A. Cañada, Análisis Funcional, 2014/15

TEOREMA DE LA APLICACIÓN ABIERTA.

Libro de S. Banach, 1.932, aunque Banach reconoce la prioridad de Schauder en la obtención del Teorema para espacios de Banach.

MOTIVACIÓN

1) X, Y e. normados $L: X \to Y$ lineal y continua $\not\Rightarrow$ L abierta (aplica abiertos de X en abiertos de Y)

Ej. $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineal / $\dim L(\mathbb{R}^n) < n$.

2) $L: X \to Y$ lineal, (continua), abierta $\Rightarrow$ L es sobreyectiva.

$L(B_X(0;1)) \supset B_Y(0;c)$

Entonces $\forall y \in Y, y \neq 0$, $\left\| \frac{yc}{\|y\|} \right\| = c \Rightarrow \exists u \in B_X(0;1)$ t.q.

$L(u) = \frac{yc}{\|y\|} \Rightarrow L\left(\frac{\|y\| u}{c}\right) = y \Rightarrow L$ es sobreyectiva.

3) ¿Será cierto el recíproco? Es decir

$L: X \to Y$ lineal, continua, sobreyectiva $\overset{?}{\Rightarrow}$ L abierta.

Vamos a ver que sí cuando X, Y son Banach.

TEOREMA DE LA APLICACIÓN ABIERTA (Banach-Schauder $\sim$ 1.932)

Sean E, F e. Banach (reales siempre)

$T: E \to F$ lineal, continua, sobreyectiva.

Entonces T es abierta. (ver nota 1)

DEMOSTRACIÓN

A) $\exists c > 0 : B_F(0; 2c) \subset \overline{T(B_E(0;1))}$

Definimos $Z_n \equiv \overline{nT(B_E(0;1))}$

T sobreyectiva $\Rightarrow F = \bigcup_{1}^{\infty} Z_n$. (F Banach)

T.C. Baire $\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \operatorname{int}(Z_{n_0}) \neq \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists z_0 \in F,\ r > 0 \,/\ B_F(z_0; r) \subset \overline{n_0 T(B(0;1))}$

$= n_0 \overline{T(B(0;1))}$

$\Rightarrow \frac{1}{n_0} B_F(z_0; r) \subset \overline{T(B(0;1))}$

$\qquad\qquad \shortparallel$

$B_F\left(\frac{z_0}{n_0}; \frac{r}{n_0}\right) \Rightarrow \operatorname{int}\left(\overline{T(B_E(0;1))}\right) \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists c > 0 \ \exists y_0 \in F \,/\ B(y_0; 4c) \subset \overline{T(B_E(0;1))}$

Ahora $y_0 \in B(y_0; 4c) \subset \overline{T(B_E(0;1))}$

$-y_0 \in \overline{T(B_E(0;1))}$ (por simetría de $B_E(0;1)$ y T lineal)

Así $\left.\begin{array}{l} B(y_0; 4c) \subset \overline{T(B_E(0;1))} \\ -y_0 \in \overline{T(B_E(0;1))} \end{array}\right\} \Rightarrow B(0; 4c) \subset \overline{T(B_E(0;1))} + \overline{T(B_E(0;1))} = 2\overline{T(B_E(0;1))}$

$\Rightarrow B(0; 2c) \subset \overline{T(B_E(0;1))}$

B) A) + T continua $\Rightarrow B_F(0; c) \subset T(B_E(0;1))$

Veamos

(*) $\forall y \in B_F(0; c),\ \exists x \in B_E(0; 1) \,/\ y = Tx$.

A. Cañada (Análisis Funcional) 2014/2015.

Lema

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists z_n \in E, \ \|z_n\| < \frac{1}{2^n}$ t.q.

$$\|y - T(z_1 + \cdots + z_n)\| < \frac{c}{2^n} \quad (*)$$

Demostración

$n=1$ $y \in B_F(0;c) \Rightarrow 2y \in B_F(0;2c) \subset \overline{T(B_E(0;1))} \Rightarrow$

$B_F(2y;c) \cap T(B_E(0;1)) \neq \emptyset \Rightarrow \exists z \in B_E(0;1)$ t.q.

$T(z) \in B_F(2y;c) \Rightarrow \|T(z) - 2y\| < c \Rightarrow$

$\|y - T(\frac{z}{2})\| < \frac{c}{2}$. Tomamos $z_1 = \frac{z}{2}$.

$n=2$ Sabemos que $\exists z_1 \in E, \ \|z_1\| < \frac{1}{2}$ / $\|y - T(z_1)\| < \frac{c}{2}$

Como $y - T(z_1) \in B_F(0;\frac{c}{2}) \Rightarrow 4(y - T(z_1)) \in B_F(0;2c)$

$\subset \overline{T(B_E(0;1))}$

$\Rightarrow B(4(y - T(z_1)); c) \cap T(B_E(0;1)) \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists w \in B_E(0;1)$ / $T(w) \in B(4(y - T(z_1)); c)$

$\Rightarrow \|T(w) - 4(y - T(z_1))\| < c \Rightarrow \|T(\frac{w}{4}) - y + T(z_1)\| < \frac{c}{4}$

$\Rightarrow \|y - T(z_1) - T(z_2)\| < \frac{c}{2^2}$, $z_2 = \frac{w}{4}$, $\|z_2\| < \frac{1}{2^2}$

TERMINA LA DEMOSTRACIÓN DEL LEMA

Así pues, damos $(*)$ por probado.

Ahora

(E Banach)

$x_n = z_1 + \cdots + z_n$ es de Cauchy en $E \Rightarrow x_n \to x$

$\|x\| = \lim \|x_n\| < \lim_{n\to\infty} (\|z_1\| + \cdots + \|z_n\|) < \|z_1\| + \lim_{n\to\infty} (\|z_2\| + \cdots + \|z_n\|)$

$\leq \|z_1\| + \frac{1}{2} < 1$

y $T(x) = y$ c.q.d.

EJERCICIO

E, F Banach $\quad T : E \to F \left\{ \begin{array}{l} \text{lineal} \\ \text{continuo} \\ \text{biyectivo} \end{array} \right. \Rightarrow T^{-1} : F \to E$ es continuo.

Solución

$T^{-1} : F \to E$ es continuo $\Leftrightarrow \forall \mathcal{U} \subset E$, $\mathcal{U}$ abierto $(T^{-1})^{*}(\mathcal{U})$ es abierto en F

$d'(T^{-1})^{(*)}(\mathcal{U}) = \{ f \in F / \ T^{-1}(f) \in \mathcal{U} \} = \{ f \in F : f \in T(\mathcal{U}) \} =$

$= T(\mathcal{U})$

EJERCICIO

E e. vectorial $\quad \|\cdot\|_1$ Banach

$\|\cdot\|_2$ Banach

$\exists \ c \geq 0 \ / \ \|\cdot\|_2 \leq c \|\cdot\|_1$

$\Rightarrow \|\cdot\|_1$ $\|\cdot\|_2$ son equivalentes.

Solución

La aplicación $\quad (E, \|\cdot\|_1) \xrightarrow{I} (E, \|\cdot\|_2)$

$u \longrightarrow u$ $\quad$ es $\left\langle \begin{array}{l} \text{lineal} \\ \text{cont.} \\ \text{biy.} \end{array} \right.$

$\Rightarrow I^{-1} = I : (E, \|\cdot\|_2) \to (E, \|\cdot\|_1)$ es continua

$\Rightarrow \exists \ d \geq 0$ t.q. $\|u\|_1 \leq d \|u\|_2 \quad \forall u \in E$.

¿ejercicio?

NOTA 1 T es abierta $\iff \exists\, c>0 \,/\, B_F(0;c) \subset T(B_E(0;1))$

$\Rightarrow)$ trivial

$\Leftarrow)$ Sea $U \subset E$ abierto, ¿Es $T(U)$ abierto en F?

Sea $T(y) \in T(U)$, $y \in U \Rightarrow \exists\, B(y;r) \subset U$

$\cancel{B(y,r) - \{y\} = B(0,r) \Rightarrow \frac{1}{r}\left(B(y,r) - \{y\}\right) = B_E(0,1)}$

$\cancel{x - y \,/\, x \in B(y;r)}$

$\cancel{\text{Como } T\,B_E(0;1) \supset B_F(0;c)}$

$\cancel{\Rightarrow T(B_E(0;1) + \{y\}) = T(B_E(y;1)) \supset B_F(0;c) + T(y)}$

$\cancel{= B_F(T(y),c)}$

Más sencillo $\Rightarrow T(B(y;r)) \subset T(U)$

$T(B(y;r)) = T(B(0;r) + y) = r\,T(B(0;1)) + T(y)$

$\supset r\,B_F(0;c) + T(y) = B_F(T(y); rc)$

$r z + T(y),\ \|z\| < c \Rightarrow \|r z + T(y) - T(y)\| < rc$

$\Rightarrow B_F(T(y), rc) \subset T(U)$, c.q.d.

$\frac{1}{u_0} B_F(z_0; r) = B_F\left(\frac{z_0}{u_0}; \frac{r}{u_0}\right)$, pues

$u \in B_F\left(\frac{z_0}{u_0}; \frac{r}{u_0}\right) \Leftrightarrow \left\| u - \frac{z_0}{u_0} \right\| < \frac{r}{u_0} \Leftrightarrow$

$\frac{1}{\cancel{u_0}} \| u_0 u - z_0 \| < \frac{r}{\cancel{u_0}} \Leftrightarrow u_0 u \in B_F(z_0; r) \Leftrightarrow u \in \frac{1}{u_0} B_F(z_0; r)$

$\overline{T(B_E(0;1))} + \overline{T(B_E(0;1))} = 2\,\overline{T B_E(0;1)}$

$\forall\, x + y \in \overline{T(B_E(0;1))} + \overline{T(B_E(0;1))} \Rightarrow$

$x + y = \lim_{n\to\infty} T(u_n) + T(v_n)$, $\quad u_n \in B_E(0;1)$, $v_n \in B_E(0;1)$

$= \lim_{n\to+\infty} T(u_n + v_n) =$

$= 2 \lim_{n\to+\infty} T\left(\frac{u_n}{2} + \frac{v_n}{2}\right)$ $\quad \left\| \frac{u_n}{2} + \frac{v_n}{2} \right\| < 1$

Recíprocamente

$\forall\, z \in 2\,\overline{T(B_E(0;1))}$ $\quad z = 2 \lim_{n\to\infty} T(u_n)$, $u_n \in B_E(0;1)$

$= \lim_{n\to+\infty} T(u_n) + \lim_{n\to+\infty} T(u_n) = \frac{z}{2} + \frac{z}{2} \in \overline{T(B_E(0;1))} + \overline{T(B_E(0;1))}$