\vec{A} + \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\Lambda = \mu\vec{H}$$

- James C. Maxwell (1865): teoría completa de electromagnetismo

$$\vec{E} = \varepsilon^{-1}\vec{D} \qquad \vec{E} = \sigma^{-1}\vec{j} \qquad \vec{E} = \mu\vec{v}\times\vec{H} - \partial_t\vec{A} - \vec{\nabla}\phi$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho \qquad \vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{j}_{tot} \qquad \mu\vec{H} = \vec{\nabla}\times\vec{A},$$

$$\vec{j}_{tot} = \vec{j} + \partial_t\vec{D} \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = -\partial_t\rho$$



Ecns inhomogeneas: interacción entre campos y cargas
Ecns homogeneas: existencia de potenciales:

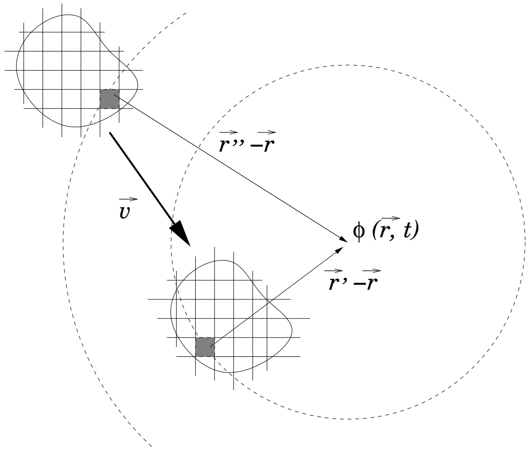
$\longrightarrow$ Maxwell sabe de existencia de ϕ y $\vec{A}$,
$\longrightarrow$ sabe que $\vec{A}$ y $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda$ dan mismo $\vec{H}$,

$$\mu\vec{H} = \vec{\nabla}\times\vec{A},$$

$$\mu\vec{H}' = \vec{\nabla}\times\vec{A}' = \vec{\nabla}\times\vec{A} + \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\Lambda = \mu\vec{H}$$

$\longrightarrow$ identifica “verdadero potencial” con $\Lambda = 0$.

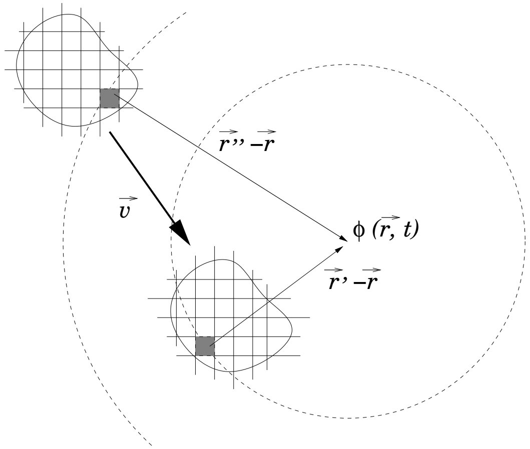
- Ludvig V. Lorenz (1867): descubre las ecns de Maxwell independ
  introduce potenciales retardados



$$\phi(\vec{x}, t) \ = \ \int \frac{\rho(\vec{x}', t - r/c)}{r}\, d^3x',$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) \ = \ \int \frac{\vec{j}(\vec{x}', t - r/c)}{cr}\, d^3x'$$

- Ludvig V. Lorenz (1867): descubre las ecns de Maxwell independ
introduce potenciales retardados



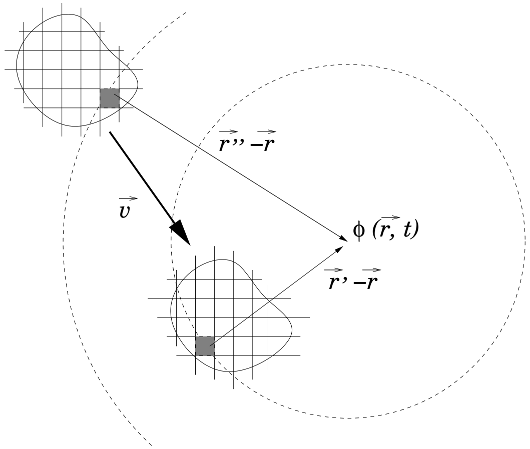
$$\phi(\vec{x}, t) \;=\; \int \frac{\rho(\vec{x}', t - r/c)}{r}\, d^3x',$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) \;=\; \int \frac{\vec{j}(\vec{x}', t - r/c)}{cr}\, d^3x'$$

Potenciales retardados satisfacen ecuación de onda, bajo condición que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c}\partial_t \phi \;=\; 0 \qquad \text{(condición de Loren(t)z)}$$

- Ludvig V. Lorenz (1867): descubre las ecns de Maxwell independ
  introduce potenciales retardados



$$\phi(\vec{x},t) \;=\; \int \frac{\rho(\vec{x}', t - r/c)}{r}\, d^3x',$$

$$\vec{A}(\vec{x},t) \;=\; \int \frac{\vec{j}(\vec{x}', t - r/c)}{cr}\, d^3x'$$

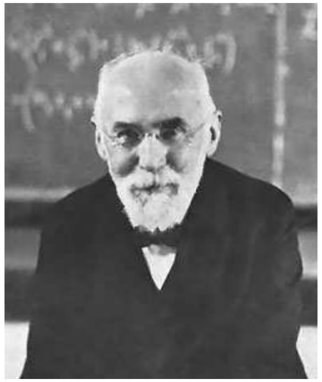
Potenciales retardados satisfacen ecuación de onda, bajo condición que

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c}\partial_t\phi \;=\; 0 \qquad \text{(condición de Loren(t)z)}$$

$\longrightarrow$ resultados son equivalentes a los potenciales de Weber y Maxwell
$\longrightarrow$ primero en hacer una transformación gauge

Lorenz muere en 1891
su trabajo olvidado por 1900
su nombre eclipsado por Lorentz

- Hendrik A. Lorentz (1867): primero en entender invariancia gauge



$$\vec\nabla \cdot \vec E = \rho, \qquad \vec\nabla \cdot \vec B = 0,$$

$$\vec\nabla \times \vec B - \tfrac{1}{c}\partial_t \vec E = \tfrac{1}{c}\vec j \qquad \vec\nabla \times \vec E + \tfrac{1}{c}\partial_t \vec B = 0$$

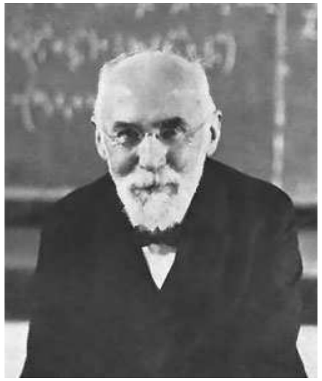
Ecns inhomogeneas: interacción entre campos y cargas

Ecns homogeneas: existencia de potenciales:

$$\vec\nabla \cdot \vec B = 0 \iff \vec B = \vec\nabla \times \vec A$$

$$\vec\nabla \times (\vec E + \tfrac{1}{c}\partial_t \vec A) = 0 \iff \vec E = -\vec\nabla\phi - \tfrac{1}{c}\partial_t \vec A$$

- Hendrik A. Lorentz (1867): primero en entender invariancia gauge



$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} \;=\; \rho, \qquad\qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} \;=\; 0,$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} \;-\; \tfrac{1}{c}\partial_t\vec{E} \;=\; \tfrac{1}{c}\vec{j} \qquad\qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} \;+\; \tfrac{1}{c}\partial_t\vec{B} \;=\; 0$$

Ecns inhomogeneas: interacción entre campos y cargas

Ecns homogeneas: existencia de potenciales:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} \;=\; 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \vec{B} \;=\; \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{E} \;+\; \tfrac{1}{c}\partial_t\vec{A}) \;=\; 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \vec{E} \;=\; -\vec{\nabla}\phi \;-\; \tfrac{1}{c}\partial_t\vec{A}$$

Campos electromagnéticos no determinan potenciales por completo:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{A}' = \vec{A} - \frac{1}{c}\vec{\nabla}\Lambda \\ \phi' = \phi + \partial_t\Lambda \end{array}\right\} \quad\Longrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} \vec{B}' = \vec{\nabla}\times A - \frac{1}{c}\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\Lambda = \vec{B} \\ \vec{E}' = -(\vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla}\partial_t\Lambda) - \frac{1}{c}(\partial_t\vec{A} - \partial_t\vec{\nabla}\Lambda) = \vec{E} \end{array}\right.$$

Sólo $\vec{E}$ y $\vec{B}$ detectables en experimento, ϕ y $\vec{A}$ no tienen significado físico

Fijar el gauge: Elegir ϕ y $\vec{A}$ particulares

$\longrightarrow$ se puede elegir el cero de ϕ punto a punto!

Fijar el gauge: Elegir ϕ y $\vec{A}$ particulares

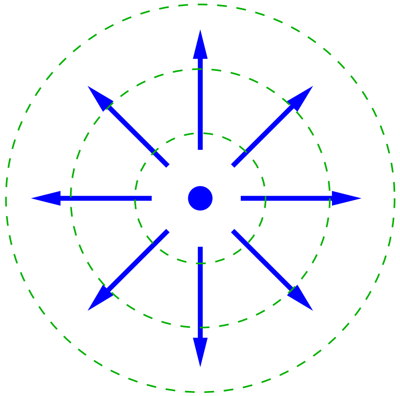
$\longrightarrow$ se puede elegir el cero de ϕ punto a punto!

Ejemplo concreto: carga puntual en electrostática:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{Q}{4\pi r^2}\,\vec{e}_r &&= -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\,\partial_t \vec{A} \\ \vec{B} &= 0 &&= \vec{\nabla}\times\vec{A} \end{aligned}$$

- Gauge de Coulomb ($\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$):

$$\begin{aligned} \phi &= -\frac{Q}{4\pi r} \\ \vec{A} &= 0 \end{aligned}$$



Fijar el gauge: Elegir ϕ y $\vec{A}$ particulares

$\longrightarrow$ se puede elegir el cero de ϕ punto a punto!

Ejemplo concreto: carga puntual en electrostática:

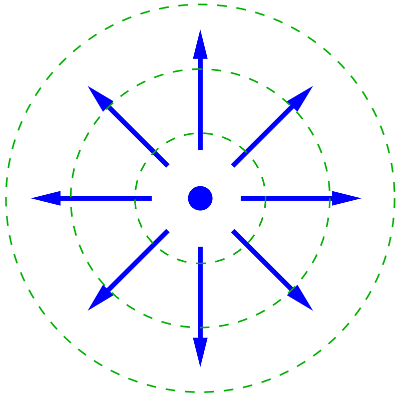
$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi r^2}\,\vec{e}_r = -\vec{\nabla}\phi - \tfrac{1}{c}\,\partial_t \vec{A}$$

$$\vec{B} = 0 = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

- Gauge de Coulomb ($\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$):

$$\phi = -\frac{Q}{4\pi r}$$

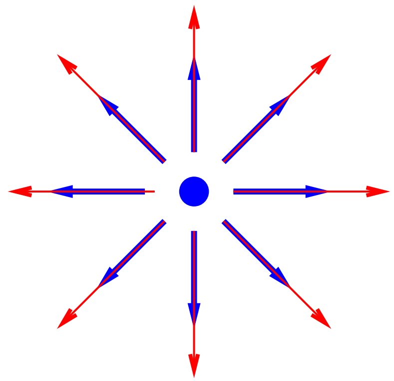
$$\vec{A} = 0$$



- Gauge de temporal ($\phi = 0$):

$$\phi = 0$$

$$\vec{A} = -\frac{c\,Q\,t}{4\pi r^2}\,\vec{e}_r$$



Cada gauge tiene sus ventajas:

Gauge	condición	utilidad
Coulomb	$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$	electrostática, estado sólido, ...
temporal, radiación	$\phi = 0$	vacío, radiación EM, ...
Lorenz	$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c}\partial_t \phi = 0$	invariante Lorentz
axial	$\vec{n} \cdot \vec{A} = 0$	$A_z = 0$
Poincaré	$\vec{x} \cdot \vec{A} = 0$	$A_r = 0$
Fock-Schwinger	$x_\mu A^\mu = 0$	
Feynman, Landau, ...		Q.E.D.
...	...	...

Cada gauge tiene sus ventajas:

Gauge	condición	utilidad
Coulomb	$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$	electrostática, estado sólido, ...
temporal, radiación	$\phi = 0$	vacío, radiación EM, ...
Lorenz	$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c}\partial_t \phi = 0$	invariante Lorentz
axial	$\vec{n} \cdot \vec{A} = 0$	$A_z = 0$
Poincaré	$\vec{x} \cdot \vec{A} = 0$	$A_r = 0$
Fock-Schwinger	$x_\mu A^\mu = 0$	
Feynman, Landau, ...		Q.E.D.
...	...	...

$\longrightarrow$ **¿Y a mi qué...?**

3. Mecánica cuántica

$\longrightarrow$ invariancia gauge juega papel fundamental!

3. Mecánica cuántica

$\longrightarrow$ invariancia gauge juega papel fundamental!

Mecánica cuántica: sistema descrito por función de onda compleja

$$i\hbar\,\partial_t\Psi(x,t) \;=\; -\frac{\hbar^2}{2m}\,\nabla^2\Psi(x,t) \;+\; V(x)\Psi(x,t)$$

$$P \;\sim\; \Big|\langle\Psi\,|\,A\,|\,\Psi\rangle\Big|^2 \;\sim\; \Big|\Psi(x,t)\Big|^2$$

$\longrightarrow$ observables invariantes bajo $\Psi(x,t) \;\rightarrow\; \Psi'(x,t) \;=\; e^{iq\Lambda}\,\Psi(x,t)$

$\longrightarrow$ fase global no tiene significado físico

3. Mecánica cuántica

$\longrightarrow$ invariancia gauge juega papel fundamental!

Mecánica cuántica: sistema descrito por función de onda compleja

$$i\hbar\,\partial_t\Psi(x,t) \;=\; -\frac{\hbar^2}{2m}\,\nabla^2\Psi(x,t) \;+\; V(x)\Psi(x,t)$$

$$P \;\sim\; \Big|\langle\Psi\,|\,A\,|\,\Psi\rangle\Big|^2 \;\sim\; \Big|\Psi(x,t)\Big|^2$$

$\longrightarrow$ observables invariantes bajo $\Psi(x,t) \;\rightarrow\; \Psi'(x,t) \;=\; e^{iq\Lambda}\,\Psi(x,t)$

$\longrightarrow$ fase global no tiene significado físico

Bajo cambio de fase local $\Psi(x,t) \;\rightarrow\; \Psi'(x,t) \;=\; e^{iq\Lambda(x,t)}\,\Psi(x,t)$:

$$\partial_t\Psi \;\;\rightarrow\;\; \partial_t\Psi' \;=\; e^{iq\Lambda(x,t)}\,\partial_t\Psi(x,t) \;+\; iq\,e^{iq\Lambda(x,t)}\,\partial_t\Lambda(x,t)\,\Psi(x,t)$$

$$\vec{\nabla}\Psi \;\;\rightarrow\;\; \vec{\nabla}\Psi' \;=\; e^{iq\Lambda(x,t)}\,\vec{\nabla}\Psi(x,t) \;+\; iq\,e^{iq\Lambda(x,t)}\,\vec{\nabla}\Lambda(x,t)\,\Psi(x,t)$$

$\longrightarrow$ ecuación de Schrödinger no es invariante!

• Vladimir Fock (1926): ecn de Schrödinger acoplado al campo electromagn
$\longrightarrow$ modificar hamiltoniano

Momento generalizado: $p_i \rightarrow p_i - qA_i(x)$

Hamiltoniano nuevo : $H = \frac{1}{2m}(p_i - qA_i(x))^2 + q\,\phi(x)$

Lenguaje de operadores: $i\partial_i \rightarrow i(\partial_i - iqA_i(x))$

Ecuación de Schrödinger ($\hbar = 1$) :

$$i\,(\partial_t - iq\phi(x))\Psi(x,t) = -\frac{1}{2m}\,(\partial_i - iqA_i(x))^2\Psi(x,t) + V(x)\Psi(x,t)$$

• Vladimir Fock (1926): ecn de Schrödinger acoplado al campo electromagn

$\longrightarrow$ modificar hamiltoniano

Momento generalizado: $p_i \rightarrow p_i - qA_i(x)$

Hamiltoniano nuevo : $H = \frac{1}{2m}(p_i - qA_i(x))^2 + q\,\phi(x)$

Lenguaje de operadores: $i\partial_i \rightarrow i(\partial_i - iqA_i(x))$

Ecuación de Schrödinger ($\hbar = 1$) :

$$i\,(\partial_t - iq\phi(x))\Psi(x,t) = -\frac{1}{2m}(\partial_i - iqA_i(x))^2\Psi(x,t) + V(x)\Psi(x,t)$$

invariante bajo:

$$\Psi \rightarrow \Psi' = e^{iq\Lambda(x,t)}\Psi \qquad \phi \rightarrow \phi' = \phi + \partial_t\Lambda \qquad A_i \rightarrow A_i' = A_i + \partial_i\Lambda$$

puesto que

$$\Big(\partial_t - iq(\phi + \partial_t\Lambda)\Big)(e^{iq\Lambda}\Psi) = e^{iq\Lambda}\Big(\partial_t - iq\phi\Big)\Psi - iq\,\partial_t\Lambda\,e^{iq\Lambda}\Psi + iq\,\partial_t\Lambda\,e^{iq\Lambda}\Psi$$

• Vladimir Fock (1926): ecn de Schrödinger acoplado al campo electromagn

$\longrightarrow$ modificar hamiltoniano

Momento generalizado: $p_i \rightarrow p_i - qA_i(x)$

Hamiltoniano nuevo : $H = \frac{1}{2m}(p_i - qA_i(x))^2 + q\,\phi(x)$

Lenguaje de operadores: $i\partial_i \rightarrow i(\partial_i - iqA_i(x))$

Ecuación de Schrödinger ($\hbar = 1$) :

$$i\,(\partial_t - iq\phi(x))\Psi(x,t) = -\frac{1}{2m}(\partial_i - iqA_i(x))^2\Psi(x,t) + V(x)\Psi(x,t)$$

invariante bajo:

$$\Psi \rightarrow \Psi' = e^{iq\Lambda(x,t)}\Psi \qquad \phi \rightarrow \phi' = \phi + \partial_t\Lambda \qquad A_i \rightarrow A_i' = A_i + \partial_i\Lambda$$

puesto que

$$\Big(\partial_t - iq(\phi + \partial_t\Lambda)\Big)(e^{iq\Lambda}\Psi) = e^{iq\Lambda}\Big(\partial_t - iq\phi\Big)\Psi - iq\,\partial_t\Lambda\,e^{iq\Lambda}\Psi + iq\,\partial_t\Lambda\,e^{iq\Lambda}\Psi$$

$\longrightarrow$ invariancia gauge: relación fundamental entre electromagn y materia

• Hermann Weyl (1928): Principio Gauge

$\longrightarrow$ “gaugear” una simetría global induce interacciones

$$\mathcal{L} \;=\; \bar{\psi}\partial\!\!\!/\psi \;-\; m^2\,\bar{\psi}\psi$$

invariante bajo $\psi \;\rightarrow\; e^{iq\Lambda}\psi, \quad \bar{\psi} \;\rightarrow\; e^{-iq\Lambda}\bar{\psi} \;\Leftrightarrow\; \Lambda = cte$

• Hermann Weyl (1928): Principio Gauge

$\longrightarrow$ "gaugear" una simetría global induce interacciones

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\partial\!\!\!/\psi - m^2\,\bar{\psi}\psi$$

invariante bajo $\psi \to e^{iq\Lambda}\psi, \quad \bar{\psi} \to e^{-iq\Lambda}\bar{\psi} \;\Leftrightarrow\; \Lambda = cte$

Problema: $\partial_\mu\psi \to e^{iq\Lambda(x)}\,\partial_\mu\psi + iq\,e^{iq\Lambda(x)}\,\partial_\mu\Lambda(x)\,\psi$

Derivada covariante: $D_\mu\psi \to e^{iq\Lambda(x)}\,D_\mu\psi$

Lagrangiano invar: $\mathcal{L} = \bar{\psi}D\!\!\!/\psi - m^2\,\bar{\psi}\psi$

- Hermann Weyl (1928): Principio Gauge

$\longrightarrow$ "gaugear" una simetría global induce interacciones

$$\mathcal{L} \;=\; \bar{\psi}\partial\!\!\!/\psi \;-\; m^2\,\bar{\psi}\psi$$

invariante bajo $\psi \;\rightarrow\; e^{iq\Lambda}\psi, \quad \bar{\psi} \;\rightarrow\; e^{-iq\Lambda}\bar{\psi} \;\;\Leftrightarrow\;\; \Lambda = cte$

Problema: $\partial_\mu\psi \;\rightarrow\; e^{iq\Lambda(x)}\,\partial_\mu\psi \;+\; iq\,e^{iq\Lambda(x)}\,\partial_\mu\Lambda(x)\,\psi$

Derivada covariante: $D_\mu\psi \;\rightarrow\; e^{iq\Lambda(x)}\,D_\mu\psi$

Lagrangiano invar: $\mathcal{L} \;=\; \bar{\psi}D\!\!\!\!/\,\psi \;-\; m^2\,\bar{\psi}\psi$

Derivada covariante: $D_\mu\psi \;=\; \partial_\mu\psi - iq\,A_\mu\psi$

• Hermann Weyl (1928): Principio Gauge

$\longrightarrow$ "gaugear" una simetría global induce interacciones

$$\mathcal{L} \;=\; \bar\psi \partial\!\!\!/ \psi \;-\; m^2\, \bar\psi\psi$$

invariante bajo $\psi \;\rightarrow\; e^{iq\Lambda}\psi, \quad \bar\psi \;\rightarrow\; e^{-iq\Lambda}\bar\psi \;\;\Leftrightarrow\;\; \Lambda = cte$

Problema: $\partial_\mu\psi \;\rightarrow\; e^{iq\Lambda(x)}\,\partial_\mu\psi \;+\; iq\,e^{iq\Lambda(x)}\,\partial_\mu\Lambda(x)\,\psi$

Derivada covariante: $D_\mu\psi \;\rightarrow\; e^{iq\Lambda(x)}\,D_\mu\psi$

Lagrangiano invar: $\mathcal{L} \;=\; \bar\psi D\!\!\!\!/\,\psi \;-\; m^2\,\bar\psi\psi$

Derivada covariante: $D_\mu\psi \;=\; \partial_\mu\psi - iq\,A_\mu\psi$

$$(D_\mu\psi)' \;=\; \partial_\mu(e^{iq\Lambda(x)}\psi) - iq\,A'_\mu e^{iq\Lambda(x)}\psi \;=\; e^{iq\Lambda(x)}(\partial_\mu\psi - iq\,A_\mu\psi)$$

$$\Longleftrightarrow\; A'_\mu = A_\mu \;+\partial_\mu\Lambda$$

• Hermann Weyl (1928): Principio Gauge

$\longrightarrow$ "gaugear" una simetría global induce interacciones

$$\mathcal{L} \;=\; \bar{\psi}\partial\!\!\!/\psi \;-\; m^2\,\bar{\psi}\psi$$

invariante bajo $\psi \;\rightarrow\; e^{iq\Lambda}\psi, \quad \bar{\psi} \;\rightarrow\; e^{-iq\Lambda}\bar{\psi} \;\;\Leftrightarrow\;\; \Lambda = cte$

Problema: $\partial_\mu\psi \;\rightarrow\; e^{iq\Lambda(x)}\,\partial_\mu\psi \;+\; iq\,e^{iq\Lambda(x)}\,\partial_\mu\Lambda(x)\,\psi$

Derivada covariante: $D_\mu\psi \;\rightarrow\; e^{iq\Lambda(x)}\,D_\mu\psi$

Lagrangiano invar: $\mathcal{L} \;=\; \bar{\psi}D\!\!\!\!/\,\psi \;-\; m^2\,\bar{\psi}\psi$

Derivada covariante: $D_\mu\psi \;=\; \partial_\mu\psi - iq\,A_\mu\psi$

$$(D_\mu\psi)' \;=\; \partial_\mu(e^{iq\Lambda(x)}\psi) - iq\,A'_\mu e^{iq\Lambda(x)}\psi \;=\; e^{iq\Lambda(x)}(\partial_\mu\psi - iq\,A_\mu\psi)$$

$$\Longleftrightarrow\; A'_\mu = A_\mu \;+ \partial_\mu\Lambda$$

$\longrightarrow$ Interacción con campo electromagn gracias a fase local e invar gauge

$\longrightarrow$ De teoría de fermiones libres a Q.E.D.

4. Modelo estándar

- Maxwell: grupo gauge $U(1)$: $\psi \; \rightarrow \; \psi' \; = \; e^{iq\Lambda} \, \psi$

$$e^{iq\Lambda_1} \, e^{iq\Lambda_2} \; = \; e^{iq(\Lambda_1 + \Lambda_2)} \; = \; e^{iq\Lambda_2} \, e^{iq\Lambda_1}$$

$\longrightarrow$ Electrodinámica cuántica

4. Modelo estándar

- Maxwell: grupo gauge $U(1)$: $\psi \ \rightarrow \ \psi' \ = \ e^{iq\Lambda}\,\psi$

$$e^{iq\Lambda_1}\, e^{iq\Lambda_2} \ = \ e^{iq(\Lambda_1+\Lambda_2)} \ = \ e^{iq\Lambda_2}\, e^{iq\Lambda_1}$$

$\longrightarrow$ Electrodinámica cuántica

- Yang-Mills: grupo gauge no-Abeliano: $\psi^A \ \rightarrow \ \psi'^A \ = \ M^A{}_B\, \psi^B$

$$(M_1)^A{}_B\, (M_2)^B{}_C \ \neq \ (M_2)^A{}_B\, (M_1)^B{}_C$$

$\longrightarrow$ Interacción electrodébil, interacción fuerte, ...

4. Modelo estándar

- Maxwell: grupo gauge $U(1)$: $\psi \;\to\; \psi' \;=\; e^{iq\Lambda}\,\psi$

$$e^{iq\Lambda_1}\,e^{iq\Lambda_2} \;=\; e^{iq(\Lambda_1+\Lambda_2)} \;=\; e^{iq\Lambda_2}\,e^{iq\Lambda_1}$$

$\longrightarrow$ Electrodinámica cuántica

- Yang-Mills: grupo gauge no-Abeliano: $\psi^A \;\to\; \psi'^A \;=\; M^A{}_B\,\psi^B$

$$(M_1)^A{}_B\,(M_2)^B{}_C \;\neq\; (M_2)^A{}_B\,(M_1)^B{}_C$$

$\longrightarrow$ Interacción electrodébil, interacción fuerte, ...

- Chen-Ning Yang & Robert Mills (1954): gaugear $SU(2)$ isospín
  Isospín: Simetría entre protones y neutrones en interacci ón fuerte

$$p^A \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad n^A \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\psi^A \;=\; \tfrac{1}{N}(\alpha\,p^A \;+\; \beta\,n^A)$$

$$\psi^A \;\to\; \psi'^A \;=\; M^A{}_B(x)\,\psi^B$$

$$M^A{}_B \;\in\; SU(2)$$

- $SU(2)$ tiene 3 generadores J_1, J_2, J_3 que no conmutan

$$[J_a,\ J_b] \ = \ i\,\varepsilon_{abc}\,J_c$$

- $SU(2)$ tiene 3 generadores J_1, J_2, J_3 que no conmutan

$$[J_a,\, J_b] \;=\; i\,\varepsilon_{abc}\,J_c$$

- Derivada covariante: $\mathcal{D}_\mu\psi^A \;=\; \partial_\mu\psi^A \;-\; igA_\mu^a(J_a)^A{}_B\,\psi^B$

  $\longrightarrow$ tres campos gauge $A_\mu^a \to A_\mu'^a \;=\; \partial_\mu\Lambda^a \;-\; g\varepsilon^a{}_{bc}\,\Lambda^b A_\mu^c$

  $\longrightarrow$ interpretados como piones π^-, π^0, π^+

- $SU(2)$ tiene 3 generadores J_1, J_2, J_3 que no conmutan

$$[J_a,\, J_b] \;=\; i\,\varepsilon_{abc}\,J_c$$

- Derivada covariante: $\mathcal{D}_\mu\psi^A \;=\; \partial_\mu\psi^A \;-\; igA^a_\mu(J_a)^A{}_B\,\psi^B$

  $\longrightarrow$ tres campos gauge $A^a_\mu \rightarrow A'^a_\mu \;=\; \partial_\mu\Lambda^a \;-\; g\varepsilon^a{}_{bc}\,\Lambda^b A^c_\mu$

  $\longrightarrow$ interpretados como piones π^-, π^0, π^+

- Problema: ψ^A y A^a_μ necesariamente masa cero

  $\longrightarrow$ $m^2\,\psi^A\psi^A$, $m^2 A^a_\mu A^{\mu a}$ no invariantes

  $\longrightarrow$ fenomenológicamente no realista

  $\longrightarrow$ curiosidad matemática

- $SU(2)$ tiene 3 generadores J_1, J_2, J_3 que no conmutan

$$[J_a,\, J_b] \;=\; i\,\varepsilon_{abc}\, J_c$$

- Derivada covariante: $\mathcal{D}_\mu \psi^A \;=\; \partial_\mu \psi^A \;-\; igA_\mu^a (J_a)^A{}_B\, \psi^B$

  $\longrightarrow$ tres campos gauge $A_\mu^a \to A'^a_\mu \;=\; \partial_\mu \Lambda^a \;-\; g\varepsilon^a{}_{bc}\, \Lambda^b A_\mu^c$

  $\longrightarrow$ interpretados como piones π^-, π^0, π^+

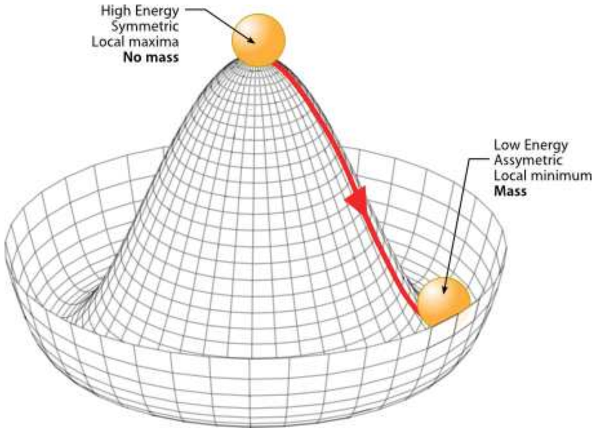
- Problema: ψ^A y A_μ^a necesariamente masa cero

  $\longrightarrow$ $m^2\, \psi^A \psi^A$, $m^2 A_\mu^a A^{\mu a}$ no invariantes

  $\longrightarrow$ fenomenológicamente no realista

  $\longrightarrow$ curiosidad matemática

- Brout & Englert, Higgs (1964): ruptura espontánea de simetría



ruptura del grupo gauge: $SU(2) \to U(1)$

$\longrightarrow$ masas dinámicas para fermiones y bosones rotos & bosón de Higgs

Modelo estándar: teoría gauge $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ & mecanismo de BEH

Modelo estándar: teoría gauge $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ & mecanismo de BEH

- Glashow, Weinberg, Salam (1968): Interacción electrodébil
  Yang-Mills con grupo $SU(2)_L \times U(1)$

$$q^A = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \qquad \ell^A = \begin{pmatrix} e^- \\ \nu_e \end{pmatrix} \qquad A^a_\mu = \{A_\mu, W^\pm_\mu, Z_\mu\}$$

  Mecanismo de Brout-Englert-Higgs: $SU(2)_L \times U(1) \rightarrow U(1)$

Modelo estándar: teoría gauge $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ & mecanismo de BEH

- Glashow, Weinberg, Salam (1968): Interacción electrodébil
  Yang-Mills con grupo $SU(2)_L \times U(1)$

$$q^A = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \qquad \ell^A = \begin{pmatrix} e^- \\ \nu_e \end{pmatrix} \qquad A_\mu^a = \{A_\mu, W_\mu^\pm, Z_\mu\}$$

  Mecanismo de Brout-Englert-Higgs: $SU(2)_L \times U(1) \rightarrow U(1)$

- Han, Nambu (1965): interacción fuerte
  Yang-Mills con grupo $SU(3)$-color

$$q^A = \begin{pmatrix} q \\ q \\ q \end{pmatrix} \qquad A_\mu^a : \text{ 8 gluones}$$

Modelo estándar: teoría gauge $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ & mecanismo de BEH

- Glashow, Weinberg, Salam (1968): Interacción electrodébil
  Yang-Mills con grupo $SU(2)_L \times U(1)$

$$q^A = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \qquad \ell^A = \begin{pmatrix} e^- \\ \nu_e \end{pmatrix} \qquad A^a_\mu = \{A_\mu, W^\pm_\mu, Z_\mu\}$$

  Mecanismo de Brout-Englert-Higgs: $SU(2)_L \times U(1) \to U(1)$

- Han, Nambu (1965): interacción fuerte
  Yang-Mills con grupo $SU(3)$-color

$$q^A = \begin{pmatrix} q \\ q \\ q \end{pmatrix} \qquad A^a_\mu : \text{ 8 gluones}$$

- CERN (1983): Detección de $W^\pm_\mu$, Z_μ in Super Proton Synchrotron

- Gran unificación: Unificación de interacción fuerte y electrodébil
  Yang-Mills con grupo gauge $\mathcal{G} \rightarrow SU(3) \times SU(2) \times U(1)$

  $SU(4) \times SU(2) \times SU(2)$ (Pati-Salam)

  $SU(5)$ (Georgi-Glashow)

  $SO(10)$

  $SU(6)$

  $SU(8)$

  $O(16)$

  $SU(3) \times SU(3) \times SU(3)$ (trinificación)

  ...

5. Gravedad y Relatividad General

Tres fuerzas fundamentales descritas por Principio Gauge:

$$\mathcal{D}_\mu \psi \;=\; \partial_\mu \psi \;-\; iqA_\mu\, \psi, \qquad\qquad F_{\mu\nu} \;=\; \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Gravedad (Relat. Gen.) descrita en términos de geometría diferencial:

$$ds^2 \;=\; g_{\mu\nu}(x)\, dx^\mu\, dx^\nu \;\rightarrow\; \begin{cases} \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \;=\; \frac{1}{2}\, g^{\sigma\lambda}\; (\partial_\mu g_{\lambda\nu} \;+\; \partial_\nu g_{\mu\lambda} \;-\; \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \\ R_{\mu\nu\rho}{}^\lambda \;=\; \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\rho} + \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \Gamma^\lambda_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\rho} \end{cases}$$

5. Gravedad y Relatividad General

Tres fuerzas fundamentales descritas por Principio Gauge:

$$\mathcal{D}_\mu \psi \;=\; \partial_\mu \psi \;-\; iqA_\mu\, \psi, \qquad\qquad F_{\mu\nu} \;=\; \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Gravedad (Relat. Gen.) descrita en términos de geometría diferencial:

$$ds^2 \;=\; g_{\mu\nu}(x)\, dx^\mu\, dx^\nu \;\rightarrow\; \begin{cases} \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \;=\; \frac{1}{2}\, g^{\sigma\lambda}\; (\partial_\mu g_{\lambda\nu} \;+\; \partial_\nu g_{\mu\lambda} \;-\; \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \\ R_{\mu\nu\rho}{}^\lambda \;=\; \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\rho} + \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \Gamma^\lambda_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\rho} \end{cases}$$

Derivada covariante en geometría diferencial:

Vector: $V^\mu \;=\; \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}\, V^\alpha$

$$\longrightarrow \partial_\mu V^\rho \;=\; \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\partial_\alpha \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial y^\beta} V^\beta \right) \;=\; \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\, \frac{\partial x^\rho}{\partial y^\beta}\, \partial_\alpha V^\beta \;+\; \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \partial_\alpha \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial y^\beta} \right) V^\beta$$

5. Gravedad y Relatividad General

Tres fuerzas fundamentales descritas por Principio Gauge:

$$\mathcal{D}_\mu \psi = \partial_\mu \psi - iqA_\mu \psi, \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Gravedad (Relat. Gen.) descrita en términos de geometría diferencial:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)\, dx^\mu\, dx^\nu \rightarrow \begin{cases} \Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\lambda} \left(\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}\right) \\ R_{\mu\nu\rho}{}^\lambda = \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\rho} + \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \Gamma^\lambda_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\rho} \end{cases}$$

Derivada covariante en geometría diferencial:

Vector: $V^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} V^\alpha$

$$\longrightarrow \partial_\mu V^\rho = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\partial_\alpha \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial y^\beta} V^\beta\right) = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\rho}{\partial y^\beta}\partial_\alpha V^\beta + \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\partial_\alpha \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial y^\beta}\right) V^\beta$$

$$\longrightarrow \nabla_\mu V^\rho = \partial_\mu V^\rho + \Gamma^\rho_{\mu\nu} V^\nu$$

$$\nabla_\mu V^\rho = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\rho}{\partial y^\beta} \nabla_\alpha V^\beta$$

5. Gravedad y Relatividad General

Tres fuerzas fundamentales descritas por Principio Gauge:

$$\mathcal{D}_\mu\psi \;=\; \partial_\mu\psi \;-\; iqA_\mu\,\psi, \qquad\qquad F_{\mu\nu} \;=\; \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Gravedad (Relat. Gen.) descrita en términos de geometría diferencial:

$$ds^2 \;=\; g_{\mu\nu}(x)\,dx^\mu\,dx^\nu \;\rightarrow\; \begin{cases} \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \;=\; \tfrac{1}{2}\,g^{\sigma\lambda}\;(\partial_\mu g_{\lambda\nu} \;+\; \partial_\nu g_{\mu\lambda} \;-\; \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \\ R_{\mu\nu\rho}{}^\lambda \;=\; \partial_\mu\Gamma_{\nu\rho}^\lambda - \partial_\nu\Gamma_{\mu\rho}^\lambda + \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda\Gamma_{\nu\rho}^\sigma - \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda\Gamma_{\mu\rho}^\sigma \end{cases}$$

Derivada covariante en geometría diferencial:

Vector: $V^\mu \;=\; \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}\,V^\alpha$

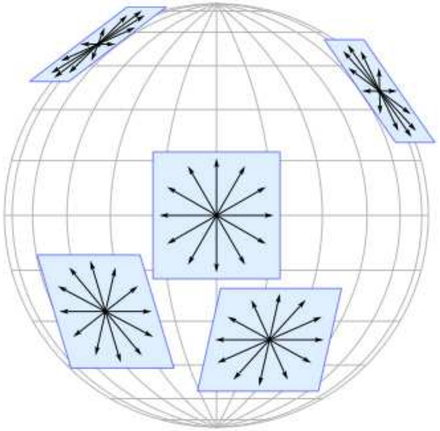
$$\longrightarrow \partial_\mu V^\rho \;=\; \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\partial_\alpha\left(\frac{\partial x^\rho}{\partial y^\beta}V^\beta\right) \;=\; \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\,\frac{\partial x^\rho}{\partial y^\beta}\,\partial_\alpha V^\beta \;+\; \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\partial_\alpha\left(\frac{\partial x^\rho}{\partial y^\beta}\right)V^\beta$$

$$\longrightarrow \nabla_\mu V^\rho \;=\; \partial_\mu V^\rho \;+\; \Gamma_{\mu\nu}^\rho V^\nu$$

$$\nabla_\mu V^\rho \;=\; \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\,\frac{\partial x^\rho}{\partial y^\beta}\,\nabla_\alpha V^\beta$$

$\longrightarrow$ $\nabla_\mu V^\rho$ hace la misma función que $\mathcal{D}_\mu\psi$

- Ryoyu Utiyama (1956): gravedad como teoría gauge de $(I)SO(3,1)$



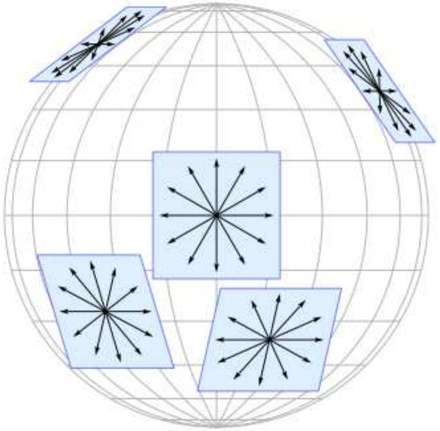
Gaugear el grupo de Lorentz $SO(3,1)$:

$$y'^{\mu} \;=\; \Lambda^{\mu}{}_{\nu}(x)\, y^{\nu}$$

$\longrightarrow$ transf de Lorentz en cada plano tangente

$\longrightarrow$ variedad curva

• Ryoyu Utiyama (1956): gravedad como teoría gauge de $(I)SO(3,1)$

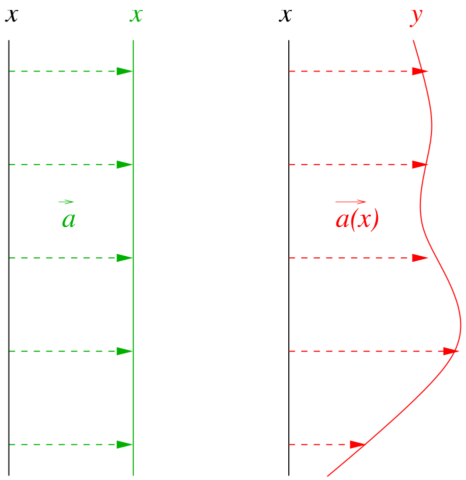


Gaugear el grupo de Lorentz $SO(3,1)$:

$$y'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}(x)\, y^{\nu}$$

$\longrightarrow$ transf de Lorentz en cada plano tangente

$\longrightarrow$ variedad curva



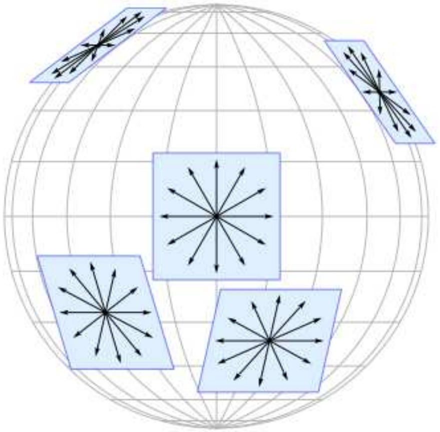
Gaugear el grupo de Poincaré $ISO(3,1)$:

$$y'^{\mu} = y^{\mu} + a^{\mu}(x)$$

$\longrightarrow$ cambio general de coordenadas

$\longrightarrow$ Derivada covariante $D_\mu V^a = \partial_\mu V^a + \omega_{\mu b}{}^a V^b$

• Ryoyu Utiyama (1956): gravedad como teoría gauge de $(I)SO(3,1)$

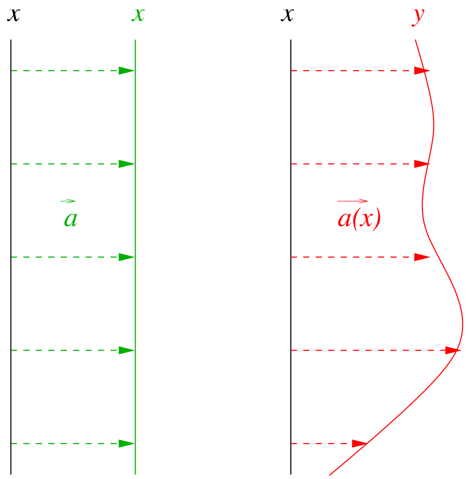


Gaugear el grupo de Lorentz $SO(3,1)$:

$$y'^{\mu} \;=\; \Lambda^{\mu}{}_{\nu}(x)\, y^{\nu}$$

$\longrightarrow$ transf de Lorentz en cada plano tangente

$\longrightarrow$ variedad curva



Gaugear el grupo de Poincaré $ISO(3,1)$:

$$y'^{\mu} \;=\; y^{\mu} \;+\; a^{\mu}(x)$$

$\longrightarrow$ cambio general de coordenadas

$\longrightarrow$ Derivada covariante $D_\mu V^a \;=\; \partial_\mu V^a + \omega_{\mu b}{}^a V^b$

$\longrightarrow$ campo gauge $\omega_{\mu b}{}^a$ relacionado con conexión de Levi-Civita $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$:

$$\omega_{\mu b}{}^a \;=\; e^{\nu}{}_a\, e^{b}{}_{\rho}\, \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} \;-\; e^{\nu}{}_a \partial_\mu e^{b}{}_{\nu} \qquad\qquad D_\mu V^a \;=\; \nabla_\mu (e^a{}_\rho V^\rho)$$

$\longrightarrow$ Einstein-Hilbert como teoría gauge de $ISO(3,1)$ (pero no Yang-Mills!)

$\longrightarrow$ Conexión con fibrado tangente en matemáticas

- Supergravedad = gaugear álgebra de super-Poincaré

• Supergravedad = gaugear álgebra de super-Poincaré

supersimetría = simetría entre bosones y fermiones

super-Poincaré grupo = transf espaciotemporales & supersimetría

= única extensión no trivial de $ISO(1,3)$

$$\delta b = \epsilon f, \qquad \delta f = \epsilon\, \partial b, \qquad \{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\} = 2(\sigma^\mu)_{\alpha\beta} P^\mu$$

$\longrightarrow$ loops bosónicos y fermiónicos cancelan: renormalización?

• Supergravedad = gaugear álgebra de super-Poincaré

supersimetría = simetría entre bosones y fermiones

super-Poincaré grupo = transf espaciotemporales & supersimetría

= única extensión no trivial de $ISO(1,3)$

$$\delta b \;=\; \epsilon f, \qquad \delta f \;=\; \epsilon\, \partial b, \qquad \{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\} \;=\; 2(\sigma^\mu)_{\alpha\beta} P^\mu$$

$\longrightarrow$ loops bosónicos y fermiónicos cancelan: renormalización?

supersimetría local: gaugear el supergrupo

$$\delta b \;=\; \epsilon(x) f, \qquad \delta f \;=\; \epsilon(x)\, \partial b, \qquad \{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\} \;=\; 2(\sigma^\mu)_{\alpha\beta} P^\mu$$

$\longrightarrow$ gaugear supersimetría & traslaciones

$\longrightarrow$ supergravedad = teoría de gravedad & supersimetría

$\longrightarrow$ teoría renormalizable de gravedad?

• Supergravedad = gaugear álgebra de super-Poincaré

supersimetría = simetría entre bosones y fermiones
super-Poincaré grupo = transf espaciotemporales & supersimetría
= única extensión no trivial de $ISO(1,3)$

$$\delta b \ = \ \epsilon f, \qquad \delta f \ = \ \epsilon\, \partial b, \qquad \{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\} \ = \ 2(\sigma^\mu)_{\alpha\beta} P^\mu$$

$\longrightarrow$ loops bosónicos y fermiónicos cancelan: renormalización?

supersimetría local: gaugear el supergrupo

$$\delta b \ = \ \epsilon(x) f, \qquad \delta f \ = \ \epsilon(x)\, \partial b, \qquad \{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\} \ = \ 2(\sigma^\mu)_{\alpha\beta} P^\mu$$

$\longrightarrow$ gaugear supersimetría & traslaciones
$\longrightarrow$ supergravedad = teoría de gravedad & supersimetría
$\longrightarrow$ teoría renormalizable de gravedad?

Muy popular en años 1980, pero no dió resultados esperados
Renormalizabilidad no descartada, gente pasó a teoría de cuerdas

6. Temas misceláneas

6.1 Gauge = calibrar

H. Weyl (1918): unificación de Relatividad General & Teoría de Maxwell

$\longrightarrow$ familia de geometrías no-riemannianas:

$$[g_{\mu\nu}] \ = \ \{\tilde{g}_{\mu\nu} \,|\, \tilde{g}_{\mu\nu} \ = \ e^{\Omega(x)} g_{\mu\nu}\}, \qquad\qquad \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\rho} \ = \ \left\{{}^{\ \rho}_{\mu\nu}\right\} + A_\mu \delta_\nu^\rho + A_\nu \delta_\mu^\rho - A^\rho g_{\mu\nu}$$

6. Temas misceláneas

6.1 Gauge = calibrar

H. Weyl (1918): unificación de Relatividad General & Teoría de Maxwell
$\longrightarrow$ familia de geometrías no-riemannianas:

$$[g_{\mu\nu}] = \{\tilde{g}_{\mu\nu} \,|\, \tilde{g}_{\mu\nu} = e^{\Omega(x)} g_{\mu\nu}\}, \qquad \tilde{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu} = \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} + A_\mu \delta^\rho_\nu + A_\nu \delta^\rho_\mu - A^\rho g_{\mu\nu}$$

Física invariante bajo cambios locales de escala

$$g_{\mu\nu} \to g'_{\mu\nu} = e^{\Lambda(x)} g_{\mu\nu}, \qquad A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda$$

Eichinvarianz = invariante bajo calibraciones
= libertad de elegir unidades localmente

6. Temas misceláneas

6.1 Gauge = calibrar

H. Weyl (1918): unificación de Relatividad General & Teoría de Maxwell

$\longrightarrow$ familia de geometrías no-riemannianas:

$$[g_{\mu\nu}] \ = \ \{\tilde{g}_{\mu\nu} \,|\, \tilde{g}_{\mu\nu} \ = \ e^{\Omega(x)} g_{\mu\nu}\}, \qquad \tilde{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu} \ = \ \left\{{}^{\ \rho}_{\mu\nu}\right\} + A_\mu \delta^\rho_\nu + A_\nu \delta^\rho_\mu - A^\rho g_{\mu\nu}$$

Física invariante bajo cambios locales de escala

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g'_{\mu\nu} \ = \ e^{\Lambda(x)} g_{\mu\nu}, \qquad A_\mu \rightarrow A'_\mu \ = \ A_\mu \ + \ \partial_\mu \Lambda$$

Eichinvarianz = invariante bajo calibraciones

= libertad de elegir unidades localmente

Físicamente no es correcto: predicciones erróneas

Fock, London (1926): invariancia de ecn de Schrödinger

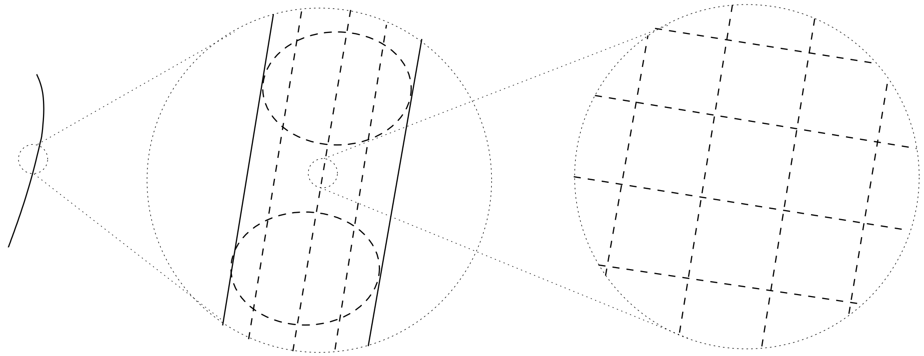
$$\Psi \rightarrow \Psi' \ = \ e^{i\Lambda(x)}\, \Psi, \qquad A_\mu \rightarrow A'_\mu \ = \ A_\mu \ + \ \partial_\mu \Lambda$$

Weyl (1929): Principio Gauge

6.2 Teoría de Kaluza-Klein

Oscar Klein (1926): unificación de Relatividad General & Teoría de Maxwell

$\longrightarrow$ dimensiones extras compactas: $\mathcal{M}_5 = \mathcal{M}_4 \times \mathbb{S}^1$



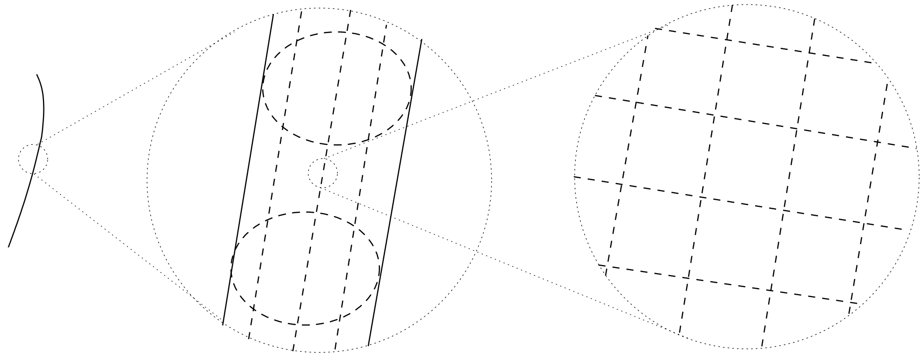
Física en $4+1$ dimensiones:

- 4-dimensional cuando $\ell \gg R_0$
- 5-dimensional cuando $\ell \ll R_0$

6.2 Teoría de Kaluza-Klein

Oscar Klein (1926): unificación de Relatividad General & Teoría de Maxwell

$\longrightarrow$ dimensiones extras compactas: $\mathcal{M}_5 = \mathcal{M}_4 \times \mathbb{S}^1$



Física en $4+1$ dimensiones:

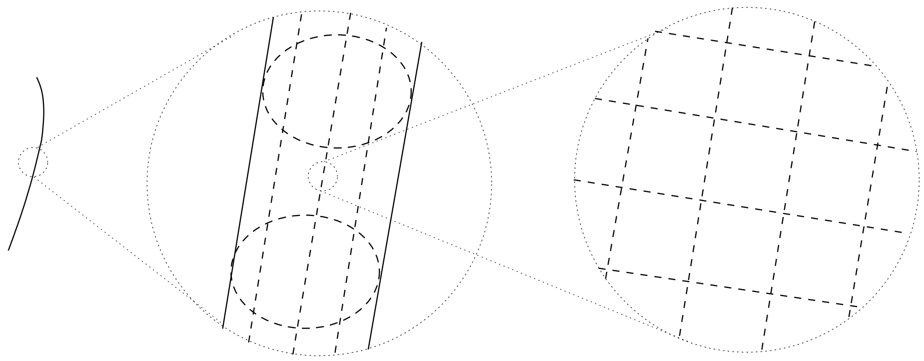
- 4-dimensional cuando $\ell \gg R_0$
- 5-dimensional cuando $\ell \ll R_0$

$$\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \left(\begin{array}{c|c} \hat{g}_{\mu\nu} & \hat{g}_{\mu z} \\ \hline \hat{g}_{z\mu} & \hat{g}_{zz} \end{array}\right) \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} \hat{g}_{\mu\nu} \sim g_{\mu\nu} \\ \hat{g}_{\mu z} \sim A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \Lambda \\ \hat{g}_{zz} \sim \phi \end{cases}$$

6.2 Teoría de Kaluza-Klein

Oscar Klein (1926): unificación de Relatividad General & Teoría de Maxwell

$\longrightarrow$ dimensiones extras compactas: $\mathcal{M}_5 = \mathcal{M}_4 \times \mathbb{S}^1$



Física en $4+1$ dimensiones:

- 4-dimensional cuando $\ell \gg R_0$
- 5-dimensional cuando $\ell \ll R_0$

$$\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \left(\begin{array}{c|c} \hat{g}_{\mu\nu} & \hat{g}_{\mu z} \\ \hline \hat{g}_{z\mu} & \hat{g}_{zz} \end{array}\right) \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} \hat{g}_{\mu\nu} \sim g_{\mu\nu} \\ \hat{g}_{\mu z} \sim A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \Lambda \\ \hat{g}_{zz} \sim \phi \end{cases}$$

Einstein-Hilbyrt en $4+1$ dim $\rightarrow$ Einstein-Maxwell-dilatón en 4 dim

$$S = \int d^5x \sqrt{|\hat{g}|}\hat{R} = \int d^4x \sqrt{|\hat{g}|}\Big[R + (\partial\phi)^2 + e^{\phi} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\Big]$$

$$S = \int d^5x \sqrt{|\hat{g}|}\hat{R} = \int d^4x \sqrt{|\hat{g}|}\Big[R + (\partial\phi)^2 + e^{\phi} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\Big]$$

- Unificación de gravedad y electromagnetismo (y escalar)

$$S = \int d^5x \sqrt{|\hat{g}|}\hat{R} = \int d^4x \sqrt{|\hat{g}|}\Big[R + (\partial\phi)^2 + e^{\phi}\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\Big]$$

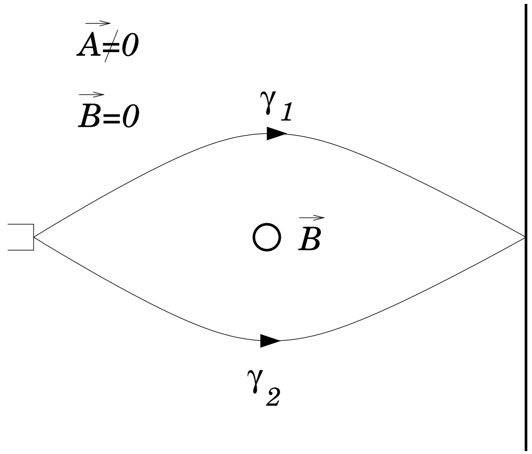
- Unificación de gravedad y electromagnetismo (y escalar)
- No realista debido al escalar de Kaluza-Klein
- Recuperado en teoría de cuerdas y supergravedad en 1980
  $\longrightarrow$ estabilización de móduli

$$S = \int d^5x \sqrt{|\hat{g}|}\hat{R} = \int d^4x \sqrt{|\hat{g}|}\Big[R + (\partial\phi)^2 + e^{\phi} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\Big]$$

- Unificación de gravedad y electromagnetismo (y escalar)
- No realista debido al escalar de Kaluza-Klein
- Recuperado en teoría de cuerdas y supergravedad en 1980
  $\longrightarrow$ estabilización de móduli
- Origen geométrico de la invariancia gauge
- Relación directa con teoría de fibrados en matemáticas

6.3 Efecto Aharonov-Bohm

D. Bohm & Y. Aharonov (1959): Efectos debido a topología



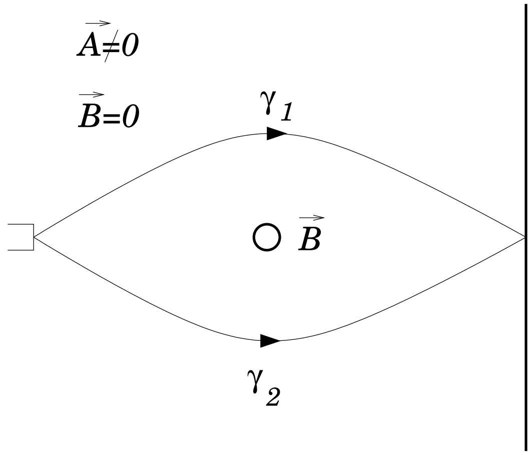
Solenoide con flujo magnético $\Phi = \int \vec{B} \cdot \vec{n}\, d^2x$

Dentro: $\vec{B} = I\vec{e}_z$ $\quad \vec{A} = I\, r\varphi\, \vec{e}_r$

Fuera: $\vec{B} = 0$ $\quad \vec{A} = I\, r^{-1}\, \vec{e}_\varphi \; = \; -\vec{\nabla}(I\, \varphi)$

6.3 Efecto Aharonov-Bohm

D. Bohm & Y. Aharonov (1959): Efectos debido a topología



Solenoide con flujo magnético $\Phi = \int \vec{B}\cdot\vec{n}\, d^2x$

Dentro: $\vec{B} = I\vec{e}_z$ $\quad \vec{A} = I\, r\varphi\, \vec{e}_r$

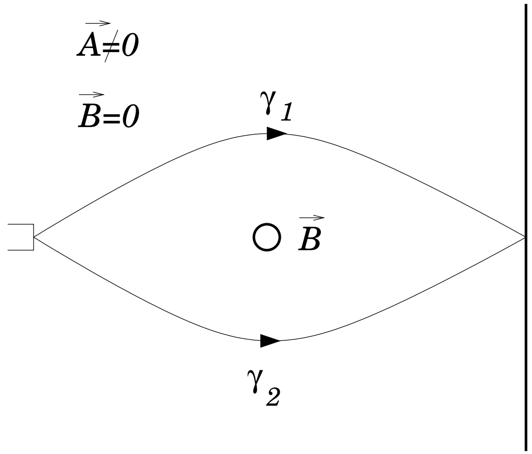
Fuera: $\vec{B} = 0$ $\quad \vec{A} = I\, r^{-1}\, \vec{e}_\varphi \ = \ -\vec{\nabla}(I\,\varphi)$

Experimento de doble rendija: electrones cogen fase extra

$$\Psi^{(0)}(\vec{r}) \to \Psi^{(\vec{A})} = \exp\Big(-iq \int_\infty^{\vec{r}} \vec{A}(\vec{r}\,') \cdot d\vec{r}\,' \Big)\, \Psi^{(0)}(\vec{r})$$

6.3 Efecto Aharonov-Bohm

D. Bohm & Y. Aharonov (1959): Efectos debido a topología



Solenoide con flujo magnético $\Phi = \int \vec{B}\cdot\vec{n}\, d^2x$

Dentro: $\vec{B} = I\vec{e}_z$ $\quad \vec{A} = I\, r\varphi\, \vec{e}_r$

Fuera: $\vec{B} = 0$ $\quad \vec{A} = I\, r^{-1}\, \vec{e}_\varphi \;=\; -\vec{\nabla}(I\,\varphi)$

Experimento de doble rendija: electrones cogen fase extra

$$\Psi^{(0)}(\vec{r}) \to \Psi^{(\vec{A})} = \exp\Big(-\, iq \int_\infty^{\vec{r}} \vec{A}(\vec{r}\,') \cdot d\vec{r}\,' \Big)\, \Psi^{(0)}(\vec{r})$$

Desplazamiento en patrón de interferencia $\longrightarrow$ efecto físico!

$$P \sim \Big| \Psi_{\gamma_1}(\vec{r}) + \Psi_{\gamma_2}(\vec{r}) \Big|^2 \sim \Big| e^{-iq\Phi}\Psi^{(0)}_{\gamma 1}(\vec{r}) \;+\; \Psi^{(0)}_{\gamma 2}(\vec{r}) \Big|^2$$

Efecto físico de potencial $\vec{A}$? (ya que $\vec{B} = 0$)

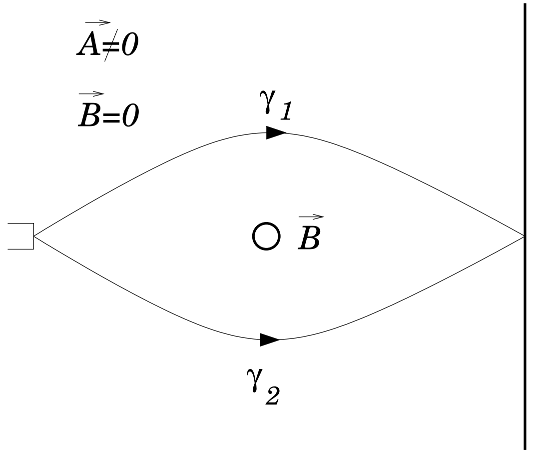
Efecto proporcional a $\Phi = \int \vec{B} \cdot \vec{n}\, d^2x$

$$\oint_\gamma \vec{A} \cdot d\vec{r} \;=\; \int (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{n}\; d^2x \;=\; \int \vec{B} \cdot \vec{n}\; d^2x \;=\; \Phi$$

Efecto proporcional a $\Phi = \int \vec{B} \cdot \vec{n}\, d^2x$

$$\oint_\gamma \vec{A} \cdot d\vec{r} \;=\; \int (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{n}\; d^2x \;=\; \int \vec{B} \cdot \vec{n}\; d^2x \;=\; \Phi$$

Efecto de topología no trivial:



$$\vec{A} \;=\; I\, r^{-1}\, \vec{e}_\varphi \;=\; \vec{\nabla}(-I\, \varphi)$$

$$\oint_\gamma \vec{A} \cdot d\vec{r} \;=\; \oint_\gamma \vec{\nabla}\Lambda \cdot d\vec{r} \;=\; \Phi \;\neq\; 0$$

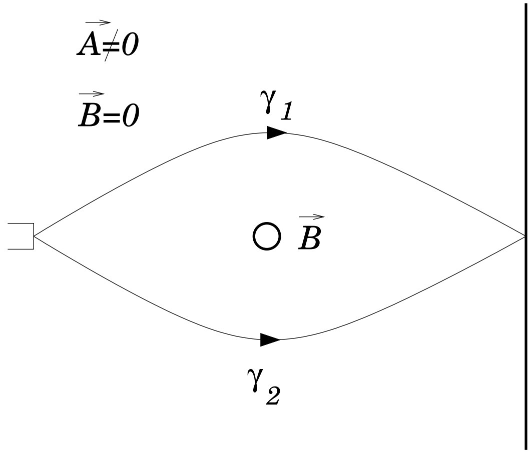
$\longrightarrow$ curva γ no contraible a un punto

$\longrightarrow$ $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ no simplemente conexa

Efecto proporcional a $\Phi = \int \vec{B}\cdot\vec{n}\, d^2x$

$$\oint_\gamma \vec{A}\cdot d\vec{r} \;=\; \int (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot\vec{n}\; d^2x \;=\; \int \vec{B}\cdot\vec{n}\; d^2x \;=\; \Phi$$

Efecto de topología no trivial:



$$\vec{A} \;=\; I\, r^{-1}\,\vec{e}_\varphi \;=\; \vec{\nabla}(-I\,\varphi)$$

$$\oint_\gamma \vec{A}\cdot d\vec{r} \;=\; \oint_\gamma \vec{\nabla}\Lambda\cdot d\vec{r} \;=\; \Phi \;\neq\; 0$$

$\longrightarrow$ curva γ no contraible a un punto

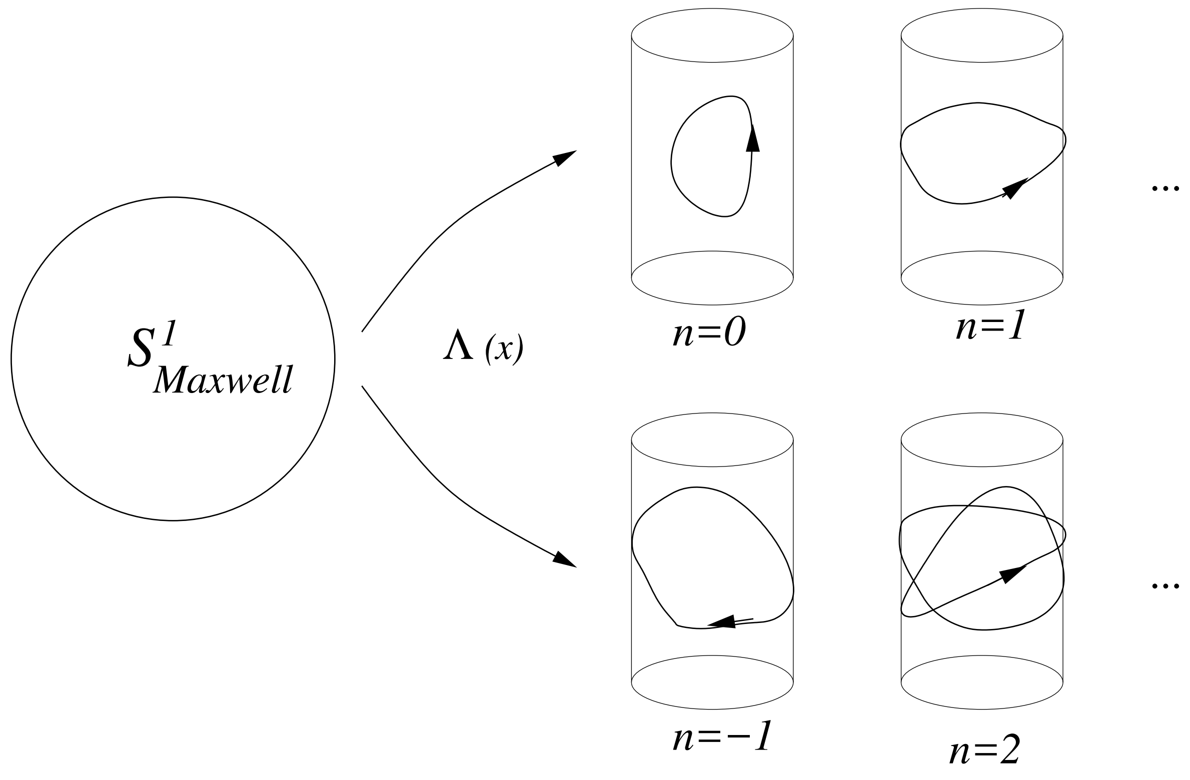
$\longrightarrow$ $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ no simplemente conexa

Efecto físico proporcional a $\vec{B}$

$\longrightarrow$ aún hay libertad gauge $\vec{A}\rightarrow\vec{A}+\vec{\nabla}\Lambda$, mientras que $\oint_\gamma \vec{A}\cdot d\vec{r} \;=\; \Phi$

$\longrightarrow$ $\vec{A}$ y $\vec{A}+\vec{\nabla}\Lambda$ físicamente indinstinguibles

$\longrightarrow$ $\vec{A}$ no es físico


$S^1_{Maxwell}$
$\Lambda\,(x)$
n=0
n=1
...
n=−1
n=2
...

6.4 Monopolo de Dirac (à la Wu-Yang)

P. Dirac (1931): monopolo magnético para restaurar simetría entre $\vec{E}$ y $\vec{B}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho_e \qquad\qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \rho_m$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \tfrac{1}{c}\partial_t \vec{E} = \tfrac{1}{c}\vec{j}_e \qquad\qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \tfrac{1}{c}\partial_t \vec{B} = -\vec{j}_m$$

Carga puntual magnética:

$$\vec{B} = \frac{Q_m}{4\pi r^2}\,\vec{e}_r$$

Problema: no hay potencial $\vec{A}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{B} \neq \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \text{(globalmente)}$$

6.4 Monopolo de Dirac (à la Wu-Yang)

P. Dirac (1931): monopolo magnético para restaurar simetría entre $\vec{E}$ y $\vec{B}$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho_e \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \rho_m$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} - \tfrac{1}{c}\partial_t\vec{E} = \tfrac{1}{c}\vec{j}_e \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} + \tfrac{1}{c}\partial_t\vec{B} = -\vec{j}_m$$

Carga puntual magnética:

$$\vec{B} = \frac{Q_m}{4\pi r^2}\,\vec{e}_r$$

Problema: no hay potencial $\vec{A}$

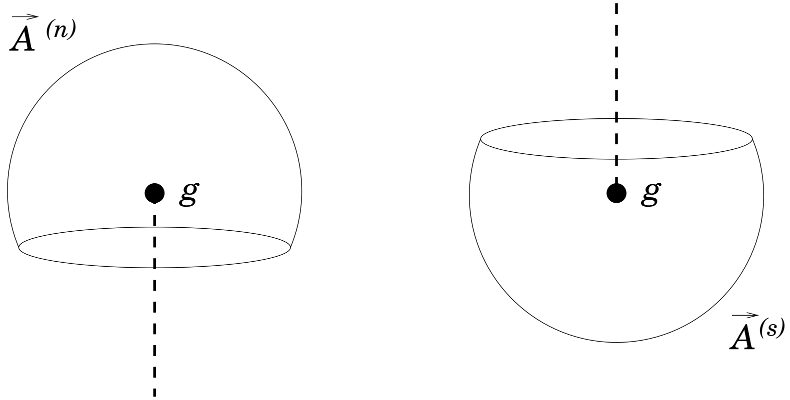
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{B} \neq \vec{\nabla}\times\vec{A} \quad \text{(globalmente)}$$

$\vec{A}$ siempre singular

$$\vec{A}^{(n)} = \frac{q_m(1-\cos\theta)}{4\pi r\sin\theta}\,\vec{e}_\varphi \qquad \longrightarrow \text{singular en } \theta = \pi$$

$$\vec{A}^{(s)} = \frac{-q_m(1+\cos\theta)}{4\pi r\sin\theta}\,\vec{e}_\varphi \qquad \longrightarrow \text{singular en } \theta = 0$$

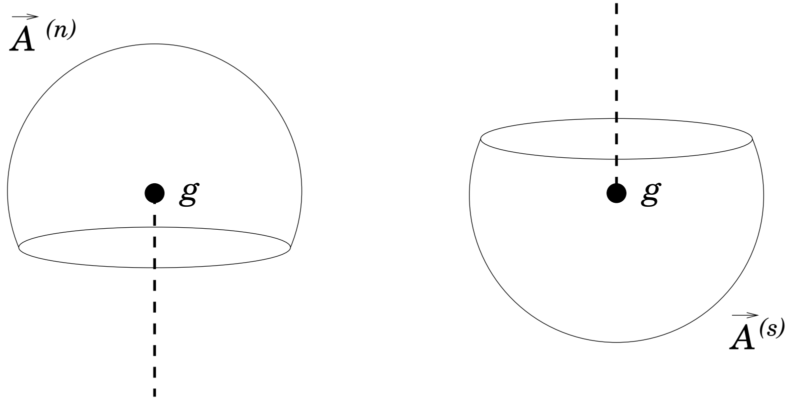
Wu & Yang (1968): Usar las expresiones por parches



$$\vec{A}^{(n)} = \frac{q_m(1-\cos\theta)}{4\pi r\sin\theta}\,\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{A}^{(s)} = \frac{-q_m(1+\cos\theta)}{4\pi r\sin\theta}\,\vec{e}_\varphi$$

Wu & Yang (1968): Usar las expresiones por parches



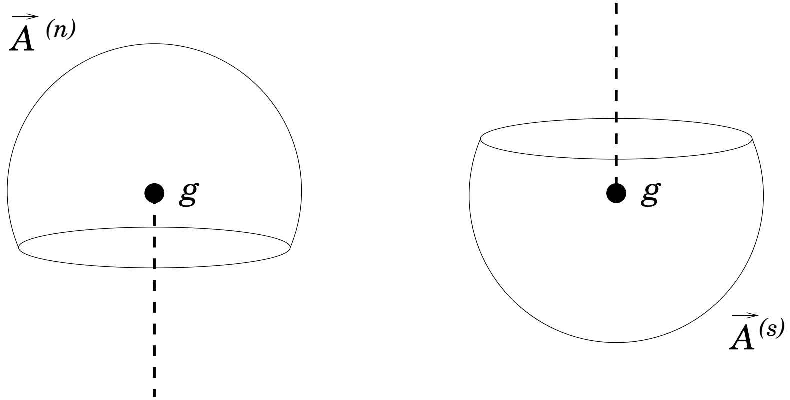
$$
\begin{aligned}
\vec{A}^{(n)} &= \frac{q_m(1-\cos\theta)}{4\pi r\sin\theta}\,\vec{e}_\varphi \\
\vec{A}^{(s)} &= \frac{-q_m(1+\cos\theta)}{4\pi r\sin\theta}\,\vec{e}_\varphi
\end{aligned}
$$

Diferencia es transformación gauge:

$$
\vec{A}^{(n)} = \vec{A}^{(s)} + \frac{q_m}{2\pi r\sin\theta}\vec{e}_\varphi = \vec{A}^{(s)} - \vec{\nabla}\Big(-\frac{q_m}{2\pi}\,\varphi\Big)
$$

$\longrightarrow$ descripción completa en término de dos potenciales equivalentes

Wu & Yang (1968): Usar las expresiones por parches



$$\vec{A}^{(n)} = \frac{q_m(1-\cos\theta)}{4\pi r\sin\theta}\,\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{A}^{(s)} = \frac{-q_m(1+\cos\theta)}{4\pi r\sin\theta}\,\vec{e}_\varphi$$

Diferencia es transformación gauge:

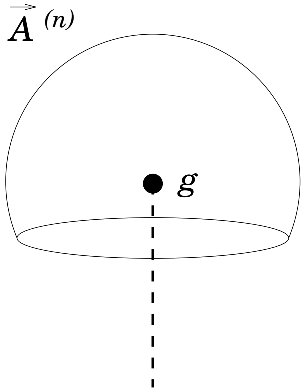
$$\vec{A}^{(n)} = \vec{A}^{(s)} + \frac{q_m}{2\pi r\sin\theta}\vec{e}_\varphi = \vec{A}^{(s)} - \vec{\nabla}\Big(-\frac{q_m}{2\pi}\,\varphi\Big)$$

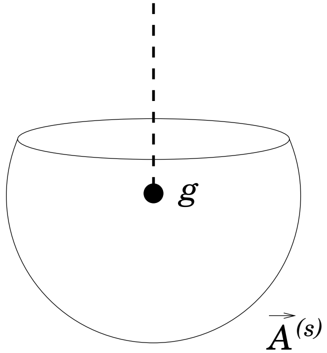
$\longrightarrow$ descripción completa en término de dos potenciales equivalentes

Electrón adquiere una fase al pasar entre parches:

$$\Psi^{(n)}(\vec{r}) = \exp\Big(-\frac{iq_e q_m}{2\pi\hbar}\,\varphi\Big)\Psi^{(s)}(\vec{r})$$

Wu & Yang (1968): Usar las expresiones por parches





$$\vec{A}^{(n)} = \frac{q_m(1-\cos\theta)}{4\pi r\sin\theta}\,\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{A}^{(s)} = \frac{-q_m(1+\cos\theta)}{4\pi r\sin\theta}\,\vec{e}_\varphi$$

Diferencia es transformación gauge:

$$\vec{A}^{(n)} = \vec{A}^{(s)} + \frac{q_m}{2\pi r\sin\theta}\vec{e}_\varphi = \vec{A}^{(s)} - \vec{\nabla}\Big(-\frac{q_m}{2\pi}\,\varphi\Big)$$

$\longrightarrow$ descripción completa en término de dos potenciales equivalentes

Electrón adquiere una fase al pasar entre parches:

$$\Psi^{(n)}(\vec{r}) = \exp\Big(-\frac{iq_eq_m}{2\pi\hbar}\,\varphi\Big)\Psi^{(s)}(\vec{r})$$

$\longrightarrow$ univaluada en $\varphi = 0$ y $\varphi = 2\pi$: cuantización de carga eléctrica

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{q_eq_m}{\hbar} = 2\pi n \qquad \Longleftrightarrow \quad q_e = \frac{2\pi\hbar}{q_m}\,n$$

Resumen

- Invariancia bajo $\phi \to \phi + \partial_t \Lambda$ y $\vec{A} \to \vec{A} - \vec{\nabla}\Lambda$ es propiedad más característica de Teoría de Maxwell

Resumen

- Invariancia bajo $\phi \to \phi + \partial_t \Lambda$ y $\vec{A} \to \vec{A} - \vec{\nabla}\Lambda$ es propiedad más característica de Teoría de Maxwell

- Principio Gauge es fundamento de interacciones fundamentales
  $\longrightarrow$ Modelo estándar: $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$
  $\longrightarrow$ Relatividad General: $ISO(3,1)$

Resumen

- Invariancia bajo $\phi \to \phi + \partial_t \Lambda$ y $\vec{A} \to \vec{A} - \vec{\nabla}\Lambda$ es propiedad más característica de Teoría de Maxwell
- Principio Gauge es fundamento de interacciones fundamentales
  $\longrightarrow$ Modelo estándar: $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$
  $\longrightarrow$ Relatividad General: $ISO(3,1)$
- Da juego para a Gran Unifcación, reducción dimensional, efectos con topología, monopolos magnéticos, teorÃa de fibrados, ...

Resumen

- Invariancia bajo $\phi \to \phi + \partial_t \Lambda$ y $\vec{A} \to \vec{A} - \vec{\nabla}\Lambda$ es propiedad más característica de Teoría de Maxwell

- Principio Gauge es fundamento de interacciones fundamentales
  $\longrightarrow$ Modelo estándar: $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$
  $\longrightarrow$ Relatividad General: $ISO(3,1)$

- Da juego para a Gran Unifcación, reducción dimensional, efectos con topología, monopolos magnéticos, teorÃa de fibrados, ...

Hermann Weyl (1885 - 1955):
"En mi trabajo siempre he intentado unificar lo verdadero con lo bello, pero cuando he tenido que elegir entre uno u otro, solía elegir lo bello."