# TÓPICOS de TEORIA AXIOMÁTICA

# dos

# CONJUNTOS

Francisco Miraglia Neto

Tese apresentada ao Instituto de Matemática e Estatística da U.S.P. para a obtenção do grau de Mestre.

1 9 7 1

# P R E F Á C I O

Êste trabalho se constitui numa apresentação da teoria de conjuntos de Zermelo - Fraenkel indicada daqui por diante por Z F , e de alguns tópicos correlatos. A pretensão, é que, um indivíduo conhecendo apenas a teoria intuitiva usualmente ministrada - num curso de topologia geral on análise, possa lê-lo integralmente. É indubitàvelmente necessário alguma maturidade intelectual.

O desenvolvimento feito nas páginas que se seguem, é axiomático. Deve-se entretanto, entender bem o que se quer dizer com - isto. Assim é que, muito embora apresentemos, no capítulo 1, uma - linguagem formal, $L_{Z\,F}$ , juntamente com os axiomas de uma lógica de primeira ordem, suficientes para formalizar tôda teoria exposta no capítulo 2, nunca faremos demonstrações* formais. As demonstrações apresentadas, serão, como quase tôdas em Matemática, comentários, destinados a convencer o leitor que, desejando-se, poder-se-ia tornar precisa e formal a discussão feita. Frize-se que, a todo momento, dá-se crédito aos axiomas que permitem estabelecer as construções feitas.

Os mesmos comentários que acima, valem para a utilização, no capítulo 2, da linguagem $L_{Z\,F}$. É, às vêzes, tedioso, manter-se em $L_{Z\,F}$ . Para transmitir mais rápido e melhor idéias utilizamos, algumas vêzes, de símbolos que não aqueles de $L_{Z\,F}$ . Em todos os casos em que isto é feito, chamamos a atenção do leitor que está se adotando apenas uma abreviação para alguma concatenação - mais longa de símbolos de $L_{Z\,F}$ . Estabelecida a abreviação, utilizar-se-á livremente.

Quase nunca no texto, daremos crédito as nossas fontes. - Entretanto, a bibliografia é feita, discriminando-se as referências por capítulos. As referências ditas mais importantes são, usualmente, a nossa fonte.

* Veja a definição de demonstração, no capítulo 1.

O leitor deverá ter inferido que o capítulo 1 se refere a uma linguagem formal para a teoria de conjuntos de Zermelo - Fraenkel, enquanto que o capítulo 2 é dedicado a exposição desta - teoria.

No capítulo 3, relacionamos alguns fatos essenciais sôbre modelos, que utilizaremos no capítulo 4. Além disso mostramos que se Z F é consistente então não se pode demonstrar em Z F a existência de cardinais fortemente inacessíveis.

No capítulo 4, trazemos uma demonstração da consistência da hipótese do contínuo ( ) com a teoria de Z F , utilizando forcing ou Métodos de Cohen.

A teoria de ordinais que desenvolvemos é devida, na sua - forma a Dana Scott e Alfred Tarski. Segundo informações que tive - mos, esta forma de apresentação é inedita e nos foi comunicada por Jacob Zimbarg Sobrinho em um curso de teoria axiomática dos conjun tos. O mesmo comentário de ineditecidade é válido com referência a demonstração da consistência da hipótese do contínuo apresentada.

Talvez, o lugar que mais se cometa injustiças num traba - lho seja nos agradecimentos que se deve a pessoas que nos ajudaram. Desculpamo-nos desde já, pelas que, inadvertidamente, possamos co- meter.

A origem desta exposição, está num curso de Teoria axiomá tica dos conjuntos ministrado por Jacob Zimbarg Sobrinho no Insti tuto de Matemática e Estatística da U.S.P. Em particular, os capí tulos 1 e 2 são inspirados justamente neste curso. Foram de - grande valia para nós, as notas de aula de dois colegas do mesmo - instituto, Iole de Freitas Druck e Ivan de Camargo e Oliveira, que puseram-nas ao nosso dispor.

Agradecemos ainda aos Professôres Newton Carneiro da Cos ta e Edison Farah pelo interêsse que manifestaram pelos nossos estudos de Teoria dos Conjuntos e Lógica e pelo incentivo que dêles emanou.

A Jacob Zimbarg vão os mesmos mais sinceros agradecimentos. No capítulo 4, em especial, suas sugestões foram valiosíssimas. As horas que passamos a trocar idéias foram mais ricas do que nós pudessemos desejar ou mesmo merecer.

A minha mulher, meu agradecimento não só pelo alento, como também pela sua paciência, quando da escrita dêste trabalho.

São Paulo, 15 de abril de 1971

Francisco Miraglia Neto

# Í N D I C E

# C A P Í T U L O I

## A Linguagem de Zermelo - Fraenkel

# I. A linguagem de Zermelo - Fraenkel.

Nesta primeira parte vamos apresentar uma linguagem que será por nós usada em boa parte daquilo que se segue. Como já frizamos anteriormente, a nossa principal preocupação é teoria dos conjuntos. Apresentaremos, entretanto, a sintaxe de uma linguagem formal tal que tôda teoria de conjuntos de Zermelo - Fraenkel pode nela ser formalizada. O nosso tratamento será, na maior parte das vêzes, informal, mas tudo que fôr feito poderá ser tornado preciso utilizando o que vamos descrever abaixo.

Para estabelecermos a sintaxe desta linguagem formal, $L_{ZF}$, precisamos inicialmente dos seus <u>símbolos primitivos</u> que serão listados a seguir:

(1) <u>Variáveis</u>: Temos um número enumerável de variáveis, indicadas por $v_n$, $n \in \mathbb{N}$.

(2) <u>Símbolos de Predicados</u>:
Temos apenas dois: $\in$ (pertinência) e $=$ (igualdade).

(3) <u>Conectivos Lógicos</u>: Temos $\vee$ (ou) e $\neg$ (não)

(4) <u>Quantificadores</u>: Temos o símbolo $\exists$ (existe)

(5) <u>Símbolos Auxiliares</u>: Parêntêses, vírgula, pontos.

Com os símbolos primitivos podemos definir as sequências finitas dêstes que nos interessarão.

Começamos pelas <u>fórmulas atômicas</u>:

(a) Se $v_i$ e $v_j$ são variáveis
então $v_i \in v_j$ e $v_i = v_j$ são fórmulas atômicas

(b) Apenas sequências de símbolos do tipo indicado em (a) são fórmulas atômicas.

As sequências finitas de símbolos primitivos que vão nos interessar denominamos <u>fórmulas</u>, e são definidas por indução como abaixo:

(a) Fórmulas atômicas são fórmulas

(b) Se $\emptyset$ e $\psi$ são fórmulas e $v_j$ é uma variável então $\emptyset \cup \psi$, $\neg \emptyset$ e $\exists v_j \emptyset$ são fórmulas.

(c) Uma sequência finita de símbolos primitivos é uma fórmula se e sòmente se resultar da aplicação de (a) e (b) um número finito de vêzes que a sequência é uma fórmula.

Definimos ainda ocorrência livre ou ligada de uma variável numa fórmula. Uma variável ocorre numa fórmula, se ocorrer nesta fórmula. O número de vêzes que uma variável ocorre numa fórmula é o número de ocorrências da variável na fórmula.

(1) Tôdas ocorrências de uma variável numa fórmula atômica são livres.

(2) Uma ocorrência de uma variável é livre ou ligada na fórmula $\neg \emptyset$, conforme fôr livre ou ligada como ocorrência da variável em $\emptyset$

(3) Uma ocorrência de uma variável é livre ou ligada na fórmula $\emptyset \vee \Psi$, conforme fôr livre ou ligada considerada como ocorrência em $\emptyset$ ou $\Psi$.

(4) Se $v_j$ é uma variável, tôdas as ocorrências de $v_j$ em $\exists v_j \emptyset$ ($\emptyset$, uma fórmula) são ligadas.

As ocorrências das outras variáveis são livres ou ligadas, conforme forem livres ou ligadas, consideradas como ocorrências em $\emptyset$.

Uma fórmula sem variáveis livres é denominada uma <u>sentença</u>. Seja $\emptyset$, uma fórmula, e $v_1, v_2, \ldots, v_n$ variáveis. Escrevemos $\emptyset(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ para indicar que as variáveis livres ocorrendo em $\emptyset$ estão entre as $v_1, \ldots, v_n$. Em particular se escrevemos $\emptyset(v_j)$ queremos dizer que $v_j$ tem ocorrências livres em $\emptyset$. Se $v_i$ e $v_j$ são variáveis, dizemos que <u>$v_j$ é livre para $v_i$</u> em $\emptyset$, se, substituindo-se cada ocorrência de $v_i$, em $\emptyset$, por uma de $v_j$, tôdas as ocorrências livres de $v_i$, tornam-se ocorrências livres de $v_j$.

Introduzimos, como abreviações, as seguintes expressões:

$$\emptyset \wedge \Psi \equiv_{Def} \neg(\neg\emptyset \vee \neg\Psi)$$

$$\emptyset \longrightarrow \Psi \equiv_{Def} \neg\emptyset \vee \Psi$$

$$\emptyset \longleftrightarrow \Psi \equiv_{Def} (\emptyset \rightarrow \Psi) \wedge (\Psi \rightarrow \emptyset)$$

$$\forall v_j \emptyset \equiv_{Def} \neg \exists v_j \neg \emptyset$$

$$\exists' v_j \emptyset(v_j) \equiv_{Def} \forall v_i \forall v_j (\emptyset(v_i) \wedge \emptyset(v_j) \longrightarrow v_i = v_j)$$

(esta última expressão lê-se:
existe no máximo um ..........).

$$\exists! v_j \emptyset(v_j) \equiv_{Def} \exists v_j (\emptyset(v_j) \wedge \forall v_i (\emptyset(v_i) \longrightarrow v_i = v_j)).$$

(esta última expressão lê-se:
existe um único .............).

onde $\emptyset$ e $\Psi$ são fórmulas. Estas abreviações têm o significado usual. Assim $\emptyset \wedge \Psi$ lê-se " $\emptyset$ e $\Psi$ ", etc.

Se $\emptyset$ é uma fórmula e se $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são as variáveis que ocorrem (alguma vez) livres em $\emptyset$ , o fecho de Quine de $\emptyset$ , indicado por $[\emptyset]$ é definido por:

$$[\emptyset] \equiv_{Def} \forall v_1 \ \forall v_2 \ldots \forall v_n \ \emptyset$$

É óbvio que $[\emptyset]$ é uma sentença.

Vamos descrever agora um sistema de axiomas, que serão os nossos axiomas lógicos. A partir dêstes, e mais dos axiomas específicos - da teoria que trataremos devemos deduzir todos os nossos resultados. Na realidade o que apresentamos são esquemas de axiomas. Um esquema de axiomas é uma expressão formal tal que quaisquer que sejam as fórmulas introduzidas na expressão, mantendo a sua forma, obtemos um axioma.

Os esquemas são os seguintes, onde $\emptyset$ , $\Psi$ e $\chi$ indicam fórmulas:

P1 : $(\emptyset \to \Psi) \to ((\Psi \to \chi) \to (\emptyset \to \chi))$

P2 : $(\neg \emptyset \to \emptyset) \to \emptyset$

P3 : $\emptyset \to (\neg \emptyset \to \Psi)$

P4 : $\forall x \forall y \emptyset \to \forall y \forall x \emptyset$

P5 : $\forall x (\emptyset \to \Psi) \to (\forall x \emptyset \to \forall x \Psi)$

P6 : $\forall x \emptyset \to \emptyset$

P7 : Se $x$ não é livre em $\emptyset$, então $\emptyset \to \forall x \emptyset$ é axioma.

P8 : $\exists x (x = y)$

P9 : Se $\Psi$ é atômica e obtida de $\emptyset$ substituindo-se uma ocorrência de $x$ por $y$ então a seguinte expressão é um axioma:

$$x = y \longrightarrow (\emptyset \to \Psi)$$

Temos uma só regra de inferência, denominada, modus ponens:

$$\frac{\emptyset \ , \ \emptyset \to \Psi}{\Psi}$$

ou seja se temos $\emptyset$ e $\emptyset \to \Psi$ , então temos imediatamente $\Psi$ .

Aparece no enunciado dos esquemas de axiomas, variáveis denotadas por $x$ ou $y$. Isto será uso comum no resto desta apresentação , e raramente utilizaremos as letras $v$ aferidas de índice para indicar variáveis. Isto não deverá entretanto, causar nenhuma confusão.

Seja $\Gamma$ um conjunto de fórmulas de $L_{ZF}$. Uma fórmula $\emptyset$ é dita demonstrável a partir de $\Gamma$ se existir uma sequência finita de fórmulas $\emptyset_1, \emptyset_2, \ldots, \emptyset_n$ satisfazendo para $i \leqslant n$ :

(1) $\emptyset_n$ é $\emptyset$

(2) $\emptyset_i$ é um axioma

ou

(3) $\emptyset_i$ é consequência imediata de duas fórmulas anteriores - $\emptyset_j, \emptyset_k$ $j, k < i$ pela regra de modus poneus

ou

(4) $\emptyset_i$ é uma das fórmulas de $\Gamma$ .

Se $\emptyset$ é demonstrável a partir de $\Gamma$ escrevemos $\Gamma \vdash \emptyset$ e dizemos que $\emptyset$ é dedutível de $\Gamma$

Se $\Gamma$ fôr vazio escrevemos $\vdash \emptyset$ .

Sem demonstração, apresentamos dois resultados importantes:

Prop. 1 : Uma fórmula $\emptyset$ é demonstrável (a partir do vazio) se e sòmente se seu fecho o fôr.

Teorema 1 : (da dedução).

Seja $\Gamma$ um conjunto de sentenças de $L_{ZF}$, e sejam $\emptyset$ e $\Psi$ sentenças de $L_{ZF}$ tais que

$$\Gamma \cup \{\emptyset\} \vdash \Psi \quad . \text{ Então } \quad \Gamma \vdash \emptyset \longrightarrow \Psi \quad .$$

As demonstrações dêstes dois resultados podem ser encontradas nas referências do capítulo I, dados na Bibliografia. Daremos, ainda uma lista de fórmulas, ou mais precisamente de esquemas de teoremas para referência do leitor:

(1) $\vdash \emptyset \longrightarrow (\Psi \longrightarrow \emptyset)$

(2) $\vdash \emptyset \longrightarrow \Psi \vee \emptyset$

(3) $\vdash \neg\emptyset \vee \emptyset$

(4) $\vdash \emptyset \vee \Psi \longrightarrow \Psi \vee \emptyset$

(5) $\vdash \neg(\emptyset \wedge \neg\emptyset)$

(6) $\vdash \emptyset \wedge \Psi \longrightarrow \emptyset$

(7) $\vdash \emptyset \wedge \Psi \longrightarrow \Psi$

(8) $\vdash \emptyset \longleftrightarrow \neg\neg\emptyset$

(9) $\vdash (\emptyset \rightarrow \Psi) \rightarrow (\neg \Psi \rightarrow \neg \emptyset)$

(1o) $\vdash (\emptyset \rightarrow \Psi) \rightarrow ((\emptyset \rightarrow \neg \Psi) \rightarrow \neg \emptyset)$

(11) $\vdash \neg \emptyset \rightarrow (\emptyset \rightarrow \Psi)$

(12) $\vdash \forall x\ (x = x)$

(13) $\vdash \forall x\ \emptyset\ (x) \longrightarrow \emptyset\ (y)$

onde $\emptyset$ é uma fórmula qualquer de $L_{ZF}$ y livre para x em $\emptyset$.

(14) $\{\emptyset(x)\} \vdash \forall x \emptyset(x)$ onde $\emptyset$ é uma fórmula e x é uma variá - vel qualquer.

Em todos os itens acima, $\emptyset$, $\Psi$ e $\chi$ indicam fórmulas.

O sistema de axiomas aqui apresentado é devido a Tarski*. Qualquer sistema com os postulados lógicos como acima é denominado um cálculo de predicados de 1a. ordem. A teoria de conjuntos que vamos desenvolver no capítulo seguinte é dita uma teoria de 1a. ordem pois pode ser formalizada num cálculo de predicados de 1a. ordem.

Daqui por diante, nossa apresentação será mais informal. Assim sendo, as demonstrações que apresentaremos serão (aliás como quase tôdas em Matemática) comentários para convencer ao leitor que poder-se-ia fazer uma demonstração seguindo-se as regras apresentadas aqui, se assim desejássemos.

-.-.-.-.-

* Taski - Remarks on the formalization of predicate logic - Bull. Am. Moth. Soc. (vol. 57, 1951, pag. 81 - 82)

# CAPÍTULO II

## A Teoria de Conjuntos de Zermelo - Fraenkel

## § 1 : Axiomas e Primeiras Consequências.

A teoria de conjuntos que vamos apresentar, deverá ser desenvolvida a partir de seis axiomas e um esquema de axiomas. Imediatamente após a apresentação de cada axioma na linguagem de Zermelo - Fraenkel, seguem-se comentários sôbre a formulação apresentada.

### Z F 1 : Axioma da Extensionalidade

$$\forall x \exists y (\forall u (u \in x \longleftrightarrow u \in y) \longrightarrow x = y)$$

Êste axioma nos diz que um conjunto é determinado pelos seus elementos. Dois conjuntos serão iguais portanto se tiverem os mesmos elementos.

### Z F 2 : Axioma da União

$$\forall x \exists y \forall u (u \in y \longrightarrow \exists z(z \in x \wedge u \in z))$$

Êste axioma nos fornece a união de uma família de conjuntos. Se $x$ é a família considerada, indicaremos a união de todos os conjuntos de $x$ por $\bigcup x$.

### Z F 3 : Axioma do Conjunto das Partes

$$\forall x \exists y \forall u(u \in y \longleftrightarrow \forall z(z \in u \longleftrightarrow z \in x))$$

Êste axioma nos dá a existência do conjunto de todos os sub-conjuntos de um conjunto dado. Indicaremos, para cada conjunto $x$, o conjunto das suas partes por $Px$.

### Z F 4 : Axioma da Infinidade

$$\exists I (\exists z(z \in I) \wedge \forall y(y \in I \longrightarrow \exists z(z \in I \wedge \forall u(u \in z \longleftrightarrow u = y))))$$

Temos aqui garantida a existência de um conjunto não vazio, tal que se y pertence a êle então $y$ também pertence. Êste axioma nos permitirá mais tarde construir o conjunto dos números naturais.

### Z F 5 : Axioma da Regularidade

$$\forall x( \exists z(z \in x) \longrightarrow \exists y(y \in x \wedge \forall u(u \in y \longrightarrow \neg (u \in x)))).$$

Êste axioma é um pouco artificial e incluímo-lo por razões técnicas. Nos diz que se um conjunto não é vazio então existe um elemento nêle tal que não há elementos em comum entre êles. Êste axioma nunca é usado em Matemática convencional. Intuitivamente, teremos todos os conjuntos construidos a partir do vazio e êste axioma nos garante que isto é possível, já que cada conjunto não vazio terá um elemento minimal para a relação $\in$.

O último axioma é na realidade um esquema de axiomas.

Z F 6 : Axioma da Substituição

Seja $\emptyset\,(x, y; t_1,\ldots,t_k)$ uma fórmula qualquer de $L_{ZF}$ com pelo menos duas variáveis livres. Então $\left[\forall x\ \exists' y\ \emptyset\,(x, y; t_1, \ldots, t_k) \longrightarrow \forall m\ \exists!\, m'\ \forall z(z \in m' \longleftrightarrow \exists u(u \in m \wedge \emptyset\,(u, z; t_1,\ldots,t_k)))\right]$.

Êste axioma é talvez o mais característico da Teoria de Zennelo - Fraenkel. Êle nos permite construir conjuntos utilizando propriedades. Entretanto o enunciado é cuidadoso, de tal modo que possamos , presumìvelmente, evitar contradições. Assim, o axioma nos diz que se para $t_1, \ldots, t_k$ fixados, se $\emptyset\,(x,y; t_1,\ldots,t_k)$ nos define um único y para cada x (podemos pensar $\emptyset$ como uma função definida para todos conjuntos) então o contradomínio desta função quando restrita a um conjunto m é um conjunto m'. A razão pela qual, provàvelmente, m' não pode ser um conjunto absurdo decorre do fato que a cardinalidade de m' é menor ou igual a de m. Devemos observar que os $t_j$ são apenas parâmetros utilizados na construção da fórmula $\emptyset$. Observa-se também que o axioma - está enunciado numa forma bem forte, que nunca é utilizada normalmente em Matemática.

Daremos agora algumas consequências dos axiomas. Procuraremos sempre mostrar a importância de cada axioma nas demonstrações que faremos.

Uma primeira consequência importante é o esquema de separação. Êste esquema, que é um esquema de teoremas nos diz que para qualquer fórmula $\emptyset\,(x; t_1,\ldots,t_k)$ com pelo menos uma variável livre, onde os $t_j$ são parâmetros fixados, e para qualquer conjunto m, existe um subconjunto de m, formado exatamente pelos elementos x tais que $\emptyset(x;t_1,\ldots, t_k)$.

Teorema 1 : Esquema de Separação

Seja $\emptyset\,(x;t_1,\ldots,t_k)$ uma fórmula de $L_{ZF}$ com pelo menos uma variável livre. Então temos

$$ZF \vdash \left[\forall m\ \exists!\, m'\ \forall x(x \in m' \longleftrightarrow x \in m \wedge \emptyset\,(x;t_1,\ldots,t_k))\right].$$

Demonstração:

Tomemos a fórmula

$$\chi\,(y,x;t_1,\ldots,t_k) \equiv y = x \wedge \emptyset\,(x; t_1,\ldots,t_k).$$

É claro que $\forall y\ \exists' x\ \chi(y, x; t_j)$. Assim o esquema de substituição e modus ponens nos fornecem:

$\left[\forall m\, \exists!\, m'\ \forall x\ (x \in m' \longleftrightarrow y\ (y \in m \wedge \emptyset(y,\ x;\ t_1,\ldots,t_k)\right]$. Tendo-se em conta quem é $\chi\,(y,\ x;\ t_1,\ldots,t_k)$ então decorre imediatamente, já que $y = x$

$$\left[\forall m\ \exists!\, m'\ \forall x\ (x \in m' \longrightarrow x \in m \wedge \emptyset\ (x;\ t_j))\right].$$

Isto termina a demonstração.

<u>Exercício</u>: Mostrar que (exibindo) a demonstração do Teorema 1 pode ser inteiramente formalizada no Cálculo de Predicados de 1a. ordem.

A próxima proposição trata da existência do conjunto vazio.

<u>Proposição 1</u> : $\exists!\, x\ \ \forall y\ \neg\ (y \in x)$

<u>Demonstração</u>: O axioma da infinidade nos garante a existência do conjunto I. Consideremos a fórmula $\emptyset\ (x) = \neg\ (x = x)$, e com o esquema de separação obtemos, a partir de I

$$\exists!\, z\ \ \forall u\ (\mu \in z \longleftrightarrow \mu \in I \wedge \neg(u = \mu)).$$

Como $\forall \mu\ (\mu = \mu)$ então $\forall y \neg (y \in z)$. A unicidade decorre imediatamente de Z F 1 (extensionalidade).

O conjunto vazio será indicado pela constante 0 .

A classe de todos os conjutos será indicada por V. A proposição seguinte nos mostra que V não é um conjunto (podíamos escrever, apenas como sugerindo êste resultado que $V \notin V$) e portanto ao utilizar V na nossa escrita estamos incorrendo num abuso de linguagem, que não deverá causar dano algum ao desenvolvimento seguinte. Observamos que utilizaremos V sòmente como notação.

<u>Proposição 2</u> : $\neg \exists\, y\ \ \forall x\ (x \in y)$

<u>Demonstração</u>: Suponhamos por absurdo que existisse um tal y. Consideremos a fórmula

$$\emptyset\ (x) \equiv \neg\ (x \in x)$$

Por separação obtemos

$\exists R\ \forall z\ (z \in R \longleftrightarrow \neg\ (z \in z))$. Mas então $R \in R \longleftrightarrow \neg(R \in R)$ o que é absurdo. Isto completa a demonstração.

Dado um conjunto $m$ e sendo $\emptyset\ (x;\ t_j)$ uma fórmula nas condições do enunciado do Teorema 1, utilizaremos, para indicar o subconjunto $m'$ construido a partir de $m$, a notação usual:

$$m' = \left\{ x : x \in m \wedge \emptyset\ (x;\ t_j) \right\}$$

Assim na demonstração da Proposição 2 poderíamos ter indicado

$$R = \left\{ z : z \in y\ \wedge \neg\,(z \in z) \right\}.$$

Nossa próxima preocupação será mostrar que existe, dado um conjunto c, um outro cujo único elemento é c, indicado por $\{c\}$.

Proposição 3 : $\forall x \exists y \forall v (v \in y \longleftrightarrow v = x)$

Demonstração: Seja c um conjunto. Consideremos, ajudados por Z F 3, o conjunto Pc e a fórmula

$$\emptyset (x; c) \equiv x = c$$

Por separação obtemos imediatamente a tese.

Nas duas próximas proposições, o axioma da regularidade faz sentir a sua presença.

Proposição 4 : $\forall x \neg (x \in x)$

Demonstração: Suponhamos que existisse um conjunto c tal que $c \in c$. Consideremos, com a ajuda da proposição 3 o conjunto $\{c\}$. Como $c \in c$ e $c \in \{c\}$, não existe em $\{c\}$ nenhum elemento que não tenha elementos em comum consigo próprio. Esta contradição demonstra a proposição.

Proposição 5 : $\forall x \neg (x = \{x\})$.

Demonstração: Se para algum c $c = \{c\}$, por extensionalidade $c \in c$ o que é absurdo.

No futuro indicaremos

$$\neg (x \in y) \equiv x \notin y \qquad x \subseteq y \equiv \forall z (z \in x \longrightarrow z \in y)$$

$$\neg (x = y) \equiv x \neq y \qquad x \subsetneq y \equiv x \subseteq y \wedge x \neq y .$$

Dados dois conjuntos x e y indicamos o par não ordenado de x e y por $\{x, y\}$, isto é, um conjunto que só tem como elementos x e y. A proposição seguinte mostra que êste conjunto existe.

Proposição 6 : $\forall x \forall y \exists z \forall v (v \in z \longleftrightarrow v = x \vee v = y)$

Demonstração: A idéia da demonstração é obtermos, a partir do axioma da infinidade, que nos garante a existência de um conjunto, um outro que tenha dois elementos diferentes e depois aplicar substituição.

Por Z F 4, I não é vazio e portanto seja $a \in I$. Ainda por Z F 4, temos que $\{a\} \in I$. Pela proposição anterior $a \neq \{a\}$. Seja, então a fórmula

$$\emptyset (z; a) \equiv z = a \vee z = \{a\}$$

Por separação de $I$ obtemos o conjunto

$$m = \{z : z = a \vee z = \{a\}\} = \{a, \{a\}\}.$$

Seja agora a fórmula

$$\Psi(u, v; a, c, c') \equiv (u = a \wedge v = c) \vee (u = \{a\} \wedge v = c') \vee (u \neq a \wedge u \neq \{a\} \wedge$$
$$\wedge v = u).$$

O esquema de substituição nos dá a partir de $m$ :

$$m' = \{z : z = c \vee z = c'\} = \{c, c'\}$$

Isto completa a demonstração.

<u>Corolário 1</u> : $\forall x \forall y \exists z \forall v (v \in z \longleftrightarrow v \in x \vee v \in y)$

Êste corolário nos dá a existência da união de dois conjuntos, que será indicada por $x \cup y$ .

<u>Corolário 2</u> : $\forall x \forall y \exists z \forall v ( v \in z \longleftrightarrow v \in x \wedge v \in y)$

Aqui temos descrita a intersecção de dois conjuntos, que será indicada por $x \cap y$.

As demonstrações dos corolários 1 e 2 são deixadas como exercícios.

Generalizando o corolário 2, vamos mostrar que dado um conjunto não vazio $c$ existe a intersecção de todos os seus elementos, que será indicada por $\bigcap c$ .

<u>Proposição 7</u> : $\forall x (\exists y (y \in x) \rightarrow \exists z \forall v (v \in z \longleftrightarrow \forall u (u \in x \longrightarrow v \in u)))$.

<u>Demonstração</u>: Como $x$ é não vazio seja $y \in x$ . Consideremos a formula

$$\emptyset (v; x) \equiv \forall u (u \in x \longrightarrow v \in u)$$

O esquema de separação nos fornece, utilizando $y$

$\{v : v \in y \wedge \forall u(u \in x \longrightarrow v \in u)\}$ que é o conjunto procurado.

<u>Exercícios</u> :

1 - $\forall x \forall y \exists z \forall v (v \in z \longleftrightarrow v \in x \wedge v \notin y)$
(complementar de $y$ em relação a $x$).

2 - $\forall x \forall y \exists z \forall v (v \in z \longleftrightarrow (v \in x \wedge v \notin y) \vee (v \in y \wedge v \notin x))$.
(diferença simétrica de $x$ e $y$ ).

O conjunto cuja existência é garantida por 1 será indicado por $x - y$, enquanto que a diferença simétrica de $x$ e $y$ será indicada por $x \triangle y$.

Passamos agora a tratar do conceito de par ordenado. Um par ordenado de dois conjuntos $x$ e $y$ deverá ser um conjunto, indicado por $\langle x, y \rangle$, satisfazendo as propriedades:

P 1 : $\forall x \ \forall y \ \exists z \ ( z = \langle x, y \rangle )$

P 2 : $\forall x \ \forall x' \ \forall y \ \forall y' \ ( \langle x, y \rangle = \langle x', y' \rangle \longrightarrow x = x' \wedge y = y')$

A nossa definição de $\langle x, y \rangle$ será $\{\{x\}, \{x,y\}\}$. O leitor poderá fàcilmente verificar que as duas propriedades acima estão satisfeitas. A proposição seguinte nos dá a existência do produto cartesiano de dois conjuntos $x$ e $y$, que será indicado $x \times y$.

Proposição 8 : $\forall x \ \forall y \ \exists z \ \forall v \ (v \in z \longleftrightarrow \exists u \ \exists w \ (u \in x \wedge w \in y \wedge v = \langle u, w \rangle ))$.

Demonstração : Um raciocínio inicial, embora heurístico, nos indicará a demonstração. Se $u \in x$ e $w \in y$ notamos que $\{u\} \in Px$ e $\{w\} \in Py$. Assim sendo $\{u\} \cup \{w\} = \{u, w\} \subseteq x \cup y$, e portanto $\{\{u, w\}\} \in P(x \cup y)$. Temos ainda que $\{\{u\}\} \in P(Px)$ e portanto $\{\{u\}\} \cup \{\{u, w\}\} = \{\{u\}, \{u, w\}\} \in P(Px \quad P(x \cup y))$.

Consideremos então, dados $x$ e $y$, o conjunto $P(P(x \cup y) \cup Px)$ (como constituí-lo?) e a fórmula

$\phi \ (v; x, y) \equiv \exists u \ \exists w \ (u \in x \wedge w \in y \wedge v = \langle u, v \rangle )$

O esquema de separação nos fornece então o conjunto procurado.

Um conceito muito importante em tôda Matemática é o de função. Como tôdas entidades com as quais tratamos uma função é um conjunto $f$ satisfazendo as seguintes propriedades:

F 1 : $\forall z \ (z \in f \longleftrightarrow \exists x \ \exists y \ (z = \langle x, y \rangle ))$.

F 2 : $\forall x \ \forall y \ \forall y' \ ( \langle x,y \rangle \in f \wedge \langle x,y' \rangle \in f \longrightarrow y = y')$.

Indicaremos que um conjunto $f$ é função pela notação $f \ {}^{\mathrm{dom}\, f}V$ (note-se que estamos usando símbolos que não são da nossa linguagem). A abreviação dom f é sugestiva do domínio de $f$ e $V$ é, como já dissemos, a classe de todos os conjuntos. A notação

$$f \in {}^{\mathrm{dom}\, f}V$$

deve ser considerada uma abreviação das duas condições F 1 e F 2 acima. Definiremos abaixo outras notações para funções que são compatíveis com a dada acima.

Dada $f \in {}^{\mathrm{dom}\, f}V$ definimos

a) $\mathrm{dom}_f = \{ z : \exists y \, ( \langle z, y \rangle \in f ) \}$

Êste é o domínio de f

b) $\breve{f} = \{ z : \exists x \exists y \, ( \langle x, y \rangle \in f \wedge z = \langle y, x \rangle ) \}$

Notar que $\breve{f}$ não é necessàriamente uma função. Se pensarmos em f, como uma relação (no sentido usual) então $\breve{f}$ é a relação inversa de f.

c) $\mathrm{dom}\, \breve{f} = \{ z : \exists y \, ( \langle z, y \rangle \in \breve{f} ) \}$

Êste conjunto é a imagem de f, às vêzes também chamado contradomínio de f. Indicaremos às vêzes por Im f.

d) Seja x e y conjuntos. Dizemos f é uma função de x em y e escrevemos $f \in {}^{x}y$ se e sòmente se $\mathrm{dom}\, f = x$ e $\mathrm{dom}\, \breve{f} \subseteq y$.

e) Indicamos por ${}^{x}y$, onde x e y são conjuntos o conjunto

$${}^{x}y = \{ f : f \in {}^{x}y \} = \{ f : f \in {}^{\mathrm{dom}\, f}V \wedge \mathrm{dom}\, f = x \wedge \mathrm{dom}\, \breve{f} \subseteq y \}.$$

Se f é uma função e se $z \in \mathrm{dom}\, f$ indicamos por $f`z$ o valor de f em z isto é

$$f`z = y \text{ tal que } \langle z, y \rangle \in f \quad .$$

Sabemos já que $f`z$ é único. Se **x** é um conjunto definimos

f) $f``x = \{ f`z : z \in x \}$.

g) $f \restriction x = \{ \langle z, y \rangle : z \in x \wedge \langle z, y \rangle \in f \}$

Êste conjunto é a função f restrita ao conjunto x.

Um conjunto W é uma <u>relação</u> se e sòmente se estiver satisfeita a condição

$$R_0 : \forall z \, (z \in W \longleftrightarrow \exists x \, \exists y \, (z = \langle x, y \rangle)).$$

Como para funções, podemos definir:

h) $\mathrm{dom}\, W = \{ z : \exists y \, ( \langle z, y \rangle \in W ) \}$

i) $\breve{W} = \{ z : \exists x \, \exists y \, (z = \langle y, x \rangle \wedge \langle x, y \rangle \in W ) \}$

Definimos ainda corpo de uma relação, indicado cp W como

j) $\mathrm{cp}\, W = \mathrm{dom}\, W \cup \mathrm{dom}\, \breve{W}$

Uma relação W se diz uma ordem total se estiverem satisfeitas as condições abaixo onde z, z', z'' pertencem a cp W :

1) $\forall z \, \forall z' \, (z \neq z' \longrightarrow zWz' \vee z'Wz)$

2) $\forall z \, \neg \, (zWz)$

3) $\forall z \, \forall z' \, \forall z'' \, (zWz' \wedge z'Wz'' \longrightarrow zWz'')$ onde por $zWz'$ indicamos o fato que $\langle z, z' \rangle \in W$.

Indicamos por $W \restriction (x \times y)$ onde W é uma relação e x, y são conjuntos o conjunto:

k) $W \upharpoonright (x \times y) = \{z : \exists u \exists v\ (u \in x \wedge v \in y \wedge z = \langle u, v\rangle \wedge \langle u, v\rangle \in W)\}$

Esta relação é a relação $W$ restrita a $x \times y$ .

Uma relação $W$ é uma boa ordem se e sòmente estiverem satisfeitas as condições

BO 1 – $W$ é uma ordem total

BO 2 – $\forall y\ (y \subseteq \mathrm{cp}\, W \wedge y \neq 0 \longrightarrow \exists z\ (z \in y \wedge \forall u\ (u \in y \longrightarrow z\, W\, u)))$.

Ou seja qualquer subconjunto não vazio do corpo de $W$ tem primeiro elemento. Observe-se que como a ordem é total então êste elemento é único.

Devemos observar que uma função é um tipo particular de relação.

Utilizando o conceito de função podemos dar o enunciado de um axioma, denominado da escolha, cuja relação com Z F estudaremos na terceira parte dêste trabalho.

Axioma da Escolha : ( A. E. )

$\forall x\ (\exists y\ (y \in x) \wedge \forall z\ (z \in x \longrightarrow z \neq 0) \longrightarrow \exists f (f \in {}^{x}\bigcup x \wedge \forall y\ (y \in x \longrightarrow f{}^{\backprime}y \in y)))$ .

O axioma nos diz que se temos uma família não vazia de conjuntos não vazios, então existe uma função definida sôbre a família tomando valores na união da família, tal que esta função faz corresponder a cada conjunto da família um elemento dêste mesmo conjunto. Êste princípio, tem muitas formas equivalentes, que discutiremos no Apendix 1.

Exercício : Demonstrar, dada, $f \in {}^{\mathrm{dom}\, f}V$ e sendo x e y conjuntos a existência dos conjuntos definidos nos itens a) – k) acima.

Dizemos que $f \in {}^{\mathrm{dom}\, f}V$ é bijetora se e sòmente se:

$\exists x\ \exists y\ (f \in {}^{x}y \wedge \breve{f} \in {}^{y}x)$

Deverá estar claro o que é uma função injetora ou sobrejetora.

Observe-se que tanto o conceito de função, quanto o de relação foram definidos globalmente e não para conjuntos x e y prèviamente dados.

## II. § 2 Os números naturais.

A construção dos números naturais será feita aqui, a partir do axioma da infinidade. Denotaremos o conjunto dos números naturais , como é usual, por $\omega$. Como veremos, $\omega$ será de fundamental importância no que faremos a seguir.

Alguns comentários introdutórios deverão aclarar idéias. Por razões que veremos mais tarde (definição de ordinal) queremos que $\omega$ satisfaça as condições seguintes:

a) $0 \in \omega$

b) $\forall y\ (y \in \omega \longrightarrow y \cup \{y\} \in \omega)$

c) $\forall z\ (z \in \omega \wedge z \neq 0 \longrightarrow \exists u\ (u \in \omega \wedge z = u \cup \{u\}))$.

Assim $\omega$ será constituido apenas dos elementos

$$0, \{0\}, \{0, \{0\}\}, \{0, \{0\}, \{0, \{0\}\}\}, \quad \text{etc.}$$

Como notação, indicaremos

$0 = 0$

$1 = \{0\}$

$2 = \{0, \{0\}\} = 1 \cup \{1\}$

$3 = \{0, \{0\}, \{0, \{0\}\}\} = 2 \cup \{2\}$, etc.

Observemos que $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$ $3 = \{0, 1, 2\}$, etc. Assim um número natural $n$ é o conjunto dos $n$ números anteriores. Assim cada número natural $n$ é um conjunto de $n$ elementos.

Na maneira enunciada, o axioma da infinidade, não nos permite obter $\omega$ de maneira imediata. Obteremos, primeiramente um - conjunto $F$ da forma

$$\{x_0, \{x_0\}, \{\{x_0\}\}, \{\{\{x_0\}\}\}, \ldots\}$$

onde $x_0 \in I$, o conjunto cuja existência é afirmada por Z F 4. Como veremos, o conjunto entre outras propriedade, tem uma que é análoga a da indução finita para números naturais se interpretamos como sucessor de $z \in F$, $\{z\}$. Isto nos permitirá definir funções, de maneira indutiva sôbre e obter o conjunto $\omega$ como imagem de uma destas funções. No decorrer da construção o leitor é - convidado a observar que há menos do fato que cada elemento de $F$ é unitário $F$ tem tôdas as propriedades de $\omega$ e a menos dêste inconveniente serviria como conjunto dos números naturais. O problema é que é muito mais fácil " contar " elementos, como veremos, do que contar o número de chaves em tôrno de $x_0$. Além disso queremos que todo elemento de $\omega$ seja um ordinal. Estas razões, fizeram com que $\omega$ fôsse escolhido do modo como foi. O leitor deverá manter em mente estas idéias ao ler o que se segue.

A proposição 9 nos diz que existe um conjunto $F$ que possui um elemento $x_0$, fixado, tendo $F$ as seguintes propriedades:

a) $\forall y\ (y \in F \quad \{y\} \subset F)$

b) $\forall y\ (y \in F \wedge y \cap F = 0 \longleftrightarrow y = x_0$

ou seja o único elemento de que tem intersecção vazia com $F$ é $x_0$

c) $\forall y\ (y \in F \wedge y \neq x_0 \longrightarrow \exists v\ (v \in F \wedge y = \{v\}\ )$

Esta propriedade nos diz que todo elemento de $F$ , que fôr diferente de $x_0$ , será unitário de algum elemento de $F$ .

d) $\forall z\ (x_0 \in z \wedge \forall y\ (y \in z \longrightarrow \{y\} \in z) \longrightarrow F \in z)$

Esta fórmula nos diz que $F$ é o menor conjunto satisfazendo a propriedade (a) acima e tendo $x_0$ como elemento.

<u>Proposição 9</u> : $\exists F\ (\forall y\ (\ y \in F \longrightarrow \{y\} \in F\ ) \wedge \exists x_0\ (x_0 \in F \vee \forall y\ (y \in F \wedge y \cap F = 0 \longleftrightarrow y = x_0) \wedge \forall y\ (y \in F \wedge y \neq x_0 \longrightarrow \exists v\ (v \in F \wedge y = \{v\}\ )) \wedge \forall z (x_0 \in z \wedge \forall u\ (u \in z \longrightarrow \{u\} \in z) \longrightarrow F \in z)))$ .

<u>Demonstração</u>: A demonstração será dividida em partes, correspondentes a construção de $F$ e a verificação de que valem as propriedades (a) - (d) .

1 - <u>Construção de $F$</u> : O axioma da infinidade nos diz que existe um conjunto I não vazio tal que se $z \in I$ então $\{z\} \in I$. Seja $x_0 \in I$, fixado. Consideramos, usando o axioma das partes, o conjunto PI e também a fórmula $\emptyset\ (z;\ x_0) \equiv x_0 \in z \vee \forall v\ (v \in z \longrightarrow \{v\} \in z)$

O esquema de separação nos fornece um subconjunto $g$ de PI, de todos elementos de PI que satisfazem a propriedade $\emptyset\ (z;\ x_0)$. Temos $g \neq 0$, já que $I \in g$. Pela proposição 7, seja

$$F = \bigcap g$$

Inicialmente, é óbvio que $x_0 \in F$ e que se $v \in F$ então $\{v\} \in F$ Passamos agora às outras propriedades.

(b) $\forall y\ (y \in F \wedge y \cap F = 0 \longleftrightarrow y = x_0)$

Seja $y \in F$ tal que $y \cap F = 0$ , e suponhamos que $y \neq x_0$. Consideremos o conjunto $F - \{y\}$. Teremos

1 - $x_0 \in F - \{y\}$

2 - $\forall v\ (v \in F - \{y\} \longrightarrow \{v\} \in F - \{y\})$

1) é evidente; 2) decorre do fato que $F$ tem esta propriedade e como $y \cap F$ é vazio, $y$ não é unitário de ninguém em $F$ . Obtivemos assim uma contradição, e portanto $y = x_0$ .

Devemos mostrar que $x_0 \cap F = 0$ . Pelo axioma da regularidade existe um elemento $\bar{y} \in F$ tal que $\bar{y} \cap F = 0$. Pelo o que foi feito imediatamente acima temos $\bar{y} = x_0$ e $x_0 \cap F = 0$ .

(c) $\forall y\ (y \in F \wedge y \neq x_0 \longrightarrow \exists v\ (v \in F \wedge y = \{v\}\ ))$.

Seja $y \neq x_0$ e suponhamos que não existisse $v \in F$ tal que $\{v\} = y$. Se consideramos $F - \{y\}$ obteremos a mesma contradição que em (b) . Isto demonstra esta propriedade

(d) $\forall z\ (x_0 \in z \wedge \forall u\ (u \in z \longrightarrow \{u\} \in z) \longrightarrow F \subseteq z)$

Consideremos o conjunto

$A = \{u : u \in F \wedge u \notin z\}$. Como $x_0 \in z$ temos que $x_0 \notin A$. Por outro lado, observamos que se $A \neq 0$, e se $u \in A$ então existe $v \in F$ tal que $u = \{v\}$ (por (c)). Então $v \in A$, pois se $v \in z$ então $\{v\} = u \in z$. Como $A$ não é vazio, existe um elemento $\bar{u} = x_0$, pelo raciocínio que fizemos imediatamente acima. Isto se constituindo num absurdo, $A$ deve ser vazio e portanto $F \subseteq z$.

Isto completa a demonstração

Corolário 3 : Seja $\emptyset (x; t_1,\ldots,t_n)$ uma fórmula de $L_{ZF}$ com pelo menos uma variável livre. Continuamos com a mesma notação da Proposição 9, e então vale o seguinte esquema:

$$[\emptyset (x_0; t_1,\ldots,t_n) \wedge \forall u\ (u \in F \wedge \emptyset (u; t_1,\ldots,t_n) \longrightarrow \emptyset (\{u\}; t_1,\ldots t_n)) \longrightarrow \forall u\ (u \in F \wedge \emptyset (u; t_1,\ldots,t_n))\ .$$

O leitor deverá reconhecer no enunciado acima um princípio de indução para o conjunto $F$.

Demonstração : Basta considerar o conjunto

$$z = \{u : u \in F \wedge \emptyset (u; t_1,\ldots,t_n)\}$$

Pelas hipóteses temos que $x_0 \in z$ e que se $u \in z$ então $\{u\} \in z$. Então $F \subseteq z$ e como temos $z \subseteq F$, concluimos $z = F$, como queríamos mostrar.

Podemos utilizar o corolário 3, para definir entidades indutivamente sôbre $F$. É o que faremos na Proposição 11 preliminarmente à construção dos naturais:

Proposição 11 : $\exists f\ (f \in {}^{F}V \wedge f`x_0 = 0 \wedge \forall u\ (u \in F \wedge f`\{u\} = f`u \cup \{f`u\}))$.

Demonstração : Consideremos a fórmula

$$\emptyset (x, y; x_0, F) \equiv x \in F \wedge ((x = x_0 \wedge y = 0) \vee \exists u \exists z \exists v\ (x = \{u\} \wedge z = \langle u, v\rangle \wedge y = \langle \{u\}, v \cup \{v\}\rangle))\ .$$

Vamos mostrar que $\forall x \exists! y\ \emptyset (x, y; x_0, F)$. Temos que vale $\emptyset (x_0, 0; x_0, F)$. Por outro lado suponhamos que para $x \in F$ temos $\exists! y\ \emptyset (x, y; x_0, F)$. Isto significa que existe um único par ordenado da forma $\langle x, v\rangle$. Portanto $v$ é único. Então podemos construir o par $\langle \{x\}, v \cup \{v\}\rangle$ que satisfaz a fórmula considerada. Que êste é o único decorre imediatamente do fato que existe um único da forma $\langle x, v\rangle$ e do fato que dois pares ordenados são diferentes então pelo menos em uma das coordenadas êles são diferentes. Pelo corolário 3 podemos concluir que $\forall\, x\, \exists!\, y\, \emptyset\, (x, y; x_0, F)$. O axioma da substituição nos fornece a partir de $F$ um conjunto f de pares ordenados cuja primeiro elemento são retirados de $F$. O fato de que $\forall\, x\, \exists!\, y\, \emptyset\, (x, y; x_0, F)$ nos mostra imediatamente que todos elementos de $F$ aparecem nos elementos de f. Devemos mostrar que $f \in {}^{F}V$ e que satisfaz as condições exigidas.

Sabemos já que para cada $x \in F$ existe um único par da forma $\langle x, v \rangle$. Então x não pode ocorrer como primeiro elemento de nenhum outro par em f pois senão para êste x existiriam dois pares ordenados distintos (pela $\emptyset$) o que é absurdo. Então $f \in {}^{F}V$. Temos evidentemente, $f' x_0 = 0$. Por outro lado se $x \in F$ então seja $f' x = v$. Correspondente a $\{x\}$ temos o par $\langle \{x\}, v \cup \{v\} \rangle$ e portanto $f' \{x\} = v \cup \{v\} = f' x \cup \{f' x\}$. Então $f \in {}^{F}V$ tem a propriedade exigida. Isto completa a demonstração.

A demonstração da Proposição 11 pode ser considerada modelo para definições com princípios de indução. Completando a construção do conjunto dos naturais temos o

Teorema 2 : $\exists!\, w\, (0 \in w \wedge \forall\, z\, (z \in w \longrightarrow z \cup \{z\} \in w) \wedge \forall\, y\, (0 \in y \wedge \forall\, u\, (u \in y \longrightarrow u \cup \{u\} \in y) \longrightarrow w \subseteq y))$

Demonstração: Seja $f \in {}^{F}V$ a função construida na Proposição 11 e tomemos $\text{dom}\, f = \text{Im}\, f = f^{*}F = w$. Demonstraremos que êste é o conjunto que procuraríamos

a) $0 \in w$, evidentemente

b) $\forall\, u\, (u \in w \longrightarrow u \cup \{u\} \in w)$

Seja $u \in w$. Então existe $x \in F$ tal que $f' x = u$. Então $f' \{x\} = u \cup \{u\}$

c) $\forall\, y\, (0 \in y \wedge \forall\, u\, (u \in y \longrightarrow u \cup \{u\} \in y) \longrightarrow w \subseteq y)$

Seja y satisfazendo as propriedades a) e b) acima. Consideremos o conjunto

$A = \{u : u \in w \wedge u \notin y\}$. Temos que $0 \notin A$. Por outro lado vamos supor que $u \neq 0$ e $u \in A$. Então existe $v \in w$ tal que $u = v \cup \{v\}$ (demonstração?) e portanto $v \in A$, pois se $v \in y$ então $v \cup \{v\} = u \in y$ Então se $A \neq 0$ devemos ter um elemento $\bar{u} \in A$ tal que $\bar{u} \cap A = 0$, Então, pelo que foi observado acima temos $\bar{u} = 0$, o que é absurdo. Então $A = 0$ e $w \subseteq y$. A unicidade é inteiramente trivial.

Exercícios: (a) Mostrar que o conjunto vazio é o único elemento y de $w$ tal que $y \cap w = 0$

(b) Mostrar que se $z \in w$ e $z \neq 0$ então existe $y \in w$ tal que $z = y \cup \{y\}$

(c) Observar como a minimalidade de $F$ em relação as propriedades (a), (b) e (c) da página 9 é decisiva na minimalidade de $\omega$ para as propriedades (a) e (b) do Teorema 2.

(d) Demonstrar que $\in \restriction_{\omega \times \omega}$ é uma boa ordem (ver pag. 8).

(e) Demonstrar que $\subsetneq \restriction_{\omega \times \omega} = \in \restriction_{\omega \times \omega}$.

No que se segue indicaremos um número natural pela notação usual, isto é, 0, 1, 2, 3, ..., n , etc. Muito importante é o princípio da indução finita, que vai enunciado como o

Teorema 3 : Seja $\emptyset (x; t_1, \ldots, t_k)$ uma fórmula de $L_{ZF}$, com pelo menos uma variável livre. Então vale o seguinte esquema de teoremas:

$$\left[\emptyset (0; t_1,\ldots,t_k) \wedge \forall x \, (x \in \omega \wedge \emptyset (x; t_1,\ldots,t_k) \longrightarrow \emptyset (x \cup \{x\}; t_1,\ldots,t_k)) \longrightarrow \forall x \, (x \in \omega \wedge \emptyset (x; t_1,\ldots,t_k))\right].$$

<u>Demonstração:</u> Seja o conjunto

$A = \{ z : z \in \omega \wedge \emptyset (z; t_1,\ldots,t_k)\}$ . Observamos então que

1 - $0 \in A$

2 - $\forall z \, (z \in A \longrightarrow z \cup \{z\} \in A)$

Pelo teorema 2 (condição (c) pag. 12) temos $\omega \subseteq A$ e portanto $\omega = A$. Assim, $\forall x \, (x \in \omega \wedge \emptyset (x; t_1,\ldots,t_k))$ .

Com a ajuda do conjunto $\omega$ vamos poder demonstrar o Teorema 4, que deverá esclarecer ao leitor o papel do axioma da regularidade . Indicamos por $ZF^{*}$ os axiomas de Zermelo - Fraenkel exceto o axioma da regularidade.

<u>Teorema 4</u> :

$$ZF^{*} \vdash A.R. \longrightarrow \forall z \neg \exists f (f \in {}^{\omega}V \wedge f^{\cdot}0 = z \wedge \forall n \, (f^{\cdot}n+1 \in f^{\cdot}n))$$

Em outras palavras o axioma da regularidade acarreta a não existência de uma sequência do tipo

$$x_1 \ni x_2 \ni x_3 \ni x_4$$

<u>Demonstração:</u> Suponhamos que para algum $z$ , exista uma função nas condições acima e consideremos o conjunto $f^{*}\omega$. Temos $f^{*}\omega \neq 0$ , pois $z \in f^{*}\omega$. Além disso se $n \in \omega$ temos $f^{\cdot}n \cap f^{*}\omega \neq 0$ pois $f^{\cdot}n+1 \in f^{\cdot}n$ . Então $f^{*}\omega$ é um conjunto não vazio tal que todo seu elemento tem intersecção não vazia com êle, o que é absurdo. Isto demonstra o teorema.

<u>Exercício:</u> Denominaremos $ZF^{**}$ um conjunto de axiomas, onde conservamos todos axiomas de Z F exceto regularidade e o axioma da infini

dade, mas acrescido dos seguintes axiomas:

<u>O</u> : $\exists! \; y \; \forall x \; (x \notin y)$ (axioma da existência do vazio).

Denotamos como é usual o vazio por O.

<u>Z F 4'</u> : $\exists I \; (0 \in I \land \forall z \; (z \in I \longrightarrow \{z\} \in I))$.

Demonstrar que

$$Z F^{*} + A.E. \vdash \forall z \neg \exists f \; (f \in {}^{\omega}V \land f^{\cdot} 0 = z \land \forall n \; (f^{\cdot} n+1 \in f^{\cdot} n)) \longrightarrow A.R.$$

onde A.E. é o axioma da escolha enunciado a página 8.

Sugestão:

Convença-se inicialmente que com $Z F^{**}$ podemos construir $\omega$ sem A. R.

## II. 3 Fecho Transitivo de um conjunto

O conceito que vamos discutir agora é de fundamental importância no que faremos a seguir. Intuitivamente, se consideramos um conjunto $x$, gostaríamos de também assegurar a existência de um conjunto $y$ que fôsse constituido dos elementos de $x$, dos elementos dos elementos de $x$, dos elementos dos elementos dos elementos de $x$, e assim por diante. Ou seja um conjunto $y$ tal que:

1) $x \subseteq y$
2) $\bigcup x \subseteq y$
3) $\bigcup\bigcup x \subseteq y$ , etc.

e $y$ fôsse o menor conjunto com estas propriedades, ou seja $y = x \cup (\bigcup x) \cup (\bigcup\bigcup x) \; \ldots\ldots$ , Êste conjunto será denominado fecho transitivo de $x$. Observe-se que se $u \in z$ e $z \in y$, então temos $u \in y$. O conjunto $y$ associado a $x$ nos dará, como veremos, uma idéia de como construir $x$ a partir do vazio. Como fizemos anteriormente obteremos o fecho transitivo de $x$, indicado por $Tx$, como imagem de uma função definida sôbre $\omega$.

<u>Proposição 1</u> : $\forall x \; \exists! \; \sigma_x \; (\sigma_x \in {}^{\omega}V \land \sigma_x^{\cdot} 0 = x \land \forall n \; (n \in \omega \land \sigma_x^{\cdot} n+1 = \bigcup \sigma_x^{\cdot} n)$ .

<u>Demonstração</u>: Novamente construimos a função $\sigma_x$ para cada $x$ utilizando indução finita sôbre $\omega$. Seja a fórmula

$\emptyset(z, y; x) \equiv z \in \omega \wedge ((z = o \wedge y = \langle o, x\rangle) \vee (\exists u \exists v \exists w\ z = \{u\} \cup u \wedge w = \langle u, v\rangle \wedge y = \langle z, \bigcup v\rangle)))$.

Devemos mostrar que $\forall z \exists! y\ \emptyset(z, y; x)$. Se $z = o$ então temos um único $y$ que é $\langle o, x\rangle$. Suponhamos que exista relacionado pela $\emptyset$ com $n \in w$ um único par da forma $\langle n, v\rangle$.

Òbviamente o par $\langle n+1, \bigcup v\rangle$ está relacionado pela $\emptyset$ com $n+1$. Mostremos que êste é o único. Temos que como o par $\langle n, v\rangle$ é único então $v$ é único e portanto $\langle n+1, \bigcup v\rangle$ é também o único par relacionado com $n+1$ pela $\emptyset$. Então $\forall z \exists! y\ \emptyset(z, y; x)$. O axioma da substituição nos fornece um conjunto que indicaremos $\zeta_x$.

a) $\zeta_x \in {}^{\omega}V$, isto decorre imediatamente do fato que $\forall z \exists! y\ \emptyset(z, y; x)$.

b) $\forall n\ (n \in \omega \wedge \zeta_x^{\cdot}\, n+1 = \bigcup \zeta_x^{\cdot}\, n)$

De fato, se $\zeta_x^{\cdot}\, n = y$ então temos que $\langle n, y\rangle \in \zeta_x \omega$ e portanto $\langle n+1, \bigcup y\rangle \in \zeta_x \omega$ e então $\zeta_x^{\cdot}\, n+1 = \bigcup y = \bigcup \zeta_x^{\cdot}\, n$.

A unicidade da função é trivial. Isto completa a demonstração.

Definição: Seja $x$ um conjunto qualquer. Definimos, indutivamente,

$$\bigcup^{o} x = x \quad \text{e} \quad \bigcup^{n+1} x = \bigcup\left[\bigcup^{n} x\right], \text{ para } n \in \omega.^{*}$$

Corolário 1 : $\forall x \forall n\ (n \in \omega \wedge \zeta_x^{\cdot}\, n = \bigcup^{n} x)$.

Demonstração: Exercício.

Definição: Um conjunto $x$ é dito transitivo se e sòmente se satisfaz a condição:

$$\forall y \forall z\ (y \in z \wedge z \in x \longrightarrow y \in x)$$

Definição: Seja $x$ um conjunto qualquer. Definimos o fecho transitivo de $x$, indicado por $Tx$, como

$$Tx = \bigcup \zeta_x^{*}\, \omega = \bigcup \operatorname{dom} \overset{\cup}{\zeta}_x$$

Corolário 2 : $\forall x$ ($Tx$ é transitivo).

Corolário 3 : $\forall x \forall y\ (y \in Tx \longleftrightarrow \exists n\ (n \in \omega \wedge y \in \bigcup^{n} x))$.

Corolário 4 : $\forall x \forall y\ (x \subseteq y \wedge (y \text{ é transitivo}) \longrightarrow Tx \subseteq y)$

---

* Ver exercício pag. 16 -

Corolário 5 : $\forall x \forall n \, (n \in \omega \wedge T \bigcup^{n} x = \bigcup \mathcal{T}^{*}_{x} (\omega - n))$.

O corolário 5 nos diz que

$$\mathcal{T}'_{\bigcup^n x} \; m = \mathcal{T}'_x \; n+m$$

A demonstração dos corolários é deixada como exercício ao leitor.

Exercícios: 1) $\forall x \forall n \, (\bigcup^{n+1} x = \bigcup^{n} [\bigcup x])$
2) $\forall n \forall y \forall x \, (x \in \bigcup^{n+1} y \longrightarrow \exists z \, (z \in y \wedge x \in \bigcup^{n} z))$ .

Proposição 2 : $\forall x \, (\bigcup Tx = T \bigcup x)$

Demonstração: Seja $z \in \bigcup Tx$. Então existe $y \in Tx$ com $z \in y$. Como $y \in Tx$ existe $n \in \omega$ tal que $y \in \bigcup^{n} x$ e portanto $z \in \bigcup^{n+1} x = \bigcup^{n} [\bigcup x] \subseteq T \bigcup x$. Então $\bigcup Tx \subseteq T \bigcup x$. Está claro que $T \bigcup x \subseteq \bigcup Tx$.

Proposição 3 : $\forall x \, (x \supseteq \bigcup x \longleftrightarrow x = Tx)$

Demonstração: Se $x \supseteq \bigcup x$ então $\bigcup x \supseteq \bigcup^2 x$ e portanto $x \supseteq \bigcup^2 x$ Por indução temos $x \supseteq \bigcup^{n} x$ para todo $n \in \omega$ e portanto $x \supseteq Tx$. Então $x = Tx$.

Proposição 4 : $\forall x \, (x \text{ é transitivo} \longleftrightarrow x = Tx)$ .

Demonstração: Exercício.

Proposição 5: $\forall x \, (\bigcup \{Ty : y \in x\} = \bigcup Tx)$

Demonstração: Seja $z \in \bigcup Tx$. Então $z \in u \in Tx$. Então existe $n$ tal que $u \in \bigcup^{n} x$ e $z \in \bigcup^{n+1} x = \bigcup^{n} [\bigcup x]$ então $z \in \bigcup^{n} y$ com $y \in x$ e portanto $z \in Ty$, com $y \in x$. Se $y \in x$, como $Tx$ é transitivo então $y \subseteq Tx$ e portanto (corolário 4) $Ty \subseteq Tx$. Isto completa a demonstração.

Proposição 6 : $\forall x \, (Tx = x \cup T \bigcup x)$

Demonstração: $\mathcal{T}_x = \{\langle o, x \rangle\} \cup \mathcal{T}_{\bigcup x}$ (cor. 5)

Exercícios:

1) $\forall x \forall y \, (x \in y \longrightarrow Tx \subset Ty)$

2) $\forall x \forall y (x \subseteq y \longrightarrow Tx \subseteq Ty)$

3) $\forall x (T\,Tx = Tx)$

<u>Proposição 7</u> : $\forall x (Tx \neq 0 \longrightarrow 0 \in Tx)$.

<u>Demonstração</u>: Deve existir, pelo axioma de regularidade $y \in Tx$ com $y \cap Tx = 0$. Mas isto é impossível se $y \neq 0$.

<u>Exercício</u>: $\forall x (x \neq 0 \longrightarrow \bigcap Tx \subseteq T \bigcap x)$

Dar um exemplo em que $\bigcap Tx \neq T \bigcap x$.

No restante desta secção vamos apresentar dois princípios importantes na Teoria dos Conjuntos:

a) Um princípio de indução, não mais sôbre os naturais, que nos vai garantir a possibilidade de definições e demonstrações por indução num contexto mais geral que $\omega$.

b) Um princípio de definição por recorrência sôbre conjuntos que utilizaremos mais tarde para dar as definições de ordinal, alephs, etc.

Chamamos a atenção do leitor para a importância do axioma da regularidade em tudo que se segue.

O teorema abaixo é na realidade um esquema de teoremas.

<u>Teorema 1</u> : (Princípio de Indução Transfinita)

Seja $\emptyset (x; t_1,\ldots,t_n)$ uma fórmula de $L_{ZF}$ com pelo menos uma variável livre. Vale então o seguinte esquema

$$\left[\forall x \left(\emptyset (x; t_1,\ldots,t_n) \longrightarrow \exists y \left(y \in x \wedge \emptyset (y; t_1,\ldots,t_n)\right)\right) \longrightarrow \forall x \neg \emptyset (x; t_1,\ldots,t_n)\right]$$

<u>Demonstração</u>: Suponhamos que existisse $x$ tal que $\emptyset (x; t_1,\ldots,t_n)$. Consideremos o conjunto

$$b = \{y : y \in Tx \wedge \emptyset (y; t_1,\ldots,t_n)\} .$$

Temos $b \neq 0$, pela hipótese, já que vale $\emptyset (x; t_1,\ldots,t_n)$. Por outro lado, notemos que se $y \in b$, então existe $z \in y$ tal que $z \in b$ ( já que $\neg \emptyset (0; t_1,\ldots,t_n)$ (por que?)) . Pelo axioma da regularidade, como $b \neq 0$ deve existir $y \in b$ tal que $y \cap b = 0$. Mas como $0 \notin b$, o raciocínio feito acima mostra que para todo $y \in b$, $y \cap b \neq 0$. Isto sendo uma contradição temos $\forall x \neg \emptyset (x; t_1,\ldots,t_n)$.

O teorema 1 nos diz então que se para cada $x$, o fato de que vale $\emptyset (x; t_1,\ldots,t_n)$ acarreta que temos $\emptyset (y; t_1,\ldots,t_n)$ com $y \in x$, então para todo $x$ temos $\neg \emptyset (x; t_1,\ldots,t_n)$.

Esclarece ainda mais a questão o seguinte

<u>Teorema 2</u> : Se $\emptyset\ (x;\ t_1, t_2,\ \ldots, t_n)$ percorre tôdas as fórmulas - de $L_{ZF}$ com pelo menos uma variável livre então são equivalentes os esquemas:

$$\text{a)} \Big[\forall x\ (\emptyset\ (x; t_1, \ldots, t_n) \longrightarrow \exists y\ (y \in x \wedge \emptyset\ (y;\ t_1, \ldots, t_n))) \longrightarrow \forall x \neg\ \emptyset\ (x;\ t_1, \ldots, t_n)\Big] .$$

$$\text{b)} \Big[\forall x\ (\forall y\ (y \in x \wedge \emptyset\ (y;\ t_1, \ldots, t_n)) \longrightarrow \emptyset\ (x;\ t_1, \ldots, t_n)) \longrightarrow \forall x\ \emptyset\ (x;\ t_1, \ldots, t_n)\Big] .$$

<u>Demonstração</u>: Observamos que, o que é afirmado pelo teorema é que os esquemas são equivalentes e não que para uma fórmula fixada $\emptyset$ que as sentenças a) e b) são equivalentes (o que é falso). Suponhamos, então, que seja válido o esquema a) e que temos:

$$(1)\ \forall x\ (\forall y\ (y \in x \wedge \emptyset\ (y; t_1, \ldots, t_n)) \longrightarrow \emptyset\ (x; t_1, \ldots, t_n))$$

Queremos mostrar que $\forall x\ \emptyset\ (x;\ t_1, \ldots, t_n)$.

Tomemos

$$\psi\ (x;\ t_1, \ldots, t_n) \equiv \neg\ \emptyset\ (x;\ t_1, \ldots, t_n)$$

Assim se vale $\psi\ (x;\ t_j)$ então existe $y \in x$ tal que $\psi\ (y;\ t_j)$. De fato, pois em caso contrário $\forall y\ (y \in x \wedge \neg\ \psi\ (y;\ t_j)) \equiv\ y\ (y \in x \wedge \emptyset\ (y;\ t_j))$ e portanto teríamos com (1) $\emptyset\ (x;\ t_1, \ldots, t_n)$ o que é absurdo já que $\psi\ (x;\ t_j) \equiv \neg\ \emptyset\ (x;\ t_j)$. Então pelo esquema a) temos $\forall x \neg\ \psi\ (x;\ t_j) \equiv \forall x\ \emptyset\ (x;\ t_j)$ . A recíproca fica como exercício.

Poderíamos então enunciar o Princípio de Indução Transfinita como sendo o esquema b) do teorema 2, isto é, se o fato que todos elementos de cada conjunto x tem uma propriedade, implicar que x tem a propriedade então todo conjunto tem a propriedade em questão.

Um pouco mais forte que o teorema 2, e útil para nós no que se seguirá é o

<u>Teorema 3</u> : Seja $\emptyset\ (x;\ t_1, \ldots, t_n)$ uma fórmula de $L_{ZF}$ com pelo - menos uma variável livre. Temos então o esquema:

$$\Big[\forall x\ (\emptyset\ (x;\ t_1, \ldots, t_n) \longrightarrow \exists y\ (y \in Tx \wedge \emptyset\ (y; t_1, \ldots, t_n))) \longrightarrow \forall x \neg\ \emptyset\ (x;\ t_1, \ldots, t_n)\Big] .$$

<u>Demonstração</u>: Exercício. Uma sugestão seria analisar a demonstração do Teorema 1 .

O teorema abaixo é o princípio de definição por recorrência . O leitor é convidado a suprir êle mesmo, a descrição intuitiva do que está acontecendo na situação descrita pelo teorema. Sugerimos que se considere situações anteriores em que definimos funções por recorrência (indução).

Teorema 3 : Princípio de Definição por Recorrência

Seja $\emptyset(x, y; t_1, \ldots, t_n)$ uma fórmula de $L_{ZF}$ com pelo menos duas variáveis livres. Então vale o seguinte esquema:

$$\left[\forall x\ \exists! y\ \emptyset(x,y) \longrightarrow \forall x\ \exists! f\ (f \in {}^{Tx}V \right.$$
$$\left. \wedge \forall z\ (z \in \text{dom } f \longrightarrow \emptyset(f \restriction z,\ f^{\cdot} z;\ t_1, \ldots, t_n)))\right] .$$

Demonstração: Vamos dividi-la em duas partes, a unicidade e a existência

a) Unicidade: Vamos mostrar que se existirem f e g nas condições do teorema então $f = g$. Suponhamos por absurdo que existam f e g, para algum x, diferentes e satisfazendo as condições exigidas. Então temos que:

a) $\text{dom } f = \text{dom } g = Tx$
b) $\exists z\ (z \in Tx \wedge f^{\cdot} z \neq g^{\cdot} z)$ .

Consideremos as funções $f_1 = f \restriction z$ e $g_1 = g \restriction z$. Então como $\forall x \exists! y\ \emptyset(x, y; t_j)$ teremos necessàriamente $g \restriction z \neq f \restriction z$ ( pois $f^{\cdot} z \neq g^{\cdot} z$) . Então $g_1 \neq f_1$

Assim sendo existe $y \in z$ tal que $f^{\cdot}_1 y \neq g^{\cdot}_1 y$ . Tomemos agora $f^{\cdot} \restriction Tz$ e $g \restriction Tz$ . Como $z \in x$ temos $Tz \subseteq Tx$ e portanto $\text{dom } f \restriction Tz = \text{dom } g \restriction Tz = Tz$ .

Observamos além disso que $f_1 \subseteq f \restriction Tz$ e $g_1 \subseteq g \restriction Tz$ . Mas então $f \restriction Tz \neq g \restriction Tz$ , pois $f^{\cdot}_1 y \neq g^{\cdot}_1 y$ . Isto é, do fato que existem duas funções distintas para um conjunto x , conseguimos mostrar que existe $z \subset Tx$ , com duas funções distintas para z . Pelo teorema 3, isto é universalmente falso e portanto para cada x , se existir um função como queremos, então será única.

b) Existência :

Vamos utilizar o esquema b) do Teorema 2 . Assim, vamos supor que dado x temos

$$\forall y\ (y \in x \wedge \exists! f (f \in {}^{Ty}V \wedge \forall z\ (z \in \text{dom } f \longrightarrow \emptyset(f \restriction z,\ f^{\cdot} z; t_1, \ldots, t_n))))$$

e mostremos que podemos definir uma função da maneira que desejamos sôbre Tx . Para simplificar a notação, já que sabemos, que para cada y a função, se existir, é única, indicaremo-la por $f_y$ . Há alguns fatos a serem observados:

1- $\forall y \forall z\ (y \in x \wedge z \in x \longrightarrow f_y \restriction Tz = f_z \restriction Ty)$ ou seja que as funções $f_y$ e $f_z$ coincidem em $Ty \cap Tz$. Observamos que para todo $y$ e $z$ $Ty \cap Tz \neq 0$ (porquê?). Seja $u \in Ty \cap Tz$, então $Tu \subsetneq Tx \cap Ty$. Observamos agora que $f_y \upharpoonright_{Tu}$ e $f_z \upharpoonright_{Tu}$, têm ambas domínio $Tu$ e satisfazem as nossas condições. Então são iguais. Assim $f_y \upharpoonright u = f_z \upharpoonright u$ e portanto como $\forall x \exists! y\ \emptyset (x, y; t_j)$ temos $f'_y\ u = f'_z\ u$.

2- Sendo compatíveis as funções $f_y$ para todo $y$ então $f = \bigcup_{y \in x} f_y$ é função, de domínio $\bigcup_{y \in x} \text{dom } f_y = \bigcup_{y \in x} Ty = T \bigcup x$

Resta-nos formalizar esta idéia. Como $x$ é um conjunto o axioma da substituição (com que fórmula?) nos permite obter o conjunto $F$

$$F = \{ f_y : y \in x \}$$

Tomamos então $\bigcup F = f \in {}^{T \bigcup x} V$.

Lembrando que $Tx = x \cup T \bigcup x$ resta-nos estender $f$ para os elementos de $x - T \bigcup x$. Se $x - T \bigcup x$ fôr vazio não há o que fazer e já temos $f \in {}^{Tx} V$. Se $x - T \bigcup x$ é não vazio formamos uma função $g \in {}^{x - T \bigcup x} V$ da maneira seguinte:

Sabemos que $\forall x \exists! y\ \emptyset (x,y;t_j)$ então para cada $z \in x - T \bigcup x$ temos um único conjunto $y_z$, correspondente a $f \upharpoonright_z$ (observar que $z \in x \longrightarrow z \subsetneq \bigcup x$) pela $\emptyset$. Formamos então (como?) o conjunto

$g = \{ \langle z, y_z \rangle : z \in x - T \bigcup x \wedge \emptyset (f \upharpoonright_z, y_z; t_j) \}$. É claro que $g \in {}^{x - T \bigcup x} V$. Tomamos então $k = f \cup g$. Temos $k \in {}^{Tx} V$. Se $z \in Tx$ então $k \upharpoonright_z = f \upharpoonright_z$ e temos $\emptyset (f \upharpoonright_z, f'\ z; t_j)$. Isto completa a demonstração, utilizando-se a parte a) da demonstração e o esquema b) do Teorema 2.

<u>Corolário</u> 6 : Seguindo a mesma notação do teorema temos

$$\forall x \forall y\ ( f_x \upharpoonright_{Ty} = f_y \upharpoonright_{Tx} )$$

isto é, as funções construidas pelo teorema para $x$ e $y$ são compatíveis.

<u>Demonstração</u>: Ver fato 1 na demonstração do teorema.

Os conceitos e teoremas desta secção serão instrumentos em tudo o que faremos posteriormente.

## § 4 : ORDINAIS . A FUNÇÃO $\rho$ . Os $R_\alpha$

Vamos aqui definir uma função que indicaremos $\rho$ , para estudar os ordinais.

Ordinais eram considerados como classes de equivalência de conjuntos bem ordenados. Se $W_1$ e $W_2$ são conjuntos bem ordenados, dizemos que $W_1$ é equivalente a $W_2$ se existe uma função f bijetora de $W_1$ sôbre $W_2$ que preserva as boas ordens, isto é, se $u \in W_1$ e $v \in W_1$ e u precede v na ordem de $W_1$ , então f (u) precede f (v) na ordem de $W_2$ . O inconveniente desta construção no nosso contexto é que uma tal classe de equivalência poderá não ser um conjunto em Zermelo - Fraenkel . É uma idéia de Von Newman considerar como ordinal sòmente uma representante de cada classe de equivalência no sentido acima. É isto que será feito aqui.

Serão ordinais para nós então, conjuntos X satisfazendo as condições :

a) x é transitivo

b) $\in \restriction_{X \times X}$ é uma boa ordem.

Assim o exercício d) à página 13 nos diz então que $\omega$ é um ordinal. A função $\rho$ , será definida, de tal modo que $\rho$'x é um ordinal para todo x . Observamos, que na realidade teremos dom $\rho$ = V e portanto $\rho$ não é um conjunto. O que acontecerá no entanto é que teremos para cada x uma função $\rho_x$ e que duas dessas serão compatíveis. Esta será a razão pela qual, abandonaremos uma notação mais intricada (embora precisa) em favor de uma mais clara (embora imprecisa). Com estes comentários passamos ao trabalho.

Consideremos a fórmula :

$$\phi\ (x, y) \equiv (x \in \text{dom}\ x_V \wedge y = T\ \text{Im}\ x) \vee (x \notin \text{dom}\ x_V \wedge y = x)$$

Òbviamente temos $\forall x \quad \exists! y \ \phi\ (x, y)$

O princípio de recorrência nos fornece imediatamente :

$$\forall x \ \exists! \rho_x (\rho_x \in {}^{Tx}V \wedge \forall z (z \in \mathrm{dom}\ \rho_x \rightarrow \rho_x \restriction z = T \rho_x^* z))$$

O corolário 6, em II. 3, nos fornece também :

$\forall x \forall y \ ( \rho_x \restriction_{Ty} = \rho_y \restriction_{Tz} )$ e portanto se $z \in Ty \cap Tx$ então $\rho^{\cdot}_x z = \rho^{\cdot}_y z$ . Como foi dito indicaremos então, sòmente $\rho^{\cdot} z$ .

<u>Proposição</u> 1 : $\forall x \ \exists y \ (x \in Ty)$

<u>Demonstração</u> : $x \in T \{x\}$

A proposição 1 nos informa que podemos calcular $\rho^{\cdot} x$ - para todo $x$ . Então escrevemos de forma geral para todo $x$ :

$$\rho^{\cdot} x = T \rho^* x = \rho^* x \cup T \cup \rho_x^*$$

Chamamos, ainda uma vez, a atenção que isto significa, em vista do que já foi visto :

$$\forall z \forall y \forall x ( x \in Ty \cap Tz \longrightarrow \rho^{\cdot}_y x = T \rho^*_y x = \rho^{\cdot}_z x)$$

<u>Proposição 2</u> : $\forall x ( \rho^{\cdot} x = T \rho^{\cdot} x )$

<u>Proposição 3</u> : $\forall x ( T \cup \rho^* x = \cup \rho^* x )$

<u>Demonstração</u> : Basta mostrar que $\cup \rho^* x$ é transitivo. Seja $z \in y \in \cup \rho^* x$ . Então existe $u \in x$ tal que $y \in \rho^{\cdot} u$ . Como $\rho^{\cdot} u$ é transitivo, $z \in \rho^{\cdot} u$ e portanto $z \in \cup \rho^* x$ .

<u>Corolário 1</u> : $\forall x \, ( \rho^{\cdot} x = \rho^{*} x \cup \bigcup \rho^{*} x )$

Exercício : Demonstre que

$$\forall n \, ( n \in \omega \longrightarrow \rho^{\cdot} n = n )$$

<u>Proposição 4</u> : $\forall x \, ( \bigcup \rho^{\cdot} x = \rho^{\cdot} \bigcup x )$

<u>Demonstração</u> : Exercício

Observar que podemos ter $\rho^{*} \bigcup x \neq \bigcup \rho^{*} x$ . De fato, tomamos : $x = \{ \{ 0, 3 \} , 1 \}$

Então temos $\bigcup x = \{ 0, 3 \}$ e portanto $\rho^{*} \bigcup x = \{ 0, 3 \}$, que não é transitivo e portanto não pode ser igual a $\bigcup \rho^{*} x$ que é transitivo.

<u>Lema 1</u> : $\rho^{\cdot} 0 = 0$

<u>Lema 2</u> : $\forall x \; \forall y \, ( x \in \rho^{\cdot} y \longrightarrow \exists u \, ( \rho^{\cdot} u = x ))$

<u>Demonstração</u> : Suponhamos, por absurdo, que

$\exists x \; \exists y \, ( x \in \rho^{\cdot} y \wedge \neg \exists u \, ( \rho^{\cdot} u = x ))$ . Consideremos o conjunto

$$A = \{ u : u \in Ty \wedge x \in \rho^{\cdot} u \}$$

Temos A com as seguintes propriedades :

a) $A = 0$ ; pois como $x \in \rho^{\cdot} y$ e não existe u tal que $x = \rho^{\cdot} u$ , então $x \in \bigcup \rho^{*} y$ e portanto $x \in \rho^{\cdot} u$ com $u \in y$ (donde $u \in Ty$ )

b) $0 \notin A$ ; pois $x \notin \rho^{\cdot} 0 = 0$

c) $\forall u \, ( u \in A \longrightarrow \exists v \, ( v \in u \cap A ))$

De fato, se $x \in \rho^{\cdot} u = \rho^{*} u \cup \bigcup \rho^{*} u$ então $x \in \bigcup \rho^{*} u$ e portanto $x \in \rho^{\cdot} v$ para algum $v \in u$. Então $v \in u \cap A$.

A propriedade c), como $A \neq 0$, viola nìtidamente o axioma da regularidade. Isto sendo um absurdo, obtemos a tese.

<u>Teorema 1</u> : $\forall x \forall y (\rho^{\cdot} x \in \rho^{\cdot} y \vee \rho^{\cdot} x = \rho^{\cdot} y \vee \rho^{\cdot} y \in \rho^{\cdot} x)$

<u>Demonstração</u> : Consideremos a fórmula
$\phi(x) \equiv \forall y (\rho^{\cdot} x \in \rho^{\cdot} y \vee \rho^{\cdot} x = \rho^{\cdot} y \vee \rho^{\cdot} y \in \rho^{\cdot} x)$ e suponhamos por indução que $\forall u (u \in x \longrightarrow \phi(u))$. Vamos mostrar que vale a alternativa para $x$. Suponhamos que nem $\rho^{\cdot} y \in \rho^{\cdot} x$ nem $\rho^{\cdot} x = \rho^{\cdot} y$. Então devemos ter $\rho^{*} x \subseteq \rho^{\cdot} y$. De fato, se para algum $u \in x$ tivéssemos $\rho^{\cdot} y = \rho^{\cdot} u$ ou $\rho^{\cdot} y \in \rho^{\cdot} u$ então $\rho^{\cdot} y \in \rho^{\cdot} x$. Assim temos $\rho^{*} x \subseteq \rho^{\cdot} y$. Mas como $\rho^{\cdot} y$ é transitivo $T \rho^{*} x \subseteq \rho^{\cdot} y$ e portanto $\rho^{\cdot} x \subseteq \rho^{\cdot} y$. Então temos $\rho^{\cdot} x \nsubseteq \rho^{\cdot} y$ pois $\rho^{\cdot} x \neq \rho^{\cdot} y$. Consideremos o conjunto $\rho^{\cdot} y - \rho^{\cdot} x \neq 0$. Regularidade nos fornece um elemento $z$ de $\rho^{\cdot} y - \rho^{\cdot} x$ tal que $z \cap (\rho^{\cdot} y - \rho^{\cdot} x) = 0$. Como temos $z \in \rho^{\cdot} y$ ( e portanto $z \subset \rho^{\cdot} y$ ) então concluímos imediatamente que $z \subseteq \rho^{\cdot} x$ e $z \notin \rho^{\cdot} x$. Pelo Lema 2 temos $z = \rho^{\cdot} v$. Vamos mostrar que $\rho^{\cdot} x \subseteq z$. De fato, pela hipótese de indução vale a alternativa $\rho^{\cdot} v \in \rho^{\cdot} u$ ou $\rho^{\cdot} v = \rho^{\cdot} u$ ou $\rho^{\cdot} u \in \rho^{\cdot} v$ para os elementos $u$ de $x$.

Se $\rho'v \in \rho'u$ ou $\rho'v = \rho'u$ para algum $u \in x$ teríamos $z = \rho'v \in \rho'x$ o que não pode acontecer. Então temos $\rho'u \in z = \rho'v$ para todo $u \in x$ ou seja $\rho^*x \subseteq \rho'v = z$. Então $T\rho^*x \subseteq \rho'v$ e portanto $\rho'x = z \in \rho'y$. Isto completa a demonstração, já que pelo princípio de indução obtemos a tese.

O enunciado do lema 1 deve estar claro. O teorema 1 nos informa ( juntamente com o lema 2 ) que a relação de pertinência é uma ordem total (ou linear) em todo conjunto $\rho'y$ para todo $y$. Os corolários que vão a seguir são todos de fácil demonstração e são deixados como exercício.

<ins>Corolário 2</ins> : $\forall x \forall y (\rho'x \subseteq \rho'y \vee \rho'y \subseteq \rho'x)$

<ins>Corolário 3</ins> : $\forall x \forall y (\rho'x \nsubseteq \rho'y \longleftrightarrow \rho'x \in \rho'y)$

Óbvios são ainda

a) $\forall x ( \rho'x \notin \rho'x )$

b) $\forall x \forall y ( \rho'x \in \rho'y \longrightarrow \rho'y \notin \rho'x )$

c) $\forall x \forall y \forall z ( \rho'x \in \rho'y \wedge \rho'y \in \rho'z \longrightarrow \rho'x \in \rho'z )$

A próxima proposição caracteriza a maneira como a função $\rho$ atua em conjuntos já da forma $\rho'y$.

<ins>Proposição 5</ins> : $\forall y ( \rho'y = \rho'\rho'y )$

<ins>Demonstração</ins> : Tomemos a fórmula $\emptyset(y) \equiv \rho'y = \rho'\rho'y$ e suponhamos para utilizar indução que $\forall u (u \in y \longrightarrow \emptyset(u))$. temos imediatamente portanto que $\rho'x \subseteq \rho'\rho'x$ pois se

$u \in x$ temos $\rho^{\cdot} u = \rho^{\cdot}\rho^{\cdot} u$ que está em $\rho^{\cdot}\rho^{\cdot} x$ . Suponhamos que, por absurdo $\rho^{\cdot} x \in \rho^{\cdot}\rho^{\cdot} x$ . Então temos -

$\rho^{\cdot} x \in \rho^{\cdot}\rho^{\cdot} u = \rho^{\cdot} u$ com $u \in x$ ou

$\rho^{\cdot} x = \rho^{\cdot}\rho^{\cdot} u = \rho^{\cdot} u$ com $u \in x$ . Em ambos os casos teríamos $\rho^{\cdot}\rho^{\cdot} x \in \rho^{\cdot}\rho^{\cdot} x$ , o que é absurdo . Então -

$\rho^{\cdot} x = \rho^{\cdot}\rho^{\cdot} x$ .

Decorrem imediatamente do lema 2 . Teorema 1 e Proposição 5 , os :

Corolário 4 : $\forall x \, \forall y \, (x \in \rho^{\cdot} y \longrightarrow \rho^{\cdot} x \in \rho^{\cdot} y)$

Corolário 5 : $\forall x \, \forall y \, (x \in \rho^{\cdot} y \longrightarrow \rho^{\cdot} x = x \,)$

Estamos agora preparados para tratar de ordinais .

Lembramos que $\rho\, x = T \rho^{*} x = \rho^{*} x \cup \bigcup \rho^{*} x$

Daremos então a seguinte

Definição 1 : x é ordinal ( $x \in \mathbb{O}\mathbb{R}$ ) se e sòmente - se existe y tal que $x = \rho^{\cdot} y$ :

$$x \in \mathbb{O}\mathbb{R} \longleftrightarrow \exists y \, ( \rho\, y = x \, )$$

Indicaremos ordinais com letras gregas minúsculas : $\alpha$ , $\beta$ , $\gamma$ , $\xi$ , $\eta$ , $\delta$ , etc.

Fixamos ainda alguma notação :

$$\forall \alpha \, \phi ( \alpha ) \equiv \forall x \, ( x \in \mathbb{O}\mathbb{R} \wedge \phi (x))$$

$$\exists \alpha \, \phi ( \alpha ) \equiv \exists x \, ( x \in \mathbb{O}\mathbb{R} \wedge \phi (x))$$

onde o símbolo $\alpha$ é livre para x em $\phi (x)$ .

<u>Lema 3</u> : Seja $y$ um conjunto não vazio de conjuntos - transitivos. Então $\bigcap y$ é transitivo :

$$\forall y\, (y \neq 0 \wedge \forall z\, (z \in y \longrightarrow z = Tz) \longrightarrow \bigcap y = T \bigcap y)$$

<u>Demonstração</u> : Seja $u \in z \in \bigcap y$ . Então - $\forall v\, (v \in y \longrightarrow z \in v)$. Como $v$ é transitivo temos $\forall v\, (v \in y \longrightarrow u \in v)$, e portanto $u \in \bigcap y$ e $\bigcap y = T \bigcap y$

<u>Lema 4</u> : $x \in \mathbb{O}\mathbb{R} \longrightarrow \forall y\, (y \in x \longrightarrow y \in \mathbb{O}\mathbb{R})$

<u>Demonstração</u> : Suponhamos que $\neg \exists u\, (\rho^{\cdot} u = y)$ para algum $y \in x$ . Como $y \in x$ temos que $y \in \rho^{\cdot} x = x$ e portanto dada a hipótese de contradição deve existir $z \in x$ tal que $y \in \rho^{\cdot} z$ ( $\rho^{\cdot} x = \rho^{*} x \cup \bigcup \rho^{*} x$ ) . Consideremos a fórmula $\phi\, (z; y) \equiv y \in \rho^{\cdot} z$ . Temos então com a hipótese de absurdo imediatamente que :

$$y \in x,\ x \in \mathbb{O}\mathbb{R},\ \neg \exists u\, (\rho^{\cdot} u = y) \vdash \forall z\, (\phi\, (z; x, y) \longrightarrow$$
$$\exists v\, (v \in z \wedge \phi\, (v; x, y)))$$

Como temos (esquema de indução) :

$$\forall x\, (\phi\, (x; c_1, \ldots, c_n) \longrightarrow \exists y\, (y \in x \wedge \phi\, (y; c_1, \ldots, c_n)))$$
$$\longrightarrow \forall x \neg \phi\, (x; c_1, \ldots, c_n)$$ então -

$$y \in x,\ x \in \mathbb{O}\mathbb{R},\ \neg \exists u\, (y = \rho^{\cdot} u) \vdash \forall z \neg (y \in \rho^{\cdot} z)$$

o que é absurdo . Então -

$$y \in x,\ x \in \mathbb{O}\mathbb{R} \vdash \exists u\, (y = \rho^{\cdot} u)$$ e $y$ é ordinal.

<u>Corolário</u> : $x \in \mathbb{O}\mathbb{R} \longrightarrow \forall v\, \forall y\, \forall z (z \in x \wedge v \in y \wedge y \in z \longrightarrow v \in z)$

<u>Demonstração</u> : $z$ é ordinal e portanto, transitivo.

<u>Lema 5</u> : $x \in \mathbb{O}\mathbb{R} \longrightarrow \forall y \, \forall z \, ( y \in x \wedge z \in x \wedge z \neq y \longrightarrow ( y \in z \vee z \in y ))$

<u>Demonstração</u> : Decorre imediatamente do lema 4 e do fato que $\forall y \, \forall z \, ( \rho' y \in \rho' z \vee \rho' z = \rho' y \vee \rho' z \in \rho' y )$.

<u>Proposição 6</u> : $\forall x \, (x \in \mathbb{O}\mathbb{R} \longrightarrow \in \upharpoonright_{x \times x}$ é boa ordem) .

<u>Demonstração</u> : Os lemas 2 e 3 mostram que $\in \upharpoonright_{x \times x}$ é uma ordem total ( pois $\forall y \, ( y \notin y )$). Temos ainda que, sendo a ordem total, $^*A = \text{dom} \in \cup \text{dom} \overset{\cup}{\in} = x$ . Seja então $y \subseteq x$ , $y \neq 0$ . Então $y$ é um conjunto não vazio de conjuntos transitivos ( lema 2 ) e pelo lema 1, $\bigcap y$ é transitivo. Por outro lado : $\rho' \bigcap y = \rho^* \bigcap y \cup \bigcup \rho^* \bigcap y$ . Temos ainda $\rho^* \bigcap y = \{ \rho' u : u \in \bigcap y \} = \{ u : u \in \bigcap y \} = \bigcap y$ .
Então $\rho' \bigcap y = \bigcap y \cup \bigcup [\bigcap y] = \bigcap y$ , pois $\bigcap y$ é transitivo. Então $\bigcap y$ é um ordinal. É óbvio que $\bigcap y \in x$. Suponhamos, por absurdo que $\bigcap y \notin y$ , e consideremos o conjunto $z = \bigcap y \cup \{ \bigcap y \}$ . Temos $\rho' z = z$ e portanto $z$ é um ordinal. Seja $u \in z$ . Se $u \in \bigcap y$ então $u \in v \in y$ para todo $v$ em $y$ . Por outro lado se $u = \bigcap y$ então $\bigcap y \in v \in y$ para todo $v$ em $y$ ( já que $\bigcap y \notin y$ ) .
Então $\bigcap y \cup \{ \bigcap y \} \subset \bigcap y$ , o que é absurdo, pois então teríamos $\bigcap y \in \bigcap y$ . Então $\bigcap y \in y$ . É óbvio que

* Se $W$ é uma relação então $\text{dom}\, W \cup \text{dom}\, \overset{\cup}{W}$ é denominado <u>corpo</u> da relação.

para todo $v \in y$, $\bigcap y \in v$ (lema 3) e portanto $\bigcap y$ é o primeiro elemento de $y$. Isto completa a demonstração.

Teorema 2 : $\neg \exists x \ \forall \alpha \ (\alpha \in x)$

Demonstração : Se existisse um tal $x$ teríamos, $\rho^{\cdot} x \in x$ e portanto $\rho^{\cdot}\rho^{\cdot} x \in \rho^{\cdot} x$ donde $\rho^{\cdot} x \in \rho^{\cdot} x$ o que é absurdo.

Passamos agora a discutir os dois tipos de ordinais que podem existir :

a) Ordinais sucessores

b) Ordinais limites

Como já vimos todo ordinal é um conjunto de ordinais e - mais do que isto, um ordinal é o conjunto dos ordinais que o precede na ordem dada pela pertinência. Podemos então perceber que dado um ordinal $\alpha$, poder-se-á ter dois casos :

a) Considerado como conjunto dos ordinais que o precedem, $\alpha$, poderá ter último elemento, $\eta$. Isto significa que -

$$\exists \eta \ \forall \beta \ (\beta \in \alpha \wedge \beta \neq \eta \longrightarrow \beta \in \eta).$$

Neste caso então $\alpha$ será o ordinal sucessor de $\eta$. Observe--se, que encarar o fenômeno dêste modo é muito natural pois no caso em questão $\alpha$ é o menor ordinal que é maior do que $\eta$, se - não $\eta$ não seria último elemento.

b) Considerado como conjunto dos ordinais que o precedem, $\alpha$ poderá não ter último elemento. Isto significa que :

$$\forall \beta \ (\beta \in \alpha \longrightarrow \exists \delta \ (\delta \in \alpha \wedge \beta \in \delta))$$

Neste caso, $\alpha$ será um ordinal limite. Observe-se que $\alpha$ não é sucessor de ninguém ( o menor que é maior que êsse alguém ).

Será interessante ter em mente as idéias intuitivas acima, na formalização que faremos abaixo. Preliminarmente, temos o seguinte

Lema 6 : $\forall x \, (\forall y \, (y \in x \longrightarrow y = Ty) \longrightarrow \bigcup x = T \bigcup x)$

Demonstração : Imediata

Teorema 3 : $\forall x \, ( \bigcup \rho^{\cdot} x \in \mathbb{O}\,\mathbb{R})$

Demonstração : Calculemos $\rho^{\cdot} \bigcup \rho^{\cdot} x$ . Teremos -

$\rho^{\cdot} \bigcup \rho^{\cdot} x = \rho^{*} \bigcup \rho^{\cdot} x \; \cup \; \bigcup \rho^{*} \bigcup \rho^{\cdot} x$ e com o lema 4

$\rho^{*} \bigcup \rho^{\cdot} x = \{ \rho^{\cdot} z : z \in \bigcup \rho^{\cdot} x \} = \{ \rho^{\cdot} z : z \in y \in \rho^{\cdot} x \} =$

$= \{ z : z \in y \in \rho^{\cdot} x \} = \bigcup \rho^{\cdot} x$

Como $\rho^{\cdot} x$ é um conjunto de conjuntos transitivos * temos que - pelo Lema 6 , $\bigcup \rho^{\cdot} x$ é transitivo. Então

$\rho^{\cdot} \bigcup \rho^{\cdot} x = \rho^{*} \bigcup \rho^{\cdot} x \; \cup \; \bigcup \rho^{*} \bigcup \rho^{\cdot} x = \bigcup \rho^{\cdot} x \; \cup \; \bigcup \bigcup \rho^{\cdot} x =$

$= \bigcup \rho^{\cdot} x$ e portanto $\bigcup \rho^{\cdot} x \in \mathbb{O}\,\mathbb{R}$ .

Corolário 1 : $\forall \alpha \, ( \alpha \supseteq \bigcup \alpha )$

Demonstração : $\alpha$ é transitivo.

Corolário 2 : $\forall \alpha \, ( \bigcup \alpha \in \alpha \; \vee \; \bigcup \alpha = \alpha )$

Demonstração : $\alpha \subseteq \beta \longleftrightarrow \alpha \in \beta \; \vee \; \alpha = \beta$

Aqui já temos caracterizada a dicotomia que falávamos na página 6 . Daremos então a seguinte

---

* também pelo lema 4 , pois $\bigcup \{ \rho^{\cdot} y : y \in x \} =$

$= \{ z : z \in \rho^{\cdot} y \wedge y \in x \} = \{ \rho^{\cdot} z : z \in \rho^{\cdot} y \wedge y \in x \}$

<u>Definição 2</u> : Seja $\alpha \in \mathbb{O}\,\mathbb{R}$ . Então

a) $\alpha$ será um ordinal <u>sucessor</u> se e sòmente se $\bigcup \alpha \in \alpha$ . Neste caso $\alpha$ é o sucessor de $\bigcup \alpha$ .

b) $\alpha$ será um ordinal <u>limite</u> se e sòmente se $\bigcup \alpha = \alpha$ .

Os corolários 1 e 2 acima mostram que só êstes dois casos podem acontecer. Perceba-se que se $\bigcup \alpha \in \alpha$ , $\bigcup \alpha$ é o último elemento de $\alpha$ (ver lema 7 abaixo). Se $\bigcup \alpha = \alpha$ então $\alpha$ não tem último elemento pois se $\gamma \in \alpha = \bigcup \alpha$ , existe $\beta \in \alpha = \bigcup \alpha$ tal que $\gamma \in \beta$ (axioma da união) .

<u>Proposição 7</u> : $\forall \alpha \exists \beta ( \alpha \in \beta )$

<u>Demonstração</u> : $\beta = \alpha \cup \{\alpha\}^{*}$

<u>Lema 7</u> : $\forall \alpha \forall \gamma ( \gamma \in \alpha \longleftrightarrow \gamma = \bigcup \alpha \vee \gamma \in \bigcup \alpha )$

<u>Demonstração</u> : Como $\gamma \in \alpha$ , temos que $\gamma \subseteq \bigcup \alpha$ , pois $\bigcup \alpha = \{ z : z \in \beta \in \alpha \}$ . Então temos imediatamente que $\gamma \in \bigcup \alpha$ (se $\gamma \not\subseteq \bigcup \alpha$ ) ou $\gamma = \bigcup \alpha$ . A recíproca é trivial.

<u>Proposição 8</u> : $\forall \beta \forall \alpha ( \alpha = \beta \cup \{\beta\} \longleftrightarrow \beta \in \alpha \wedge \forall \gamma ( \beta \in \gamma \longrightarrow \alpha \in \gamma \vee \alpha = \gamma ))$ .

---

*: De fato, $\bigcup \alpha \cup \{\alpha\} = \bigcup \alpha \cup \alpha = \alpha \in \alpha \cup \{\alpha\}$

Demonstração : a) Suponhamos que $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$ e seja $\gamma$ tal que $\beta \in \gamma$. Se $\alpha \notin \gamma$ então ou $\alpha = \gamma$ ou $\gamma \in \alpha$. Se $\gamma \in \alpha$, temos $\cup \alpha = \beta \in \gamma \in \alpha$. Pelo lema 5, temos também que $\gamma \in \cup \alpha$ ou $\gamma = \cup \alpha$. Em ambos os casos temos uma contradição, pois no primeiro teríamos $\cup \alpha \in \gamma \in \cup \alpha$ (lembrar que $\cup \alpha \in \mathbb{O}\mathbb{R}$ e portanto é transitivo) e no segundo teríamos simplesmente $\cup \alpha \in \cup \alpha$. Então $\alpha = \gamma$. É óbvio que $\beta \in \beta \cup \{\beta\}$.

b) Vamos mostrar que $\alpha$ satisfaz a propriedade dada então $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$. É óbvio que $\beta \in \beta \cup \{\beta\}$. Então temos que $\alpha \in \beta \cup \{\beta\}$ ou $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$. Se $\alpha \in \beta \cup \{\beta\}$ então $\alpha \in \cup \beta \cup \{\beta\} = \beta$ ou $\alpha = \beta$ (lema 5) e como $\beta \in \alpha$ temos uma contradição. Então $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$.

<u>Definição 3</u> : Um ordinal $\beta$ <u>é dito sucessor de um ordinal $\alpha$</u> se e sòmente se $\cup \beta = \alpha$ e $\alpha \in \beta$.

<u>Corolário 1</u> : $\forall \alpha \exists ! \beta$ ( $\beta$ é o sucessor de $\alpha$ )

<u>Demonstração</u> : Seja $\beta$ tal que $\alpha \in \beta$ e $\cup \beta = \alpha$. Então temos imediatamente que $\beta = \alpha \cup \{\alpha\}$ (ver a demonstração da parte b) da Proposição 3 ).

O ordinal sucessor de $\alpha$ será indicado por $\alpha + 1$. Sabemos já que $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$. Veremos que esta notação é muito natural quando tratarmos da aritmética de ordinais.

<u>Corolário 2</u> : $\forall \alpha \neg \exists \beta \, (\alpha \in \beta \in \alpha + 1)$

<u>Demonstração</u> : Exercício .

As definições e proposições dadas e desenvolvidas acima, nos sugerem generalizar êstes conceitos para conjuntos quaisquer de ordinais, mesmo que êstes conjuntos não sejam ordinais. Podemos prever que dado um conjunto $X$ de ordinais ( $X \subset \mathbb{OR}$ ) êle poderá ter último elemento ou então não tê-lo. Intuitivamente êste último elemento deveria ser $\bigcup X$ ( pois se $\alpha$ , $\beta \in X$ , temos $\alpha \subseteq \beta$ ou $\beta \subseteq \alpha$ ) se $\bigcup X \in X$ , e no caso de $X$ não ter último elemento então $\bigcup X$ deveria ser o menor elemento que contém todos os elementos de $X$ . Veremos que isto realmente o caso. Inicialmente

<u>Lema 8</u> : $X \subset \mathbb{OR} \longrightarrow \bigcup X \in \mathbb{OR}$

<u>Demonstração</u> : Sabemos já que $\bigcup X$ é transitivo(lema 4) . Temos ainda

$$\rho^{*}\bigcup X = \{\rho^{\cdot}z : z \in \bigcup X\} = \{\rho^{\cdot}z : z \in \alpha \in X\} =$$

$$= \{z : z \in \alpha \in X\} = \bigcup X$$

onde usamos novamente o lema 2 . Então $\rho^{\cdot}\bigcup X = \bigcup X \cup \bigcup\bigcup X = \bigcup X$ e portanto $\bigcup X \in \mathbb{OR}$ .

<u>Definição 4</u> : Seja $X$ um conjunto de ordinais. Dizemos que um ordinal $\alpha$ é o supremo de $X$ ( $\alpha = \sup X$ ) se e sòmente se qualquer que seja $\beta \in X$ temos $\beta \in \alpha$ ou $\beta = \alpha$* , e para qualquer outro $\gamma$ que satisfaz a esta propriedade temos $\gamma = \alpha$ ou $\alpha \in \gamma$ :

(1) $\alpha = \sup X \longleftrightarrow \forall\beta\,(\beta \in X \rightarrow \beta \subseteq \alpha) \wedge \forall\gamma\,(\forall\beta\,(\beta \in X \longrightarrow \beta \subseteq \gamma) \longrightarrow \alpha \subseteq \gamma)$ .

---

* Note-se a semelhança com o lema 5 .

Teorema 4 : $\forall X ( X \subset \mathbb{O}\mathbb{R} \longrightarrow \sup X = \bigcup X )$ .

Demonstração : O lema 6 nos diz que $\bigcup X \in \mathbb{O}\mathbb{R}$ . Mostremos que se $\alpha$ satisfaz a condição (1) então $\alpha = \bigcup X$ . Da condição (1) temos imediatamente que $\alpha \subseteq \bigcup X$ . Seja - $z \in \bigcup X$ . Então existe $\beta \in X$ tal que $z \in \beta \subseteq \alpha$ (por (1)) e portanto $z \in \alpha$ . Então $\bigcup X \subseteq \alpha$ e portanto $\bigcup X = \alpha$ .

Corolário 1 : $\forall X (X \subset \mathbb{O}\mathbb{R} \longrightarrow \exists ! \alpha ( \alpha = \sup X))$

Demonstração : $\alpha = \bigcup X$ .

Corolário 2 : $\forall X (X \subset \mathbb{O}\mathbb{R} \longrightarrow [\exists \eta ( \eta \in X \wedge \forall \beta ( \beta \in X \longrightarrow \beta \subseteq \eta )) \longleftrightarrow \exists \eta ( \eta \in X \wedge \eta = \bigcup X) ] )$ .

Demonstração : Do teorema 4 temos que $\eta \subseteq \bigcup X$ . Seja $z \in \bigcup X$ , então $z \in \alpha \in X$ e então $z \in \eta$ (pois $\alpha \subseteq \eta$ ) . Então $\eta = \bigcup X$ . A recíproca é trivial.

Corolário 3 : $\forall X (X \subset \mathbb{O}\mathbb{R} \longrightarrow [\forall \xi ( \xi \in X \longrightarrow \exists \eta ( \eta \in X \wedge \xi \in \eta )) \longleftrightarrow \forall \xi ( \xi \in X \longrightarrow \xi \in \bigcup X)] )$

Demonstração : Se - $\forall \xi ( \xi \in X \longrightarrow \exists \eta ( \eta \in X \wedge \xi \in \eta ) )$ então imediatamente $\forall \xi ( \xi \in X \longrightarrow \xi \in \bigcup X)$ . Por outro lado se - $\xi \in \bigcup X$ então existe $\eta \in X$ tal que $\xi \in \eta$ . Isto completa a demonstração.

Os corolários 2 e 3 acima classificam a situação, levando-se em conta o teorema 4 . Pois, evidentemente, com o teorema 4, e $X \subset \mathbb{O}\mathbb{R}$ :

$$\vdash \exists \eta (\eta \in X \wedge \eta = \bigcup X) \longleftrightarrow \neg \forall \xi (\xi \in X \longrightarrow \xi \in \bigcup X)$$

Assim sendo o corolário 2 nos descreve a situação em que o sup é atingido, enquanto que o corolário 3 nos descreve a situação na qual o sup não é um elemento do conjunto. Vemos imediatamente, lembrando aquilo que foi feito para ordinais, que um ordinal é sucessor se o sup $\alpha = \bigcup \alpha \in \alpha$ e é limite se sup $\alpha = \bigcup \alpha = \alpha$ (e portanto não pertence a $\alpha$ ).

Finalizando esta secção chamamos a atenção para as expressões do esquema de indução e do esquema de recorrência com ordinais :

Esquema de Indução :

$$\forall \alpha (\forall \beta (\beta \in \alpha \wedge \phi(\beta ; c_1, \ldots, c_n) \longrightarrow \phi(\alpha ; c_1, \ldots, c_n))) \longrightarrow \forall \alpha \, \phi( \alpha ; c_1, \ldots, c_n)$$

Esquema de recorrência :

$$\forall x \; \exists ! \, y \, \phi (x, y) \longrightarrow \forall \alpha \exists ! \, f \, (f \in {}^{\alpha}V \wedge \forall \xi \, \phi (f \restriction \xi , f^{\cdot} \xi ))$$

Exercício : Seja a fórmula

$$\phi (x, y) \equiv (x \in \text{dom } x_V \wedge y = \bigcup \text{dom } \breve{x} \cup \mathcal{P} \text{ dom } \breve{x} ) \wedge (x \notin \text{dom } x_V \wedge y = x)$$

Evidentemente temos $\forall x \exists ! \, y \, \phi (x, y)$ . Do esquema de recorrência obtemos então

$$\forall \alpha \exists ! \; f \, (f \in {}^{\alpha}V \wedge \forall \xi \; \phi (f \restriction \xi , f^{\cdot} \xi ))$$

Temos $f^{\cdot} \xi = \bigcup f^{*} \xi \cup \mathcal{P} \bigcup f^{*} \xi$

Demonstrar que : a) Se $f \in {}^{\alpha}V$ e $g \in {}^{\beta}V$ e

são obtidos como acima então $f$ e $g$ são compatíveis -
$[f)(g]$ : Se $\alpha \subseteq \beta$ então $f \subseteq g$ .

Definimos $R_\alpha = f_{\alpha+1}$ onde $f_\beta$ indica a função obti-
da da forma acima para $\beta$ . O quisito a) nos mostra que $R_\alpha$ independe de $f_\beta$ se $\alpha \in \beta$ .

b) $R_\alpha = \bigcup_{\beta\in\alpha} R_\beta \cup \wp \bigcup_{\beta\in\alpha} R_\beta$

c) $\alpha \in \beta \longrightarrow R_\alpha \subseteq R_\beta$

d) $R_0 = \{0\}$

e) $R_{\alpha+1} = R_\alpha \cup \wp R_\alpha$

f) $\lambda = \bigcup\lambda \longrightarrow R_\lambda = \bigcup_{\xi\in\lambda} R_\xi \cup \wp \bigcup_{\xi\in\lambda} R_\xi$

g) $\forall x \; \exists \alpha \; (x \in R_\alpha)$ (às vêzes indicamos êste resultado por $V = \bigcup_{\alpha \in OR} R_\alpha$ ).

h) $V = \bigcup_{\alpha\in OR} R_\alpha \longleftrightarrow$ Axioma da Regularidade

i) Sem o axioma da regularidade mostrar que -

$$R_\alpha = \{ x : \varphi ` x \subseteq \alpha \}$$

## § 5 : CARDINAIS . A FUNÇÃO DE HARTOGS. OS ALEPHS.

Sejam $x$ e $y$ dois conjuntos. Dizemos que $x$ é *equipotente* a $y$ e indicamos $x \approx y$ quando existir uma função bijetora de $x$ em $y$ : -

$$x \approx y \longleftrightarrow \exists f \; ( f \in {}^x y \;\wedge\; \overset{\cup}{f} \in {}^y x ) .$$

A relação de equipotência tem as seguintes propriedades :

a) $x \approx x$

b) $x \approx y \longrightarrow y \approx x$

c) $x \approx y \wedge y \approx z \longrightarrow x \approx z$

Com $x$ e $y$ ainda conjuntos, dizemos que $x$ é <u>injetável</u> em $y$ e indicamos $x \preccurlyeq y$ se existir uma função injetora $f$ de $x$ em $y$ :

$$x \preccurlyeq y \longleftrightarrow \exists f\, (f \in {}^{x}y \wedge f \text{ é injetora }) .$$

Temos as seguintes propriedades :

a) $x \preccurlyeq x$

b) $x \preccurlyeq y \wedge y \preccurlyeq z \longrightarrow x \preccurlyeq z$

Sejam $x$ e $y$ conjuntos. Definimos <u>soma cardinal</u> de $x$ e $y$, e indicamos $x + y$ ($x \dotplus y$, $x +_c y$) o conjunto :

$$x + y = \{\langle 0, u\rangle : u \in x\} \cup \{\langle 1, v\rangle : v \in y\}$$

Valem as seguintes propriedades :

a) $x + y \approx y + x$

b) $(x + y) + z \approx x + (y + z)$

c) $\forall y \exists x\, (x + y \approx y)$

d) $x \preccurlyeq y \longleftrightarrow \exists u\, (x + u \approx y)$

<u>Lema 1</u> : $x + y \approx y \longleftrightarrow \omega \times x \preccurlyeq y$

<u>Demonstração</u> : 1) Observamos que $x + \omega \times x \approx \omega \times x$

Então se $\omega \times x \preccurlyeq y$ existe $u$ tal que $\omega \times x + u \approx y$

Então $x + \omega \times x + u \approx x + y$ e como $x + \omega \times x \approx \omega \times x$

$y \approx \omega \times x + u \approx x + y$

2) Como $x + y \approx y$, existem $u_1 \subset y$ e $v_1 \subset y$ $u_1 \cap v_1 = 0$ tais que $x \approx u_1$, e $y \approx v_1$. Então $x + y \approx y \approx v_1$, e existem $u_2, v_2 \subset v_1$ $u_2 \cap v_2 = 0$ tais que $x \approx u_2$ e $y \approx v_2$. De forma mais geral, se tivermos $u_1, u_2, \dots, u_n$ e $v_1, \dots, v_n$ teremos $x + y \approx y \approx v_n$ e portanto existirão $u_{n+1}$ e $v_{n+1}$ contidos em $v_n$ tais que $u_{n+1} \approx x$ e $y \approx v_{n+1}$ com $u_{n+1} \cap v_{n+1} = 0$. Definimos $f \in {}^{\omega \times x}y$ tal que $f \restriction n \times x = u_n$. Isto é possível * pois $n \times x \approx x \approx u_n$ $\forall n \in \omega$ e $u_i \cap u_j = 0$ para $i \neq j$; $f$ é òbviamente injetora e portanto $\omega \times x \preccurlyeq y$.

<u>Lema 2</u> : $x + y \approx y \wedge z \preccurlyeq x \longrightarrow z + y \approx y$

<u>Demonstração</u> : Temos, pelo lema anterior $\omega \times x \preccurlyeq y$ e como $z \preccurlyeq x$ $\omega \times z \preccurlyeq \omega \times x \preccurlyeq y$. Portanto, ainda pelo lema 1 $z + y \approx y$.

<u>Teorema</u> : (Cantor - Bernstein - Schröder)

$$x \preccurlyeq y \quad \wedge \quad y \preccurlyeq x \longrightarrow x \approx y$$

<u>Demonstração</u> : $x \preccurlyeq y \longrightarrow x + a \approx y$ $y \preccurlyeq x \longrightarrow y + b \approx x$. Então $y + b + a \approx y$, e portanto $\omega \times (b + a) \preccurlyeq y$.

---

* Se indicássemos por $f_n$ a bijeção entre $x$ e $u_n$, a cada passo, então $f \restriction n \times x = f_n$

Por outro lado $\omega \times b \leqslant \omega \times (b+a) \preccurlyeq y$ e portanto $x \approx y + b \approx y$.

Os alephs, que estudaremos aqui, eram pensados como classes de ordinais com uma determinada cardinalidade. Assim sendo, $\aleph_0$ era a classe dos ordinais enumeráveis, $\aleph_1$ a classe dos ordinais com a menor cardinalidade maior que enumerável e assim por diante. É sabido (Zermelo 1904) que o axioma da escolha * implica que todo conjunto pode ser bem ordenado. Assim sendo todo cardinal infinito será um aleph. No desenvolvimento que faremos, utilizaremos para definir os alephs, uma função, denominada função de Hartogs, mas para fazê-lo precisaremos explorar a relação existente entre uma boa ordem sôbre um conjunto e os ordinais, que já temos. Em tudo que se segue admitiremos o axioma da escolha, juntamente com os outros axiomas de Zermelo-Fraenkel.

Inicialmente alguma notação. Seja $x$ um conjunto. Indicamos por $BO(x)$ o conjunto das boas ordens sôbre $x$:

$$BO(x) = \{ W : W \text{ é boa ordem sôbre } x \}$$

<u>Lema 1</u> : $\forall x \, ( BO(x) \in V )$

<u>Demonstração</u> : Seja a fórmula

$$\phi(W ; x) \equiv W \text{ é boa ordem } \wedge W \in \mathcal{P}\, x \times x .$$

Então o esquema de separação nos fornece $BO(x) \subseteq \mathcal{P}\, x \times x$.

Lembramos ainda que

$$Z.F. \vdash \forall x \, ( BO(x) \neq 0 ) \longleftrightarrow A.E.^{**}$$

e assim sendo $Z.F. + A.E. \vdash \forall x \, ( BO(x) \neq 0 )$ ou seja para qualquer conjunto $x$ existe uma relação $W$ que bem ordena $x$.

Queremos investigar a relação entre uma boa ordem sôbre $x$ e os ordinais. Intuitivamente a cada boa ordem sôbre $x$ devia corresponder um único ordinal da maneira seguinte :

---

* Será indicado no que se segue por A.E.

** Ver o apendix : Equivalentes do A.E.

Com a boa ordem W , x tem um primeiro elemento $x_0$ . Fazemos então uma correspondência entre $x_0$ e 0 . Como $x_0$ tem sucessor, $x_1$ , fazemos $x_1$ corresponder a $\{0\}$ e assim sucessivamente. Intuitivamente deveríamos conseguir fazendo isto um número suficiente de vêzes exaurir todo x na ordem W . Observe-se que na nossa construção acima se u W v então o ordinal correspondente a u, f'u, pertence ao ordinal correspondente a v , f'v . É evidente da construção que o ordinal eventualmente obtido é único, pois na realidade construimos uma função f, bijetora, de x em um ordinal $\alpha$ tal que se u W v então f'u $\in$ f'v (basta aplicar o princípio da indução transfinita) .

Tendo estas idéias em mente enunciamos o

Teorema 1 : $\forall x\, (\forall W\, (W \in BO\,(x)) \longrightarrow \exists!\, \alpha\, \exists!\, f\, (x \approx_f {}^{*} \wedge \forall u\, \forall v\, (u \neq v \wedge u \in x \wedge v \in x \wedge u\, W\, v \longleftrightarrow f{}^{\bullet}u \in f{}^{\bullet}v)))$ .

Orientados pelo que foi feito acima demonstraremos preliminarmente :

Lema 2 : $\forall x\, (\exists f\, \exists \alpha\, \phi\,(\alpha, f; x) \wedge \exists g\, \exists \delta\, \phi\,(\delta, g; x) \wedge \alpha \subseteq \delta \longrightarrow \forall \xi\, (\xi \in \alpha \longrightarrow \breve{f}{}^{\bullet}\xi = \breve{g}{}^{\bullet}\xi))$ , onde $\phi\,(\alpha, f; x) \equiv x \approx_f \alpha \wedge \forall u \forall v\, (u \in x \wedge v \in x \wedge u \neq v \wedge u\, W\, v \longleftrightarrow f{}^{\bullet}u \in f{}^{\bullet}v)$ e $W \in BO\,(x)$

Demonstração : Seja a fórmula -

$$\phi\,(\eta\, ; \alpha, \breve{f}, \breve{g}) \equiv \eta \in \alpha \longrightarrow \breve{f}{}^{\bullet}\eta = \breve{g}{}^{\bullet}\eta$$

---

* Indicamos $x \approx_f y$ quando x é bijetável em y por f .

Vamos mostrar que, para $\beta \in \alpha$ –

$$\forall \eta \, (\eta \in \beta \wedge \phi(\eta)), \; \beta \in \alpha \vdash \breve{f}{}^{\bullet}\beta = \breve{g}{}^{\bullet}\beta \; .$$

De fato, se $\breve{f}{}^{\bullet}\beta = z \neq z' = \breve{g}{}^{\bullet}\beta$, como W é ordem total sôbre x temos ou z W z' ou z' W z .

a) Se z W z' , então $g^{\bullet}z = \xi \in \beta = g^{\bullet}z'$ . Por outro lado como por hipótese $\beta \in \alpha$ , então como $\xi \in \beta$ ,temos $\xi \in \alpha$ e portanto $\breve{f}{}^{\bullet}\xi = \breve{g}{}^{\bullet}\xi = z$ . Mas então – $f^{\bullet}z = \beta$ e $f^{\bullet}z = \xi$ e $\xi \in \beta$ o que é absurdo.

b) Se z' W z procedemos anàlogamente, obtendo novamente uma contradição. Assim sendo temos $z = z' = \breve{f}{}^{\bullet}\beta = \breve{g}{}^{\bullet}\beta$ .

O esquema de indução para ordinais (pág. 14) nos fornece imediatamente –

$$\forall \beta \, (\beta \in \alpha \longrightarrow \breve{f}{}^{\bullet}\beta = \breve{g}{}^{\bullet}\beta) \equiv \forall \beta \; \phi(\beta) \; ,$$

como queríamos mostrar .

Com a mesma notação que no enunciado do lema 2 temos o

<u>Corolário</u> : $\forall x \, (\exists f \, \exists \alpha \;\; \phi(\alpha, f; x) \wedge \exists g \, \exists \beta \;\; \phi(\beta, g; x) \longrightarrow \alpha = \beta \wedge f = g)$ .

<u>Demonstração</u> : Suponhamos por exemplo que $\alpha \subsetneq \beta$ , isto é, que $\alpha \in \beta$ . Então existe $z \in x$ tal que – $\breve{g}{}^{\bullet}\alpha = z$ . Por outro lado $f^{\bullet}z = \eta \in \alpha$ ; portanto – $\breve{f}{}^{\bullet}\eta = z$ enquanto $\breve{g}{}^{\bullet}\eta$ W z (pois $\breve{g}{}^{\bullet}\alpha = z$ ) o que é – absurdo já que em $\alpha$ $\breve{g}$ e $\breve{f}$ devem coincidir. Anàlogamente , se $\beta \in \alpha$ , obtemos uma contradição. Portanto, $\alpha = \beta$ Por outro lado, pelo lema se $\alpha \subseteq \beta$ temos $\breve{f} \subseteq \breve{g}$ .

Portanto $\overset{\cup}{f} = \overset{\cup}{g}$ e portanto $f = g$.

Com o lema e o corolário vemos que se existem $f$ e $\alpha$, nas condições desejadas então, êstes dois conjuntos são únicos. Para completarmos o teorema basta construirmos um por $f$, $\alpha$. Para isto, enunciaremos mais alguns lemas e fixaremos alguma notação. Seja $W$ uma boa ordem sôbre $x$, conjunto. Então se $z \in x$ definimos $W_{x/z} = \{ z' \in x : z' \, W \, z \}$ ; $x_0^W$ indicará sempre o primeiro elemento de $x$ na ordem $W$.

Lema 3 : $\forall W \ \forall x ( W \in BO(x) \longleftrightarrow W$ é uma ordem total sôbre $x \wedge \forall u (u \subseteq x \wedge x_0^W \in u \wedge$

$$\forall z ( W/z \subseteq u \longrightarrow z \in u ) \longrightarrow u = x ))$$

Demonstração : Exercício.

Êste lema caracteriza o princípio da indução transfinita sôbre conjuntos bem ordenados.

Lema 4 : $\forall x \ \forall W ( W \in BO(x) \longrightarrow x = \bigcup_{z \in x} W_{x/z}$

$$\vee \ \exists z' ( z' \in x \wedge x = W_{x/z'} \cup \{ z' \} ))$$

Demonstração : Exercício .

Demonstração do Teorema 1 : Vamos definir uma função de $x$ sôbre um ordinal por indução transfinita. Tomamos o primeiro elemento de $x$ na ordem $W$, $x_0^W$ e formamos o par $\langle x_0^W , 0 \rangle$. Se já tivermos todos os pares $\langle z' , \alpha_{z'} \rangle$ para todo $z' \in W_{x/z}$ , $z \in x$ , temos dois casos pelo lema 4 :

a) $\exists z' (z' \in W_{x/z} \wedge W_{x/z} = W_{x/z'} \cup \{ z' \} )$ - Neste caso formamos o par $\langle z , \sup \{ \alpha_{z'} : z' \in W_{x/z} \} + 1 \rangle$

b) $W_{x/z} = \bigcup_{z' \in W_{x/z}} W_{x/z'}$ . Neste caso formamos o par

$\langle z , \sup \{ \alpha_{z'} : z' \in W_{x/z} \} \rangle$ . Pelo lema 3 todos os elementos ocorrem em algum par, e temos uma associação entre cada $z \in x$ e um ordinal. A coleção dos $\langle z, \alpha_z \rangle$ formam um conjunto $A$ , aplicando-se sucessivamente o esquema de substituição e o de separação. Assim sendo $\{ \langle z, \alpha_z \rangle : z \in x \}$ é uma função $f \in {}^{x}\mathbb{O}\mathbb{R}$ . A demonstração se divide em diversos passos :

1 - $f$ é crescente, isto é, se $z' \, W \, z$ então $f^{\cdot}z' \in f^{\cdot}z$

Se $u \, W \, v$ então $u \in W_{x/v}$ . Temos dois casos :

a) $W_{x/v} = \bigcup_{z' \in W_{x/v}} W_{x/z'}$ . Neste caso

$f^{\cdot}v = \sup \{ f^{\cdot}z' : z' \in W_{x/v} \}$ e portanto já temos

$f^{\cdot}u \in f^{\cdot}v$ ou $f^{\cdot}u = f^{\cdot}v$ . Se $f^{\cdot}u = f^{\cdot}v$ , consideremos $u^+$ que é o sucessor de $u$ na ordem $W$ . É óbvio que $u^+ \in W_{x/v}$ . No entanto, teremos pela definição de $f$

$f^{\cdot}u^+ = \sup \{ f^{\cdot}z' : z' \in W_{x/u^+} \} + 1$

Então, como $u \in W_{x/u^+}$ , temos que $f^{\cdot}u = f^{\cdot}v \in f^{\cdot}u^+$ o que é absurdo. Então $f^{\cdot}u \in f^{\cdot}v$ .

b) $W_{x/v} = W_{x/z'} \cup \{ z' \}$ . Então

$f^{\cdot}v = \sup \{ f^{\cdot}z : z \in W_{x/v} \} + 1$ . Neste caso não há o que provar.

Assim sendo $f \in {}^{x}\mathbb{O}\mathbb{R}$ é de fato crescente.

2 - $\forall u ( u \in x \wedge u^+ \in x \longrightarrow f^{\cdot}u^+ = f^{\cdot}u + 1 )$ .

Resume-se tudo em provar que $\sup \{ f^{\cdot}z : z \in W_{x/u^+} \} = f^{\cdot}u$ .

Temos

$$\sup \left\{ f^{\cdot}z : z \in W_{x/u^+} \right\} = \bigcup \left\{ f^{\cdot}z : z \in W_{x/u^+} \right\} = \bigcup_{z \in W_{x/u}} f^{\cdot}z \cup f^{\cdot}u$$

Como $f$ é crescente e para todo $z \in W_{x/u}$ , $z \; W \; u$ , temos imediatamente que $f^{\cdot}z \in f^{\cdot}u$ ou seja $f^{\cdot}z \subseteq f^{\cdot}u$.

Então $\bigcup \left\{ f^{\cdot}z : z \in W_{x/u^+} \right\} = f^{\cdot}u$ .

Temos já portanto, que $f$ é injetora. Resta-nos mostrar que $f^* x$ é um ordinal e estará então completa a demonstração .

3 - $f^* x = T f^* x$

Seja $0 \neq \beta \in f^{\cdot}z$ para $z \in x$ . Devemos mostrar que existe $u \in x$ tal que $f^{\cdot}u = \beta$ . Consideremos o conjunto

$A = \left\{ v : v \in x \wedge \beta \in f^{\cdot}v \right\}$ ; $A$ é não vazio (pois $z \in A$ ) . Seja $v_0^W$ * o primeiro elemento de $A$ na ordem $W$ . Temos novamente dois casos :

a) $W_{x/v_0^W} = \bigcup_{z' \in W_{x/v_0^W}} W_{x/z'}$ , e suponhamos que para todo $z' \in W_{x/v_0^W}$ , $f^{\cdot}z' \in \beta$ . Então $f^{\cdot}v_0^W = \sup \left\{ f^{\cdot}z' : z' \in W_{x/v_0^W} \right\}$ e portanto $f^{\cdot}v_0^W \in \beta$ ou $f^{\cdot}v_0^W = \beta$ o que é

---

* Observar que $v_0^W \neq x_0^W$ , pois $f^{\cdot}x_0^W = 0$ !

absurdo . Assim existe $u \in x$, com $f`u = \beta$.

b) $W_{x/v_0^W} = W_{x/z'} \cup \{z'\}$. Então $f`z' = \beta$

De fato se $f`z' \in \beta$, teríamos

$f`v_0^W = f`z' + 1 \in \beta$ ou $f`v_0^W = f`z' + 1 = \beta$

o que é absurdo. Então $f`z' = \beta$. Então $f^* x = Tf^* x$

4 - $\rho` f^* x = f^* x$

De fato, pois $\rho^* f^* x = \{ \rho` f`z : z \in x \} =$
$= \{ f`z : z \in x \} = \{ f^* x \}$ que é transitivo.

Seja $\alpha = f^* x$. É óbvio que $x \approx_f \alpha$

e $f$ satisfaz a prescrição pedida. Isto completa a demonstração .

<u>Exercícios</u> : Com as mesmas notações que na demonstração do teorema provar que :

1 - $\forall z ( z \in x \longrightarrow f^* W_{x/z} \in \mathbb{OR} )$

2 - $\forall z ( z \in x \longrightarrow f`z = f^* W_{x/z} \vee$
$f`z = f^* W_{x/z} + 1 )$

3 - $\forall x \forall w ( w \in BO(x) \longrightarrow ( x = \bigcup_{z \in x} W_{x/z}$
$\longleftrightarrow f^* x = \bigcup f^* x ))$

4 - $\forall x \forall w ( w \in BO(x) \longrightarrow ( \exists z' ( z' \in x \wedge$
$x = W_{x/z'} \cup \{ z' \} \longleftrightarrow \bigcup f^* x \in f^* x ))$

Poderíamos utilizar o esquema de recorrência transfinita. Daremos abaixo apenas uma das fórmulas que poderíamos utilizar:

$$\phi\ (z, y; x, W) \equiv (W \in BO(x) \wedge z \in {}^{x}V \wedge \exists \alpha\ (x \approx_z \alpha) \wedge \forall u \forall v\ (u \in x \wedge v \in x \wedge u \neq v \wedge u W v \longrightarrow z{\cdot}u \in z{\cdot}v) \wedge y = z^{*} x = \alpha)$$
$$\vee\ ((W \notin BO(x) \vee z \notin {}^{x}V \vee \neg \exists \alpha\ (\alpha \approx_z x) \vee \exists u\ \exists v\ (u \in x \wedge v \in x \wedge u \neq v \wedge u W v \wedge z{\cdot}u \notin z{\cdot}v)) \wedge y = z).$$

É óbvio que $\forall z\ \exists ! y\ \phi\ (z, y; x, W)$.

Note-se que é necessário ainda um teorema de existência como na demonstração do teorema 1. O esquema de recorrência transfinita nos garante entretanto já a unicidade da função f procurada e portanto a do ordinal correspondente a boa ordem $W$ de $x$

O que foi feito anteriormente, nos permite definir, dados dois ordinais, sua soma ordinal. Sejam $\alpha$ e $\beta$ ordinais e consideremos o conjunto (soma cardianal)

$$\alpha +_c \beta = \alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\}$$

Colocamos neste conjunto a seguinte boa ordem, Le, dita ordem lexicográfica:

a) $\forall \eta \forall \mu\ (\eta \in \alpha \wedge \mu \in \alpha \wedge \eta \in \mu \rightarrow \eta \text{ Le } \mu)$

b) $\forall \eta \forall \mu ( \eta \in \beta \wedge \mu \in \beta \wedge \eta \in \mu \rightarrow \eta \text{ Le } \mu )$

c) $\forall \eta \forall \mu ( \eta \in \beta \wedge \mu \in \alpha \rightarrow \mu \text{ Le } \eta )$

ou seja deixamos tudo como estava em $\alpha$ e $\beta$ e todo elemento de $\alpha$ precede qualquer elemento de $\beta$ O leitor poderá verificar trivialmente que Le é uma boa ordem .

Pelo teorema 1 existe um ordinal $\gamma$ corresponden-te ( que é único ) a $\alpha +_c \beta$ com a boa ordem Le . Êste ordinal $\gamma$ é a soma ordinal de $\alpha$ e $\beta$

Podemos agora então, passar a considerar a definição dos alephs . Como havíamos dito utilizaremos uma função denominada-função de Hartogs .

Se x é um conjunto , definimos

$H(x) = \bigcup \{ \alpha : \alpha \preccurlyeq x \}$ . Precisamos demonstrar evidentemente, que $\{ \alpha : \alpha \preccurlyeq x \}$ é conjunto para todo x e então teremos $H \in V_V$ .

Consideremos a fórmula

$\phi ( z , y ; x ) \equiv z \subseteq x \wedge y = BO(z)$

É óbvio que $\forall z \; \exists ! y \; \phi ( z , y )$ .

O esquema de substituição nos dá então a partir de $Px$ um conjunto que notaremos $B_x$ . Seja $A_x = \bigcup B_x =$ $= \{ W : \exists y \, (y \in Px \wedge W \in BO\,(y)) \}$ . Consideremos agora a fórmula : $\Psi\,(\Gamma, S ; x) \equiv \exists y\,(y \in Px \wedge \Gamma \in BO\,(y))$ $\wedge \exists \alpha \exists f\,(f \in {}^{\text{dom } f}V \wedge y \approx_f \alpha \wedge \forall z \, \forall v\,(z \in y \wedge v \in y$ $\wedge z \neq v \wedge z \,\Gamma\, v \longrightarrow f^{\circ}z \in f^{\circ}v) \wedge S = \alpha$

O teorema 1 nos fornece imediatamente que $\forall \Gamma \exists ! S \; \Psi\,(\Gamma, S; x)$

O esquema de substituição nos fornece a partir de $A_x$ :

$$A_x^* = \{ \alpha : \exists W \exists y \, ( W \in A_x \wedge W \in BO\,(y))$$

$$\wedge \exists f \, ( y \approx_f \alpha \wedge f \text{ preserva ordem } ) \} .$$

Mas êste conjunto é justamente $\{ \alpha : \alpha \lesssim x \}$ (demonstração?) . Assim sendo $H\,(x) = \bigcup \{ \alpha : \alpha \lesssim x \}$ é um conjunto e temos $H \in {}^{V}V$ . O leitor deverá ser capaz de perceber claramente as idéias intuitivas que estão por traz da construção que acabamos de fazer . É óbvio que, para todo $x \in V$ , temos $H\,(x) \in \mathbb{O}\mathbb{R}$ . Temos assim demonstrada a

<u>Proposição 1</u> : $\forall x \; ( H\,(x) = \bigcup \{ \alpha : \alpha \lesssim x \} \in V)$

Os próximos lemas e proposições preparam o caminho para alguns resultados sôbre os alephs , enquanto em si mesmos esclarecem algumas propriedades da função de Hartogs .

<u>Lema 1</u> : $\forall x \forall \xi ( \xi \lessdot x \wedge \omega \leqslant x \longrightarrow \xi + 1 \leqslant x )$

<u>Demonstração</u> : Como $\xi \leqslant x$ temos que $x = \xi +_c y$ . Se $y \neq 0$ , não há o que fazer. Se $y = 0$ então $\xi \approx x$ e portanto temos $\xi \approx x = \omega +_c z$ . Temos evidentemen mente $\xi + 1 \approx (\omega + 1) +_c z \approx \omega +_c z \approx x$ o que termina a demonstração.

<u>Lema 2</u> : $\forall x ( \omega \leqslant x \longrightarrow \bigcup \{ \alpha : \alpha \leqslant x \} = \{ \alpha : \alpha \lessdot x \} )$

<u>Demonstração</u> : Devemos mostrar sòmente que $\{ \alpha : \alpha \lessdot x \} \subseteq \bigcup \{ \alpha : \alpha \leqslant x \}$ . Se $\alpha \leqslant x$ então como $\omega \leqslant x$ , pelo lema 1 $\alpha + 1 \leqslant x$ . Mas $\alpha \in \alpha + 1$ e portanto $\alpha \in \bigcup \{ \alpha : \alpha \leqslant x \}$ .

<u>Corolário 1</u> : $\forall x ( \omega \leqslant x \longrightarrow H(x) \neq x )$

<u>Demonstração</u> : Se $x \notin O\mathbb{R}$ , não há o que demonstrar. Se $x \in O\mathbb{R}$ , indiquemo-lo por $\alpha$ . Se $H(\alpha) = \alpha$ , pelo lema 1, temos que $\alpha + 1 \leqslant \alpha$ o que é absurdo pois $H(\alpha) = \bigcup \{ \eta : \eta \leqslant \alpha \}$ e $\alpha \in \alpha + 1$ .

<u>Corolário 2</u> : $\forall x ( \omega \leqslant x \longrightarrow H(x) = \bigcup H(x))$

<u>Demonstração</u> : Imediata .

O corolário 2 nos diz que $H(x)$ é um ordinal limite , para todo x .

<u>Proposição 2</u> : $\forall x \forall \beta ( \beta \not\leqslant x \longrightarrow \beta = H(x) \vee H(x) \in \beta )$ .

<u>Demonstração</u> : Se $\beta \in H(x)$ , pelo lema 2 , temos $\beta \leqslant x$ , o que é absurdo .

Assim sendo $H(x)$ é o menor ordinal que não é injetá - vel em $x^*$. No caso em que $x$ é um ordinal temos o

Corolário : $\forall\alpha \ \forall\beta \ (\alpha \leqslant \beta \longrightarrow \beta \in \alpha$
$\wedge(\alpha = H(\beta) \vee H(\beta) \in \alpha))$.

Daremos agora a definição dos alephs . Utilizamos a função de Hartogs para construirmos por recorrência transfinita - êstes últimos. Assim, faremos $\aleph_0 = \omega$, $\aleph_{\alpha+1} = H(\aleph_\alpha)$ e se $\lambda = \bigcup \lambda$ então $\aleph_\lambda = \bigcup_{\alpha\in\lambda} \aleph_\alpha$ . A fórmula para a recorrência transfinita será :

$$\phi(x, y) \equiv (x = 0 \wedge y = \omega) \vee \exists \alpha (x \in {}^{\alpha+1}V \wedge y = H(x'\alpha))$$
$$\vee \exists \lambda (\lambda = \bigcup \lambda \wedge x \in {}^{\lambda}V \wedge y = \bigcup x^* \lambda)$$
$$\vee((x = 0 \vee \neg \exists \alpha (x \in {}^{\alpha+1}V) \vee \neg \exists \lambda (\lambda = \bigcup \lambda \wedge x \in {}^{\lambda}V))$$
$$\wedge y = x)$$

Então $\forall x \ \exists! y \ \phi(x, y)$ e do esquema de recorrên cia vem

$$\forall\alpha \exists! f (f \in {}^{\alpha}V \wedge \forall \eta \ \phi(f \restriction \eta, f'\eta)).$$

Tomamos então $\aleph_\eta = f_{\eta+1}' \eta$ .

Observemos que tôda construção é feita de tal modo que $\aleph_{\alpha+1}$ é o primeiro ordinal que não é injetável em $\aleph_\alpha$ (ver na página ) .

Básicos para o nosso desenvolvimento são a proposição e o lema seguintes.

Lema 3 : $\forall\alpha \ (\aleph_\alpha \in \aleph_{\alpha+1})$

Demonstração : Temos já que $\aleph_{\alpha+1} \leqslant \aleph_\alpha$ e portan to pelo corolário da Proposição 2, $\aleph \in \aleph_{\alpha+1}$ .

---

É facil ver que $H(x)$ $x$, pois se fosse pelo 2, $H(x) \in H(x)$, que é absurdo.

Proposição 3 : $\forall \alpha \forall \beta\ (\alpha \in \beta \longleftrightarrow \aleph_\alpha \in \aleph_\beta)$

Demonstração : Se $\beta = \alpha + 1$ então o lema 3 nos dá o resultado desejado. Suponhamos então que $\alpha + 1 \in \beta$ . Seja

$$[\alpha , \beta] = \{\eta : \eta = \alpha \vee (\eta \in \beta \wedge \alpha \in \eta) \vee \eta = \beta\}$$

É óbvio que $[\alpha , \beta]$ é um conjunto bem ordenado. Podemos então utilizar o Princípio da Indução Transfinita ( PIT ) . Já vimos que $\aleph_\alpha \in \aleph_{\alpha+1}$ . Se $\alpha + 1 \neq \xi \in [\alpha , \beta]$ e $\aleph_\alpha \in \aleph_\eta$ para todo $\eta \in \xi$ e a $[\alpha , \beta]$ , temos dois casos a considerar:

(a) $\xi$ é sucessor . Então $\xi = \lambda + 1$ e temos $\aleph_\alpha \in \aleph_\lambda \in \aleph_{\lambda+1}$ e portanto $\aleph_\alpha \in \aleph_{\lambda+1}$

(b) $\xi$ é um ordinal limite. Neste caso por definição $\aleph_\xi = \bigcup_{\eta \in \xi} \aleph_\eta$ e como $\aleph_\alpha \in \aleph_{\alpha+1}$ e $\alpha + 1 \in \xi$ temos $\aleph_\alpha \in \aleph_\xi$.

Nestas condições, podemos concluir pelo PIT que $\aleph_\alpha \in \aleph_\lambda$ para todo $\lambda \in [\alpha + 1 , \beta]$ e em particular para $\beta$ . A recíproca é exercício . Isto completa a demonstração .

Proposição 4 : $\forall \alpha \forall \beta\ (\alpha \in \beta \longleftrightarrow \aleph_\beta \leq \aleph_\alpha)$

Demonstração : Se $\beta = \alpha + 1$ , não há o que demonstrar. Se $\alpha + 1 \in \beta$ e $\aleph_\beta \leq \aleph_\alpha$ , pela proposição 3, temos $\aleph_{\alpha+1} \in \aleph_\beta \leq \aleph_\alpha$ e portanto $\aleph_{\alpha+1} \leq \aleph_\alpha$ . A recíproca é exercício .

Lema 4 : $\forall \alpha (\{\beta : \aleph_\beta \in \alpha\} \in \mathbb{OR})$ .

Demonstração : Exercício .

Teorema 2 : $\forall \alpha ( \omega \leqslant \alpha \longrightarrow \exists ! \eta ( \alpha \approx \aleph_\eta ) )$

Demonstração : Seja $\eta = \{ \beta : \aleph_\beta \in \alpha \}$

Seja $\gamma = \bigcup \eta$ . Vamos mostrar que $\aleph_\gamma \approx \alpha$ . Primeira - mente mostremos que $\aleph_\gamma \in \alpha$ $^*$ . Temos duas hipóteses :

(a) $\gamma = \bigcup \eta \in \eta$ . Neste caso não há o que demonstrar.

(b) $\gamma = \bigcup \eta = \eta$ . Neste caso então $\aleph_\gamma = \aleph_\eta = \bigcup_{\beta \in \eta} \aleph_\beta$

Então $\aleph_\eta \subseteq \alpha$ e como $\alpha$ não é um aleph , $\aleph_\eta \in \alpha$ .

Basta demonstrarmos então que $\alpha \leqslant \aleph_\gamma$ . Suponhamos que $\alpha \leqslant \aleph_\gamma$ . Então, como já vimos temos ou $\alpha = \aleph_{\gamma+1}$ ou $\aleph_{\gamma+1} \in \alpha$ . Se $\alpha$ não é um aleph obtivemos um absurdo. Assim $\aleph_\gamma \approx \alpha$ .

Corolário 1 : $\forall x ( \omega \leqslant x \longrightarrow \exists ! \eta ( H(x) = \aleph_\eta ))$

Demonstração : Se $H(x) \approx \aleph_\gamma$ então $\eta = \gamma + 1$ .

Corolário 2 : $\forall \alpha \forall \eta ( \aleph_\eta \approx \alpha \longrightarrow \aleph_\eta \in \alpha )$

Demonstração : Decorre imediatamente da demonstração do teorema 2 .

Corolário 3 : $\forall \alpha \forall \eta ( \omega \leqslant \alpha \wedge \alpha \in \aleph_\eta \longrightarrow \aleph_\eta \lessdot \alpha )$

Demonstração : Exercício .

Corolário 4 : $\forall \alpha \forall \beta ( \omega \leqslant \alpha \wedge \beta \not\approx \alpha \longrightarrow$

( $\alpha$ ( = c ))).

No caso em que $\alpha$ não é um aleph senão não há o que demonstrar.

Demonstração : Exercício

O corolario 4 nos diz que os alephs são os menores ordinais que não são equipotentes a nenhum ordinal anterior ( juntamente com o corolario 3 ).

O teorema 3 abaixo, nos mostra que na presença do axioma da escolha os alephs são os cardinais no sentido de Cantor ou mais precisamente, são os menores ordinais que representam cada cardinal no sentido cantoriano.

Teorema 3 : A . E. $\longrightarrow \forall x\ \exists!\ \eta\ (x \approx \aleph_\eta)$

Demonstração : Tínhamos observado já ( pág. cap.II) que

$$Z.F. \vdash A.E. \longleftrightarrow \forall x\ (\ BO(x) \neq 0)$$

Dado x então temos (pelo teorema 1) que $x \approx \alpha$ . O resultado segue imediatamento do Teorema 2.

Vamos desenvolver um pouco a teoria daqueles conjuntos x tais que $H(x) \in \omega$ . Primeiramente duas proposições que motivam uma definição que daremos.

Proposição 5 : $\forall x\ (H(x) \in \omega \longrightarrow \omega \not\leq x)$

Demonstração : Se $\omega \leqslant x$ então ou $H(x) = \omega$ ou $\omega \in H(x)$, por definição. Em ambos os casos, temos uma contradição.

Proposição 6 : $\forall x\ (H(x) \in \omega \longleftrightarrow \exists!\ \alpha\ (\ \alpha \in \omega \wedge \alpha \approx x))$

Demonstração :

Vamos precisar de alguns fatos, que enunciamos abaixo e cuja demonstração deixamos a cargo do leitor.

Fato 1 : $\forall \alpha \, (\alpha \neq 0 \wedge \alpha \in \omega \longrightarrow \cup \alpha \in \alpha)$

Fato 2 : $\forall \alpha \, (\alpha \in \omega \longrightarrow \alpha + 1 \not\preccurlyeq \alpha)$

Fato 3 : $\forall \alpha \, \forall \beta \, (\alpha \in \beta \in \omega \longrightarrow \beta \not\preccurlyeq \alpha)$

a) Vamos mostrar que $H(x) \approx x$. Mostramos inicialmente que $H(x) \preccurlyeq x$. De fato, como $H(x) \in \omega$, se $H(x) = 0$ não há o que demonstrar ( pois $x = 0$). Se $H(x) \neq 0$ então $\cup H(x) \in H(x)$ e portanto $\cup H(x) \preccurlyeq x$. Se $H(x) \not\preccurlyeq x$ então $\cup H(x)$ é $\sup \{\alpha : \alpha \preccurlyeq x\}$ e não $H(x)$ o que nos dá um desenho.

Seja agora f uma injeção de $H(x)$ em x. Então f é sobrejetora. De fato, senão o fôsse, isto é, se o complementar de $f^{*}H(x)$ em x não fôr vazio poderíamos injetar $H(x) + 1$ em x o que é absurdo, por definição de $H(x)$. Assim $H(x) \approx x$.

b) A recíproca é trivial, bastando observar que se $x \approx \alpha$ temos que $\alpha + 1 \not\preccurlyeq x$, pois $\alpha + 1 \not\preccurlyeq \alpha$.

Daremos então a seguinte

Definição : Diremos que um conjunto x é finito ($x \in F$) se e sòmente se $H(x) \in \omega$. Indicaremos que x é finito pela notação $x \in F$.

$$x \in F \underset{\text{def}}{\equiv} H(x) \in \omega$$

Proposição 7 : $\neg \exists_y \forall x \, (H(x) \in \omega \longrightarrow x \in y)$

Demonstração : Se existe um tal y então $\{y\} \in y$. Consideremos então o conjunto $\{\{y\}, y\}$. Pelo axioma da regularidade devia existir um conjunto z que pertença a $\{\{y\}, y\}$ e tal que $z \cap \{\{y\}, y\} = 0$. Mas como $\{y\} \in y$ êste tal z não existe e isto é um absurdo.

A proposição 7 nos diz que não existe o conjunto de todos os conjuntos finitos.

Proposição 8 : $\forall x\,(H(x) \in \omega \longrightarrow BO(x) \neq 0)$

Demonstração : Exercicio.

Observamos que, a proposição 6 nos mostra que a definição que demos de conjunto finito coincide com a definição usual de conjunto finito. Observe-se também que os números naturais são - tais que $H(\alpha) = \alpha$ e que isto caracteriza inteiramente o fato de que $\alpha \in \omega$ ( Fato 2). Por outro lado assim como os alephs eram representantes canônicos de classes de equipotência de conjuntos, na presença do axioma da escolha, aqui os naturais são também representantes de classes de equipotência de conjuntos finitos na acepção definida. Assim a função de Hartogs nos dá, seja ao nível finito seja ao infinito ( com o axioma da escolha ) representantes dos cardinais no sentido de Cantor.

No contexto que estamos definimos então, que um ordinal $\alpha$ é um cardinal se e sòmente se $\alpha$ não é equipotente a nenhum ordinal anterior, ou seja se $\alpha$ fôr um número natural ou um aleph . Os cardinais serão, usualmente indicados com as letras gregas $k$ ou $\lambda$ , reservando-se as outras para ordinais usuais. Assim :

$$\alpha \text{ é cardinal } \equiv_{\text{def}} \alpha \in OR \wedge \forall \beta (\beta \in \alpha$$

$$\longrightarrow \alpha \not\approx \beta ) \equiv_{\text{def}} \alpha \in \mathbb{C} .$$

Proposição 9 : $\neg \exists y \forall \alpha ( \alpha \in \mathbb{C} \longrightarrow \alpha \in y )$

Demonstração : Se existisse um tal y, então $y \subseteq OR$ e $Uy \in OR$ . Como já vimos $H(Uy)$ é um aleph , pois certamente $\omega \leqslant Uy$ . Mas então $H(Uy) \in y$ o que é um absurdo pois $Uy \in H(Uy)$ e $Uy = y$.

Vamos tratar agora da parte elementar da aritmética de cardinais; diremos, como é usual que um cardinal é infinito se o conjunto dos números naturais é nêle, injetável. Primeiramente alguma notação. Se x é um conjunto, indicamos po $\overline{\overline{x}}$ o menor ordinal $\alpha$ tal que $\alpha \approx x$. Definimos então se $\lambda$, $k$ e $\mu$ são cardinais infinitos :

1) $k + \lambda = \overline{\overline{k +_c \lambda}}$

2) $k \lambda = \overline{\overline{k \times \lambda}}$

3) $k^{\lambda} = \overline{\overline{{}^{\lambda}k}}$

<u>Exercícios</u> : Demonstrar que :

a) $k + k = k = k \cdot 2$

b) $(k^{\lambda})^{u} = k^{\lambda \cdot \mu}$

<u>Proposição 10</u> :

<u>Demonstração</u> : Será feita utilizando-se o esquema de indução. Seja $k = \aleph_{\alpha}$ e suponhamos que

$$\forall \xi \, (\xi \subset \alpha \longrightarrow \aleph_{\xi}^{2} = \aleph_{\xi})$$

e vamos mostrar que $\aleph_{\alpha}^{2} = \aleph_{\alpha}$. O fundamental na demonstração é se construir um ordinal de cardinalidade $\aleph_{\alpha}^{2}$ e, que tenha secções de cardinalidade $\aleph_{\beta}$ onde $\beta \in \alpha$. Nêste sentido considemos o conjunto de triplas $\langle \eta, \beta, \delta \rangle$

onde

$$\langle \eta, \beta \rangle \in \aleph_{\alpha} \times \aleph_{\alpha} \text{ e } \delta = \eta + \beta .$$

. Seja T êste conjunto. Evidentemente

$T \approx \aleph_\alpha \times \aleph_\alpha \approx \aleph_\alpha^2$

Daremos agora a T uma boa ordem R, nas condições desejadas. Definimos

$$\langle \eta_1, \beta_1, \gamma_1 \rangle \; R \; \langle \eta_2, \beta_2, \gamma_2 \rangle \quad \overline{\overline{\,\,}}_{\mathrm{Def}}$$

$$(\gamma_1 \in \gamma_2) \vee (\gamma_1 = \gamma_2 \wedge \beta_1 \in \beta_2) \vee (\gamma_1 = \gamma_2 \wedge$$

$$\beta_1 = \beta_2 \wedge \eta_1 \in \eta_2).$$

R é uma boa ordem. Suponhamos agora que por absurdo $\aleph_\alpha \neq \aleph_\alpha^2$.
Então $\aleph_\alpha \in \aleph_\alpha^2$ , pois $\aleph_\alpha \leqslant \aleph_\alpha^2$ .

Tomemos agora a injeção canônica

$i : \aleph_\alpha \longrightarrow \aleph_\alpha^2$ que leva

$\eta \in \aleph_\alpha$ em $\eta \in \aleph_\alpha^2$ . Por outro lado como

$T \approx \aleph_\alpha^2$ temos que o ordinal equipotente a T com a ordem R, que indicamos, H é tal que H $\aleph_\alpha^2$ ou $\aleph_\alpha^2 \in$ H . Tomemos então a aplicação $j : \aleph_\alpha^2 \longrightarrow$ H, que é a injeção canônica ( j poderá ser a identidade ) e consideremos

$j \circ i : \aleph_\alpha \longrightarrow$ H. Como $\aleph_\alpha \in \aleph_\alpha^2$ existe

$\eta \in (H)$ tal que $\eta \notin \mathrm{Im}\ j \circ i$. Resta-nos contar quantos elementos temos precedendo a $\eta$. Em T com a ordem R corres - ponde a $\eta$ uma tripla $\langle \eta_0, \beta_0, \gamma_0 \rangle$ e

$$\{\langle \delta, \beta, \gamma \rangle : \langle \delta, \beta, \gamma \rangle \ R \ \langle \eta_0, \beta_0, \gamma_0 \rangle\}$$

é equipotente a $\eta$. Como $\eta_0, \beta_0 \in \aleph_\alpha$ então

$$\eta_0 \approx \aleph_{\eta_0} \qquad \text{e} \qquad \beta_0 \approx \aleph_{\beta_0} \qquad \text{onde}$$

$\eta_0, \beta_0 \in \alpha$. Pela hipótese de indução

$$\eta_0 + \beta_0 \leq \aleph_{\eta_0} \cdot \aleph_{\beta_0} \leq \aleph^2_{\eta_0} = \aleph_{\eta_0}$$

supondo-se que $\aleph_{\beta_0} \in \aleph_{\eta_0}$. Então $\bar{\bar{\gamma}} \in \aleph_{\eta_0}$.

Assim sendo, precedem $\langle \eta_0, \beta_0, \gamma_0 \rangle$, $\aleph^3_{\eta_0}$ elementos e novamente pela hipótese de indução

$$\aleph^3_{\eta_0} = \aleph^2_{\eta_0} \cdot \aleph_{\eta_0} = \aleph_{\eta_0} \in \aleph_\alpha$$

mas isto é um absurdo. Então $\aleph_\alpha = \aleph^2_\alpha$ e a demonstração está completa.

<u>Corolario 5</u> : $\forall \alpha \forall \beta \ (\aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \aleph_{\sup\{\alpha, \beta\}})$

<u>Demonstração</u> : Exercício

<u>Corolário 6</u> : $\forall \alpha \ ( H ( \aleph^2_\alpha ) = \aleph_{\alpha + 1} )$

Corolário 7 : $\forall \alpha \; ( \sum_{\aleph_\alpha} \aleph \approx \aleph_\alpha )$

Demonstração : Obviamente

$$\sum_{\aleph_\alpha} \aleph_{\alpha\eta} \approx \aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$$ , onde

$$\sum_{\aleph_\alpha} \aleph_{\alpha\eta}$$ é o conjunto

$$\bigcup_{\eta \in \aleph_\alpha} \{\eta\} \times \aleph_\alpha$$ com a ordem

lexicográfica , isto é, $\langle \eta_1, \beta_1 \rangle$ Le

$$\langle \eta_2, \beta_2 \rangle \equiv_{Def} (\eta_1 \in \eta_2) \vee (\eta_1 = \eta_2 \wedge \beta_1 \in \beta_2)$$

Corolário 8 : $\forall \alpha \; \forall n \, (n \in \omega \wedge n \neq 0 \longrightarrow$

$$\aleph_\alpha^\eta = \aleph_\alpha$$

Demonstração : Omdução finita sôbre n .

Corolário 9 : $\forall \alpha \, \forall \beta \; (\aleph_\alpha + \aleph_\beta \approx \aleph_{\sup(\alpha, \beta)})$

Para completarmos êste capítulo sôbre cardinais, vamos estudar a relação entre um conjunto x e P(x) sob o ponto de vista da existência ou não de aplicações hijetoras entre êstes dois conjuntos.

Exercício : Seja x um conjunto

Definimos $2^x = \{ f : f \in {}^x 2 \} = {}^x 2$

Mostre que $P(x) \approx 2^{x}$

Teorema 4 : $\forall x \neg (x \approx P(x))$.

Demonstração : É obvio que $x \preccurlyeq P(x)$ .

Suponhamos que existisse $f : x \longrightarrow P(x)$ , hijetora e consideremos o conjunto

$y = \{ z : z \in x \wedge z \in f(z) \}$ ; então temos que como $f$ é bijetora que $y = f(\omega)$ para $\omega \in x$ . Se $\omega \in y$ então $\omega \notin f(\omega) = y$. Se $\omega \in y$ então $\omega \in f(\omega) = y$ , o que nos dá um absurdo. Então $y$ não é imagem de nenhum elemento de $x$, contra a hipótese de $f$ ser hijetora. Assim sendo não pode existir $f$ , hijetora. Isto completa a demonstração.

A demonstração do teorema 4, foi feita pelo método de diagonalização, que vai exposto abaixo na

Proposição 11 : $\forall x \ \forall y ( y \subseteq P(x) \quad x \approx y \longrightarrow$

$\longrightarrow \exists z (z \in P(x) \wedge z \in y ))$.

Demonstração : Se $f : x \longrightarrow y$ é a bijeção entre $x$ e $y$ tomamos $z = \{ \omega : \omega \in x \wedge \omega \notin f(\omega) \}$ . Então $z \notin y$ e $z \in P(x)$.

Exercício : Se definimos $P(x)$ como $^{x}2$ , como fica o método da diagonalização ?

No que se segue vamos utilizar livremente o axioma da escolha e seus equivalentes. Assim sendo, se $y$ é um conjunto sabemo-lo bem ordenável.

Indicaremos, se $k$ é um cardinal, por $2^{k}$ o menor ordinal equipotente ao conjunto P ( $k$ ). Na presença do axioma da escolha temos então os primeiros corolários do Teorema 4 :

Corolário 10 : $\forall k ( k \in 2^{k} )$

Corolário 11 : $\forall \alpha ( \aleph_{\alpha + 1} \subseteq 2^{\aleph_{\alpha}} )$

Seja $(A_i)_{i \in I}$ uma família de conjuntos. Definimos

$$\sum_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} \{ i \} \times A_i$$

e $\widetilde{\prod}_{i \in I} A_i$ da maneira usual, isto é,

$$\widetilde{\prod}_{i \in I} A_i = \left\{ f : f \in {}^{I} \cup A_i \quad \wedge \forall i \, (f(i) \in A_i) \right\}$$

Sabemos que se para todo $i \in I$ $A_i \neq \emptyset$, então $\widetilde{\prod}_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ é equivalente ao axioma da escolha. A próxima proposição, conhecida por Lema de Konig, nos dá uma relação interessante entre a soma e o produto de famílias de conjuntos em determinadas condições.

Proposição 12 : ( Lema de König )

Seja $(A_i)_{i \in I}$ uma família de conjuntos e $(B_i)_{i \in I}$ uma outra. Suponhamos que $\overline{\overline{B_i}} \nless \overline{\overline{A_i}}$ para todo $i$ , então

$$\overline{\overline{\prod_i B_i}} \nless \overline{\overline{\sum_i A_i}}$$

Demonstração : Utilizamos o axioma da escolha na demonstra ção. Seja $f \in {}^{\Sigma A_i} \prod B_i$ injetora mostremos que $f$ não é sobrejetora. Para cada $k \in I$ consideremos o conjunto

$$B'_k = \{ y : y = h(k) \wedge h \in f^* (\{k\} \times A_k) \}$$

Então como $\overline{\overline{B}}_k \not\leq A_k$ temos $B_k - B'_k \neq 0$. Com o axioma da escolha $\prod_i (B_i - B'_i) \neq 0$ e portanto $f$ não pode ser sôbre.

Corolário 12 : $\forall \; ( \; \not\leq \; 2 \; )$

Demonstração : $= \sum_{\eta \in} \{\eta\}$ e $= \prod_k \{0,1\}$

Uma outra consequência interessante do lema de Konig é o fato de que $2^k$ não é a soma de $k$ cardinais menores. Antes algumas definições.

<u>Definição</u> : Sejam $\lambda$ e $\mu$ ordinais. Uma sequência transfinita crescente de ordinais é uma função $\varphi \in {}^{\lambda}\mu$ tal que

$$\forall \sigma \forall \eta (\sigma \in \eta \in \lambda \longrightarrow \varphi' \sigma \in \varphi' \eta)$$

É óbvio que $\varphi$ é injetora e portanto necessàriamente $\lambda \in \mu$

<u>Definição</u> : Seja $k$ um cardinal. Seja o conjunto

$$f(k) = \{ \lambda : \exists \varphi \; (\varphi \text{ é uma sequência crescente de ordinais } \wedge \bigcup \operatorname{dom} \varphi = k \wedge \lambda = \underline{\underline{\operatorname{dom} \varphi}} \wedge \forall \eta (\eta \in \operatorname{dom} \varphi \longrightarrow \varphi' \eta \in k) \}$$

Note-se que $f(k)$ é não vazio já que a identidade restrita a $k$ é uma sequência crescente de ordinais. Definimos cofinalidade de $k$, $cf(k) = \bigcap f(k)$.

<u>Proposição 13</u> : $\forall k \; ( cf(2^k) > k )$

<u>Demonstração</u> : Suponhamos que exista $\varphi \in {}^{k}OR$ com $\overline{\overline{\bigcup \operatorname{dom} \check{\varphi}}} = 2^k$ e que $\overline{\overline{\operatorname{dom} \varphi}} \leq k$ . Então temos que

$$\forall \eta \; ( \eta \in \operatorname{dom} \varphi \longrightarrow \overline{\overline{\varphi'\eta}} < 2^k \quad )$$

Seja $\lambda = \operatorname{dom} \varphi$ . Então pelo lema de König

$$\overline{\overline{\bigcup \varphi'\eta}} \leq \sum \overline{\overline{\varphi'\eta}} < \prod_{\eta \in \lambda} 2^k \leq ( 2^k )^{\lambda} = 2^{k\lambda} = 2^k$$

o que é absurdo já que $\overline{\overline{\bigcup \varphi'\eta}} = 2^k$ por hipótese. Então $cf( 2^k ) > 2^k$.

O corolário 1 e a proposição 13 encerram as duas únicas restrições conhecidas sôbre o cardinal $2^k$ em relação a $k$ .

Na presença do axioma da escolha sabemos que os aleph são os cardinais. Cassificamo-lhes em dois tipos :

a) Sucessores : quando o índice do aleph é um ordinal sucessor.

b) Limites : quando o índice de aleph é um ordinal limite.

<u>Proposição 14</u> : $\forall \alpha \; ( cf( \aleph_{\alpha + 1} ) = \aleph_{\alpha + 1} )$

<u>Demonstração</u> : Seja $\varphi$ uma sequência crescente definida em $\aleph_{\alpha} \in \aleph_{\alpha + 1}$ e tal que $\bigcup \operatorname{dom} \check{\varphi} = \aleph_{\alpha + 1}$ . Como $\varphi$ é injetora $\operatorname{dom} \check{\varphi} \approx \aleph_{\alpha}$ . Por outro lado

$$\forall \eta \; ( \eta \in \lambda \longrightarrow \varphi'\eta \in \aleph_{\alpha+1} )$$

e portanto $\overline{\overline{\bigcup \operatorname{dom} \check{\varphi}}} \leq \aleph_{\alpha}^{2} = \aleph_{\alpha}$ o que é um absurdo. Isto com pleta a demonstração.

É óbvio que para todo cardinal $k$, $cf(k) \leq k$. Para cardinais sucessores temos então sempre $cf(k) = k$. Existem cardinais limites tais que $cf(k) < k$ ( por exemplo $\aleph_\omega$ ). A questão da existência de cardinais limites $\lambda$ tais que $cf(\lambda) = \lambda$ foi demonstrada como sendo indecidível em Z.F.* . Para futuro uso, sendo $k$ um cardinal, daremos as definições :

a) $k$ é regular $\equiv$ $cf(k) = k$

b) $k$ é singular $\equiv$ $cf(k) < k$

Nesta nomenclatura a existência de cardinais limites regulares é indecidível em Z.F.

* Ver § 3 do Capítulo III.

# CAPÍTULO III

## Modelos

## § 1 : Modelos

Vamos considerar aqui, preliminarmente a nossa definição de modelos uma linguagem L, mais geral que $L_{ZF}$ que utilizamos anteriormente. Os seus símbolos primitivos são os seguintes:

( 1 ) Variáveis : Temos um número enumerável de variáveis indicadas por $v_n$ , $n \in \omega$.

( 2 ) Letras de Predicado : Temos um número enumerável de letras de predicado, indicados por $P_n$ , $n \in \omega$. Para cada $n \in \omega$ , existe um número $\mu ( n ) \in \omega$ denominado ordem do predicado $P_n$.

( 3 ) Símbolos Lógicos : Temos $\vee$ ( ou ) e $\neg$ ( não ).

( 4 ) Quantificadores : Temos o símbolo $\exists$ ( existe)

( 5 ) Constantes : Temos um conjunto qualquer de constantes, $c_i$ , $i \in I$.

( 6 ) Símbolos Auxiliares : parênteses, vírgulas , pontos.

( 7 ) Símbolo de Igualdade : =

Como fizemos no capítulo I, definimos fórmula atômica de L :

( 1 ) Se $P_n$ é uma letra de predicado e se $t_1$, $t_2$, $t_3$, ....... $t_{\mu (n)}$ são constantes ou variáveis, então $P_n$ ( $t_1$, $t_2$, ....... $t_{\mu (n)}$ ) é uma fórmula atômica. Se $t_1$, $t_2$, são constantes ou variáveis, então $t_1 = t_2$ é uma fórmula atômica.

( 2 ) Apenas estas são as fórmulas atômicas.

As definições de fórmula de L, de ocorrência livre ou ligada de uma variável numa fórmula, de sentença, e de uma variá - vel ser livre para outra numa fórmula são as mesmas que as dadas - para $L_{ZF}$ . As abreviações, que convencionamos no capítulo I, também são as mesmas.

Deverá estar claro que, a linguagem $L_{ZF}$ é uma forma - particular de linguagem do tipo que descrevemos. A função $\mu$ que a cada $n$ associa o número $\mu(n)$ , ordem do predicado $P_n$ , é denominada <u>tipo de L</u> . Assim, podemos falar em linguagem do tipo $\mu$, que do ponto de vista formal são indistinguíveis.

Um cálculo de predicados de 1ª ordem, poderia ser montado a partir de $L$ , tomando-se, como axiomas lógicos, precisamente aqueles que já tomamos anteriormente no capítulo I. A definição de uma fórmula se demonstrável a partir de um conjunto de fórmulas $\Gamma$ é a mesma, e indicada da mesma forma: $\Gamma \vdash \emptyset$

Um conjunto de fórmulas $\Gamma$ é dito <u>consistente</u> se não existir uma fórmula $\emptyset$ tal que $\Gamma \vdash \emptyset$ e $\Gamma \vdash \neg\, \emptyset$ .

Observamos que a Proposição 1 e o teorema da dedução valem no nosso contexto atual sem nenhuma modificação no enunciado. As convenções que fizemos para indicar variáveis livres em fórmulas, continuamos a mantê-la aqui.

Preparatório para o conceito de modêlo, é o conceito de estrutura relacional. Uma <u>estrutura relacional</u> para $L$ , é uma tripla ordenada $\mathfrak{A} = \langle A , \{ R_n : n \in \omega \} , \{ a_i : i \in I \} \rangle$

onde $R_n \subseteq A^{\mu(n)} \subseteq \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{\mu(n)\ x}$

para cada $n \in \omega$ e $A \neq 0$ e

$$a = \{ \langle i, a_i \rangle : i \in I \wedge a_i \in A \}$$

é uma função de $I$ em $A$. Cada $R_n$ é denominada <u>interpretação</u> de

$P_n$ em $\mathfrak{A}$ .

Para definirmos a noção de satisfibilidade em $\mathfrak{A}$ especificamos uma sequência.

$$v = \{\langle n, x_n \rangle : n \in \omega \text{ e } x_n \in A\}$$

de elementos de A . v é denominada <u>interpretação das variíveis</u> de L. A interpretação v nos diz que devemos interpretar as ocorrências livres da variável $v_n$ como se referindo ao elemento $x_n$ de A. Se v fôr uma interpretação das variáveis e se $a \in A$, então v ( n/a ) é a interpretação que nos fornece os mesmos valôres que v para todas as variáveis excetuando-se $v_n$ a qual associamos o valor a :

$$v(n/a) = (x_0, x_1, \ldots\ldots x_{n-1}, a, x_{n+1}, \ldots\ldots)$$

Observamos que o valor associado a $v_n$ por v ( n/a ) é independente do valor associado a $v_n$ por v.

Podemos agora dar uma definição precisa, devida a Tarski, de quando uma fórmula $\emptyset$ pe verdadeira estrutura relacional , para uma dada interpretação v das variáveis. Indicamos isto escrevendo $\mathfrak{A} \models_v \emptyset$ . A definição é recursiva, dada a seguir:

( 1 ) $\mathfrak{A} \models_v u_i = u_j$ se $b_i$ fôr o mesmo elemento que $b_j$.

$\mathfrak{A} \models_v P_n(u_1, u_2, \ldots\ldots u_{\mu(n)})$ se e sòmente se $\langle b_1, b_2, \ldots\ldots, b_{\mu(n)} \rangle \in R'_n$

onde se $u_i$ é a variável $v_r$ , então $b_i = x_r$ , e se $u_i$ é uma constante $c_j$ então $b_i = a_j$ , $j \in I$.

( 2 ) $\mathfrak{A} \models_v \neg \emptyset$ se e sòmente se não fôr verdade que $\mathfrak{A} \models \emptyset$ .

( 3 ) $\mathfrak{A} \models_v \phi \vee \Psi$ se e sòmente se -
$\mathfrak{A} \models_v \phi$ ou $\mathfrak{A} \models_v \Psi$

( 4 ) $\mathfrak{A} \models_v \exists v_n \phi$ se e sòmente se para algum -
$a \in A$ temos $\mathfrak{A} \models_{v(n/a)} \phi$.

<u>Exercícios:</u> As fórmulas abaixo são de L e $\mathfrak{A}$ é uma estrutura relacional para L ; $\phi$ , $\Psi$ indicam fórmulas.

(1) Se $\phi$ é um axioma do cálculo de predicados de 1ª ordem então
$$\mathfrak{A} \models \phi$$

(2) Se $\mathfrak{A} \models \phi \longrightarrow \Psi$ e $\mathfrak{A} \models \phi$ então $\mathfrak{A} \models \Psi$

(3) Seja $\phi$ uma fórmula de L, uma estrutura relacional para L e v uma valoração. Mostre que $\mathfrak{A} \models_v \forall v_n \phi$ se e sòmente se para todo $a \in A$, $\models_{v(n/a)} \phi$.

(4) Seja $\phi$ uma fórmula de L, e sejam v e v' valorações tais que se $v_n$ ocorre livre em $\phi$ então $x_n = x'_n$ . Mostre que $\mathfrak{A} \models_v \phi$ se e sòmente se $\mathfrak{A} \models_{v'} \phi$ .

(5) Se $\mathfrak{A} \models \phi$ e $\mathfrak{A} \models \Psi$ então $\mathfrak{A} \models \phi \wedge \Psi$

(6) Se $\mathfrak{A} \models \phi$ então para tôda $\Psi$ , $\mathfrak{A} \models \phi \vee \Psi$

(7) Ou $\mathfrak{A} \models \phi$ ou $\mathfrak{A} \models \neg \phi$

(8) Não se tem $\mathfrak{A} = \phi$ e $\mathfrak{A} \models \neg \phi$

Por fôrça do exercício 3 acima, escreveremos $\mathfrak{A} \models \emptyset[a_0, a_1, \ldots\ldots\ldots\ldots a_n]$ $a_j \in A$ em vez de $\mathfrak{A} \models_v \emptyset$ tôda vez que as variáveis que aparecem alguma vez livres em $\emptyset$, ocorrem entre as $v_0, \ldots\ldots\ldots\ldots v_n$. Assim escrevemos $\mathfrak{A} \models \emptyset [a_0, a_1, \ldots\ldots\ldots a_n]$ sempre que qualquer interpretação que associa a $v_i$, $i \leqslant n$, o valor $a_i$ é tal que $\mathfrak{A} \models_v \emptyset$.
Em particular se $\emptyset$ é uma sentença então se $\mathfrak{A} \models_v \emptyset$ para alguma interpretação v, das variáveis então $\mathfrak{A} \models \emptyset$ para <u>tôda</u> interpretação v. Nêste caso, escrevemos $\mathfrak{A} \models \emptyset$ e dizemos que $\emptyset$ é <u>verdadeira</u> ou <u>válida</u> em $\mathfrak{A}$ e que $\mathfrak{A}$ é um <u>modêlo</u> de $\emptyset$. Se $\Gamma$ é um conjunto de sentenças de L, então $\mathfrak{A}$ é um <u>modêlo</u> de $\Gamma$, se fôr um modêlo para todas as sentenças de $\Gamma$.

Uma sentença é dita universalmente válida se fôr verdadeira para tôda estrutura relacional $\mathfrak{A}$ para L. Seja Vel o conjunto das sentenças universalmente válidas de L e seja Prov, o conjunto das sentenças $\emptyset$ tal que $\vdash \emptyset$. Temos então o seguinte

<u>Teorema 1</u> : Vel = Prov.

O teorema nos diz que, se $\emptyset$ é universalmente válida, então $\emptyset$ é demonstrável a partir dos axiomas lógicos do capítulo I e vice-versa.

Para uso futuro, daremos aqui uma definição. Um conjunto X se diz <u>definível</u> numa estrutura relacional = $\langle A, \ldots\ldots\ldots \rangle$ ou definível se existir uma fórmula $\emptyset(y; t_1 \ldots\ldots\ldots t_n)$ com uma variável livre, com os $t_1, \ldots\ldots\ldots, t_n$ parâmetros pertencentes a A tal que

$$X = \{ y : y \in A \wedge \mathfrak{A} \models \emptyset\ (y, t_1, \ldots\ldots\ldots t_n) \}$$

No resto do capítulo nos preocuparemos com os enunciados dos teoremas fundamentais da Teoria dos Modelos e com a demonstração que em ZF não podemos mostrar a existência de cardinais de um determinado tipo.

## § 2 : Teoremas Fundamentais

Nesta secção reunimos alguns enunciados da Teoria dos Modelos que utilizaremos. Não daremos nenhuma demonstração, mas a bibliografia, ao fim do trabalho, dá indicações de onde encontrar as demonstrações dêsses enunciados.

Por cardinal de uma linguagem L, indicamos a cardinalidade dos símbolos de L . Como fórmulas são superposições de um número finito de símbolos de L , a cardinalidade do conjunto das fórmulas de L é igual ao cardinal de L . Seja $\mathfrak{A}$ uma estrutura relacional para L . A cardinalidade de $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots\ldots, \ldots\ldots \rangle$ é o cardinal de A .

O primeiro teorema desta secção é o teorema de Lowenheim Skolem :

Teorema : Seja $\Gamma$ um conjunto de sentenças com um modelo infinito. Então se $\Gamma$ fôr finito, $\Gamma$ tem modelos de qualquer cardinalidade infinita. Se $\Gamma$ é infinito e de cardinal $\alpha$ então $\Gamma$ tem modelos de qualquer cardinalidade $\geqslant \alpha$ .

É uma observação de Vaught, que o Teorema 1 é equivalente ao axioma da escolha.

O teorema 2 é denominado o teorema da compacticidade do Cálculo de Predicados.

Teorema 2 : Um conjunto $\Gamma$ de sentenças de L tem modelo se e sòmente se cada subconjunto finito de $\Gamma$ tem modelo.

O teorema seguinte relaciona consistência com modelos. É devido a Gödel e Henkin :

Teorema 3 : (da Completividade)

Um conjunto $\Gamma$ de sentenças tem modelo se e sòmente se fôr consistente.

Os teoremas 1 e 3 nos fornecem o

Teorema 4 : Se $\Gamma$ é um conjunto consistente de sentenças de cardinal $\alpha$, então ou $\Gamma$ tem um modelo finito ou $\Gamma$ tem modelos de tôdas cardinalidades infinitas $\geqslant \alpha$.

Se consideramos que $L_{ZF}$ é enumerável e que portanto o conjunto das sentenças de $L_{ZF}$ é enumerável, então se ZF fôr consistente, terá um modelo enumerável. A rigor precisaríamos tão sòmente, ter considerado que se $\Gamma$, fôr o conjunto dos axiomas de ZF então $\Gamma$ é enumerável, e portanto se ZF tiver um modelo, terá também um enumerável. Um modelo de uma sentença $\emptyset$ de $L_{ZF}$ é dito standard se a interpretação da pertinência fôr a pertinência restrita ao conjunto subjacente ao modelo. Indicaremos um tal modelo pelo par ordenado $\langle M , \in \rangle$.

O último teorema que precisaremos sôbre modelos, tem haver com a teoria de ZF. Êle nos diz que podemos encontrar modelos transitivos enumeráveis e standard, para uma coleção finita de axiomas de ZF, que inclua o axioma da extensionalidade. Um modêlo - standard $\langle M , \in \rangle$ é dito transitivo, se M fôr transitivo.

Teorema 5 : Seja $\Gamma = \{ A_1 , A_2 , \ldots , A_n \}$ um conjunto finito de axiomas de Z.F., tal que um dos $A_j$ é o axioma da extensionalidade. Então existe um conjunto M, enumerável e transitivo, tal que $\mathfrak{m} = \langle M , \in_{M \times M} \rangle = \langle M , \in \rangle$ é modelo de $\Gamma$.

Êste resultado será importante no capítulo 4. Observamos apenas que a demonstração do Teorema 5 pode ser feita em Z.F.

Que em Z.F. não podemos achar (isto é, demonstrar que existe) um modelo de Z.F., é o conteúdo, para nós relevante, do teorema seguinte, denominado da Incompletabilidade, demonstrado por Gödel :

Teorema 6 : Seja $\Sigma$ um sistema formal cujos axiomas são dados por alguma regra recursiva. Então se $\Sigma$ é consistente e se a aritmética pode ser descrita em $\Sigma$ a consistência de $\Sigma$, não pode ser provada em $\sum_1$ .

A rigor não enunciamos um teorema matemàticamente preciso. Entretanto não há dificuldade em se perceber que o teorema se aplica a todos sistemas formais usuais. Em particular, como, em ZF, temos $\omega$ , o teorema se aplica a Z.F. Assim se supusermos que Z.F. é consistente então a consistência de Z.F. exige, para sua demonstração, métodos mais poderosos do que aquêles que temos ao nosso - dispor em Z.F. Obviamente, se Z.F. fôr inconsistente, podemos de - monstrar qualquer coisa em Z.F. O que queremos frizar, entretanto, é que a consistência de Z.F. é até hoje um artigo de fé. Utilizaremos o teorema 6 na secção seguinte.

## § 3 : Uma Aplicação : Cardinais Fortemente Inacessíveis.

Esta secção é dedicada a mostrar que se Z.F. fôr consistente então a existência de cardinais de um certo tipo, denominados fortemente inacessíveis não pode ser demonstrada em Z.F. Recordamos antes alguns conceitos que já discutimos. Seja $k$ um cardinal; $k$ é dito regular se e sòmente para tôda sequência $\overline{\overline{\alpha_\beta}}$ , $\beta \in \lambda$ , com $\overline{\overline{\lambda}} < k$ , temos $\sum_{\beta \in \lambda} \overline{\overline{\alpha}}_\beta < k$ se $\overline{\overline{\alpha}}_\beta < k$ para todo $\beta \in \lambda$ . Ou seja $k$ é regular se para todo cardinal $\lambda$ menor que $k$ , $k$ não é a soma de $\lambda$ cardinais menores que $k$ . Um cardinal Ⓗ é dito <u>fortemente inacessível</u> se e sòmente se:

(a) Ⓗ é regular e não enumerável

(b) Se $k <$ Ⓗ então $2^k <$ Ⓗ onde $2^k = \overline{\overline{P(k)}}$ .

Recordamos ainda os $R_\alpha$ ; para cada ordinal $\alpha$ , definimos um conjunto $R_\alpha$ , por indução transfinita, da maneira seguinte:

$$R_0 = 0$$

$$R_{\alpha+1} = P(R_\alpha)$$

$$\text{e se } \quad \lambda = \cup \lambda \,, \quad R_\lambda = \bigcup_{\alpha \in \lambda} R_\alpha$$

Vamos mostrar que se existisse um cardinal inacessível - (ou seja, que se fôsse possível demonstrar em Z.F. a existência de um tal cardinal) então poderíamos demonstrar a consistência de Z.F. em Z.F. Assumimos então que exista um cardinal inacessível (fortemente inacessível), Ⓗ .

<u>Lema 1</u> : $\forall \xi \, ( \xi \in Ⓗ \rightarrow \overline{\overline{R_\xi}} < Ⓗ )$

<u>Demonstração</u> : Fazemos por indução. É óbvio que $\overline{\overline{R_0}} < Ⓗ$ Suponhamos que o resultado vale para todo $\xi \in \alpha \in Ⓗ$ e mostremos que vale para $\alpha$ . Temos dois casos:

(a) $\alpha$ é sucessor, ou seja $\alpha = \xi + 1$ com $\xi \in \alpha$ . Então $\overline{\overline{R_\alpha}} = \overline{\overline{P ( R_\xi )}} = 2^{\overline{\overline{R_\xi}}}$ e portanto como Ⓗ é inacessível e devido à hipótese de indução $\overline{\overline{R_\alpha}} < Ⓗ$

(b) $\alpha = \bigcup \alpha$ , ou seja $\alpha$ é ordinal limite. Neste caso temos claramente :

$$\overline{\overline{R_\alpha}} = \overline{\overline{\bigcup_{\xi \in \alpha} R_\xi}} \leqslant \sum_{\xi \in \alpha} \overline{\overline{R_\xi}}$$

Como $\alpha \in Ⓗ$ , temos $\overline{\overline{\alpha}} < Ⓗ$ e como $\overline{\overline{R_\xi}} < Ⓗ$ para todo $\xi \in \alpha$ temos que $\overline{\overline{R_\alpha}} \leqslant \sum_{\xi \in \alpha} \overline{\overline{R_\xi}} < Ⓗ$

O lema está assim demonstrado. Consideremos o conjunto - $M = \bigcup_{\xi \in Ⓗ} R_\xi$ . Como assumimos que Ⓗ existe podemos obter M em Z F por substituição. Vamos mostrar que $\langle M, \in \rangle$ é modelo de Z F Como cada $R_\alpha$ é transitivo temos imediatamente que M é transitivo. A demonstração de que M é modelo de Z F. é feita - em Z F

<u>Lema 2</u> : Os axiomas da regularidade, infinito, extensionalidade e união valem em $\mathfrak{m} = \langle M , \in \rangle$ .

<u>Demonstração</u> : Lembramos que M é transitivo. Verificaremos com algum detalhe apenas o axioma da união. Devemos mostrar que $\mathfrak{m} \models \forall x \, \exists y \, \forall z \, (z \in y \longleftrightarrow \exists u \, (z \in u \wedge u \in x ))$ .

Como sabemos $y = U x$ . Seja então $m \in M$ e vamos mostrar que $U m$ (que existe em $Z F$ ) está em $M$ . Lembramos ainda que a interpretação da pertinência é simplesmente a pertinência restrita a $M$ . Como $M$ é transitivo, se $u \in m$ então $u \in M$ . Mais precisamente, se $m \in M$ então existe $\xi \in H$ tal que $m \in R_\xi$ . Mas como cada $R_\xi$ é transitivo $U m \subseteq R_\xi$ , e portanto $U m \in P(R_\xi) = R_{\xi + 1} \in M$ , pois, $H$ é um ordinal limite. Então o axioma da união é válido em $M$. Os outros mencionados, procede-se da mesma maneira. Observamos que $\omega \subset R_{\omega + 1}$ e $\omega + 1 \in H$ . Se $m \in M$ e $n \in M$ então $m$ e $n$ são iguais em $M$ se e sòmente se forem iguais em $Z F$ , já que $m \subseteq M$ e $n \subseteq M$ . Regularidade vale pela mesma razão, pois o elemento de $m \in M$ que, em $Z F$ , tem intersecção nula com $m$ , pertence a $M$ .

<u>Lema 3</u> : O axioma das partes vale em $M$ .

<u>Demonstração</u> : Procede-se de maneira análoga que na demonstração do lema 2 e deixamo-la a cargo do leitor.

<u>Lema 4</u> : O axioma da substituição vale em $M$ .

<u>Demonstração</u> : Seja $\emptyset$ uma fórmula com duas variáveis livres e com $t_1 , t_2 , \ldots t_k$ elementos de $M$ como parâmetros : $\emptyset ( x , y ; t_1 , \ldots t_k )$ . Admitamos que

$\mathfrak{m} \models \forall x \exists ! y \; \emptyset (x, y ; t_1 , \ldots t_k )$ , e devemos mostrar que

$\mathfrak{m} \models \forall x \exists y \forall z ( z \in y \longleftrightarrow u ( u \in x \wedge \emptyset ( u, z ; t_1 , \ldots t_k))$

Seja $\alpha \in H$ ; vamos mostrar que se substituirmos todo $R_\alpha$ com $\emptyset$ , obtemos ainda um conjunto em $M$ . Feito isso o lema estará demonstrado. Para cada $m \in R_\beta$ definimos $\xi_m$ , como o menor dos ordinais $\xi$ tais que $m \in R_\xi$ . Consideramos então a fórmula

$$\chi( u , v ; t_1 , \ldots , t_k , R_\alpha ) \equiv u \in R_\alpha \wedge$$
$$\forall y ( \emptyset ( u , y ; t_1 , \ldots , t_k ) \longrightarrow v = \xi_y )$$

Observamos inicialmente que se para algum $u \in R$ valer $\emptyset ( u, y ; t_1 , \ldots , t_k )$ então $y \in M$ e portanto temos

$\xi_y$ . Por outro lado devido ao fato que

$\mathfrak{m} \models \forall x \ \exists! y \ \emptyset ( x , y ; t_1 , \ldots , t_k )$ então temos $\forall u \ \exists! v \ \chi ( u, v ; t_1 , \ldots , t_k , R_\alpha )$ . Substituimos em Z.F. com a fórmula $\chi$, e obtemos a partir de $R_\alpha$ , um conjunto $\Gamma$ de ordinais. Seja $\gamma = \cup \Gamma$ . Então $\gamma \in$ (H) . De fato, pois $\overline{\overline{\gamma}} = \overline{\overline{\cup \Gamma}}$ e lembrando o lema 1 teremos :

$$\overline{\overline{\cup \Gamma}} \leqslant \sum_{\overline{\overline{R}}_\alpha} \overline{\overline{\xi}}_y < \text{(H)}$$

, pois cada $\xi_y$ tem cardinalidade menor que (H) e $\overline{\overline{R}}_\alpha <$ (H) . Assim, como $\overline{\overline{\gamma}} <$ (H), temos $\gamma \in$ (H) . Seja então o conjunto

$$R'_\alpha = \{ y : y \in M \wedge \exists x ( x \in R_\alpha \wedge \emptyset ( x , y ; t_1 , \ldots , t_k ) \}$$

Pelo que acabamos de mostrar $R'_\alpha \subseteq R_\gamma$ e portanto $R'_\alpha \in M$.

Então se $m \in R_\alpha$ , se

$$m' = \{ y : y \in M \wedge \exists x ( x \in m \wedge \emptyset ( x , y ; t_1 , \ldots , t_k ) \}$$

então $m' \subseteq R'_\alpha \subseteq R_\gamma$ e portanto $m' \in M$ . Assim o axioma da substituição vale em $\langle M , \in \rangle$ , e está terminada a demonstração.

Resumindo, mostramos que se pudermos demonstrar em Z.F. que existe um cardinal fortemente inacessível (H) então $\mathfrak{m} = \langle \bigcup_{\alpha \in \text{(H)}} R_\alpha , \in \rangle$ é modelo de Z.F. Levando em conta os teoremas da secção anterior (especìficamente, os teoremas 3 e 6 ) concluimos o

Teorema : Se Z.F. fôr consistente não podemos demonstrar em Z.F. a existência de um cardinal fortemente inacessível.

Isto conclui esta secção e o capítulo 3 .

# C A P Í T U L O   I V

## A Consistência da Hipótese do Contínuo

## § 1 : Introdução

No que se segue vamos fazer uma demonstração da consis - tência da hipótese do continuo com a teoria de conjuntos Z.F., exposta anteriormente. Na realidade o que estabeleceremos é uma consistência relativa, ou seja, mostraremos que se Z.F. é consistente então Z.F. + $2^{\aleph} = \aleph_1$ + A E é consistente.

O método a ser utilizado para a demonstração é o "forcing".

A secção 2 constroi uma linguagem ramificada que usaremos em tôda esta parte do trabalho . Na secção 3 temos a apresentação do forcing e nas secções 4 e 5 a apresentação do resultado procurado.

Para finalizar esta introdução fixamos alguma notação e lembramos noções que já discutimos.

Como sempre, letras gregas minúsculas do início do alfabeto, indicam ordinais. Reservamos em particular $\lambda$ para ordinais limites e $k$ para cardinais.

A palavra modelo, significará em tudo que fôr feito a seguir modelo standard transitivo. Se $\mathfrak{m} = \langle M , \in \rangle$ é um modelo de Z.F. então o símbolo $O\mathbb{R}_M$ indica os ordinais do modelo considerado ou seja $O\mathbb{R} \cap M$ , intuitivamente.

Lembramos ainda os $R_\alpha$ que vimos anteriormente. Para cada $\alpha \in O\mathbb{R}$ definimos, por recorrência, um conjunto $R_\alpha$ da maneira seguinte:

$$R_0 = 0$$

$$R_{\alpha + 1} = P(R_\alpha)$$

$$R_\lambda = \bigcup_{\alpha \in \lambda} R_\alpha \qquad \lambda = \cup \lambda$$

Como é sabido, com o axioma da regularidade temos $V = \bigcup_{\alpha \in O\mathbb{R}} R_\alpha$ . Com isto daremos a seguinte

Definição : Seja $x$ um conjunto. Denomina-se posto de $x$ e indica-se $\| x \|$, ao menor ordinal $\alpha$ tal que $x \subseteq R_\alpha$ .

## § 2 : A Linguagem $L^M ( A_j )$

Seja $\mathcal{M} = \langle M , \in \rangle$ um modelo standard transitivo e enumerável de Z.F., e sejam $A_j$ , $j \in \mathbb{N}$ predicados unários. Vamos descrever uma linguagem ramificada, indicada por $L^M ( A_j )$ , para realçar a sua dependência de $M$ e dos $A_j$ .

Os símbolos primitivos de $L^M ( A_j )$ são os seguintes :

(1) Variáveis : Temos um número enumerável de variáveis, indicados por $v_j$ , $j \in \mathbb{N}$ .

(2) Constantes : Para cada $m \in M$ temos um símbolo, $\underline{m}$ , o nome de $m$ . Êstes símbolos serão as constantes de $L^M ( A_j )$ .

(3) Conectivos lógicos : Temos os símbolos $\neg$ (não) e o símbolo $\vee$ (ou) .

(4) Quantificadores : Temos o símbolo $\exists$ (existe) e para cada $\alpha \in O\mathbb{R}_M$ um símbolo $\exists_\alpha$ .

(5) Operadores de Obstração : Para cada $\alpha \in O\mathbb{R}_M$ temos um símbolo, $\mathbb{K}_\alpha$ .

(6) Predicados : Temos $\in$ (pertence), $=$ (igual) , e todos os $A_j$ , $j \in \mathbb{N}$ .

De posse dos símbolos primitivos de $L^M ( A_j )$ podemos começar a montar a sua sintaxe. Definimos inicialmente, por indução simultânea, fórmula limitada, ocorrência livre ou ligada de uma variável numa fórmula limitada e têrmo de obstração. A indução procede no número de símbolos nas expressões de $L^M ( A_j )$ . Assim ;

(a) Se $u$ e $v$ são constantes, variáveis ou termos de obstração, então $u \in v$ , $u = v$ , e $A_j (u)$ , $j \in \mathbb{N}$ ,são fórmulas limitadas.

(b) Se u e v são constantes ou têrmos de abstração, tôda ocorrência de uma variável nas fórmulas de (a) são - ligadas. Caso contrário, as ocorrências são livres.

(c) Se $\emptyset$ e $\Psi$ são fórmulas limitadas então $\neg \emptyset$ e $\emptyset \vee \Psi$ são fórmulas limitadas. Se $v_j$ é uma variável e $\alpha \in \mathbb{O}\, R_M$ então $\exists_\alpha v_j \emptyset$ é uma fórmula limitada.

(d) Uma ocorrência da variável $v_j$ é livre ou ligada numa fórmula da forma $\neg \emptyset$ ou $\emptyset \vee \Psi$, conforme esta ocorrência, considerada como ocorrência nas fórmulas ( ou fórmula ) - componentes, for livre ou ligada. Qualquer ocorrência de $v_j$ na fórmula $\exists_\alpha v_j \emptyset$ é ligada.

(e) Se $\emptyset$ é uma fórmula limitada e $\alpha \in \mathbb{O}\, \mathbb{R}(M)$ - são tais que:

(1) $\emptyset$ só tem uma variável livre (indiquemo-la por $v_o$ ).

(2) Se o símbolo $\exists_\beta$ ocorre em $\emptyset$ então $\beta \leqslant \alpha$ .

(3) Se o símbolo $\not\exists$ ocorre em $\emptyset$ então $\beta < \alpha$ .

(4) Se o símbolo $\underline{m}$ ( $m \in M$ ) ocorre em $\emptyset$ então $\| m \| < \alpha$ .

Então $\not\exists_\alpha\, v_o \emptyset (v_o)$ é um têrmo de abstração.

Os têrmos de $L^M (A_j)$ são as constantes e os têrmos de abstração.

Definimos de posse dos têrmos as fórmulas de $L^M (A_j)$ :

Dizemos primeiramente quem são as <u>fórmulas atômicas</u>:

Se u e v são constantes, variáveis ou têrmos de abstração então $A_j(u)$ $j \in N$ , $u \in v$ e $u = v$ são fórmulas atômicas.

A seguir definimos fórmula:

(1) fórmulas atômicas são fórmulas

(2) Se $\emptyset$ e $\Psi$ são fórmulas então $\neg\emptyset$ e $\emptyset \vee \Psi$ são fórmulas. Se $v_j$ é uma variável e $\alpha \in \mathbb{O}\, \mathbb{R}_M$ então $\exists v_j\, \emptyset$ e $\exists_\alpha\, v_j\, \emptyset$ são fórmulas.

Deixamos como exercício ao leitor a definição de ocorrência livre ou ligada de uma variável numa fórmula de $L^M(A_j)$.

Como sempre uma <u>sentença</u> é uma fórmula sem variáveis livres. Uma fórmula limitada sem variáveis livres é uma <u>sentença limitada</u>.

O comprimento de uma fórmula se define recursivamente da maneira seguinte:

(1) Se $\emptyset$ é atômica, o comprimento de $\emptyset$ indicado por cp $\emptyset$, é 1.

(2) Se $\emptyset$ é $\Psi \vee \chi$ então

$$\text{cp}\,\emptyset = \text{cp}\,\Psi + \text{cp}\,\chi + 1$$

(3) Se $\emptyset$ é $\neg\Psi$ então $\text{cp}\,\emptyset = \text{cp}\,\Psi + 1$

(4) Se $\emptyset$ é $\exists x \Psi$ ou $\exists_\alpha x \Psi$ então

$$\text{cp}\,\emptyset = \text{cp}\,\Psi + 1$$

Utilizamos como abreviações, as seguintes definições:

$$\emptyset \rightarrow \Psi \equiv_{\text{Def}} \neg\emptyset \vee \Psi$$

$$\emptyset \wedge \Psi \equiv_{\text{Def}} \neg(\neg\emptyset \vee \Psi)$$

$$\forall x\, \emptyset \equiv_{\text{Def}} \neg\exists x \neg\emptyset$$

$$\forall_\alpha x\, \emptyset \equiv_{\text{Def}} \neg\exists_\alpha x \neg\emptyset$$

tôdas elas standard.

Para uso futuro, definimos <u>posto</u> de um têrmo. A letra t aferida ou não de índices, indicará sempre têrmos:

(1) O posto $\rho(t)$ de um têrmo t será:

(a) se $t \equiv \underline{m}$ , $\rho(t) = \| m \|$

(b) se $t \equiv \nexists_{\alpha} v_j \emptyset$ , $\rho(t) = \alpha$

Faremos agora a godelização ou aritimetização de $L^M(A_j)$. Adotamos as seguintes convenções:

$\neg \equiv \langle o,o \rangle$ $\qquad$ $\vee \equiv \langle o,1 \rangle$

$\exists \equiv \langle o,2 \rangle$ $\qquad$ $\in \equiv \langle o,3 \rangle$

$= \equiv \langle o,4 \rangle$ $\qquad$ $\underset{j \in \omega}{v_j \equiv \langle z,j \rangle}$

$\underset{j \in \omega}{A_j \equiv \langle 1,j \rangle}$ $\qquad$ $\underset{\alpha \in \mathbb{OR}_M}{\exists_{\alpha} \equiv \langle 3,\alpha \rangle}$

$\underset{\alpha \in \mathbb{OR}_M}{\nexists_{\alpha} \equiv \langle 4,\alpha \rangle}$ e para $m \in M$ $\underline{m} \equiv \langle 5,\underline{m} \rangle$

Com estas convenções podemos embutir $L^M(A_j)$ em M. A cada fórmula e a cada têrmo está associado um conjunto indicado por $\ulcorner \emptyset \urcorner$ ou $\ulcorner t \urcorner$ respectivamente, definido da maneira indicada abaixo. Deixamos a definição do número Gödel dos têrmos para o leitor:

(1) Se $\emptyset$ é $u = v$ ou $u \in v$ onde u e v são variáveis ou têrmos então

$\ulcorner \emptyset \urcorner = \langle \langle =, \ulcorner u \urcorner \rangle, \ulcorner v \urcorner \rangle$ ou

$\ulcorner \emptyset \urcorner = \langle \langle \in, \ulcorner u \urcorner \rangle, \ulcorner v \urcorner \rangle$ respectivamente.

(2) Se $\emptyset$ é $A_j(v)$ onde v é uma variável ou têrmo temos:

$$\ulcorner\emptyset\urcorner = \langle A_j , \ulcorner v \urcorner \rangle$$

(3) Se $\emptyset$ é $\neg \Psi$ então

$$\ulcorner\emptyset\urcorner = \langle \neg , \ulcorner\Psi\urcorner \rangle$$

(4) Se $\emptyset$ é $\Psi \vee \chi$ então

$$\ulcorner\emptyset\urcorner = \langle\langle \vee , \ulcorner\Psi\urcorner\rangle, \ulcorner\chi\urcorner \rangle$$

(5) Se $\emptyset$ é $\forall v_j \Psi$ então

$$\ulcorner\emptyset\urcorner = \langle\langle \forall , v_j\rangle , \ulcorner\Psi\urcorner \rangle$$

(6) Se $\emptyset$ é $\exists_\alpha v_j \Psi$ então

$$\ulcorner\emptyset\urcorner = \langle\langle \exists_\alpha , v_j\rangle , \ulcorner\Psi\urcorner \rangle$$

Passamos agora a considerar $L^M(A_j)$ como subconjunto de M. Consevaremos a notação $\ulcorner\emptyset\urcorner$ ou $\ulcorner t \urcorner$ , apenas quando quisermos frizar que $L^M(A_j)$ está contida em M.

Para cada $\alpha \in \mathbb{OR}_M$ , definimos um conjunto $T_\alpha$ , denominado conjunto dos têrmos definíveis por $L^M(A_j)$ , de posto menor que $\alpha$ :

$$T_\alpha = \{ \ulcorner t \urcorner : t \text{ é têrmo de } L^M(A_j) \text{ e } \rho(t) < \alpha \}$$

As sentenças limitadas têm uma hierarquia natural. Para definí-la passamos a associar cada sentença limitada $\emptyset$ uma tripla $\langle \alpha , i , l \rangle$ que definimos abaixo:

(i) O ordinal $\alpha$ é tal que:

(1a) Se algum têrmo t ocorre em $\emptyset$ então $\rho(t) < \alpha$ .

(1b) Se $\exists_\beta$ ocorre em $\phi$ então $\beta \leqslant \alpha$.

(2) $i = o$ se $\alpha$ é um ordinal sucessor, digamos $\alpha = \beta + 1$, e $\exists_\alpha$ não ocorre em $\phi$ e nenhuma fórmula do tipo $t \in .$ , $t = .$ , $. = t$ ou $A_j(t)$, $j \in w$ com $\rho(t) = \beta$. Caso contrário, $i = 1$.

(3) $1$ é o comprimento de $\phi$.

Definimos uma boa ordem nas triplas dadas acima da maneira seguinte:

$\langle \alpha, i, p \rangle \leqslant \langle \beta, j, q \rangle$ se e sòmente se $\alpha < \beta$ ou $\alpha = \beta$ e $i < j$ ou $\alpha = \beta$, $i = j$ e $p \leqslant q$

Esta ordem é evidentemente uma boa ordem para estas triplas ordenadas. Denominamos, ordem da fórmula limitada $\phi$, e indicamos od $\phi$ a tripla acima definida para $\phi$.

Por indução sôbre a ordem de sentenças limitadas, vamos definir uma função Valorização, indicada por Val. Admitimos nesta definição que a cada predicado unário $A_j$ está associado um conjunto $a_j \subseteq M$, tal que $\| a_j \| = \alpha_j \in M$, que serão as interpretações dos predicados $A_j$. A função Val tem por domínio a classe ( em M ) das sentenças limitadas de $L^M(A_j)$ e por contradomínio $\{o,1\} = 2$.

Dividimos a definição a ser dada em casos. Fazemos primeiramente o das sentenças atômicas e depois para sentenças não atômicas. No que se segue $t_j$ indicará têrmos:

(I) Definimos Val $(\ulcorner t_1 \in t_2 \urcorner)$ e Val $(\ulcorner t_1 = t_2 \urcorner)$. Temos três casos a considerar:

I1: $\rho(t_1) < \rho(t_2) = \alpha$.

Se $t_2 \equiv \underline{m}$ com $\| m \| = \alpha$ colocamos

$$\mathrm{Val}\,(\ulcorner t_1 \in t_2 \urcorner) = \sup \{ \mathrm{Val}\,(\ulcorner t_1 = \underline{n} \urcorner) : n \in m \}$$

Se $t_2 \equiv \not{H}_\alpha v_i \ \phi(v_i)$ colocamos

$$\mathrm{Val}\,(\ulcorner t_1 \in t_2 \urcorner) = \mathrm{Val}\,(\ulcorner \phi(t_1) \urcorner)$$

No caso da igualdade definimos

$$\mathrm{Val}\,(\ulcorner t_1 = t_2 \urcorner) = \inf \{ \mathrm{Val} \ulcorner u \in t_1 \longleftrightarrow u \in t_2 \urcorner : u \in T_\alpha \}$$

Note-se que $od\,(t_1 = t_2) = \langle \alpha + 1, 1, 1 \rangle$ e que

$$od\,(u \in t_1 \longleftrightarrow u \in t_2) = \langle \alpha + 1, o, 1 \rangle$$

$\underline{\underline{I2}}$: $\beta = \rho(t_2) \leqslant \rho(t_1) = \alpha$

Definimos

$$\mathrm{Val}\,(\ulcorner t_1 \in t_2 \urcorner) = \sup \{ \mathrm{Val} \ulcorner \forall_\beta v_o (v_o \in t_1 \longleftrightarrow v_o \in u) \wedge u \in t_2 \urcorner : u \in T_\beta \}$$

$$\mathrm{Val}\,(\ulcorner t_1 = t_2 \urcorner) = \inf \{ \mathrm{Val} \ulcorner u \in t_1 \longleftrightarrow u \in t_2 \urcorner : u \in T_\beta \}$$

Observe-se que há sempre uma " diminuição " no sentido da ordem da da as triplas na definição.

(II) Para as sentenças atômicas do tipo $A_j(t)$ definimos em dois casos:

II 1: $t \equiv \underline{m}$, $m \in M$, colocamos

$$\mathrm{Val}\,(\ulcorner A_j(t) \urcorner) = \begin{cases} 1 & \text{se } m \in a_j \\ 0 & \text{se } \neg(m \in a_j) \end{cases}$$

II 2: $t \equiv \exists\!\!\!\!/_{\alpha}\, v_i \;\; \phi\,(\,v_i\,)$

Então, temos:

$$\mathrm{Val}\,(\,\ulcorner A_j(t)\urcorner\,) = \sup\left\{\,\mathrm{Val}\,(\ulcorner\forall_{\alpha}\,(\,v_o \in \underline{n} \longleftrightarrow \phi\,(v_o))\urcorner\, : \; n \in a_j \;\; \mathrm{e} \;\; \|n\| \leqslant \alpha\right\}$$

Está claro de (II) que a definição da função Val depende dos con - juntos $a_j \subseteq M$ associados a cada $A_j$ . Às vêzes isto poderá ser - indicado escrevendo-se o símbolo $\mathrm{Val}_{\alpha}$ . Normalmente, subentende-mos os conjuntos escolhidos e não carregaremos a notação.

(III) Para as sentenças não atômicas definimos:

III 1: $\mathrm{Val}\,(\ulcorner\neg\,\phi\urcorner\,) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathrm{Val}\,(\,\ulcorner\phi\urcorner\,) = 0 \\ 0 & \text{se } \mathrm{Val}\,(\,\ulcorner\phi\urcorner\,) = 1 \end{cases}$

ou seja $\mathrm{Val}\,(\,\ulcorner\neg\phi\urcorner\,) = \mathrm{Val}\,(\;\phi\;) + 1 \mod 2$

III 2: $\mathrm{Val}\,(\,\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner) = \sup\left\{\,\mathrm{Val}\,(\,\ulcorner\phi\urcorner\,),\ \mathrm{Val}\,(\ulcorner\psi\urcorner)\right\}$

III 3: $\mathrm{Val}\,(\ulcorner\exists_{\alpha}\, v_j\; \phi\;(v_j)\urcorner\,) = \sup\left\{\,\mathrm{Val}\;(\,\ulcorner\phi\;(u)\urcorner\,)\; : \; u\; E\; T_{\alpha}\right\}$

Temos então definida por indução a função Val para tôda sentença limitada $\phi$ .

De posse da função valorização definimos outra, a função denotação indicada por D. O domínio de D é $\bigcup_{\alpha \in \mathbb{OR}_M} T_{\alpha}$ e o con - tradomínio é o universo. Definimos D por indução, supondo-a de- finida para todo têrmo de posto menor que $\alpha$ . Daremos a definição em dois casos:

(1) $t \equiv \underline{m}$ , $\|m\| = \alpha$

então $D^{\cdot} t = D(t) = m$

(2) $t \equiv \nexists_{\alpha} v_i \ \phi(v_i)$ então

$$D^{\cdot} t = D(t) = \{ D^{\cdot} S : S \in T_{\alpha} \wedge \text{Val} \ulcorner \phi(S) = 1 \urcorner \}$$

Para cada têrmo $t \in T = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{OR}_M} T_{\alpha}$ $D^{\cdot} t$ denomina-se - <u>denotação</u> do têrmo $t$.

Como antes, manteremos a dependência da função denotação nos $a_j \subseteq M$ sem notação especial, mas a escolha dos $a_j$ deverá estar clara do contexto.

Indicamos $D^* T_{\alpha} = D(T_{\alpha}) = V_{\alpha}$, e colocamos

$$N = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{OR}_M} V_{\alpha}$$

Vamos desenvolver abaixo algumas propriedades dos $V_{\alpha}$ e de $N$. Inicialmente, é obvio que $M \subseteq N$. É também claro que $T_{\lambda} = \bigcup_{\alpha \in \lambda} T_{\alpha}$ . e portanto $D^* T_{\lambda} = V_{\lambda} = \bigcup_{\alpha \in \lambda} V_{\alpha}$ .

<u>Proposição 1</u> : Os conjuntos acima definidos têm as seguintes propriedades:

(a) $\forall \alpha \ ( V_{\alpha} \in V_{\alpha + 1} )$

(b) $\forall_{\beta} \forall \alpha \ ( \alpha < \beta \longrightarrow V_{\alpha} \subseteq V_{\beta} )$

(c) $\forall \alpha$ ( $V_{\alpha}$ é transitivo )

<u>Demonstração</u>: (a) consideramos o têrmo de <u>abstração</u>

$\not\ni_\alpha v_i\ (v_i = v_i) \equiv t$ pertencente a $T_{\alpha+1}$. É imediato, que $D^* t = D(t) = V_\alpha$ e portanto $V_\alpha \in V_{\alpha+1}$.

(b) É imediato, levando-se em conta que

$$T_\alpha \subseteq T \quad \text{se} \quad \alpha < \beta .$$

(c) Seja $u \in V_\alpha$. Então $u = D^* t = D(t)$ onde $t \in T_\alpha$. Temos dois casos :

(1) $t \equiv \underline{m}$ , $\|m\| < \alpha$

Então se $n \in m = u$ temos $\|n\| < \alpha$ e portanto $\underline{n} \in T_\alpha$. Assim $D^* \underline{n} = n$ está em $V_\alpha$.

(2) $t = \not\ni_\alpha v_i\ \phi(v_i)$

Então $D^* t = \{ D^* s \ : \ s \in T_\alpha \wedge \mathrm{Val}(\ulcorner \phi(s) \urcorner) = 1 \}$

e portanto $u = D^* t \subseteq V_\alpha$.

Isto mostra que $V_\alpha$ é transitivo e encerra a demonstração.

É imediato que N , como união de conjuntos transitivos, é um conjunto transitivo.

Lembramos que os conjuntos $a_j \subset M$, tomados inicialmente em correspondência aos predicados $A_j$ não necessàriamente pertenciam a M . Entretanto, todos $a_j$ pertencem a N, pois temos evidentemente, se o posto de $a_j$ é $\alpha_j$ , $a_j = D \not\ni_{\alpha_j} v_o\ (A_j(v_o))$. Assim, conseguimos com a nossa construção fazer aparecer em N os conjuntos $a_j$.

Daremos a seguir a definição de verdade em $\langle N, \in \rangle = \mathfrak{n}$ A definição é standard e bem conhecida. Procedemos por indução -

sôbre o comprimento das sentenças de $L^M(A_j)$ :

(1) $\eta \models t \in t' \longleftrightarrow D(t) \in D(t')$

(2) $\eta \models t = t' \longleftrightarrow D(t) = D(t')$

onde $t$ e $t'$ são têrmos de $L^M(A_j)$

(3) $\eta \models \neg \phi \longleftrightarrow$ não é verdade que $\eta \models \phi$

(4) $\eta \models \exists_\alpha x \, \phi (x) \longleftrightarrow$ Existe $t \in T_\alpha$

tal que $\eta \qquad \phi (t)$

(5) $\eta \models \exists x \phi ( x )$ Existe $t \in UT_\alpha$

tal que $\eta \models \phi (t)$

(6) $\eta \models \phi \vee \psi \longleftrightarrow \eta \models \phi$ ou $\eta \models \psi$

Assim sendo dada uma sentença $\phi$ de $L^M(A_j)$, podemos - dizer se $\eta \models \phi$ ou não.

Exercício : Demonstrar que se $\phi$ é uma sentença limitada então $\eta \models \phi$ se e sòmente se $\mathrm{Val}(\ulcorner \phi \urcorner) = 1$.

A proposição seguinte nos diz que em $\langle N, \in \rangle = \eta$ valem todos os axiomas de Z.F., excetuando-se substituição e partes. - Para êstes dois últimos imtroduzimos a noção de forcing que definiremos adiante. Note-se que a demonstração da proposição 2, deverá ser feita em ZF.

<u>Proposição 2</u> : Em $\eta = \langle N, \in \rangle$ valem os axiomas da regularidade, extensionalidade, do infinito, e da união.

<u>Demonstração</u> : As demonstrações são tôdas imédiatas e feitas em

Z.F. Observamos apenas que como $\omega \in M \subset N$, temos $\omega \in N$ (axioma do infinito ) e que se $X \in N$ , $X = D^{\cdot} t$ , então $Ux = D\, U\, t$ onde $U\, t$ é o têrmo.

$$U\, t \equiv \not\exists_{\alpha}\, v_o \,(\, \exists\, v_i \,(\, v_o \in t \wedge v_i \in v_o)\,)$$

onde $\alpha = \rho(t)$

Proposição 3 : $\forall_{\alpha}\,(\, T_{\alpha} \in M)$, ou seja para todo ordinal - $\alpha \in \mathbb{OR}_M$ temos $T_{\alpha}$ um conjunto de M.

Demonstração : A demonstração é essencialmente fácil embora tediosa. Seria preciso codificar com a ajuda dos números de Godel definidos anteriormente, o conceito de fórmula, variável livre ou ligada , fórmulas limitadas e têrmos de abstração assim como as regras de formação de todos êstes objetos linguísticos, e mostrar por indução que sempre obtemos conjuntos. O resultados é entretanto intuitivo no sentido que para fazer $T_{\alpha}$ não precisamos ir muito na hierarquia de conjuntos em M, e que estas operações podem ser - descritas em M, já que M é modêlo de Z.F. Omitimos assim a - demonstração.

Desenvolvemos ainda, para finalizar esta secção algumas- propriedades de N, que não dependem do forcing. A demonstração - dessas propriedades de N é feita em Z.F.

Proposição 4 : Para todo ordinal $\alpha$ de M, se t é - um têrmo de $L^M(A_j)$ tal que $\rho(t) = \alpha$ então $\|D(t)\| \leqslant \alpha$ .

Demonstração : Suponhamos que a propriedade seja verdadeira para todo $\beta < \alpha$ . Seja t tal que $\rho(t) = \alpha$

Se $t \equiv \underline{m}$ não há o que demonstrar.

Se $t \equiv \not\exists_{\alpha}\, v_j\, \phi\,(v_j)$ então

$$D(t) = D^{\cdot} t = \{\, D^{\cdot} s \,:\, s \in T_{\alpha} \wedge Val \ulcorner \phi(\, s\,) \urcorner = 1$$

Como se $S \in T_\alpha$ , temos $\rho(S)$ então por indução $D^{\cdot}t \subseteq R$ e portanto $\| D\,t \| \leqslant \alpha$ .

Corolário 1 : $\mathbb{O}\,\mathbb{R}_M = \mathbb{O}\,\mathbb{R}_N$

Demonstração : Temos òbviamente $\mathbb{O}\,\mathbb{R}_M \subseteq \mathbb{O}\,\mathbb{R}_N$ . Seja o primeiro ordinal fora de M . Então $\alpha_0$ também está fora de N, pois caso contrário $\alpha_0$ seria denotação de um têrmo t , tal que $\rho(t) < \alpha_0$ .

Corolario 2 : Para todo $\alpha \in \mathbb{O}\,\mathbb{R}_M$ temos $V_\alpha = D^{*}T_\alpha \subseteq R_\alpha$ .

Demonstração : Imediata.

Para mostrarmos que N é de fato um modelo de Z.F., precisamos da noção de forcing, exposta a seguir.

## § 3 - Forcing

Lembramos que na secção anterior haviamos tomado certos conjuntos, designados por $a_j$ ( $j \in \mathbb{N}$ ) , contidos em M , como interpretação dos predicados $A_j$ . Está claro que, não será para qualquer escolha dos $a_j$ que teremos N modelo de Z.F. Poderíamos ter algum $a_j$ com tipo de ordem $\mathbb{O}\,\mathbb{R}_N$ ou mesmo uma enumeração do próprio M . O método de forcing, desenvolvido por Cohen é feito de tal modo que possamos escolher os $a_j$ de tal modo que N seja modelo de Z.F.

A idéia do forcing é escolher um conjunto Cond de "condições", supondo-se que Cond $\in$ M e que $0 \in$ Cond . As letras "P" , "Q" , etc., serão utilizadas para denotar condições. A idéia intuitiva dessas condições é aquela de que cada condição traz em si uma determinada quantidade de informação sôbre quem devem ser os $a_j$ . Se $P' \supseteq P$ , então P' contém pelo menos tanta informação quanto P . A informação contida nas condições é decodificada -

por uma relação $\Vdash_o$ , entre os elementos de Cond e as sentenças do tipo $A_j(\underline{m})$ ou $\neg A_j(\underline{m})$ com $j \in \mathbb{N}$ e $m \in M$ , relação esta satisfazendo os seguintes requisitos :

(1) $P \Vdash_o \emptyset$ e $P' \supseteq P$ então $P' \Vdash_o \emptyset$

(2) Não acontece que $P \Vdash_o \emptyset$ e $P \Vdash_o \neg\emptyset$

(3) $P \Vdash_o \emptyset$ ou existe $P' \supseteq P$ tal que $P' \Vdash_o \neg\emptyset$

(4) Para cada $P \in$ Cond temos $\sup\{\|m\| : P \Vdash_o A_j(\underline{m})\} \in \mathbb{O}\,\mathbb{R}_M$ para todo $j \in \omega$.

Nos requisitos (1) , (2) e (3) acima $\emptyset$ representa as fórmulas citadas ( $A_j(\underline{m})$ ou $\neg A_j(\underline{m})$ ) enquanto que a relação - $P \Vdash_o \emptyset$ lê-se : P força $\emptyset$. Observamos que (1) e (2) acima são consequências imediatas do fato de interpretarmos uma condição como quantidades de informação ; (3) nos diz que a informação contida nas condições deve ser suficiente para decidir tôdas as sentenças da forma indicada. Assim se nenhuma extensão de P nos força a aceitar $\neg\emptyset$ então P nos força a aceitar $\emptyset$ .

Supomos então que nos seja dada uma relação $\Vdash_o$ como acima e nas condições mencionadas acima. Definimos então, baseados em $\Vdash_o$ a relação de forcing entre fórmulas de $L^M(A_j)$ e elementos de Cond , indicada por $P \Vdash \psi$ ( P força $\psi$ ) . Fazemos primeiramente a definição de $P \Vdash \psi$ para fórmulas limitadas por indução na ordem x de $\emptyset$ :

$\underline{\underline{1}}$ : $P \Vdash \exists_\alpha v_i\, \emptyset(v_i)$ se existir $t \in T$ tal que $P \Vdash \emptyset(t)$ .

$\underline{\underline{2}}$ : $P \Vdash \neg\emptyset$ se para todo $Q \supseteq P$ não é verdade que $Q \Vdash \emptyset$ .

$\underline{\underline{3}}$ : $P \Vdash \emptyset \vee \psi$ se $P \Vdash \emptyset$ ou $P \Vdash \psi$ .

4 : Para as sentenças atômicas devemos dividir a definição em casos:

$\underline{\underline{4a}}$ : $P \Vdash A_j(\underline{m})$ se e sòmente se $P \Vdash_o A_j(\underline{m})$ , $j \in \mathbb{N}$ .

$\underline{\underline{4b}}$ : $P \Vdash A_j(\hat{\exists}_\alpha v_j\, \emptyset(v_j))$ se existir $\underline{m} \subset T_\alpha$ tal que

$P \Vdash \forall_\alpha v_o\,(v_o \in \underline{m} \longrightarrow \emptyset(v_o))$ e $P \Vdash A_j(\underline{m})$

4c : $P \Vdash t \in \not{\dashv}\, v_i\, \emptyset(v_i)$ com $\rho(t) < \alpha$ se $P \Vdash \emptyset(t)$

4d : $P \Vdash t_1 \in t_2$ com $\alpha = \rho(t_1) \geqslant \rho(t_2) = \beta$ se para algum $t \in T_\beta$ tenhamos que

$P \Vdash \forall_\alpha\, v_o\, (v_o \in t \longleftrightarrow v_j \in t_1) \wedge (t \in t_2)$

4e : $P \Vdash t \in \underline{m}$ com $\rho(t) < \rho(\underline{m})$ se existir $n \in m$ tal que $P \Vdash t = \underline{n}$

4f : $P \Vdash t_1 = t_2$ com $\alpha = \max(\rho(t_1), \rho(t_2))$ se $P \Vdash \forall_\alpha\, v_o\, (v_o \in t_1 \longleftrightarrow v_o \in t_2)$

4g : $P \Vdash \underline{n} \in \underline{m}$ ou $P \Vdash \underline{n} = \underline{m}$ se $n \in m$ ou $n = m$, respectivamente.

Definimos agora quando que $P$ força uma sentença ilimitada $\emptyset$, por indução no comprimento de $\emptyset$ :

(1i) $P \Vdash \exists x\, \emptyset(x)$ se para algum $t \in \bigcup T_\alpha = T$ tivermos que $P \Vdash \emptyset(t)$

(2i) $P \Vdash \neg \emptyset$ se para tôda condição $Q \supseteq P$, não é verdade que $Q \Vdash \emptyset$.

(3i) $P \Vdash \emptyset \vee \Psi$ se $P \Vdash \emptyset$ ou $P \Vdash \Psi$

(4i) $P \Vdash t_1 \in t_2$ ou $t_1 = t_2$ se forçá-las como sentenças limitadas.

Está definida, por indução, uma relação $\Vdash$ entre elementos $P \in$ Cond e fórmulas de $L^M(A_j)$.

Exercício : Mostre que

(a) $P \Vdash \emptyset \wedge \Psi$ se e sòmente se $P \Vdash \emptyset$ e $P \Vdash \Psi$

(b) $P \Vdash \emptyset \longleftrightarrow \Psi$ se e sòmente se $P \Vdash \emptyset \longrightarrow \Psi$ e $P \Vdash \Psi \longrightarrow \emptyset$

(c) $P \Vdash \forall x\, \emptyset(x)$ se e sòmente se para todo $t \in T$ e para tôda condição $Q \supseteq P$ não é verdade que $Q \Vdash \neg \emptyset(t)$.

(d) $P \Vdash \emptyset \longrightarrow \Psi$ se e sòmente se $P \Vdash \emptyset$ ou $P \Vdash \neg \Psi$.

Os cinco lemas que seguem são de tôda importância. Carac terizam as principais propriedades do forcing e nos dão sua relação com a noção de verdade em $\mathfrak{N} = \langle N , \in \rangle$ . No que se segue $\emptyset$ - indica uma sentença, limitada ou não.

<u>Lema 1</u> : Para todo $P \in$ Cond e tôda sentença $\emptyset$ , não é verdade que $P \Vdash \emptyset$ e $P \Vdash \neg \emptyset$ .

<u>Demonstração</u> : Temos êste fato para a relação $\Vdash_0$ .Por outro lado se $P \Vdash \neg \emptyset$ então como $P \supseteq P$ não é verdade - que $P \Vdash \emptyset$ .

<u>Lema 2</u> : Se $P \Vdash \emptyset$ e $Q \supseteq P$ então $Q \Vdash \emptyset$ .

<u>Demonstração</u> : Fazemos a demonstração por indução na ordem $\langle \alpha , i , l \rangle$ de sentenças limitadas, primeiramente. Os casos 3 e 4 são inteiramente imediatos por indução. Se $P \Vdash \exists_\alpha v_i \emptyset (v_i)$ então $P \Vdash \emptyset (t)$ para algum $t \in T_\alpha$ e assim sendo $Q \Vdash \emptyset (t)$ e portanto $Q \Vdash \exists_\alpha v_i \emptyset (v_i)$ . Se $P \Vdash \neg B$ então para todo $R \supseteq P$ não é verdade que $R \Vdash \emptyset$ e portanto se $R \supseteq Q \supseteq P$ temos - que para todo $R \supseteq Q$ não verdade que $R \Vdash \emptyset$ e portanto $Q \Vdash \neg \emptyset$. No caso de sentenças ilimitadas temos exatamente a mesma demonstração que nos casos acima, exceto que a indução é feita no comprimento. Isto encerra a demonstração.

<u>Lema 3</u> : Para todo P e tôda $\emptyset$ existe $Q \supseteq P$ tal que Q decide $\emptyset$ ou seja $Q \Vdash \emptyset$ ou $Q \Vdash \neg \emptyset$ .

<u>Demonstração</u> : Ou para tôda $Q \supseteq P$ não é verdade que - $Q \Vdash \emptyset$ ou para alguma $Q \supseteq P$ , $Q \Vdash \emptyset$ . No primeiro caso- $P \Vdash \neg \emptyset$ e no segundo $Q \Vdash \emptyset$ . Isto termina a demonstração.

Uma sequência $P_n$ , $n \in \omega$ , de condições é dita <u>completa</u> se para todo $n \in \omega$ temos $P_n \subseteq P_{n+1}$ e para tôda $\emptyset$ limitada ou não existe $n \in \omega$ tal que $P_n$ <u>decide</u> $\emptyset$ ou seja $P_n \Vdash \emptyset$ ou $P_n \Vdash \neg \emptyset$ .

Lema 4 : Existe uma sequência completa de condições.

Demonstração : Utilizamos aqui a enumerabilidade de M , e enumeramos tôdas as sentenças $\emptyset_n$ de $L^M(A_j)$ . Definimos por indução $P_n$ como qualquer condição tal que $P_n \supseteq P_{n-1}$ e tal que $P_n$ decide $\emptyset$ (lema 3) .

Estamos agora em comdições de definir as interpretações $a_j$ dos predicados $A_j$ . Colocamos :
$a_j = \{ m : \exists n \ ( P_n \Vdash A_j (\underline{m}) ) \}$ onde $P_n$ é uma sequência completa de condições.

Vemos imediatamente que $a_j \subseteq M$ . Devido à condição (4) temos; $\| a_j \| \in M$ , pois :
$\| a_j \| \leqslant \bigcup \{ \| m \| : P \Vdash A_j (\underline{m}) ; P \in \text{Cond} \} \in O\mathbb{R}_M$ , pois M é modelo de Z.F. .

Podemos então definir a função Val e a função D. como foi feito em § 2 . Como antes seja $\langle N , \in \rangle$ , com $N = {}_{\alpha \in O\mathbb{R}(M)}^{U} V_\alpha$ com a definição de verdade em N como foi dada na pag. IV.12. O lema 5 liga a sequência completa de forcing com a verdade em $\eta = \langle N , \in \rangle$ .

Lema 5 : $\eta \models \emptyset$ se e sòmente se para algum $n \in \omega$ , $P_n \Vdash \emptyset$ .

Demonstração : Suponhamos inicialmente que $\emptyset$ é uma sentença limitada e fazemos a demonstração por indução na ordem de $\emptyset$ . Se $\emptyset$ é da forma $\exists_\alpha v_o \ \emptyset (v_o)$ e $P_n \Vdash \exists_\alpha v_o \ \emptyset (v_o)$ então é porque existe $t \in T_\alpha$ tal que $P_n \Vdash \emptyset (t)$ . Então $\eta \models \emptyset (t)$ e portanto $\eta \models \exists_\alpha v_o \ \emptyset (t)$ . A recíproca é análoga. Se $P_n \Vdash \neg \emptyset$ então é porque para nenhuma $Q \geq P_n$ é verdade que $Q \Vdash \emptyset$ . Se $\emptyset$ fôsse verdadeira em $\eta$ então por indução existiria $P_m$ tal que $P_m \Vdash \emptyset$ . Mas então ou $P_n \Vdash \emptyset$ e $P_n \Vdash \neg \emptyset$ ou $P_m \Vdash \emptyset$ e $P_m \Vdash \neg \emptyset$ o que é absurdo. Então não é verdade que $\eta \models \emptyset$ e portanto $\eta \models \neg \emptyset$ . A recíproca é análoga. Os outros casos são deixados como exercício, devendo-se lembrar do exercício à página IV.12. É importante o teorema seguinte que não demonstraremos; a demonstração pode ser encontrada nas referências [4] e [12] dadas na bibliografia.

Teorema : Seja $\mathfrak{M} = \langle M, \in \rangle$ a estrutura relacional que sabemos ser modelo de Z.F. . A relação $\Vdash$ de forcing é $\mathfrak{M}$- definível. Mais do que isto a relação $\Vdash \restriction_{\langle \beta, i, 1 \rangle} = \{ \langle P, \ulcorner \emptyset \urcorner \rangle : P \Vdash \emptyset$ e $\emptyset$ é uma fórmula limitada de rank $\langle \beta, i, 1 \rangle \}$ está em M .

Êste teorema justifica utilizarmos o nome da relação $\Vdash \restriction \langle \beta, i, 1 \rangle$ em fórmulas de $L^M (A_j)$ . No que se segue, não utilizaremos êste símbolo mas simplesmente o símbolo $\Vdash$ . O que estamos fazendo entretanto deverá estar claro do contexto. Observamos ainda que se $\langle \beta, i, 1 \rangle \leqslant \langle \alpha, j, 1' \rangle$ então $\Vdash \restriction \langle \alpha, j, 1' \rangle \restriction \langle \beta, i, 1 \rangle = \Vdash \restriction \langle \beta, i, 1 \rangle$

Estamos prontos agora a mostrar que $\mathfrak{N} = \langle N, \in \rangle$ é modelo de Z.F. . Faltam-nos apenas os axiomas da substituição e partes.

O lema 6, de fácil demonstração caracteriza uma propriedade interessante dos têrmos.

Lema 6 : Seja $t \in T_\alpha$ . Para todo $S \in T$ existe $t' \in T_\alpha$ tal que $S \in t \longleftrightarrow t' = S$

Demonstração : Exercício .

Os lemas que se seguem têm o caracter de lemas de relativização . Fixamos, antes, alguma notação. Seja $\emptyset ( v_1 ,... v_n )$ uma fórmula com n variáveis livres. O símbolo $\emptyset \langle t_1 ,...,t_n \rangle$ indica que substituimos em $\emptyset$ tôda ocorrência da variável $v_j$ por ocorrências de $t_j$ . Fazemos para indicar precisamente que $t_1$, substitui $v_1$, e assim por diante .

Lema 7 : Seja $\exists v_0 \; \emptyset ( v_0 ; v_1 ; .... ; v_n )$ uma fórmula de $L^M (A_j)$ e seja $\langle t_1 , ..., t_n \rangle$ uma n - pla , tal que

$t_1, \dots, t_n \in T_\alpha$ . Então existe $\beta \in OR_M$ tal que

$$\Vdash \exists\, v_0 \phi \langle t_1, \dots, t_n \rangle \longleftrightarrow \exists_\beta v_0 \phi \langle t_1, \dots, t_n \rangle$$

<u>Demonstração</u> : Seja a fórmula

$$\psi ( v_0, v_1, ; \mathrm{Cond} \Vdash , \dots) \equiv v_0 \in \mathrm{Cond} \wedge (\exists \gamma$$

$$( v_0 \Vdash \exists_\gamma v_0 \phi \langle t_1, \dots, t_n \rangle \wedge v_1 = \inf \{ \gamma : v_0 \Vdash$$

$$\exists_\gamma v_0 \phi \langle t_1, \dots t_n \rangle )) \vee (\neg \exists \gamma ( v_0 \Vdash \exists_\gamma v_0 \phi$$

$$\langle t_1, \dots, t_n \rangle \wedge v_1 = 0 ))$$

É óbvio que $\forall v_0 \exists ! v_1 \psi ( v_0, v_1, \dots . )$.

O axioma da substituição em M, nos fornece a partir do conjunto $\mathrm{Cond} \in M$ um conjunto de ordinais (H) . Seja

$\beta \langle t_1, \dots, t_n \rangle = \bigcup$ (H). Então $\beta \langle t_1, \dots, t_n \rangle$ tem a propriedade desejada. Pois se

$\Vdash \exists v_0 \phi \langle t_1, \dots, t_n \rangle$ então para todo $P \in \mathrm{Cond}$

$P \Vdash \exists v_0 \phi \langle t_1, \dots . t_n \rangle$ . Existe portanto o menor $\gamma$ tal que $P \Vdash \exists_\gamma v_0 \phi \langle t_1, \dots, t_n \rangle$ e portanto temos

$\gamma \leqslant \beta$ . Assim sendo nenhum $P \in \mathrm{Cond}$ é tal que

$P \Vdash \neg \exists_\beta \phi \langle t_1, \dots, t_n \rangle$ e então $\Vdash \exists_\beta v_0 \phi \langle t_1, \dots t_n \rangle$

Isto encerra a demonstração.

<u>Exercício</u> : Mostre que se $m \in M$ então

$\bigcup_{n \in \omega} m^n \in M$ onde $m^n = \underbrace{m \;\ldots\ldots\; m}_{n \text{ x}}$

Lema 8 : Seja $\exists v_0 \; \phi \, (v_0, v_1, \ldots, v_n)$ uma fórmula de $L^M(A_j)$ com n variáveis livres. Para todo $\alpha \in \mathrm{OR}_M$ existe $\gamma \in \mathrm{OR}_M$ tal que

$$\Vdash \exists v_0 \phi \langle t_1, \ldots, t_n \rangle \leftrightarrow \exists_\gamma v_0 \phi \langle t_1 \ldots \quad \rangle$$

para tôda $\langle t_1 \ldots t_n \rangle \in \bigcup_{n \in \omega} T^n_\alpha$ .

Demonstração : Para cada $\langle t_1 \ldots, t_n \rangle \in \bigcup_{n \in \omega} T^n_\alpha$

temos um ordinal, dado pelo lema 6, indicado por $\rho \langle t_1 \ldots t_n \rangle$

Consideremos a fórmula

$$(v_0, v_1 ; \bigcup_{n \in \omega} T^n_\alpha ) \equiv v_0 \in \bigcup_{n \in \omega} T^n_\alpha \wedge v_1 = \beta (v_0)$$

O axioma da substituição em M, aplicado a $\bigcup_{n \in \omega} T^n_\alpha$ nos dá um conjunto $\Gamma$ de ordinais. Seja $\sigma = \bigcup \Gamma$ ; $\sigma$ tem a propriedade desejada. A demonstração é exercício e segue os mesmos moldes da do lema 7.

O corolário seguinte é imediato por culpa do lema 5 :

Corolário : Seja $\exists v_0 \; \phi \; ( v_0, v_1, \ldots, v_n)$ uma fór-

mula de $L^M(A_j)$ com n variáveis livres. Para todo $\alpha \in \mathrm{O}\,\mathbb{R}_M$ existe $\sigma \in \mathrm{O}\,\mathbb{R}_M$ tal que
$\mathfrak{M} \models \exists v_0\, \phi \langle t_1, \dots, t_n \rangle \longleftrightarrow \exists_\sigma v_0\ \phi \langle t_1, \dots, t_n \rangle$ para tôda $\langle t_1, \dots, t_n \rangle \in \bigcup_{n \in \omega} T^n_\alpha$ .

Lema 9 : Seja $\phi(v_1, \dots, v_n)$ uma fórmula de $L^M(A_j)$ com n variáveis livres. Para todo $\alpha \in \mathrm{O}\,\mathbb{R}_M$ existe uma fórmula $\phi_\alpha$ , limitada, tal que $\Vdash \phi \langle t_1, \dots, t_n \rangle \longleftrightarrow \phi \langle t_1, \dots, t_n \rangle$ para tôda $\langle t_1, \dots, t_n \rangle \in \bigcup_{n \in \omega} T^n_\alpha$ .

Demonstração : Exercício. Dever-se-á fazê-la por indução sôbre o comprimento da fórmula $\phi$ .

Chegamos agora ao axioma da substituição:

Teorema 1 : O axioma da substituição vale em $\mathfrak{M} = \langle N, C \rangle$

Demonstração : Suponhamos que
$\mathfrak{M} \models \forall v_0\ \exists ! v_1\ \phi(v_0, v_1 ; t_k)$ onde $\phi$ é uma fórmula de $L^M(A_j)$ com pelo menos duas variáveis livres. Os têrmos $t_k$ como já vimos fazem o papel de parâmetros. Devemos mostrar que
$\mathfrak{M} \models \forall v_0\ \exists v_1\ \forall v_2\ (v_2 \in v_1 \leftrightarrow \exists v_3\ (v_3 \in v_0 \wedge$
$\phi(v_3, v_2 ; t_k)))$ .

Seja então $a \in N$ ; temos $a = Dt$ com $t \in T_\alpha$ . Pelo lema 8 sabemos que para $\beta$ existe $\sigma$ tal que
$\Vdash \exists v_0\ \phi(t', v_0 ; t_k) \longleftrightarrow \exists_\sigma v_0\ \phi(t', v_0 ; t_k)$
onde $t', t_1, \dots, t_n \in T_\beta$ e $t' \in T_\alpha$ . Seja o têrmo $u \equiv \hat{\aleph}_{\sigma+1} v_1 (\exists_\alpha v_0 (v_0 \in t \wedge \phi(v_0, v_1 ; t_k)))$ . Vamos mostrar que $D'u$ é o conjunto que procurávamos. Suponhamos que $\mathfrak{M} \models S \in u$ . Então $D's \in D'u$ e portanto existe $s' \in T$ tal que $\mathrm{Val} \ulcorner s' \in t \wedge \phi(s', s ; t_k) \urcorner = 1$ e portanto
$\mathfrak{M} \models \exists v_0\ (v_0 \in t \wedge \phi(v_0, s ; t_k))$ donde obtemos
$\mathfrak{M} \models v_0\ (v_0 \in t \wedge \phi(v_0, s ; t_k))$ . Por outro lado, suponhamos que

$\models \exists v_0 \ ( v_0 \in t \wedge \phi ( v_0 , s ; t_k ) )$ . Então existe $s' \in T$ tal que $\models s' \in t \wedge \phi ( s' , s ; t_k )$ . Pelo lema 6 existe $t'' \in T_\alpha$ tal que

$\models t'' \in t \wedge \phi ( t'' , s ; t_k )$ pois por hipótese $\phi$ é funcional. Assim sendo

$\models \exists_\alpha v_0 \ ( v_0 \in t \wedge \phi ( v_0 , s ; t_k ) )$ e portanto $\models s \in u$ ( pois $D^{\bullet} s \in D^{\bullet} u$ ) . Isto encerra a demonstração.

Falta-nos agora o axioma do conjunto das partes. Definimos, antes de atacar pròpriamente a demonstração do teorema, alguma notação. Sejam $t$ e $t'$ têrmos de $L^M (A_j)$ . Indicamos por

$t \cap t' \equiv \rtimes_\alpha v_j \ ( v_j \in t \wedge v_j \in t' )$ onde

$\alpha = \inf \ \{ \rho(t) , \rho(t') \}$ .

<u>Exercício</u> : Mostre que $D^{\bullet}( t \cap t' ) = D^{\bullet} t \cap D^{\bullet} t'$

<u>Lema 10</u> : Para todo $\alpha \in \mathbb{O}\mathbb{R}_M$ existe $\beta \in \mathbb{O}\mathbb{R}_M$ tal que para todo $t \in T$ existe $t' \in T$ tal que

$\Vdash t \cap \tau_\alpha = t'$ onde $\tau_\alpha = \rtimes_{\alpha+1} v_0 \ ( v_0 = v_0 )$ .

<u>Demonstração</u> : Para cada $t \subset T$ definimos

$t = \{ \langle P , s \rangle : s \in T_\alpha \wedge P \Vdash s \in t \}$

Observamos que para cada $t$ , $\eta_t \in M$ . Provamos inicialmente que $\eta_t = \eta_{t'} \longrightarrow \ \Vdash t \cap \tau_\alpha = t' \cap \tau_\alpha$ .

Seja $P \in$ Cond . Devemos mostrar que

$P \Vdash \forall_\alpha v_0 \ ( v_0 \in t \cap \tau_\alpha \longleftrightarrow v_0 \in t' \cap \tau_\alpha )$

Seja então $t'' \in T_\alpha$ . Se $P \Vdash t'' \in t \cap \tau_\alpha$ então $\langle P , t'' \rangle \in \eta_t$ . Assim sendo $\langle P , t'' \rangle \in \eta_{t'}$ e portanto $P \Vdash t'' \in t' \cap \tau_\alpha$ . A recíproca é análoga. Como todo $P \in$ Cond é tal que $P \Vdash t \cap \tau_\alpha = t' \cap \tau_\alpha$ temos que

$\Vdash t \cap \mathcal{G}_\alpha = t' \cap \mathcal{G}_\alpha$ . Muito embora $\top$ não seja um conjunto em M , $\eta^* T$ é um conjunto em M e temos $\eta^* T \subseteq P_M ( P_M ( \mathrm{Cond} \times T_\alpha ) )$ . Em M , podemos separar $\eta^* T$ de $P_M ( P_M ( \mathrm{Cond} \times T_\alpha ) )$ por uma fórmula escrita na linguagem $L^M (A_j)$ . Tendo $\eta^* T \in M$ consideremos a fórmula : $\Psi ( v_0 , v_1 ; \eta^* T ) \equiv v_0 \in \eta^* T \wedge$

$$\Big[ \exists \gamma \exists v_2 ( v_2 \in T_\gamma \wedge \eta_{v_2} = v_0 \wedge v_1 = \inf \{ \gamma : \exists v_2 ( v_2 \in T_\gamma \wedge \eta_{v_2} = v_0 ) \} ) \vee \neg \exists \gamma \exists v_2 ( v_2 \in T_\gamma \wedge \eta_{v_2} = v_0 \wedge v_1 = 0 ) \Big]$$

Está claro que $\forall v_0 \exists ! v_1 \Psi ( v_0 , v_1 ; \eta^* T )$ . Substituindo-se ( em M ) com a fórmula $\Psi$ no conjunto $\eta^* T$ obtemos um conjunto de ordinais (H) . Seja $\beta \in \mathrm{OR}_M$ tal que $\beta > \sup \{ \alpha , \cup (H) \}$ . Êste ordinal $\beta$ é aquêle que procurávamos. De fato, dada $P \in \mathrm{Cond}$ e $t \in T$ devemos mostrar que existe $t' \in T_\beta$ tal que $P \Vdash t \cap \mathcal{G}_\alpha = t'$ ou seja $P \Vdash \forall v_0 ( v_0 \in t \cap \mathcal{G}_\alpha \longleftrightarrow v_0 \in t' )$ .

Pela construção do ordinal $\beta$ , existe $S \in T_\gamma$ , com $\gamma < \beta$ tal que $\eta_t = \eta_S$ . Assim sendo, como vimos $\Vdash \forall v_0 ( v_0 \in t \cap \mathcal{G}_\alpha \longleftrightarrow v_0 \in S \cap \mathcal{G}_\alpha )$. Seja $t' = S \cap \mathcal{G}_\alpha$ ; então $\rho ( t' ) < \beta$ e portanto $t' \in T$ . Temos ainda que

$$\Vdash \forall v_0 ( v_0 \in t \cap \mathcal{G}_\alpha \longleftrightarrow v_0 \in t' )$$ e

então $\Vdash t \cap \mathcal{G}_\alpha = t'$ .

<u>Lema 11</u> : Para todo $\alpha \in \mathrm{OR}_M$ , existe $\beta \in \mathrm{OR}_M$ tal que $\eta \models P_N V_\alpha \subseteq V_\beta$ .

<u>Demonstração</u> : Seja $z \subseteq V_\alpha$ , $z \in N$ . Então existe $t \in T$ tal que $D^\bullet t = z$ . Temos então que $D^\bullet t \cap \mathcal{G}_\alpha = D^\bullet t \cap D^\bullet \mathcal{G}_\alpha = z$ . Seja $\beta$ como no

lema 10 . Então existe $t' \in T$ tal que $\Vdash t \cap \mathfrak{Z}_\alpha = t'$. Assim sendo tôda $P \Vdash t \wedge \mathfrak{Z}_\alpha = t'$ e portanto, pelo lema 5 teremos $\eta \models t \wedge \mathfrak{Z}_\alpha = t'$. Assim sendo, como $t' \in T_\beta$, $D^\bullet t' = z$ está em $V_\beta$, e portanto $\eta \models P_N\, V_\alpha \subseteq V_\beta$.

<u>Teorema 2</u> : O axioma do conjunto das partes vale em $\langle N , \in \rangle = \eta$.

<u>Demonstração</u> : Seja $x \in N$. Então $x \in V_\alpha$ para algum $\alpha \in \mathbb{O}\, R_M$. Então $P_N\, x \subseteq P_N\, V_\alpha$ pois $V_\alpha$ é transitivo. Sabemos existir $\beta \in \mathbb{O}\, R_M$ tal que $\eta \models P_N\, V_\alpha \subseteq \beta$ e portanto em $N$ é verdade que $P_N\, x \subseteq V_\beta$. Assim sendo $P_N\, x = \{ z : z \subseteq x \wedge z \in V_\beta \}$ e portanto $P_N\, x \in N$, ou seja $P_N\, x = D^\bullet \not\Vdash_\beta v_0 \, (\forall\, v_1 (v_1 \in v_0 \longrightarrow v_1 \in x))$
Isto encerra a demonstração.

Com o teorema 2 completa-se a demonstração do fato que $\eta = \langle N , \in \rangle$ é um modelo de Z.F. O restante desta secção é dedicado ao axioma da escolha. Os fatos importantes não resumidos no :

<u>Teorema 3</u> : Seja $\langle M , \in \rangle = \mathfrak{m}$ um modelo standard-transitivo e enumerável de Z.F. + A.E. . Então, se o número de predicados $A_j$ que introduzirmos na construção de $\langle N , \in \rangle = \eta$, for finito, $\eta$ é modelo de Z.F. + A.E.

<u>Demonstração</u> : Que $\eta$ é modêlo de Z.F. independe do número de predicados ser finito ou infinito . O fato crucial, no caso em que o número de predicados $A_j$ é finito, é que, podemos escrever uma fórmula finita que nos diz que a função denotação restrita a qualquer $T_\alpha$ está em N.

Isto porque, como já vimos, as interpretações dos $A_j$ são em número finito e estão em N. Assim neste caso temos $D \restriction T_\alpha \in N$ para todo $\alpha \in OR_M$. Como em M vale o axioma da escolha, podemos bem ordenar qualquer conjunto em M. Seja $x = D' t$, um conjunto em N e suponhamos que $t \in T_\alpha$. Bem ordenamos $T_\alpha \in M$ com uma boa ordem $\Gamma$ e definimos para cada $y \in x$ um têrmo $t_y$, que é o menor têrmo, na ordem $\Gamma$, tal que $D' t_y = y$. Seja

$X = \{ t_y : y \in x$ . É obvio que X é bem ordenado. Colocamos uma boa ordem em x fazendo

$$z R y \longleftrightarrow t_z \Gamma t_y$$

A boa ordem R está em N, pois

$D \restriction T_\alpha \in N$. De fato

$$R = \{ \langle z,y \rangle : \langle z,y \rangle \in x \times x \wedge \exists v_0 \exists v_1$$

$$( \langle v_0,v_1 \rangle \in \Gamma \restriction_x \wedge D' v_0 = z \wedge D' v_1 = y )\}$$

Assim todo conjunto em N pode ser bem ordenado e portanto em N vale o axioma da escolha.

Na secção seguinte faremos então a demonstração da consistência de $2^{\aleph} = \aleph_1$ com Z.F. + A.E.

## § 4 : A Consistência da Hipótese do Contínuo

Seja $\mathfrak{M} = \langle M, \in \rangle$ um modêlo standard, transitivo e enumerável de Z.F. e do axioma da escolha. Consideremos uma letra de predicado, F, unário e construimos a linguagem $L^M(F)$. Escolhemos então em M um conjunto , o das condições, indicado por Cond, como anteriormente. O conjunto Cond será o conjunto de tôdas as funções injetoras de algum $\alpha \in \aleph_1^M$ em $\mathbb{R}^M$. Sabemos que $\mathbb{R}^M$ ( o conjunto dos reais do modêlo $\mathfrak{M}$ ) pode ser identificado com $(\aleph_0)^M$ em M. Assim uma condição é uma função injetora

$P : \alpha \in \aleph_1^M \longrightarrow \mathbb{R}^M$ . Está claro que tomamos Cond $\in$ M.

Definimos então a relação $\Vdash_0$ entre elementos de Cond e fórmulas do tipo F ($\underline{m}$) da maneira seguinte:

$$P \Vdash_0 F(\underline{m}) \longleftrightarrow m \text{ é um par ordenado e } m \in P .$$

O leitor poderá verificar que tôdas as condições da pag. IV.15 estão satisfeitas. Como foi feito em § 3, estendemos $\Vdash_0$ a uma relação de forcing, $\Vdash$ , entre os elementos de Cond e fórmulas de $L^M(F)$. Feito isto, escolhemos uma sequência completa $\{ P_n \}$ e definimos :

$$f = \{ m : \exists n ( P_n \Vdash F(\underline{m}) ) \}$$

Como sabemos, $\| f \| \in \mathrm{OR}_M$ . Construimos então a função denotação e partir disso o modêlo $\mathfrak{N} = \langle N, \in \rangle$ . Temos também que $f \in N$ e devido ao teorema 3 da última secção, o axioma da escolha, vale em $\mathfrak{N} = \langle N, \in \rangle$ .

Os lemas 1 e 2, abaixo, tem a finalidade de mostrar que, não existe nenhum real em N, que já não estivesse em M, isto é, que com a nossa construção não introduzimos nenhum novo subconjunto de $\omega$ .

<u>Lema 1</u> : Para tôda condição P e para todo $r \in \mathbb{R}^N$ , <u>e</u>

xiste $Q \in$ Cond tal que $Q \supseteq P$ e $Q \Vdash r \in \mathbb{R}^M$.

Demonstração : O fato crucial na demonstração é que, a união enumerável de condições $P_n^*$, tais que, $P_{n+1} \supset P_n$, é uma condição. Seja $\alpha \in \mathbb{R}^N$. Então $\alpha = D^{\cdot} t$, onde podemos considerar que $t = t \cap \underline{\omega}$ - pois $\alpha$ é um real. Seja ainda $P \in$ Cond. Utilizamos o axioma da escolha em M, para construir por indução uma sequência

$s = \langle n, Q_n \rangle \in M$, de condições, da forma seguinte:

1) Tomamos $Q_o \supset P$ tal que $Q_o$ decide $0 \in t$.

2) Tendo escolhido $Q_n$ tomamos $Q_{n+1} \supset Q_n$ tal que $Q_{n+1}$ decide $n + 1 \in t$.

Seja K a imagem de $s$. Tomemos

$$b = \{ k : \exists n ( n \in \omega \wedge Q_n \Vdash k \in t ) \}$$

Obviamente $b \in M$. Seja ainda $Q = \cup K$, que pela observação feita - no início pertence a Cond ( lembrar que $c f \aleph_1^M = \aleph_1^M$ ) . Está - claro que $Q \supseteq P$. Mostremos que $Q \Vdash t = \underline{b}$. De fato, suponhamos que $Q \Vdash k \in t$ ; então para algum $n \in \omega$, $Q_n \Vdash k \in t$ e portanto $Q \Vdash k \in b$. A recíproca é trivial. Então como $b \in M$ e $Q \Vdash t = \underline{b}$ temos que $Q \Vdash t \in \mathbb{R}^M$ e portanto a demonstração está terminada.

O leitor deverá notar que a domonstração feita acima poderia ser inteiramente codificada em $L^M(F)$ . Não frizaremos isto nesta secção, preferindo nos manter informais.

<u>Lema 2</u> : $\eta \models \mathbb{R}^M = \mathbb{R}^N$

<u>Demonstração</u> : Existe $P_n$ na sequência completa tal que $P_n$ decide $\mathbb{R}^M = \mathbb{R}^N$ . Se $P_n \Vdash \neg ( \mathbb{R}^M = \mathbb{R}^N )$ então existiria $r \in \mathbb{R}^N$ tal que $P_n \Vdash \neg ( r \subset \mathbb{R}^M )$ . Pelo lema 1 sabemos existir $Q \supseteq P_n$

* Supomos, evidentemente, que a sequência $P_n$ está em M .

tal $Q \Vdash r \in \mathbb{R}^M$ . Então $Q \Vdash \ulcorner \in \mathbb{R}^M$ e $Q \Vdash \neg ( r \in \mathbb{R}^M)$ o que é absurdo. Então $P_n \Vdash \mathbb{R}^M = \mathbb{R}^N$ , e dado o lema 5 da § 3, $\eta \models \mathbb{R}^M = \mathbb{R}^N$

Lema 3 : Seja $w \in M$. Então se $g : w \longrightarrow \alpha$ é uma função tal que $g \in N$, então $g \in M$, onde $\alpha$ é um ordinal de N .

Demonstração : Se g é uma função em N então existe $P_n$ tal que

$P_n \Vdash$ ( g é função e dom $g = w$ e Im $g \subseteq \alpha \subseteq M$ ).
Observamos aqui que se $\alpha \in \mathbb{OR}_N$ então $\alpha \in \mathbb{OR}_M$ , como já vimos. Seja $P^1$ , uma condição mais forte que $P_n$, e utilizamos o axioma da escolha em M para produzir uma se uência $P_2$ , $\in$ , por indução da maneira seguinte :

(1) $P_o = P'$

(2) $P_{\nu+1} \supset P_\nu$ e é tal que existe $x \in M$
$P_{\nu+1} \Vdash g(\nu) = x$

(3) $P_w = \bigcup_{\nu \in w} P_\nu$ . Temos que $P_w$ é uma condição.

Então se definimos

$$G = \{ \langle \nu , x \rangle : P_w \Vdash g(\nu) = x \}$$

temos prontamente, por substituição em M que $G \in M$ e como $P_w \Vdash G = g$ temos que $P_w \Vdash g \in M$. Mas então não é verdade que $P' \Vdash g \notin M$ e como $P'$ é arbitrário temos que $P_n \Vdash g \in M$ . Então $\eta \models g \in M$.

Corolario 1 : Se um ordinal $\alpha$ é enumerável em N então

$\alpha$ é enumerável em M .

Demonstração : Se $\mathfrak{M} \models \alpha \approx \omega$ então a função que faz a bijeção está em M, pelo lema 3, e portanto $\alpha$ é enumerável em M.

Corolário 2 : $\aleph_1^M = \aleph_1^N$

Demonstração : Observamos apenas que $\aleph_1$ é o conjunto de todos ordinais enumeráveis, e usamos o corolário 1.

Estamos prontos agora a verificar que f é uma função injetora ( em N ) de $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^M$ e $\aleph_1^N = \aleph_1^M$ . Observamos que se isto fôr demonstrado teremos $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ em N , já que , é o menor ordinal que tem mesma cardinalidade que $\mathbb{R}$ .

Lema 4 : $\mathfrak{M} \models f$ é função injetora.

Demonstração : É óbvio que se $m \in f$ , m é um par ordenado. Dividimos a demonstração em duas partes, uma para mostrar que f é função, a outra para a injetividade.

(1) Existe $P_n$ na sequência completa tal que $P_n$ decide " f é função ". Se $P_n \Vdash \neg$ ( f é função ) então existiriam pares $\langle \alpha , r_1 \rangle$ , $\langle \alpha , r_2 \rangle$ , tal que $P_n \Vdash F ( \langle \alpha , r_1 \rangle )$ e $P_n \Vdash F ( \langle \alpha , r_2 \rangle )$ com $r_1 \neq r_2$ . Mas então, pela definide $\Vdash_0$ e do conjunto das condições, $\langle \alpha , r_1 \rangle \in P_n$ e $\langle \alpha , r_2 \rangle \in P_n$ , o que não pode acontecer. Então $P_n \Vdash f$ é função e portanto $\mathfrak{M} \models f$ é função.

(2) A demonstração que f é injetora é inteiramente análo

ga a feita acima e é deixada para o leitor.

<u>Lema 5</u> : $\eta \models \mathrm{dom}\ f = \beth_1^M = \beth_1^N$

<u>Demonstração</u> : Tomamos $P_n$ na sequência completa tal que $P_n$ decide $\mathrm{dom}\ f = \beth_1^M$. Se $P_n \Vdash \neg\ (\mathrm{dom}\ f = \beth_1^M)$ então existe $\alpha \in \beth_1^M$ tal que $P_n \Vdash \alpha \notin \mathrm{dom}\ f$. Seja $\beta$ o menor ordinal com esta propriedade, ou seja, $\beta = \inf \{ \alpha : P_n \Vdash \alpha \notin \mathrm{dom}\ f \}$ Então $\mathrm{dom}\ P_n = \beta$ e $P_n \Vdash \mathrm{dom}\ f = \beta$ . Seja $r \in \mathbb{R}^M$, tal - que $r \notin I_m P_n$. Êste real deve existir pois, em N , $\mathbb{R}^M$ não é enumerável ( utilizamos, A E ). Consideremos então

$P = P_n \cup \{ \langle \beta, \ \rangle \}$ Como $\mathrm{dom}\ P_n = \beta$ , $P \in \mathrm{Cond}$ e evidentemente $P \geq P_n$ . Observamos também que P não pode forçar que $\mathrm{dom}\ f = \beta$ , já que $P \geq P_n$ e P não pode forçar $\mathrm{dom}\ f = \beta$ . Isto sendo um absurdo, temos que $P_n \Vdash \mathrm{dom}\ f = \beth_1^M$ e portanto

$\eta \models \mathrm{dom}\ f = \beth_1^M$ .

<u>Lema 6</u> : $\eta \models \mathrm{Im}\ f = \mathbb{R}^M = \mathbb{R}^N$

<u>Demonstração</u> : Tomamos $P_n$ na sequência completa tal que $P_n$ decide $\mathrm{Im}\ f = \mathbb{R}^M$ . Suponha que $P_n \Vdash \neg( \mathrm{Im}\ f = \mathbb{R}^M)$. Então é porque existe $r \in \mathbb{R}^M$ tal que $P_n \Vdash \forall\ v_0 (v_0 \in \beth_1 \longrightarrow \langle v_0 , r \rangle \notin f )$

Como $P_n \in \mathrm{Cond}$, existe $\alpha \in \beth_1^M$ tal que $\mathrm{dom}\ P_n = \alpha$ . Consideremos $P = P_n \cup \{ \langle \alpha , r \rangle \}$ . Então $P \in \mathrm{Cond}$ e $P \geq P_n$ .

Observamos também que

$$P \Vdash \exists v_0 (v_0 \in \aleph_1^M \wedge \langle v_0, \ulcorner \rangle \in f)$$

e como $P \supseteq P_n$, isto é absurdo. Então $P_n \Vdash \mathrm{Im} f = \mathbb{R}^M$ e portanto $\mathfrak{N} \models \mathrm{Im}\ f = \mathbb{R}^M$.

Os lemas anteriores nos fornecem então :

<u>Teorema 1</u> : Em $\mathfrak{N} = \langle N, E \rangle$ vale a hipótese do contínuo.

<u>Demonstração</u> : Temos com os lemas 1, 2, 3,4 e 5 uma função bijetora de $\mathbb{R}^N$ em $\aleph_1^N$. Como $\mathbb{R}^N \approx (2^{\aleph_0})^N$ então $\aleph_1^N \approx (2^{\aleph_0})^N$. Como $(2^{\aleph_0})^M$ é um cardinal ( e portanto um aleph já que A.E. vale em $\langle N, \in \rangle$ ) temos $\aleph_1^N = (2^{\aleph_0})^N$ em N.

Provamos então o seguinte

<u>Teorema 2</u> : Se existir um modêlo $\mathfrak{M} = \langle M, E \rangle$ standard transitivo e enumerável de Z.F. + A.E., então existe um modêlo $\mathfrak{N} = \langle N, E \rangle$ de Z.F. + A.E. + H.C.

Havíamos prometido um resultade de consistência relativa, ou seja que $[\text{Cons Z.F.} \longrightarrow \text{Cons (Z.F. + A.E. + H.C.)}]$

Em 1939 Godel provou que

$$[\text{Cons Z.F.} \longrightarrow \text{Cons (Z.F. + A.E.)}]$$

e portanto se conseguíssemos provar que

$$[\text{Cons (Z.F. + A.E.} \longrightarrow \text{Cons (Z.F. + A.E. + H.C.)}]$$

teríamos mantido a palavra. Acontece que não é verdade que

$[(\text{Cons (Z.F. + A.E.)} \longrightarrow \exists M$ ( M é modêlo standard e transitivo de Z.F. + A.E. ) e portanto nossa demonstração parece deixar algo a desejar. Na realidade, para verificarmos

Cons ( Z.F. + A.E, + H.C. ) devemos verificar que todo conjunto finito de axiomas é consistente. No nosso caso, devido ao axioma da substituição temos um número infinito de axiomas. Entretanto, se tivermos um número finito $A_1, A_2, \dots, A_n$ de axiomas o teorema 5 da secção 2 do capítulo 3 nos garante que existe um modêlo M enumerável standard e transitivo para $A_1, \dots A_n$. Assim sendo tomamos êste M para fazermos a nossa construção. O que fizemos mostra que se um conjunto finito de axiomas de Z.F. + A.E. fôr consistente então êste conjunto finito de axiomas mais H.C. é consistente. Portanto, de fato mostramos que

$$\left[\text{Cons } Z.F. + A.E. \longrightarrow \text{Cons } Z.F. + A.E. + H.C.\right]$$

e portanto que se Z.F. é consistente, Z.F. + H.C. + A.E. é consistente.

## APÊNDICE

### Equivalentes do A.E.

Vamos aqui apresentar alguns enunciados equivalentes ao axioma da escolha. Apresentamos apenas os enunciados mais usuais.

1 - Axioma da Escolha :

(a) $\forall x(x \neq 0 \wedge \forall y(y \in x \longrightarrow y \neq 0) \wedge \forall y \forall z(z, y \in x \wedge z \neq y$

$\longrightarrow z \cap y = 0) \longrightarrow \exists a \forall u(u \in x \longrightarrow \exists v(a \cap u = \{v\}))).$

ou

(b) $\forall f(f \in {}^{\mathrm{dom}\, f}V \wedge \forall x(x \in \mathrm{dom}\, f \longrightarrow x \neq 0)$

$\longrightarrow \exists g(g \in {}^{\mathrm{dom}\, f}V \wedge \forall u(g`u \in u))).$

ou

(c) $\forall x(x \neq 0 \wedge \forall y(y \in x \longrightarrow y \neq 0) \wedge \forall y \forall z(z,y \in x \wedge z \neq y$

$\longrightarrow z \cap y = 0 \longrightarrow \exists f(f \in {}^{x}V \wedge \forall u(u \in x \longrightarrow f`u \in u))).$

ou

(d) $\forall x(x \neq 0 \wedge \forall y(y \in x \longrightarrow y \neq 0) \longrightarrow \exists f(f \in {}^{x}V \wedge \forall y$

$(y \in x \longrightarrow f`y \in y))..$

É fácil ver que (a), (b), (c) e (d) são equivalentes. Por exemplo :

1 - (c) $\longleftrightarrow$ (d) : a) (d) $\longrightarrow$ (c) - óbvio

b) (c) $\longrightarrow$ (d) - seja $x \neq 0$ e tal que se $y \in x$ então $y \neq 0$. Formemos o conjunto

$X = \{ \{y\} \times y : y \in x \} \subset Px \times x$. Então se $z$ e $z'$ estão em $X$ e $z \neq z'$ temos òbviamente $z \cap z' = 0$. Então existe já que $X \neq 0$, uma função $f$ definida em $x$ tal que

$$f`\{y\} \times y \in \{y\} \times y, \quad \text{ou}$$

seja $f\{y\} \times y = \langle y,z \rangle \in \{y\} \times y$ e $z \in y$.

Seja $g$ definida em $x$ tal que $g`y = z$ ( tal que $f`\{y\} \times y = \langle y,z \rangle$ ). Então $g$ é a função que procurávamos.

Podemos, anàlogamente, demonstrar que todas as formas dadas são equivalentes.

2 - Axioma da Comparabilidade :

$$\forall x \; \forall y \; \exists f ( f \text{ é injetora } \wedge (f \in {}^{x}y \; \vee \; f \in {}^{y}x)).$$

Êste axioma nos diz que dados dois conjuntos existe uma função injetora de um para o outro ou vice-versa. Podíamos enunciá-lo também da forma seguinte :

$$\forall x \; \forall y \; ( x \lesssim y \; \vee \; y \lesssim x)$$

3 - Axioma da Boa Ordem

$$\forall x \; ( Bo(x) \neq 0)$$

Êste enunciado nos diz que todo conjunto $x$ possui uma boa ordem sôbre êle.

4 - Lema de Zorn

Seja $V$ um conjunto parcialmente ordenado, Então existe uma cadeia maximal contida em $V$.

Estas são as formas mais usuais dos equivalentes do axioma da escolha. Referências para as demonstrações estão na bibliografia.

# B I B L I O G R A F I A

Daremos a bibliografia, citando livros e artigos pertinentes a cada capítulo.

## Capítulo 1

Excelente introdução a cálculos de predicados de 1ª ordem, podem ser encontrados em


(1) S.C. Kleene : Mathematical Logic
J. Wiley and Sons ( )

(2) W.S. Hatcher : Foundations of Mathematics
W.B. Sounders Co. (1968)


Mais resumidas, mas nem por isso menos atraentes, são as apresentações de :


(3) J.L. Bell, A.B. Slomson : Models and Ultraproducts
North-Holland Publ Co. (1969)

(4) P.J. Cohen : Set Theory and the Continuum Hipothesis
W.A. Benjamin Inc. (1966)


## Capítulo 2

Excelente referência para êste capítulo são (2) e (4) acima. Podemos citar também


(5) K. Kuratowski, A. Mostowski : Set Theory
North-Holland Publ. Co. ( )

Não tratamos da teoria de conjuntos de Godel-Bernays, mas além de (2) uma referência é

(6) K. Godel : The Consistency of the Axiom of Choice and the Continuum Hipothesis

4ª edição, Princeton (1958)

Para o leitor preocupado com aspectos filosóficos da teoria dos conjuntos nos parece muito acessível a expressão feita em

(7) A.A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel : Foundations of Set Theory

North-Holland Publ. Co. (1958)

Há ainda um número de livros introdutórios de bom nível. Destacamos dois :

(8) P. Suppes : Axiomatic Set Theory

Van Nostrand (1960)

(9) E. Mendelson : Introduction to Mathematical Logic

Van Nostrand (1964)

Capítulo 3

As referências (3) e (4) acima são de principal valia já que os teoremas que enunciamos estão lá demonstrados. Foi útil também

(10) A. Robinson : Introduction to Model Theory and to the Methamathematics of Algebra

North-Holland Publ. Co. (1963)

## Capítulo 4

A fonte básica para o forcing é (4). Um número de outros trabalhos também são úteis. Uma linguagem ramificada como a que utilizamos pode ser encontrada em :

(11) A. Levy : Definability in Axiomatic Set Theory - I

Procedings of the 1964 International congress on Logic, Methodology and Philosophy of Science.

Editado por Y.Bar-Hillel.
North-Holland Publ. Co. (1965)

Excelente exposição dos métodos de Cohen e dos construtíveis de Godel está em :

(12) R.B. Jensen : Concrete Models of Set Theory - em Sets, Models and Recursion Theory editado por J.N. Crossley
North-Holland Publ. Co. (1967)

Para aqueles pouco familiarizados com Godelização, (2) é excelente companhia, especialmente o capítulo 6.