

**Estabilización de la Solución por Elementos  
Finitos de Problemas de Flujo Incompresible  
con Rotación, Turbulencia, Superficie  
Libre y Temperatura**

**O.A. Soto Camargo  
R. Codina**

**Estabilización de la Solución por Elementos  
Finitos de Problemas de Flujo Incompresible  
con Rotación, Turbulencia, Superficie  
Libre y Temperatura**

**O.A. Soto Camargo  
R. Codina**

**Monografía CIMNE Nº 41, Noviembre 1997**

Diseño de la cubierta: Jordi Pallí

Primera Edición, Noviembre 1997

© El autor

Edita:

Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería

Edificio C1, Campus Norte UPC

Gran Capitán, s/n

08034 Barcelona, España

ISBN: 84-89925-06-2

Deposito Legal: B-47145-97

# Índice General

INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS	7
NOTACIÓN	8
<b>1 Planteamiento del problema. Problema de Stokes</b>	<b>9</b>
1.1 Introducción y objetivos	9
1.2 Ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles	9
1.3 Aproximación por el método de Galerkin	10
1.4 Inestabilidad por incompresibilidad del flujo	12
1.4.1 Estabilización usando interpolaciones mixtas $u - p$	13
1.4.2 Estabilización modificando la forma variacional de Galerkin. Método GLS	17
1.5 Contornos abiertos	21
1.6 Aspectos computacionales	22
1.7 Ejemplos numéricos	23
1.8 Conclusiones	27
<b>2 Ecuación convección-difusión-reacción</b>	<b>29</b>
2.1 Introducción y objetivos	29
2.2 Problema de convección-difusión	30
2.2.1 Problema de convección-difusión unidimensional	31
2.2.2 Problema de convección-difusión multidimensional. Método SUPG	33
2.2.3 Problema de convección-difusión multidimensional. Método GLS	35
2.3 Problema de convección-difusión-reacción	36
2.3.1 Principio del máximo discreto	37
2.3.2 Método anisotrópico de captura de discontinuidades ASC	39
2.3.3 Método SUPG o GLS + ASC para el problema de convección-difusión-reacción	41
2.4 Aspectos computacionales	42
2.5 Ejemplos numéricos	43
2.6 Conclusiones	45
<b>3 Problema de Stokes con rotación</b>	<b>47</b>
3.1 Introducción y objetivos	47
3.2 Problema de Stokes en ejes no inerciales	48
3.3 Aproximación por elementos finitos tipo Galerkin	49
3.3.1 Estabilidad del método de Galerkin	50
3.3.2 Error de truncamiento del problema unidimensional	52
3.4 Formulación GLS para el problema de Stokes con rotación	54

3.5	Formulación DRS para el problema de Stokes con rotación . . . . .	56
3.6	Ejemplos numéricos . . . . .	58
3.7	Conclusiones . . . . .	67
<b>4</b>	<b>Problema de Navier-Stokes</b> . . . . .	<b>69</b>
4.1	Introducción y objetivos . . . . .	69
4.2	Ecuación de Navier-Stokes estacionaria. Problema continuo . . . . .	70
4.3	Linealización del término convectivo . . . . .	71
4.3.1	Método RHS . . . . .	72
4.3.2	Método de Picard . . . . .	72
4.3.3	Método de Newton-Raphson . . . . .	73
4.4	Métodos de estabilización para las ecuaciones de Navier-Stokes . . . . .	74
4.4.1	Elementos div-estables + SUPG + DRS . . . . .	75
4.4.2	Método GLS . . . . .	77
4.5	Problema transitorio . . . . .	78
4.5.1	Discretización en el tiempo . . . . .	79
4.5.2	Elementos div-estables + SUPG + DRS. Extensión al problema transitorio . . . . .	81
4.5.3	Método GLS. Extensión al problema transitorio . . . . .	83
4.6	Algoritmo para el problema de Navier-Stokes . . . . .	84
4.7	Ejemplos numéricos . . . . .	84
4.8	Conclusiones . . . . .	95
<b>5</b>	<b>Turbulencia</b> . . . . .	<b>97</b>
5.1	Introducción y objetivos . . . . .	97
5.2	Ecuaciones de Reynolds . . . . .	98
5.3	Modelos de Cero Ecuaciones . . . . .	100
5.3.1	Modelo de longitud de mezcla . . . . .	100
5.3.2	Modelo de Smagorinsky . . . . .	101
5.4	Modelos de una ecuación . . . . .	101
5.4.1	Modelo $k$ . . . . .	102
5.5	Modelos de dos ecuaciones . . . . .	103
5.5.1	Modelo $k - \varepsilon$ . . . . .	104
5.5.2	Modelo $k - \omega$ . . . . .	105
5.5.3	Modelo $k - k\tau$ . . . . .	105
5.6	Modelos de tensiones algebraicas . . . . .	106
5.6.1	Modelo de tensiones algebraicas regularizado . . . . .	107
5.6.2	Modelo implícito de tensiones algebraicas . . . . .	108
5.7	Condiciones de contorno . . . . .	108
5.7.1	Ley de pared . . . . .	108
5.7.2	Integración hasta la pared . . . . .	110
5.7.3	Contornos con velocidad media impuesta y contornos libres . . . . .	110
5.8	Elementos finitos aplicados al flujo turbulento . . . . .	110
5.8.1	Solución por elementos finitos de las ecuaciones de Reynolds . . . . .	111
5.8.2	Solución por elementos finitos de la ecuación para $k$ . . . . .	112
5.8.3	Solución por elementos finitos de la ecuación para $\varepsilon$ . . . . .	116
5.8.4	Solución por elementos finitos de la ecuación para $\omega$ . . . . .	118
5.8.5	Solución por elementos finitos de la ecuación para $(k\tau)$ . . . . .	119
5.8.6	Modelos de tensiones algebraicas ASM . . . . .	121

5.8.7	Esquema iterativo para la solución del flujo turbulento . . . . .	122
5.9	Ejemplos numéricos . . . . .	125
5.10	Comentarios y conclusiones . . . . .	142
<b>6</b>	<b>Superficie Libre y Temperatura</b>	<b>145</b>
6.1	Introducción y objetivos . . . . .	145
6.2	Método de la pseudo-concentración . . . . .	146
6.2.1	Aproximación por elementos finitos . . . . .	147
6.2.2	Suavizado de la pseudo-concentración . . . . .	148
6.2.3	Evacuación del aire - Introducción de agujeros . . . . .	150
6.3	Ecuación de la temperatura . . . . .	151
6.4	Flujo incompresible con una superficie libre . . . . .	154
6.5	Modelo numérico para la transmisión de calor durante el llenado de moldes . . . . .	155
6.5.1	Descripción del problema . . . . .	155
6.5.2	Condiciones de contorno . . . . .	156
6.5.3	Estrategia de solución . . . . .	158
6.6	Ejemplos numéricos . . . . .	159
6.7	Comentarios y conclusiones . . . . .	169
<b>7</b>	<b>Aplicaciones</b>	<b>171</b>
7.1	Introducción y objetivos . . . . .	171
7.2	Llenado de molde turbulento bi-dimensional . . . . .	171
7.3	Llenado de molde tri-dimensional . . . . .	177
7.4	Tanques concéntricos rotando a velocidad angular constante . . . . .	180
7.5	Velero Rioja de España . . . . .	183
7.6	Flujo a través de un ventilador axial . . . . .	186
7.7	Flujo en un reactor químico . . . . .	190
7.8	Comentarios y conclusiones . . . . .	192
	<b>CONCLUSIONES Y FUTURAS LINEAS DE INVESTIGACION</b>	<b>195</b>



## INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

El principal objetivo del presente trabajo es el de plantear un método de solución por elementos finitos de las ecuaciones que rigen el flujo incompresible, tanto en su régimen laminar como turbulento. Adicionalmente se planteará un esquema para solucionar problemas que involucren el tratamiento de superficies libres y del flujo térmico. La solución a dichos problemas es la base para atacar diversos problemas de ingeniería que se presentan diariamente en la industria, tales como el llenado de moldes, el flujo en reactores químicos, el diseño de perfiles óptimos para ventiladores, barcos, etc.

En el presente trabajo se presentan las ecuaciones que describen el comportamiento de un fluido incompresible en régimen laminar (ecuaciones de Navier-Stokes) y turbulento (ecuaciones de Reynolds), para luego plantear su solución por elementos finitos utilizando el método clásico o método de Galerkin. Se pueden presentar inestabilidades numéricas generadas principalmente por uno, o por la combinación, de los tres factores siguientes: La restricción de incompresibilidad, el predominio de las fuerzas inerciales sobre las fuerzas viscosas (altos números de Reynolds  $Re$ ), y el predominio de las fuerzas de rotación sobre las fuerzas viscosas (bajos números de Ekman  $Ek$ ).

La primera de ellas es ampliamente conocida, y se expondrán en el primer capítulo de la monografía algunos métodos de estabilización, estudiando el problema de Stokes. La inestabilidad por convección dominante o altos números de  $Re$ , también ampliamente conocida, se tratará en el siguiente capítulo con el fin de presentar su solución en el caso que hayan términos de reacción importantes. Su estudio se realizará mediante la ecuación de convección-difusión-reacción. Los términos de reacción no se presentan en las ecuaciones de Navier-Stokes, pero sí en las que rigen algunos modelos de turbulencia, por lo que su estabilización es importante. La inestabilidad por rotación dominante (alta fuerza de Coriolis) es menos conocida y el tratamiento que se le ha dado en el presente trabajo constituye uno de los principales aportes del mismo. En el capítulo 3 de la monografía se estudia el problema de Stokes con términos de rotación dominantes y se presentan los métodos implementados para su estabilización.

En el capítulo 4 se recogerán los métodos expuestos en los primeros capítulos para problemas simplificados, y se aplicarán a la estabilización de las ecuaciones que rigen el flujo laminar incompresible (ecuaciones de Navier Stokes incompresibles). En el capítulo 5 se realizará el mismo procedimiento para plantear la solución del flujo turbulento. Como se verá más adelante, el principal interés de este capítulo no reside en la solución numérica de las ecuaciones de Reynolds incompresibles (éstas son matemáticamente iguales a las ecuaciones de Navier Stokes), sino en el planteamiento y la solución de dichas ecuaciones acopladas con modelos de turbulencia. Algunos de estos modelos se plantean en forma de ecuaciones de convección-difusión-reacción, por lo que habrá que retomar los métodos de estabilización planteados en el capítulo 2.

En el capítulo 6 se plantea la solución de problemas que involucren el tratamiento y la solución de problemas con superficie libre y temperatura. Las ecuaciones que rigen dichos problemas son nuevamente del tipo convección-difusión (la superficie libre se trata con el método de la pseudo-concentración), por lo que su solución numérica pasa por los métodos planteados en el segundo capítulo del trabajo.

Finalmente en el capítulo 7 del trabajo se presentan algunas aplicaciones prácticas de los algoritmos desarrollados, que por lo general mezclan problemas numéricos tratados en los capítulos anteriores, como por ejemplo, problemas que combinan el tratamiento de la turbulencia y de la superficie libre, o de la convección dominante con la rotación, etc.

## NOTACIÓN

En general las matrices y vectores se denotan por caracteres en negrilla, y las variables escalares en itálica. Se utiliza la notación Cartesiana cuando se refiere a un sistema de coordenadas, siendo  $(x_1, x_2, x_3)$  o  $(x, y, z)$  las coordenadas Cartesianas para el caso tri-dimensional.

Las normas en los espacios funcionales  $L^2$  y  $H^1$  se denotan por  $\|\cdot\|_0$  y  $\|\cdot\|_1$  respectivamente, mientras que la norma Euclidiana de un vector se denota por  $|\cdot|$ .

Los operadores gradiente, divergencia, curl y Laplaciano se denotan por:

$$\nabla(\cdot), \nabla \cdot (\cdot), \nabla \times (\cdot) \text{ y } \Delta(\cdot)$$

respectivamente. El símbolo  $\Delta t$  se utiliza para el paso de tiempo, no para el Laplaciano de  $t$ . La derivada temporal y la derivada parcial respecto a la coordenada Cartesiana  $x_i$  se denotan por cualquiera de los símbolos siguientes:

$$\partial_t \equiv \frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}$$

El resto de la notación se explica en el texto.

# Capítulo 1

## Planteamiento del problema. Problema de Stokes

### 1.1 Introducción y objetivos

En este capítulo se presentan las ecuaciones que describen el comportamiento de un fluido incompresible en régimen laminar, (ecuaciones de Navier-Stokes) para luego plantear su solución por elementos finitos utilizando el método clásico o método de Galerkin. Lo anterior, es con el fin de exponer las inestabilidades numéricas que se presentan al realizar dicho procedimiento, generadas principalmente por uno, o por la combinación, de los tres factores siguientes: La restricción de incompresibilidad, el predominio de las fuerzas inerciales sobre las fuerzas viscosas (altos números de Reynolds  $Re$ ), y el predominio de las fuerzas de rotación sobre las fuerzas viscosas (bajos números de Ekman  $Ek$ ). La primera de ellas es ampliamente conocida, por lo cual se expondrán en este mismo capítulo algunos métodos de estabilización. También se expondrán algunos esquemas con el fin de mejorar la solución de dichos métodos, y se planteará una condición de contorno con el fin de evitar la influencia en la solución del punto donde se corte el dominio computacional.

Las inestabilidades por convección dominante o altos números de  $Re$ , y por rotación dominante (alta fuerza de Coriolis) se tratarán en capítulos posteriores del trabajo, ya que contienen algunos de los aportes más importantes del mismo.

### 1.2 Ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles

Las ecuaciones que rigen el flujo de un fluido incompresible, escritas respecto a unos ejes no inerciales que giran a una velocidad angular constante  $\omega/2$ , se escriben a continuación [Bat67, Tri77]:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \omega \times \mathbf{u} + \frac{1}{4} \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) \right) - \nabla \cdot (2\mu \varepsilon(\mathbf{u})) + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega \times (0, T) \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{en } \Omega \times (0, T) \quad (1.2)$$

donde  $\rho$  es la densidad del fluido,  $\mathbf{u}$  el campo de velocidades respecto a los ejes no inerciales,  $p$  el campo de presiones,  $t$  el tiempo,  $\mathbf{r}$  el vector de posición respecto a los ejes no inerciales,  $\mu$  la viscosidad dinámica del fluido,  $\varepsilon(\cdot)$  el operador gradiente simétrico (1.8),  $p$  el campo de presiones,

$f$  las fuerzas de cuerpo,  $\Omega$  el dominio de flujo (abierto y acotado de  $\mathbb{R}^{n_{sd}}$ ,  $n_{sd} = 2$  ó  $3$ ), y  $(0, T)$  el intervalo de tiempo de solución. Tomando  $\omega = 0$  se obtienen las ecuaciones de Navier Stokes respecto a ejes fijos o inerciales. A las anteriores ecuaciones deben adicionárseles un conjunto de condiciones de contorno e iniciales compatibles, las cuales se describen a continuación:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_g \quad \text{en } \Gamma_D \times (0, T) \quad (1.3)$$

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{t}_N \quad \text{en } \Gamma_N \times (0, T) \quad (1.4)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = u_n, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{g}_1 = t_1, \quad (1.5)$$

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{g}_2 = t_2 \quad \text{en } \Gamma_M \times (0, T)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad \text{en } \Omega \times \{0\} \quad (1.6)$$

$\Gamma := \partial\Omega$  es el contorno de  $\Omega$ , el cual se supone lo suficientemente suave (localmente Lipschitz).  $\Gamma_D$  es la parte de  $\Gamma$  donde se encuentra prescrito el campo de velocidades a  $\mathbf{u}_g$  (contorno tipo Dirichlet),  $\Gamma_N$  donde se prescriben las tensiones a  $\mathbf{t}_N$  (contorno tipo Newmann), y  $\Gamma_M$  la parte del contorno donde se encuentra prescrita la velocidad normal a  $u_n$  y las componentes tangenciales de la fuerza a  $t_1$  y  $t_2$  ( $\mathbf{g}_1$  y  $\mathbf{g}_2$  son los vectores unitarios que definen una base local tangente a  $\Gamma_M$  en 3D).  $\Gamma$  es tal que  $\Gamma = \overline{\Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_M}$ ,  $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ ,  $\Gamma_D \cap \Gamma_M = \emptyset$  y  $\Gamma_N \cap \Gamma_M = \emptyset$ .  $\mathbf{n}$  es el vector normal exterior a  $\partial\Omega$ , y  $\boldsymbol{\sigma}$  el campo de tensiones euleriano en el fluido definido por la siguiente ecuación constitutiva:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad (1.7)$$

donde  $\mathbf{I}$  es el tensor identidad. El operador gradiente simétrico aplicado a un campo vectorial cualquiera  $\mathbf{a}$  se define como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{a}) = \frac{1}{2} [(\nabla \mathbf{a}) + (\nabla \mathbf{a})^t] \quad (1.8)$$

Los números de Reynolds  $Re$  y de Ekman  $Ek$  se definen respectivamente como:

$$Re = \frac{UL\rho}{\mu} \quad Ek = \frac{2\mu}{\rho\omega L^2} \quad (1.9)$$

donde  $U$  y  $L$  son una velocidad y una longitud típicas del problema

### 1.3 Aproximación por el método de Galerkin

La forma débil o variacional del sistema de ecuaciones (1.1)-(1.6) aplicando el método de Galerkin [Cod92, CSvS86, Joh87, Hug87] es como sigue: Encontrar  $\mathbf{u} \in V_s$  y  $p \in Q_s$  tal que,

$$\begin{aligned} \rho(\partial_t \mathbf{u}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - b(p, q) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_t \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$b(q, \mathbf{u}) = 0 \quad \forall q \in Q_t \quad (1.11)$$

$$(\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0), \mathbf{v}) = (\mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_t \quad (1.12)$$

donde las formas multilineares introducidas se definen como:

$$c(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \rho \int_{\Omega} [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}] \cdot \mathbf{w} \, d\Omega \quad (1.13)$$

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \rho \int_{\Omega} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega \quad (1.14)$$

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} 2\mu \varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v}) \, d\Omega \quad (1.15)$$

$$b(q, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} q(\nabla \cdot \mathbf{v}) \, d\Omega \quad (1.16)$$

$$l(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \left[ \mathbf{f} - \frac{\rho}{4} (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})) \right] \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{t}_N \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_M} (t_1 \mathbf{g}_1 + t_2 \mathbf{g}_2) \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma \quad (1.17)$$

y los espacios funcionales son [Cod92]:

$$\mathbf{V}_t = \left\{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^{n_{nd}} \mid \mathbf{v}|_{\Gamma_D} = \mathbf{0}, (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})|_{\Gamma_M} = 0, \right\} \quad (1.18)$$

$$Q_t = L^2(\Omega) \quad (1.19)$$

$$\mathbf{V}_s = \left\{ \mathbf{v} \in L^2(0, T; H^1(\Omega)^{n_{nd}}) \mid \mathbf{v}|_{\Gamma_D} = \mathbf{u}_g, (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})|_{\Gamma_M} = u_n, t \in (0, T) \right\} \quad (1.20)$$

$$Q_s = \left\{ q \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \mid \int_{\Omega} q \, d\Omega = 0, t \in (0, T), \text{ si } \Gamma_N = \emptyset \right\} \quad (1.21)$$

Como una observación final, para el caso  $\Gamma_N \neq \emptyset$  la presión no se encuentra indeterminada por una constante ya que la condición de contorno (1.4) contiene la presión misma, ver (1.7), y por lo tanto no se requiere  $\int_{\Omega} q \, d\Omega = 0$  en (1.21).

Para discretizar en el espacio las ecuaciones variacionales continuas (1.10)-(1.12) presentadas anteriormente, se construyen los subespacios funcionales lineales  $V_{h,s} \subset V_s$ ,  $V_{h,t} \subset V_t$ ,  $Q_{h,s} \subset Q_s$  y  $Q_{h,t} \subset Q_t$ , a partir de una partición de elementos finitos  $\{\Omega^e\}$  del dominio espacial  $\Omega$ , tal que  $\Omega = \bigcup_{e=1}^{n_{el}} \Omega^e$ ,  $\Omega^e \cap \Omega^{e'} = \emptyset$  si  $e \neq e'$ , siendo  $n_{el}$  el número de elementos. El diámetro de  $\{\Omega^e\}$  se define como  $h$ . El problema semidiscreto de Galerkin se formula entonces como: Encontrar  $\mathbf{u}_h \in V_{h,s}$  y  $p_h \in Q_{h,s}$  tal que,

$$\begin{aligned} \rho(\partial_t \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + c(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + d(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \\ + a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - b(p_h, q_h) = l(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_{h,t} \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$b(q_h, \mathbf{u}_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_{h,t} \quad (1.23)$$

$$(\mathbf{u}_h(\mathbf{x}, 0), \mathbf{v}_h) = (\mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_{h,t} \quad (1.24)$$

Como se ha mencionado anteriormente, hay tres dificultades numéricas principales asociadas al problema (1). La primera de ellas se genera debido a la condición de incompresibilidad, la cual obliga a que los espacios de elementos finitos para interpolar la velocidad y la presión sean compatibles (div-estables); esto es, deben satisfacer la conocida condición de estabilidad de Babuška-Brezzi (condición BB, ver [BF91, Bab71, Bab73, Bre74, BB90]). La condición BB exige utilizar interpolaciones de diferente orden para la velocidad y la presión. Existe también la posibilidad de utilizar igual interpolación para la velocidad y la presión, modificando la forma variacional estándar resultante de aplicar el método de Galerkin al problema fuerte (1.1)-(1.2). En [HF87, HFB86, FH88, FFLM88, BD88, DW89, CB95] pueden consultarse ejemplos de estos métodos.

La segunda dificultad aparece cuando el término convectivo de la ecuación de momento (1.1) es importante respecto al término viscoso o difusivo (números de Reynolds altos). Cuando esto ocurre, la forma bilineal resultante de aplicar el método de Galerkin pierde coercividad (positividad) a medida que la viscosidad se hace más pequeña. Desde un punto de vista físico, el sistema de ecuaciones resultante de aplicar el método de Galerkin añade viscosidades negativas proporcionales al número de Reynolds. Este fenómeno conlleva a una mala estabilidad del problema, la

cual genera oscilaciones espúreas en la velocidad. Esta inestabilidad numérica es muy conocida en ecuaciones diferenciales tipo convección-difusión, y se han utilizado diferentes metodologías para solucionarlo. Entre éstas se encuentran los métodos tipo Taylor-Galerkin, Characteristic-Galerkin, SUPG (Streamline Upwind/Petrov-Galerkin method), mínimos cuadrados (Least-square methods), etc. En las referencias [BH82, Cod92, Don84, DR82, HFH89, Joh87, Pir82] pueden consultarse algunos de ellas. Básicamente las diferentes metodologías añaden difusión numérica al flujo, de tal forma que se obtenga un esquema numérico estable y lo más exacto posible.

Por último, al tratar de resolver el problema (1.1)-(1.2) usando la formulación clásica (Galerkin) con viscosidad cinemática  $\nu = \mu/\rho$  baja respecto a la velocidad angular  $\omega$  (en ausencia del término convectivo), se obtienen oscilaciones espúreas en todo el dominio de flujo. Este comportamiento se debe a la presencia de la presión que, para el caso sin convección, puede ser entendida como el multiplicador de Lagrange de la restricción de incompresibilidad (1.2). En el problema sin restricción (y por lo tanto sin presión) sólo aparecen oscilaciones en las fronteras, las cuales son típicas de problemas con términos de reacción importantes. La pérdida de estabilidad del problema con presión (oscilaciones en todo el dominio) se debe a que no se puede garantizar (al menos de forma directa) la coercividad de la forma bilineal resultante del método de Galerkin, lo cual sí se logra para el problema sin restricción de incompresibilidad. Este problema será tratado en el capítulo 3 del presente trabajo.

## 1.4 Inestabilidad por incompresibilidad del flujo

Con el fin de concentrarse en el problema numérico generado por la incompresibilidad del flujo, se estudiará la solución por elementos finitos del flujo de Stokes estacionario y newtoniano. Éste se expresa como:

$$-\mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega \quad (1.25)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (1.26)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{en } \partial\Omega \quad (1.27)$$

Se toma por simplicidad la condición  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  sobre toda la frontera  $\partial\Omega$ . La forma variacional de Galerkin para el problema (2) se lee: Encontrar  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$  y  $p \in Q$  tal que,

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - b(p, \mathbf{v}) + b(q, \mathbf{u}) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \quad \text{y} \quad \forall q \in Q \quad (1.28)$$

La forma bilineal  $a(\mathbf{v}, \mathbf{v})$  para el caso de viscosidad constante se puede escribir como:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, d\Omega \quad (1.29)$$

Las demás formas bilineales son las definidas en (1.16) y (1.17) tomando  $\omega = \mathbf{0}$  y teniendo en cuenta que todo el contorno es tipo Dirichlet (1.3). Los espacios funcionales para este caso se definen como:

$$\mathbf{V} = \left( H_0^1(\Omega) \right)^{n_{\text{nd}}} \quad (1.30)$$

$$Q = L^2(\Omega)/\mathbb{R} \quad (1.31)$$

$$(1.32)$$

### 1.4.1 Estabilización usando interpolaciones mixtas $u - p$

La existencia y unicidad de solución para el problema (1.28) se demuestra bajo las siguientes hipótesis:

- Las formas  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  y  $l(\mathbf{v})$  son continuas en  $\mathbf{V}$ . Es decir:

$$\exists N_a > 0 \quad | \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq N_a \|\mathbf{u}\|_1 \|\mathbf{v}\|_1 \quad (1.33)$$

$$\exists N_l > 0 \quad | \quad l(\mathbf{v}) \leq N_l \|\mathbf{v}\|_1 \quad (1.34)$$

- La forma bilineal  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  es coerciva en  $\mathbf{V}$ . Es decir:

$$\exists K_a > 0 \quad | \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq K_a \|\mathbf{u}\|_1^2 \quad (1.35)$$

- Los espacios funcionales son div-estables. Es decir cumplen la siguiente condición (condición de Babuška-Brezzi):

$$\exists K_b > 0 \quad | \quad \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}-(0)} \frac{b(q, \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_1} \geq K_b \|q\|_0 \quad \forall q \in Q \quad (1.36)$$

La continuidad de las formas  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  y  $l(\mathbf{v})$  se demuestra de forma inmediata a partir de la desigualdad de Cauchy. De igual manera la coercividad de  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  queda demostrada utilizando la desigualdad de Poincaré- Friedrichs para el caso de viscosidad constante (1.29), y la desigualdad de Korn cuando se toma como (1.15). La condición BB se cumple de la elección de los espacios funcionales [Lad63]. Esta última condición es necesaria para acotar la norma de la presión, sin ella no se puede obtener un estimador de estabilidad en  $\|p\|_0$  y por consiguiente no se tendría control sobre dicha variable.

#### Condición BB para el problema discreto

Sea  $\{\Omega^e\}$  una partición regular de elementos finitos de  $\{\Omega\}$  ( $\Omega = \bigcup_{e=1}^{n_{el}} \Omega^e$ ,  $\Omega^e \cap \Omega^{e'} = \emptyset$  si  $e \neq e'$  y  $n_{el}$  = Número de elementos).

Sean  $\mathbf{V}_h \subset \mathbf{V}$  y  $Q_h \subset Q$  los espacios de elementos finitos conformes asociados a la partición  $\{\Omega^e\}$  tales que:

$$\mathbf{V}_h = \left\{ \mathbf{v} \in C^0(\Omega)^{n_{sd}} \mid \mathbf{v}|_{\Omega^e} \in R_k(\Omega^e)^{n_{sd}} \right\} \quad (1.37)$$

$$Q_h = \left\{ q \mid q|_{\Omega^e} \in R_k(\Omega^e) \right\} \quad (1.38)$$

donde,

$$R_k(\Omega^e) \begin{cases} P_k(\Omega^e) & \text{Polinomio completo de grado } k. \Omega^e \text{ son triángulos en 2D} \\ & \text{o tetraédros en 3D} \\ Q_k(\Omega^e) & \text{Polinomio completo en todas las variables} \\ & \text{de grado } k. \Omega^e \text{ son Cuadriláteros en 2D o hexaédros en 3D} \end{cases} \quad (1.39)$$

Obsérvese que las funciones  $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$  deben ser continuas en  $\Omega$ , mas no las  $q_h \in Q_h$ . El problema discreto se formula entonces como: Encontrar  $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$  y  $p_h \in Q_h$  tal que,

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - b(p_h, \mathbf{v}_h) + b(q_h, \mathbf{u}_h) = l(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \quad \text{y} \quad \forall q_h \in Q_h \quad (1.40)$$

Para probar la existencia y unicidad de (1.40) se necesita la condición de BB discreta. Ésta es:

$$\sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h - \{0\}} \frac{b(q_h, \mathbf{v}_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_1} \geq K_b \|q_h\|_0 \quad \forall q_h \in Q_h \quad (1.41)$$

Al contrario que en el problema continuo, la condición (1.41) debe exigirse explícitamente por medio de la elección de los espacios de elementos finitos  $\mathbf{V}_h$  y  $Q_h$ . Particularmente la condición BB no permite utilizar funciones de forma de igual orden para la velocidad y la presión, por lo cual se obliga a utilizar elementos mixtos que sean div-estables (que cumplan la condición de BB para el problema discreto).

Una condición necesaria aunque no suficiente para que un elemento sea div-estable es que para toda partición de elementos finitos  $\{\Omega^e\}$ , el número de incógnitas de velocidad después de prescribir condiciones tipo Dirichlet en todo el contorno, sea mayor que el número de incógnitas de presión [ZQTN86]. Ésto puede verse fácilmente del sistema matricial resultante del problema (1.40):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{G} \\ \mathbf{G}^t & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_u \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (1.42)$$

$\mathbf{K}$  es la matriz resultante del término viscoso,  $\mathbf{G}$  del de presión,  $\mathbf{G}^t$  de la condición de incompresibilidad,  $\mathbf{U}$  el vector de velocidades nodales y  $\mathbf{P}$  el de presiones. Es claro que si el número de incógnitas de presión  $n_p$  es mayor o igual que el número de incógnitas de velocidad  $n_u$ , el campo de velocidades puede obtenerse de las ecuaciones provenientes de la condición de incompresibilidad ( $\mathbf{G}^t \mathbf{U} = \mathbf{0}$ ), y por lo tanto el sistema (1.42) no tiene solución única [CSvS86]. En las referencias [For77, Ste84] pueden consultarse metodologías que implican condiciones necesarias y suficientes para determinar si un elemento cumple BB o no.

### Principales elementos implementados

A continuación se presenta una breve descripción de los elementos más utilizados en el presente trabajo, mostrando su orden de convergencia en velocidades  $e_u(h) = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_0$  y en presiones  $e_p(h) = \|p - p_h\|_0$ . La forma del elemento se identifica con la palabra “simplex” para triángulos o tetraédros, y la palabra “brick” para cuadriláteros o hexaédros.

- *Elementos de presión continua:*

- $P1^+/P1$  (Minielemento de Arnold, Brezzi y Fortin): Cumple BB, simplex, lineal más una función burbuja en velocidades y lineal en presiones.  $e_u(h) = O(h^2)$  y  $e_p(h) = O(h)$ .
- $P2/P1$ : Cumple BB, simplex, cuadrático en velocidades y lineal en presiones.  $e_u(h) = O(h^3)$  y  $e_p(h) = O(h^2)$ .
- $Q2/Q1$ : Cumple BB, brick, bi(tri)-cuadrático en velocidades y bi(tri)-lineal en presiones.  $e_u(h) = O(h^3)$  y  $e_p(h) = O(h^2)$ .

- *Elementos de presión discontinua:*

- $P2/P0$ : Cumple BB, simplex, cuadrático en velocidades y constante en presiones.  $e_u(h) = O(h^2)$  y  $e_p(h) = O(h)$ .

- $P2^+/P1$ : Cumple BB, simplex, cuadrático en velocidades más burbuja y lineal en presiones.  $e_u(h) = O(h^3)$  y  $e_p(h) = O(h^2)$ .
- $Q1/P0$ : No cumple BB pero es muy utilizado (ver abajo), brick, bi(tri)-lineal en velocidades y constante en presiones.  $e_u(h) = O(h^2)$  y  $e_p(h) = O(h)$ .
- $Q2^-/P0$ : Cumple BB, brick, bi(tri)-cuadrático en velocidades sin función burbuja (quitando el nodo central del elemento) y constante en presiones.  $e_u(h) = O(h^2)$  y  $e_p(h) = O(h)$ .
- $Q2/P0$ : Cumple BB, brick, bi(tri)-cuadrático en velocidades y constante en presiones.  $e_u(h) = O(h^2)$  y  $e_p(h) = O(h)$ .
- $Q2/P1$ : Cumple BB, brick, bi(tri)-cuadrático en velocidades y lineal en presiones.  $e_u(h) = O(h^3)$  y  $e_p(h) = O(h^2)$ .

• *Observaciones:*

- El elemento  $Q1/P0$  no cumple BB, presentando modos espúreos de presión para ciertas mallas estructuradas. Particularmente puede demostrarse que para una malla rectangular con un número par de elementos en cada dirección, existe un campo de presiones no constante, tal que  $\mathbf{GP} = 0$  con lo cual el sistema (1.42) queda indeterminado. A pesar de lo anterior, este elemento presenta buenos resultados en la mayoría de los casos. Esto último está basado en la vasta experiencia numérica acumulada, mas no ha podido demostrarse matemáticamente. En el presente trabajo, este elemento es muy usado debido a su bajo coste computacional.

### Métodos de penalización

El problema de Stokes (1.25)-(1.27) tiene el siguiente problema de optimización asociado: Encontrar  $\mathbf{u} \in \mathbf{J}$  tal que,

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}) = \inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{J}} \mathcal{F}(\mathbf{v}) \quad (1.43)$$

$$\mathcal{F}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - l(\mathbf{v}) \quad (1.44)$$

$$\mathbf{J} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} \mid \nabla \cdot \mathbf{v} = 0\} \quad (1.45)$$

El anterior problema de optimización puede reescribirse introduciendo el multiplicador de Lagrange  $p$ , y perturbando el funcional resultante. El problema queda entonces como: Encontrar  $\mathbf{u}^\epsilon \in \mathbf{V}$  y  $p^\epsilon \in Q_0$  tal que,

$$\mathcal{L}_{p,\epsilon}(\mathbf{u}^\epsilon, p^\epsilon) = \inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} \sup_{q \in Q} \mathcal{L}_{p,\epsilon}(\mathbf{v}, q) \quad (1.46)$$

$$\mathcal{L}_{p,\epsilon}(\mathbf{v}, q) := \frac{1}{2}a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - l(\mathbf{v}) - b(q, \mathbf{v}) - \frac{\epsilon}{2}(q, q) \quad (1.47)$$

donde el espacio funcional  $Q_0$  se define como (esta elección se explica más adelante):

$$Q_0 = \left\{ q \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} q \, d\Omega = 0 \right\} \quad (1.48)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas al lagrangiano perturbado (1.46)-(1.47) son:

$$a(\mathbf{u}^\epsilon, \mathbf{v}) - b(p^\epsilon, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \quad (1.49)$$

$$\epsilon(p^\epsilon, q) + b(q, \mathbf{u}^\epsilon) = 0 \quad \forall q \in Q_0 \quad (1.50)$$

Si se toma  $q \equiv \text{constante}$  en (1.50) se puede ver que:

$$\epsilon \int_{\Omega} p^{\epsilon} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^{\epsilon} \, d\Gamma = 0 \quad (1.51)$$

donde  $\mathbf{n}$  es la normal exterior a  $\Gamma$ . Al ser el flujo incompresible la integral sobre el contorno del producto de la velocidad con la normal exterior es cero  $\int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^{\epsilon} \, d\Gamma = 0$ , y entonces se tiene que  $\int_{\Omega} p^{\epsilon} = 0$ , siendo en consecuencia  $Q_0$ , definido en (1.48), el espacio correcto para buscar  $p^{\epsilon}$ . Utilizando nuevamente la coercividad de  $a$  y la condición BB (1.36) se demuestra que  $\mathbf{u}^{\epsilon}$  y  $p^{\epsilon}$  convergen a  $\mathbf{u}$  y  $p$  solución del problema (1.28), cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Discretizando por elementos finitos (1.49)-(1.50) se obtiene el llamado esquema de penalización clásica [CSvS86]. El parámetro de penalización  $\epsilon$  para este método debe ser muy pequeño, por lo que el sistema de ecuaciones resultante de la discretización por elementos finitos tiende a ser fuertemente mal condicionado. La adopción de un esquema de penalización iterativa permite utilizar  $\epsilon$  más grandes, con lo cual se alivia en parte dicho inconveniente. Un esquema de este tipo es el presentado en [Cod92, Cod93b]: Dado  $p^{\epsilon(0)}$  para  $i = 1, 2, \dots$  encontrar  $(\mathbf{u}^{\epsilon(i)}, p^{\epsilon(i)}) \in \mathbf{V} \times Q_0$  tal que,

$$a(\mathbf{u}^{\epsilon(i)}, \mathbf{v}) - b(p^{\epsilon(i)}, q) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \quad (1.52)$$

$$\epsilon(p^{\epsilon(i)}, q) + b(q, \mathbf{u}^{\epsilon(i)}) = \epsilon(p^{\epsilon(i-1)}, q) \quad \forall q \in Q_0 \quad (1.53)$$

La convergencia del esquema de penalización iterativa queda probada por medio del siguiente teorema tomado de [Cod92].

**Teorema 1.1** Sea  $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{V} \times Q_0$  la solución del problema de Stokes (1.28) y  $(\mathbf{u}^{\epsilon(i)}, p^{\epsilon(i)}) \in \mathbf{V} \times Q_0$  la solución de (1.52)-(1.53). Se define

$$\bar{\epsilon} := \epsilon \frac{N_a^2}{K_a K_b} \quad (1.54)$$

Si  $\bar{\epsilon} < 1$  entonces

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|p - p^{\epsilon(i)}\| = 0, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{\epsilon(i)}\| = 0 \quad (1.55)$$

Además la convergencia es lineal con  $\bar{\epsilon}$ :

$$\|p - p^{\epsilon(i)}\| \leq \bar{\epsilon}^i \|p - p^{\epsilon(i-1)}\| \quad (1.56)$$

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{\epsilon(i)}\| \leq \bar{\epsilon}^i \frac{K_b}{N_a} \|p - p^{\epsilon(i-1)}\| \quad (1.57)$$

La prueba del anterior teorema se presenta en [Cod92]. Una versión discreta del mismo en forma matricial, se presenta y demuestra en [CCO93]. Un esquema parecido al de penalización iterativa se obtiene al considerar el fluido muy poco compresible, introduciendo una falsa derivada temporal para la presión en (1.50), y discretizandola con un esquema de Euler hacia atrás. Este último se denomina esquema de compresibilidad artificial, y fue introducido por Chorin [Cho67]. El parámetro de penalización en este caso es el inverso de  $c^2 \Delta t$ , donde  $c$  es la velocidad del sonido en el fluido y  $\Delta t$  el paso de tiempo.

- *Observaciones*

- Al tomar la discretización por elementos finitos de (1.52)-(1.53) se obtiene para cada elemento el siguiente sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{G} \\ \mathbf{G}^t & \epsilon \mathbf{M}_p \end{bmatrix}^{(e)} \begin{bmatrix} \mathbf{U}^i \\ \mathbf{P}^i \end{bmatrix}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_u \\ \epsilon \mathbf{M}_p \mathbf{P}^{i-1} \end{bmatrix}^{(e)} \quad (1.58)$$

donde  $\mathbf{M}_p$  es la clásica matriz de “masa” y el superíndice  $\epsilon$  se refiere al elemento (se ha suprimido el superíndice  $\epsilon$  referente a la penalización por simplicidad).  $\mathbf{F}_u^{(e)}$  contiene tanto el término de fuerzas de cuerpo, como la integral sobre el contorno del elemento de las tensiones normales (éstas últimas se eliminan entre sí al efectuar el ensamblaje quedando sólo los del contorno a  $\Omega$ , ver (1.17)). Si el elemento es de presión discontinua, se pueden eliminar elementalmente los grados de libertad correspondientes a dicha variable. De esta forma el sistema de ecuaciones resultante del ensamblaje de todos los elementos sólo tendrá los grados de libertad de velocidad, con lo cual se obtiene un gran ahorro desde el punto de vista computacional. Si denominamos  $\mathcal{A}$  el operador de ensamblaje estándar de elementos finitos, el sistema de ecuaciones resultante de eliminar la presión a nivel elemental se escribe como:

$$\left[ \mathbf{K} + \frac{1}{\epsilon} \mathcal{A}_{e=1}^{n_{el}} (\mathbf{G}^{(e)} \mathbf{M}_p^{(e)-1} \mathbf{G}^{(e)t}) \right] \mathbf{U}^i = \mathbf{F}_u - \mathcal{A}_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{G}^{(e)} \mathbf{P}^{(e)i-1} \quad (1.59)$$

Obtenidas las velocidades nodales, las presiones se pueden calcular a nivel elemental mediante la siguiente expresión:

$$\mathbf{P}^{(e)i} = \mathbf{P}^{(e)i-1} - \frac{1}{\epsilon} \mathbf{M}_p^{(e)-1} \mathbf{G}^{(e)t} \mathbf{U}^{(e)i} \quad (1.60)$$

- Las ecuaciones (1.49) y (1.50) están asociadas al siguiente problema fuerte:

$$-\mu \Delta \mathbf{u}^\epsilon + \nabla p^\epsilon = \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega \quad (1.61)$$

$$\epsilon p^\epsilon + \nabla \cdot \mathbf{u}^\epsilon = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (1.62)$$

Si se despeja  $p^\epsilon$  de (1.62), se reemplaza en (1.61) y se obtiene la forma débil discreta, resulta el siguiente problema: Encontrar  $\mathbf{u}_h^\epsilon \in \mathbf{V}_h$  tal que,

$$a(\mathbf{u}_h^\epsilon, \mathbf{v}_h) + \frac{1}{\epsilon} (\nabla \cdot \mathbf{u}_h^\epsilon, \nabla \cdot \mathbf{v}_h) = l(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \quad (1.63)$$

Este método denominado *penalización fuerte*, supone implícitamente que el espacio donde se buscarán las presiones es la divergencia del espacio de las velocidades (de (1.62)  $p^\epsilon = \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot \mathbf{u}^\epsilon$ ). La pareja  $\mathbf{V}_h - Q_h$  resultante es en general inestable, por lo cual el método no funciona. Por consiguiente, penalizar primero y discretizar después es diferente a discretizar primero y luego penalizar.

### 1.4.2 Estabilización modificando la forma variacional de Galerkin. Método GLS

La principal motivación del método que se presenta a continuación es el permitir el uso de iguales espacios de interpolación para la velocidad y la presión, lo cual facilita la implementación, y permite el uso de elementos de bajo orden, obteniéndose un ahorro computacional (principalmente

en 3D). Esta técnica introducida por Hughes y colaboradores [HFB86] es la comúnmente denominada “Galerkin Least Square” (GLS). Para su descripción se supone que el espacio de prueba para las presiones es continuo en todo el dominio,  $Q_h \subset C^0(\Omega)$ , y se define el operador de Stokes de la siguiente manera:

$$\mathcal{S}(\mathbf{u}, p) = \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{S}_1(\mathbf{u}, p) \\ \mathcal{S}_2(\mathbf{u}, p) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} -\mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p \\ \nabla \cdot \mathbf{u} \end{array} \right\} \quad (1.64)$$

y el término independiente

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F}_1 \\ \mathcal{F}_2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{f} \\ 0 \end{array} \right\} \quad (1.65)$$

El método GLS consiste en añadir a la forma débil obtenida del método de Galerkin, la integral sobre el interior de los elementos del operador de Stokes aplicado a las funciones de prueba  $(\mathbf{v}, q)$ , multiplicado por el residuo de las ecuaciones diferenciales y por una matriz  $\boldsymbol{\tau}$  definida para cada elemento como:

$$\boldsymbol{\tau}^e = \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & \tau_2 \end{bmatrix}^e \quad (1.66)$$

El problema se escribe entonces: Encontrar  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$  y  $p \in Q$  tal que,

$$l(\mathbf{v}) = a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - b(p, \mathbf{v}) + b(q, \mathbf{u}) + \sum_{e=1}^{n_{el}} (\mathcal{S}(\mathbf{v}, q)) \cdot \boldsymbol{\tau}^e \cdot (\mathcal{S}(\mathbf{u}, p) - \mathcal{F}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \text{ y } \forall q \in Q \quad (1.67)$$

donde  $\mathcal{S}(\mathbf{v}, q)$  es la denominada función de perturbación y  $\mathcal{S}(\mathbf{u}, p) - \mathcal{F}$  el residuo de la ecuación diferencial.

En la referencia [HFB86] se demuestra la estabilidad del método y se establece que su convergencia, en el caso de utilizar polinomios de un grado mayor para las velocidades que para las presiones, es óptima tanto en gradientes de velocidad como de presión (lo cual también sucede para el caso de utilizar el método de Galerkin con interpolaciones mixtas  $\mathbf{u} - p$ ). En el caso que se utilicen interpolaciones iguales para ambas variables, se conserva la convergencia en los gradientes de velocidad, mas la convergencia en los gradientes de presión es sub-óptima (un grado menos a lo esperado en el caso de Galerkin). El método es consistente en el sentido de que la solución exacta del problema de Stokes satisface la forma variacional anterior. Los términos sumados añaden coercividad a la forma de Galerkin, y permiten demostrar la existencia y unicidad de solución sin pasar por la condición BB ([HFB86]).

El problema discreto, utilizando funciones de prueba para las presiones continuas, se lee entonces: Encontrar  $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$  y  $p_h \in Q_h$ , donde  $Q_h \subset C^0(\Omega)$ , tal que,

$$\begin{aligned} l(\mathbf{v}_h) &= a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - b(p_h, \mathbf{v}_h) + b(q_h, \mathbf{u}_h) \\ &+ \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \left[ \tau_1^e (-\mu\Delta\mathbf{v}_h + \nabla q_h) \cdot (-\mu\Delta\mathbf{u}_h + \nabla p_h - \mathbf{f}) \right. \\ &\left. + \tau_2^e (\nabla \cdot \mathbf{v}_h)(\nabla \cdot \mathbf{u}_h) \right] \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \text{ y } \forall q_h \in Q_h \end{aligned} \quad (1.68)$$

La estructura matricial del sistema resultante es:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 & -\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 \\ \mathbf{G}_1^t + \mathbf{G}_2^t & \mathbf{L}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_u \\ \mathbf{F}_p \end{bmatrix} \quad (1.69)$$

donde los subíndices 1 y 2 se refieren a los términos procedentes de Galerkin y de los términos de mínimos cuadrados, respectivamente. La estabilización del método GLS sobre la incompresibilidad (y por consiguiente sobre la presión) viene dada por la matriz  $\mathbf{L}_2$ , la cual es una matriz laplaciana discreta multiplicada por el parámetro  $\tau_1$ . En las referencias [BD88, DW89, CB95] pueden consultarse otros métodos en los cuales la estabilización viene también dada por una matriz de este tipo.

Los parámetros  $\tau_1$  y  $\tau_2$  se diseñan con el fin de obtener un esquema numérico estable y con óptima convergencia. Se demuestra que tomando:

$$\tau_1^e = \frac{\beta h^e{}^2}{4\mu} \quad (1.70)$$

se cumplen dichos requerimientos [FS91, HFB86].  $h^e$  es el tamaño del elemento y  $\beta$  es una constante que afecta la exactitud del método, mas no su estabilidad. Ésta depende del tipo de elemento. Los valores óptimos se estiman a partir de un análisis de error unidimensional, y son  $1/3$  para elementos lineales y  $1/9$  para cuadráticos [Cod92, COC92]. En el capítulo 2 de este trabajo, donde se estudia el caso de convección dominante, se muestra el porqué de (1.70) (el parámetro  $\tau_1^e$  se calcula para estabilizar la convección, tomando el límite difusivo del mismo se encuentra la expresión (1.70)).

El segundo parámetro  $\tau_2$  se toma cero para el problema de Stokes aunque, como se verá más adelante, cuando existen términos convectivos y/o de rotación, éste debe introducirse para forzar la incompresibilidad. En (1.68) se puede observar que este parámetro multiplica precisamente a la ecuación de incompresibilidad (1.26).

### Modificación de contorno para el método GLS

Si se toma en (1.68)  $(v_h, q_h) = (\mathbf{0}, q_h)$  se obtiene la forma débil de la ecuación de incompresibilidad para el método GLS:

$$b(q_h, \mathbf{u}_h) + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_1^e \nabla q_h \cdot (-\mu \Delta \mathbf{u}_h + \nabla p_h - \mathbf{f}) \, d\Omega = 0 \quad \forall q_h \in Q_h \quad (1.71)$$

Obviamente, si  $(\mathbf{u}_h, p_h)$  se reemplaza por la solución del problema continuo  $(\mathbf{u}, p)$ , tanto  $b(q_h, \mathbf{u})$  como el término residual se anulan comprobando la consistencia del método.

Sin embargo, si se desprecia el término  $\Delta \mathbf{u}_h$  de (1.71) (lo cual es muy común para elementos lineales o bilineales), la forma débil resultante es:

$$b(q_h, \mathbf{u}_h) + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_1^e \nabla q_h \cdot (\nabla p_h - \mathbf{f}) \, d\Omega = 0 \quad (1.72)$$

Si se toma  $h^e = h$  constante en (1.70), y por lo tanto  $\tau_1^e = \tau_1$  constante para toda la malla, la anterior forma variacional puede reescribirse en el caso de utilizar interpolaciones continuas para la presión ( $Q_h \subset C^0(\Omega)$ ), y suponiendo que  $\mathbf{f}$  sea lo suficientemente regular, como:

$$b(q_h, \mathbf{u}_h) + \tau_1 \int_{\Omega} \nabla q_h \cdot (\nabla p_h - \mathbf{f}) \, d\Omega = 0 \quad (1.73)$$

Integrando por partes los términos multiplicados por  $\tau_1$  se obtiene entonces,

$$b(q_h, \mathbf{u}_h) + \tau_1 \left[ \int_{\Gamma} q_h (\nabla p_h - \mathbf{f}) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma - \int_{\Omega} q_h \nabla \cdot (\nabla p_h - \mathbf{f}) \, d\Omega \right] \quad (1.74)$$

donde  $\Gamma$  es el contorno de  $\Omega$  y  $\mathbf{n}$  su normal exterior. Nuevamente, si  $(\mathbf{u}_h, p_h)$  se reemplaza por la solución del problema continuo  $(\mathbf{u}, p)$ , se tiene  $b(q_h, \mathbf{u}) = 0$  y

$$\int_{\Omega} q_h \nabla \cdot (\nabla p - \mathbf{f}) \, d\Omega = 0 \quad (1.75)$$

$\nabla \cdot (\nabla p - \mathbf{f})$  es la divergencia de la ecuación de momento del problema de Stokes (1.25) ( $\nabla \cdot \Delta \mathbf{u} = \Delta \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  debido a la condición de incompresibilidad (1.26)). Sin embargo, la integral de contorno en (1.74) no se anula para la solución exacta  $(\mathbf{u}, p)$ , con lo cual se pierde la consistencia del método. Esta integral impone en forma débil:

$$\nabla p \cdot \mathbf{n} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \quad \text{en } \Gamma \quad (1.76)$$

condición que induce un error en las presiones sobre la frontera. La condición real que debe cumplirse sobre  $\Gamma$  se obtiene de (1.25):

$$\nabla p \cdot \mathbf{n} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} + \mu \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \quad \text{en } \Gamma. \quad (1.77)$$

El problema es la dificultad de reproducir  $\Delta \mathbf{u}_h$  por el método numérico. Este defecto en el contorno se corrige fácilmente si a (1.73) se le resta la integral sobre la frontera que induce el error. Es decir, si (1.73) se modifica como sigue:

$$b(q_h, \mathbf{u}_h) + \tau_1 \left[ \int_{\Omega} \nabla q_h \cdot (\nabla p_h - \mathbf{f}) \, d\Omega - \int_{\Gamma} q_h (\nabla p_h - \mathbf{f}) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \right] = 0 \quad (1.78)$$

La consistencia de la anterior forma débil queda demostrada si se integra por partes  $\int_{\Omega} \nabla q_h \cdot (\nabla p_h - \mathbf{f}) \, d\Omega$  (en su versión continua para que tenga sentido), cancelándose los términos de contorno y obteniéndose:

$$b(q, \mathbf{u}) - \tau_1 \int_{\Omega} q \nabla \cdot (\nabla p - \mathbf{f}) \, d\Omega = 0, \quad (1.79)$$

Es trivial comprobar que la solución exacta del problema de Stokes verifica la anterior forma variacional.

La condición de incompresibilidad en forma débil (1.71) se reescribe entonces como:

$$b(q_h, \mathbf{u}_h) + \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[ \int_{\Omega^e} \tau_1^e \nabla q_h \cdot (\nabla p_h - \mathbf{f}) \, d\Omega - \int_{\Gamma^e \cap \Gamma} \tau_1^e q_h (\nabla p_h - \mathbf{f}) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \right] = 0 \quad (1.80)$$

#### • Observaciones

– Obsérvese que para  $\tau_1^e$  variable, (1.79) puede escribirse como:

$$b(q_h, \mathbf{u}_h) - \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_1^e q_h \nabla \cdot (\nabla p_h - \mathbf{f}) \, d\Omega = 0 \quad (1.81)$$

donde los términos residuales están imponiendo que la divergencia de la ecuación de momento (1.25) sea cero dentro de cada elemento, con lo cual el esquema sigue conservando la consistencia. Ahora, integrando por partes (1.81) se obtiene:

$$b(q_h, \mathbf{u}_h) + \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[ \int_{\Omega^e} \tau_1^e \nabla q_h \cdot (\nabla p_h - \mathbf{f}) \, d\Omega - \int_{\Gamma^e} \tau_1^e q_h (\nabla p_h - \mathbf{f}) \cdot \mathbf{n}^e \, d\Gamma \right] = 0 \quad (1.82)$$

siendo  $\Gamma^e$  el contorno de cada elemento, y  $\mathbf{n}^e$  su normal exterior. La anterior forma variacional difiere de (1.80) en:

$$\sum_{e=1}^{n_{el}} \tau_1^e \int_{\Gamma^e \neq \Gamma} q_h (\nabla p_h - \mathbf{f}) \cdot \mathbf{n}^e \, d\Gamma \quad (1.83)$$

Es decir, para el caso de mallas con  $h^e$  variable, (1.80) desprecia la integral sobre los contornos interiores de cada elemento (contornos que no pertenecen a  $\Gamma$ ).

Finalmente, el problema débil modificado se escribe: Encontrar  $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$  y  $p_h \in Q_h$ , donde  $Q_h \subset C^0(\Omega)$ , tal que,

$$\begin{aligned} l(\mathbf{v}_h) &= a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - b(p_h, \mathbf{v}_h) + b(q_h, \mathbf{u}_h) \\ &+ \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \left[ \tau_1^e \nabla q_h \cdot (\nabla p_h - \mathbf{f}) \right. \\ &- \int_{\Gamma^e \cap \Gamma} \tau_1^e q_h (\nabla p_h - \mathbf{f}) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \\ &\left. + \tau_2^e (\nabla \cdot \mathbf{v}_h) (\nabla \cdot \mathbf{u}_h) \right] \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \text{ y } \forall q_h \in Q_h \end{aligned} \quad (1.84)$$

Obsérvese que el término  $-\mu \Delta \mathbf{v}_h$  se suprime de la función de perturbación para conservar la consistencia y evitar el cálculo de segundas derivadas. Sin embargo, la inclusión de ambos términos laplacianos en (1.84),  $-\mu \Delta \mathbf{v}_h$  en la función de perturbación y  $-\mu \Delta \mathbf{u}_h$  en el residuo, obviamente mantiene la consistencia del método. En este último caso el problema se escribe: Encontrar  $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$  y  $p_h \in Q_h$  tal que,

$$\begin{aligned} l(\mathbf{v}_h) &= a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - b(p_h, \mathbf{v}_h) + b(q_h, \mathbf{u}_h) \\ &+ \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \left[ \tau_1^e (-\mu \Delta \mathbf{v}_h + \nabla q_h) \cdot (-\mu \Delta \mathbf{u}_h + \nabla p_h - \mathbf{f}) \right. \\ &- \int_{\Gamma^e \cap \Gamma} \tau_1^e q_h (-\mu \Delta \mathbf{u}_h + \nabla p_h - \mathbf{f}) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \\ &\left. + \tau_2^e (\nabla \cdot \mathbf{v}_h) (\nabla \cdot \mathbf{u}_h) \right] \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \text{ y } \forall q_h \in Q_h \end{aligned} \quad (1.85)$$

El anterior esquema aunque fue publicado por Droux y Hughes en [DH94], donde fueron presentados ejemplos numéricos con  $\tau_1^e = \tau_1$  constante en toda la malla y utilizando parámetros arbitrarios para  $\beta$ , también se desarrolló simultáneamente por Codina y Soto con la motivación del flujo rotacional (con fuerza de Coriolis). Debido a que el esquema no presentó buenos resultados para este último caso, se abandonó retomándose nuevamente al conocerse la citada referencia. Al final del presente capítulo se presenta un ejemplo numérico con el fin de mostrar las ventajas del método expuesto.

## 1.5 Contornos abiertos

En problemas de flujo donde el dominio físico no está perfectamente acotado, se debe tomar la decisión de hasta dónde extender la malla de elementos finitos, y qué condiciones de contorno son las correctas en la frontera de corte. A continuación se expone un método introducido por Papanastasiou y colaboradores [PME92], en el cual se busca independizar la solución del

problema del lugar donde se corta la malla. Esto se realiza no imponiendo absolutamente ningún tipo de condición en dicho contorno.

Se plantea el siguiente problema de Stokes:

$$-\nabla \cdot (2\mu \varepsilon(\mathbf{u})) + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega \quad (1.86)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (1.87)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{en } \Gamma_D \quad (1.88)$$

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{t}_N \quad \text{en } \Gamma_N \quad (1.89)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = u_n, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{g}_1 = t_1 \\ \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{g}_2 = t_2 \quad \text{en } \Gamma_M \text{ y,} \end{aligned} \quad (1.90)$$

$$\Gamma_A = \Gamma - (\Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_M) \neq \emptyset \quad (1.91)$$

La idea es no prescribir nada en  $\Gamma_A$ . La forma débil del anterior problema fuerte queda entonces como: Encontrar  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_g$  y  $p \in Q$  tal que,

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - b(p, \mathbf{v}) + b(q, \mathbf{u}) - \int_{\Gamma_A} \mathbf{v} \cdot (-2\mu \varepsilon(\mathbf{u}) + p\mathbf{I}) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = l(\mathbf{v}) \\ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0 \text{ y } \forall q \in Q \end{aligned} \quad (1.92)$$

donde las formas multilineares son las definidas por (1.15)-(1.17) tomando  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ , y los espacios funcionales son:

$$\mathbf{V}_x = \left\{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^{n_{ed}} \mid \mathbf{v}|_{\Gamma_D} = \mathbf{x} \right\} \quad (1.93)$$

$$Q = \left\{ q \in L^2(\Omega)/\mathbb{R} \right\} \quad (1.94)$$

En el caso que se utilice la forma laplaciana del problema de Stokes (1.25), la forma bilineal  $a$  es la definida por (1.29) y la integral de contorno en (1.92) se reemplaza por:

$$- \int_{\Gamma_A} \mathbf{v} \cdot (\mu \nabla \mathbf{u} + p\mathbf{I}) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \quad (1.95)$$

Obsérvese que lo único que se ha hecho para llegar al problema débil fue aplicar el tradicional método de Galerkin. Al existir un contorno sin ningún tipo de condición, queda la integral de frontera presentada en (1.92), que en el problema discreto se debe calcular y ensamblar junto a los demás términos de la matriz.

## 1.6 Aspectos computacionales

En el presente apartado se presentan algunos aspectos sobre el cálculo de algunos parámetros de los métodos expuestos anteriormente. El primero de ellos tiene que ver con el cómputo del parámetro de estabilización del método GLS  $\tau_1^e$  ( $\tau_2^e = 0$  para el problema de Stokes). Para el cálculo de dicho parámetro se computa la longitud del elemento en cada dirección, tomándose como  $h^e$  (1.70) la mayor longitud. Para la viscosidad se toma el valor en el punto de integración. Es decir, los términos residuales del GLS en (1.68) se calculan como:

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \left[ \tau_1^e (-\mu \Delta \mathbf{v}_h + \nabla q_h) \cdot (-\mu \Delta \mathbf{u}_h + \nabla p_h - \mathbf{f}) \right] d\Omega \approx \\ \sum_{e=1}^{n_{el}} \sum_{ig=1}^{n_g} \left[ \frac{\beta h^e}{4\mu_{ig}^e} (-\mu_{ig}^e \Delta \mathbf{v}_h + \nabla q_h) \cdot (-\mu_{ig}^e \Delta \mathbf{u}_h + \nabla p_h - \mathbf{f}) W_{ig} |J|_{ig} \right] \end{aligned} \quad (1.96)$$

donde  $n_g$  son el número de puntos de integración del elemento,  $W_{ig}$  el peso del punto de integración y  $|J|_{ig}$  el determinante del jacobiano de la transformación isoparamétrica entre las coordenadas naturales del elemento y las coordenadas globales. Es obvio también que tanto los términos de la función de perturbación como del residuo elemental también son evaluados en el punto de integración del elemento.

Otro aspecto importante a resaltar es el cálculo de las integrales de frontera tanto para la modificación del GLS como para la condición de contorno abierto. Para ello se definen elementos de contorno cuyos nodos coinciden con los nodos de los lados de los elementos del dominio que quedan sobre la frontera. Los valores de la mayoría de los términos en las integrales de contorno se tienen en los puntos de integración del elemento (además algunos de ellos están definidos de forma única sólo en el interior de los elementos). Debido a esto se deben extrapolar sus valores a los puntos de integración sobre los elementos de frontera. Dicho procedimiento se describe a continuación. Sea  $N_{ib}^e$  la función de forma estándar asociada al nodo  $ib$  del contorno perteneciente al elemento  $e$  ( $N_{ib}^e$  toma el valor de 1 sobre el nodo  $ib$  y de 0 en los demás nodos del elemento de contorno  $b$ ). Se define  $N_{ig}^e$  como la función de forma asociada al punto de integración  $ig$  del elemento  $e$  de forma estándar. Es decir,  $N_{ig}^e$  toma el valor de 1 en  $\xi_{ig}^e$ , y de 0 en  $\xi_{jg}^e$  con  $ig \neq jg$ , siendo  $\xi_{ig}^e$  las coordenadas naturales del punto de integración  $ig$  del elemento  $e$  (por consiguiente existiran  $n_g$  funciones de forma asociadas a los puntos de integración).

Con lo anterior cualquier variable  $\pi$  cuyo valor se tenga en el punto de integración de un elemento,  $ig$ , puede extrapolarse a los puntos de integración del elemento de frontera,  $ic$ , como sigue:

$$\pi(\xi_{ic}^e) = N_{ig}^e(\xi_{ib}^e) N_{ib}^e(\xi_{ic}^e) \pi(\xi_{ig}^e) \quad (1.97)$$

En la anterior ecuación índices repetidos suman.  $\xi_{ic}^e$ ,  $\xi_{ib}^e$  y  $\xi_{ig}^e$  son las coordenadas naturales del punto de integración del elemento de frontera, del nodo del elemento de frontera y del punto de integración del elemento respectivamente.

## 1.7 Ejemplos numéricos

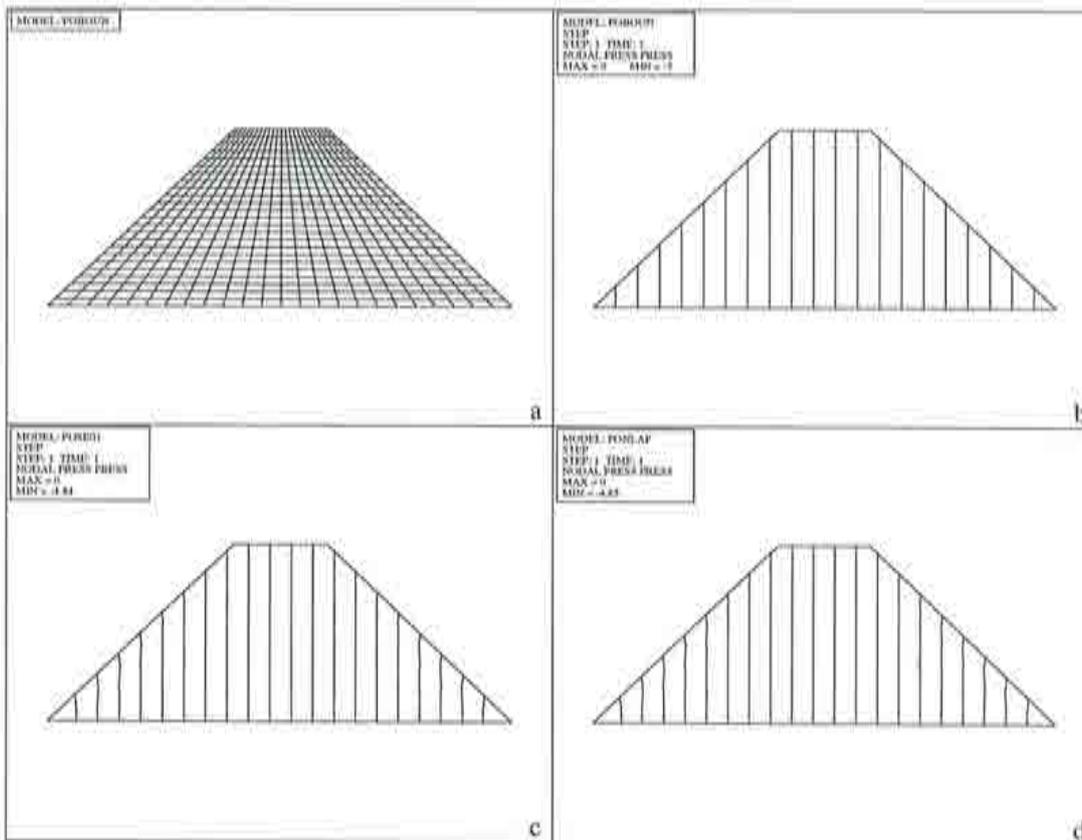
### -Flujo de Poseuille. Método GLS

A continuación se reproduce un ejemplo de la referencia [DH94], pero tomando  $\tau_1^e$  según (1.70) y  $\beta$  óptimo. El ejemplo tiene solución teórica exacta (flujo de Poseuille), y se utilizan elementos de bajo orden para apreciar la mejora en la solución al tener en cuenta la corrección de contorno del GLS. El dominio de flujo es un trapecio con el fin de tener una malla estructurada pero distorsionada. Se utilizan elementos bilineales con igual interpolación para la velocidad y la presión. La malla consta de 576 elementos  $Q1/Q1$ , con 25 nodos distribuidos uniformemente a cada lado del trapecio, lo cual da un total de 625 nodos en toda la malla, ver Figura 1.1a. La solución exacta para  $f = 0$  y  $\mu = 0.5$  está dada por:

$$\mathbf{u} = \left\{ \begin{array}{c} 1 - y^2 \\ 0 \end{array} \right\}, \quad p = C - x \quad (1.98)$$

con  $C$  una constante. La velocidad se prescribió en todo el contorno a su valor teórico, y la presión a cero en la esquina inferior izquierda ( $C = 0$ ). La constante  $\beta$  se tomó igual a  $1/3$ , lo cual es el valor óptimo que dicta el análisis de error [Cod92]. La caída de presión teórica entre las esquinas inferiores del trapecio es de 5 (longitud de la base). La malla se distorsiona con el fin de comparar la solución obtenida incluyendo  $\Delta \mathbf{u}_h$  en los términos residuales cuando no se tiene la

corrección de contorno (problema (1.68)), y cuando no se incluye (en una malla no distorsionada de elementos  $Q1/Q1$  este término es cero). En el caso con corrección de contorno los laplacianos nunca se incluyen (problema (1.84)). Cabe recordar que a pesar de ello, el método sigue siendo consistente.



**Figura 1.1.** Flujo de Poiseuille utilizando método GLS y elementos  $Q1/Q1$ . (a): Malla de 576 elementos y 625 nodos. (b): Contornos de presión con corrección de contorno. (c): Contornos de presión sin corrección de contorno. (d): Contornos de presión sin corrección de contorno y despreciando las segundas derivadas.

La malla y los resultados del ejemplo pueden ser observados en la Figura 1.1. En todos los casos se obtuvo el campo de velocidades teórico. El campo de presiones nodalmente exacto sólo fue reproducido por la formulación con corrección de contorno (1.84). Para este caso la caída de presión entre las esquinas inferiores es de exactamente 5.0 y todas las líneas de iso-presión son perfectamente verticales como se puede observar en la Figura 1.1b. En la Figura 1.1c se muestra el campo de presiones para la formulación GLS estándar (1.68). La solución es muy buena en el interior del dominio, pero en los contornos inclinados las líneas de iso-presión se tuercen para tratar de reproducir  $\nabla p \cdot \mathbf{n} = 0$ , lo cual no es más que la condición de contorno errónea del GLS (ecuación (1.76) con  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ ), al tener una pobre aproximación de las segundas derivadas (para este elemento el error en las segundas derivadas es de orden  $O(1)$ ). La caída de presión en este caso es de 4.84. En la Figura 1.1d se presenta el campo de presiones al utilizar la formulación GLS (1.68) tomando directamente  $-\mu\Delta v_h = 0$  y  $-\mu\Delta u_h = 0$ . Los resultados son muy parecidos al caso anterior, aunque se obtuvo una caída de presión de 4.85, la cual se

aproxima ligeramente mejor al valor teórico de 5.0. Nuevamente esto último corrobora la pobre aproximación de las derivadas segundas. Cabe finalmente añadir que, en este caso, la solución teórica no tiene porqué ser reproducida exactamente (el elemento es bilineal mientras la solución teórica en velocidades es cuadrática).

### -Flujo de Poiseuille. Contornos abiertos

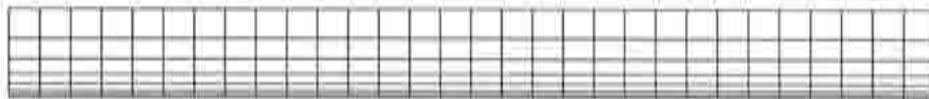


Figura 1.2. Malla de 210 elementos  $Q2$  y 915 nodos (cada elemento tiene 9 nodos) para probar la condición de contornos abiertos.

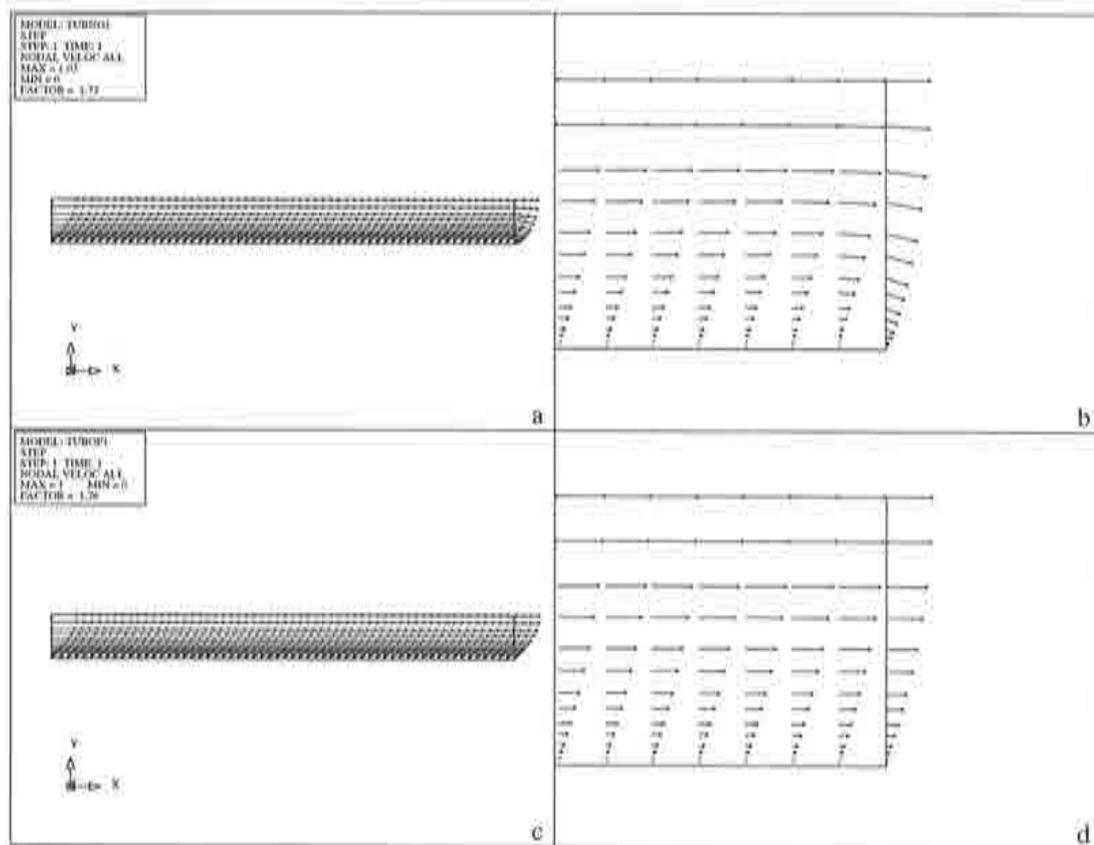
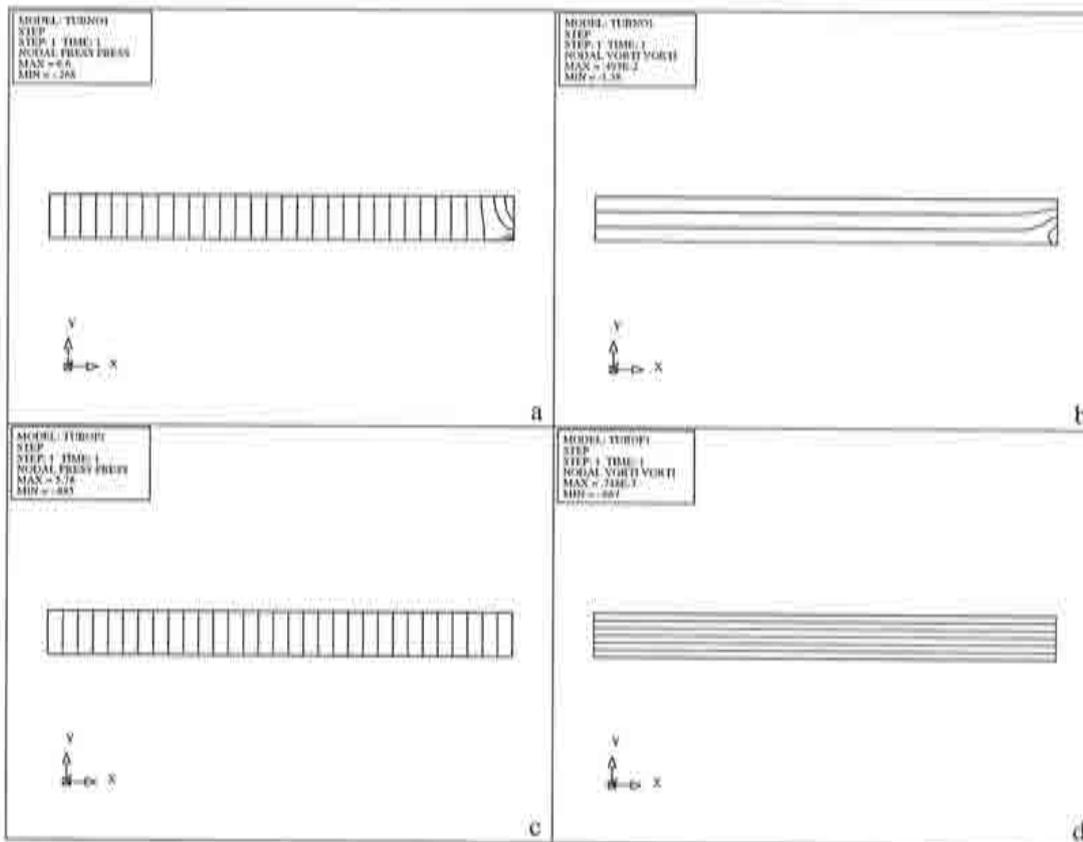


Figura 1.3. Flujo de Poiseuille utilizando Galerkin y elementos  $Q2/Q1$ . (a): Campo de velocidades para el caso de tensiones prescritas a cero en la salida. (b): Ampliación del campo de velocidades a la salida para el caso anterior. (c): Campo de velocidades para el caso de condición de contorno abierto en la salida. (d): Ampliación del campo de velocidades a la salida para el caso anterior.

El segundo ejemplo numérico de este capítulo tiene como principal objetivo mostrar el comportamiento de la condición de contorno abierto expuesta en el apartado 1.5. Este se soluciona



**Figura 1.4.** Flujo de Poiseuille utilizando Galerkin y elementos  $Q2/Q1$ . (a): Contornos de presión para el caso de tensiones prescritas a cero en la salida. (b): Contornos de vorticidad para el caso anterior. (c): Contornos de presión para el caso de condición de contorno abierto en la salida. (d): Contornos de vorticidad para el caso anterior.

utilizando el método de Galerkin con elementos div-estables  $Q2/Q1$ . El flujo se resuelve con y sin la condición de contorno abierto (1.92). El dominio de flujo es un rectángulo de 30 unidades de longitud por 3 de alto, comprendido entre las rectas  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = 30$  e  $y = 3$ . Éste se discretizó utilizando 210 elemento  $Q2$  y 915 nodos (ver Figura 1.2). La solución exacta para  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$  y  $\mu = 1.0$  está dada por:

$$\mathbf{u} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{3}y - \frac{1}{9}y^2 \\ 0 \end{array} \right\}, \quad p = C - \frac{2}{9}x \quad (1.99)$$

con  $C$  una constante. La velocidad se prescribió en los contornos  $x = 0$  y  $y = 0$  a su valor teórico, en la recta  $y = 3$  se impusieron condiciones de simetría ( $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  y  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{t} = 0$ , donde  $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{t}$  son los vectores normal y tangente al contorno respectivamente, y  $\boldsymbol{\sigma}$  el tensor de tensiones), y en la recta  $x = 30$  ("outflow") se impuso primero  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$  (velocidades libres), para luego probar la condición de contorno abierto (1.92) (esto equivale a no imponer nada).

En las Figuras 1.3a y 1.3b se presenta la solución del campo de velocidades al dejar el contorno de salida libre ( $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ ), mientras que en las Figuras 1.3c y 1.3d se muestra el mismo resultado pero utilizando la condición de contorno abierto. Puede observarse que al prescribir en forma débil las tensiones a cero ( $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ ) el flujo se abre a la salida, desviándose de la solución teórica

exacta (en la parte del dominio lejos de la salida la solución es la correcta). Por el contrario, con la condición de contorno abierto esto no sucede, reproduciéndose la solución exacta en velocidades en todo el dominio. En el campo de presiones ocurre algo similar, cuando se prescriben las tensiones a cero las líneas de isopresión se tuercen a la salida del dominio, mientras que con la condición de contorno abierto esto no sucede, obteniéndose la solución exacta en todo el dominio de flujo. En las Figuras 1.4a y 1.4c se presentan las líneas de isopresión para el contorno de salida libre y para la condición de contorno abierto respectivamente. La caída de presión para el primer caso es de 6.87, mientras que para el segundo caso es de 6.67 coincidiendo con la solución exacta. En las Figuras 1.4b y 1.4d se presentan los contornos de vorticidad ( $\nabla \times \mathbf{u}$ ). Nuevamente para la condición de contorno abierto se tiene la solución exacta, mientras que imponiendo las tensiones a cero en la salida la solución es totalmente errónea.

## 1.8 Conclusiones

En el presente capítulo se presentó la dificultad numérica asociada a la solución por elementos finitos del problema de Stokes. Ésta se debe a la incompresibilidad del flujo, lo cual obliga a utilizar elementos div-estables (que cumplan la condición de estabilidad de Babuška-Brezzi (1.41)) si se resuelve con el método de Galerkin, o utilizar técnicas de estabilización como el método GLS. Para este último se mostró el error que se comete en la condición de frontera para la presión debido a la mala aproximación de las segundas derivadas al utilizar elementos de bajo orden. Con el fin de corregir dicho defecto, se presentó una modificación de contorno que evita el error en la frontera para las presiones.

Se presentó una condición de contorno con el fin de evitar errores en la frontera cuando se tiene un dominio abierto. Es decir, cuando el dominio real se debe cortar con el fin de plantear el problema computacional. Dicha condición consiste en no precibir nada en la frontera abierta, o lo que es igual, en ensamblar sobre ésta los términos de contorno que resultan de obtener la forma débil del método de Galerkin (1.92).

Finalmente se recalcaron algunos aspectos computacionales de los métodos planteados, tales como el cálculo de los parámetros para el método GLS y la forma de extrapolar valores del elemento a la frontera, con el fin de evaluar las integrales de contorno tanto para la modificación del GLS como para la condición de contorno abierto.



## Capítulo 2

# Ecuación convección-difusión-reacción

### 2.1 Introducción y objetivos

La ecuación de convección-difusión ha sido ampliamente estudiada por diversos investigadores, como un buen modelo para el desarrollo de técnicas numéricas efectivas en el caso de ecuaciones de transporte más complejas. Si los términos convectivos predominan sobre los términos viscosos, o difusivos, (altos números de Péclet  $\gamma$  o de Reynolds en el caso de las ecuaciones de Navier-Stokes) la solución numérica estándar por elementos finitos, (método de Galerkin), falla y se producen oscilaciones en todo el dominio. Dichas oscilaciones desaparecen si se utilizan mallas muy finas, impensables desde el punto de vista computacional. Las oscilaciones del método de Galerkin se deben, como se verá más adelante, a la pérdida de estabilidad que se produce a medida que los términos convectivos se hacen más importantes. Diversos autores han expuesto metodologías efectivas para resolver este problema aplicando elementos finitos. Entre las principales destacan el método de "Characteristic Galerkin" [DR82, Pir82, LMZ84, ZC95], el método de "Taylor Galerkin" [Don84], el método SUPG "Streamline Upwind/Petrov-Galerkin" o SD "Streamline Diffusion" [BH82], y el método GLS "Galerkin Least-Square" [HFH89]. Todos los métodos anteriores añaden difusión numérica a la solución, diferenciándose unos de otros en las bases conceptuales sobre las cuales se diseña dicha difusión.

En el presente capítulo se expondrá de forma breve el problema numérico asociado a la ecuación de convección-difusión, y su solución utilizando los métodos SUPG y GLS. Estos dos métodos, a pesar de proporcionar estimadores globales de error óptimos [Näv82, JNP84], no permiten tener control sobre la solución en los lugares del dominio donde se tienen altos gradientes (capas límites o choques). Esta falta de estabilidad da lugar a oscilaciones que, a pesar de ser localizadas y de no propagarse al interior del dominio en problemas lineales, en problemas no lineales (Navier-Stokes, turbulencia) pueden generar inestabilidades globales que no permitan la convergencia a la solución. La falta de control sobre la variable en los lugares con altos gradientes se presenta también cuando se introduce un término importante de reacción a la ecuación de convección-difusión, incluso en ausencia de convección [FdC89, Cod93a, Cod93c]. Como en el caso de convección dominante, para la ecuación con términos de reacción importantes se tienen estimadores de error globales óptimos, en norma  $L_2$ , pero no estimadores punto a punto, en norma  $L_\infty$  o en los gradientes de la solución (semi-norma  $H^1$ ). La falta de convergencia punto a punto está relacionada con el cumplimiento del principio del máximo discreto (PMD) [CR73, Kik77, Ike83], el cual puede estudiarse a partir de los términos de la matriz del sistema

final de ecuaciones [Cod93a, Cod93c]. Con el fin de solucionar el problema de inestabilidad local debido a fuertes gradientes, se presenta en este capítulo un método consistente basado en la adición de difusión numérica en los lugares donde se presentan dichos gradientes, y teniendo en cuenta la ya añadida difusión al utilizar los métodos SUPG y GLS. Dicho método fue introducido en [Cod93a, Cod93c].

## 2.2 Problema de convección-difusión

Para analizar la inestabilidad por convección dominante, se plantea el siguiente problema de convección difusión, sin pérdida de generalidad:

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \phi - k \Delta \phi = f \quad \text{en } \Omega \quad (2.1)$$

$$\phi = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \quad (2.2)$$

donde  $k > 0$  es la constante de difusión,  $f$  el término de fuente, y  $\mathbf{u}$  un campo de velocidades dado tal que  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ .

El problema débil asociado al anterior problema fuerte, aplicando el método de Galerkin es: Encontrar  $\phi \in H_0^1(\Omega)$  tal que,

$$a(\phi, \psi) = l(\psi) \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega) \quad (2.3)$$

donde,

$$a(\phi, \psi) = \int_{\Omega} \psi (\mathbf{u} \cdot \nabla) \phi \, d\Omega + \int_{\Omega} k \nabla \psi \cdot \nabla \phi \, d\Omega \quad (2.4)$$

$$l(\psi) = \int_{\Omega} \psi f \, d\Omega \quad (2.5)$$

Es fácil encontrar las constantes de coercividad  $K_a$  y continuidad  $N_a$  de la forma bilineal  $a$ . Estas vienen dadas por:

$$K_a = C_{pf} k, \quad \text{y} \quad N_a = k + \|\mathbf{u}\|_{\infty} \quad (2.6)$$

donde  $C_{pf}$  es la constante de Poincaré-Friedrics. Si se denomina  $\phi_h$  a la aproximación por elementos finitos de  $\phi$ , se tiene que (aplicando el lema de Cea):

$$\|\phi - \phi_h\|_1 \leq \frac{N_a}{K_a} C h^p \quad (2.7)$$

donde  $C$  es una constante positiva,  $h$  el diámetro de la malla y  $p$  el orden del polinomio con que se aproxima el espacio de solución. Se puede observar que si  $k \rightarrow 0$  o si  $\|\mathbf{u}\|_{\infty} \rightarrow \infty$  el anterior estimador de error es totalmente inútil ya que  $N_a/K_a \rightarrow \infty$ . De igual forma se tiene (aplicando la desigualdad de Cauchy y la de Poincaré-Friedrics):

$$\|\phi_h\|_1 \leq \frac{\|f\|_0}{C_{pf} k} \quad (2.8)$$

y nuevamente si  $k \rightarrow 0$  no se tiene ningún control sobre  $\phi_h$ , y por lo tanto la estabilidad del método no está garantizada.

Con el fin de diseñar un método para estabilizar la solución, a continuación se estudia la aproximación por elementos finitos del problema de convección-difusión uni-dimensional.

### 2.2.1 Problema de convección-difusión unidimensional

Se plantea el siguiente problema:

$$u \frac{d\phi}{dx} - k \frac{d^2\phi}{dx^2} = 0 \quad 0 < x < l \quad (2.9)$$

$$\phi(0) = \phi_0, \quad \phi(l) = \phi_l \quad (2.10)$$

donde  $k > 0$  y  $u$  son constantes con el sentido físico de difusión y velocidad respectivamente, y  $\phi_0, \phi_l$  son los valores prescritos de  $\phi$  en el contorno.

Si se toma una partición uniforme del intervalo  $[0, l]$   $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = l$ , con  $x_m - x_{m-1} = h$ ,  $m = 0, \dots, N - 1$ , se define el número de Péclet elemental (número de Reynolds elemental en el caso de Navier-Stokes) como  $\gamma := uh/2k$  y se resuelve el problema (2.9) por el método de Galerkin utilizando elementos lineales, se llega a la siguiente ecuación en diferencias para el nodo  $m$ :

$$(1 - \gamma)\phi_{m+1} - 2\phi_m + (1 + \gamma)\phi_{m-1} = 0, \quad m = 1, \dots, N - 1 \quad (2.11)$$

$\phi_0$  y  $\phi_N$  están dadas por las condiciones de contorno. Si la solución exacta del problema (2.9) se introduce en la ecuación anterior y se desarrolla en series de Taylor [Cod89], se encuentra:

$$\left( u \frac{d\phi}{dx} - k \frac{d^2\phi}{dx^2} \right) \Big|_m + k^* \frac{d^2\phi}{dx^2} \Big|_m = 0 \quad (2.12)$$

donde

$$k^* = -\frac{k}{2\gamma} \left[ \frac{1}{\gamma} (\cosh(2\gamma) - 1) - \sinh(2\gamma) \right] \quad (2.13)$$

Por lo tanto el esquema de elementos finitos da una solución nodalmente exacta para el problema (2.13) con una difusión errónea de  $k - k^*$ . Se puede demostrar que  $\text{sgn}(k) = \text{sgn}(k^*)$ , que  $k^* \rightarrow 0$  si  $\gamma \rightarrow 0$  y que  $k^* \rightarrow \infty$  si  $\gamma \rightarrow \infty$ , por lo que el método de Galerkin resuelve una ecuación infradifusiva, o lo que es igual, introduce una difusión artificial negativa, esperándose oscilaciones espúreas cuando  $\gamma \rightarrow \infty$ . Otra forma de ver la dificultad numérica es resolver exactamente la ecuación en diferencias (2.11). Su solución exacta es:

$$\phi_m = C_1 + C_2 \left( \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma} \right)^m \quad (2.14)$$

donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes fijadas por las condiciones de contorno. De la ecuación anterior es claro que se producirán oscilaciones para  $\gamma > 1$ .

Otra forma de analizar el problema es calculando los valores propios del sistema (2.11). Se puede probar que para  $\gamma \neq 0$  existe un valor propio múltiple dado por  $\lambda = 2/\gamma$ , por lo cual la matriz asociada al sistema tiende a ser singular para  $\gamma \rightarrow \infty$ . Esto no es más que la consecuencia de la falta de coercividad del problema continuo cuando  $k \rightarrow 0$ .

Claramente, una solución al problema consiste en añadir difusión numérica artificialmente, con el fin de contrarrestar la difusión negativa que adiciona el método de Galerkin. Esta disipación numérica  $k'$  se toma de la forma:

$$k' = \alpha \frac{uh}{2} \quad (2.15)$$

donde  $\alpha$  es la denominada función de "upwind", la cual depende del número de Péclet y se determina imponiendo que el error de truncamiento del método de Galerkin sea cero. Esto es,

se adiciona  $k'$  a la difusión real  $k$  y se plantea nuevamente la ecuación en diferencias resultante de aplicar el método de Galerkin para elementos lineales. Al desarrollar en series de Taylor la nueva ecuación, se obtiene que  $k^*$  está dada por la siguiente expresión [Cod92]:

$$k^* = -\frac{k}{2\gamma} \left[ \left( \frac{1}{\gamma} + \alpha \right) (\cosh(2\gamma) - 1) - \sinh(2\gamma) \right] \quad (2.16)$$

Imponiendo  $k^* = 0$  se obtiene la siguiente expresión para  $\alpha$ :

$$\alpha = \coth\gamma - \frac{1}{\gamma} \quad (2.17)$$

Debido a que  $k^*$  es cero, la solución que se obtendrá será nodalmente exacta. En este sentido, la función (2.17) es óptima. Obsérvese que esta función debe ser diseñada para cada tipo de elemento, la función (2.17) sólo es válida para elementos lineales, mas el procedimiento es el mismo en otros casos. En [Cod92, COC92] pueden consultarse las funciones óptimas para elementos cuadráticos.

Tanto la función (2.17) para elementos lineales, como su similar para cuadráticos, son costosas desde el punto de vista computacional. Este defecto se corrige utilizando aproximaciones asintóticas a dichas funciones. Para el caso de elementos lineales, se observa que  $\alpha = \gamma/3 + O(\gamma^3)$  y que  $\alpha \rightarrow 1$  para  $\gamma \rightarrow \infty$ , de donde su aproximación asintótica se toma entonces como:

$$\alpha_a = \begin{cases} \gamma/3 & \text{para } |\gamma| \leq 3 \\ 1 & \text{para } |\gamma| > 3 \end{cases} \quad (2.18)$$

Para elementos cuadráticos se toma [Cod92, COC92]:

$$\alpha_a = \begin{cases} \gamma/6 & \text{para } |\gamma| \leq 3 \\ 1/2 & \text{para } |\gamma| > 3 \end{cases} \quad (2.19)$$

que es exactamente la aproximación tomada para elementos lineales dividida por dos.

Las anteriores aproximaciones a  $\alpha$  se han diseñado no sólo con el objetivo de evitar las oscilaciones numéricas, sino también para tratar de obtener la máxima exactitud posible. Sin embargo, si sólo se desea eliminar las oscilaciones espúreas, se puede observar la solución de la ecuación en diferencias (2.11) en el caso que se haya introducido la difusión artificial (2.15). Esta es:

$$\phi_m = C_1 + C_2 \left( \frac{1 + \gamma(1 + \alpha)}{1 - \gamma(1 - \alpha)} \right)^m \quad (2.20)$$

de donde se tiene que si sólo se quiere evitar las oscilaciones espúreas del método de Galerkin,  $\alpha$  debe exceder el siguiente valor crítico:

$$\alpha_c = 1 - \frac{1}{|\gamma|} \quad (2.21)$$

Este valor, como se verá más adelante, es exactamente el valor mínimo para el cual el problema satisfará el principio del máximo discreto [Kik77].

### 2.2.2 Problema de convección-difusión multidimensional. Método SUPG

El problema de convección-difusión se puede escribir como:

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \phi - \nabla \cdot (\mathbf{k} \cdot \nabla \phi) = f \quad \text{en } \Omega \quad (2.22)$$

$$\phi = g \quad \text{en } \Gamma_D \quad (2.23)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \cdot \nabla \phi = r \quad \text{en } \Gamma_N \quad (2.24)$$

donde  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$  es el campo de velocidades,  $\mathbf{k} = \mathbf{k}(\mathbf{x})$  el tensor de difusión, el cual se supone simétrico y definido positivo,  $f = f(\mathbf{x})$  el término de fuente,  $g = g(\mathbf{x})$  la prescripción de  $\phi$  en la parte del contorno tipo Dirichlet,  $r = r(\mathbf{x})$  es el flujo difusivo prescrito en la parte del contorno tipo Neumann, y  $\mathbf{n}$  la normal exterior al contorno  $\Gamma$ .

La primera idea para evitar las oscilaciones espúreas que ocurrían al aplicar el método de Galerkin al problema anterior para el caso de convección dominante, fue añadir la difusión artificial obtenida para el caso unidimensional [HHZ77, Hug78] al problema en varias dimensiones. Esto evitaba las oscilaciones pero la solución era sobre-difusiva, principalmente en la dirección perpendicular a las líneas de corriente. Para solucionar este problema, se introdujo la siguiente idea [HB79, KNZH80]: Si se escribe (2.22) en 2D y en un sistema ortogonal  $(\sigma, \nu)$ , siendo  $\sigma$  el parámetro de arco a lo largo de las líneas de corriente, y se supone  $\mathbf{k} = k\mathbf{I}$  isotrópico, se tiene:

$$|\mathbf{u}| \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} - \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \right) - \frac{\partial}{\partial \nu} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right) = f \quad (2.25)$$

de donde sólo la difusión en la dirección  $\sigma$  debe ser balanceada con la convección. Por lo tanto la difusión artificial debe ser añadida sólo en la dirección de las líneas de corriente. Es decir, la difusión artificial estará dada por la siguiente expresión:

$$\mathbf{k}' = \alpha \frac{|\mathbf{u}|h}{2} \frac{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2} \quad (2.26)$$

que es exactamente la difusión unidimensional diseñada en la sección anterior (2.15), pero a lo largo de las líneas de corriente. El problema débil discretizado queda entonces como sigue. Sea  $\{\Omega^e\}$  una discretización de elementos finitos de  $\Omega$  con  $e$  de 1 a  $n_{el}$ , y se definen los espacios funcionales,

$$\Psi = \left\{ \psi \in H^1(\Omega) \mid \psi|_{\Gamma_D} = 0 \right\} \quad (2.27)$$

$$\Phi = \left\{ \phi \in H^1(\Omega) \mid \phi|_{\Gamma_D} = g \right\} \quad (2.28)$$

El problema es: Encontrar  $\phi_h \in \Phi_h$  tal que,

$$a_d(\phi_h, \psi_h) = l(\psi_h) \quad \forall \psi_h \in \Psi_h \quad (2.29)$$

donde,

$$\Psi_h = \left\{ \psi \in \Psi \mid \psi|_{\Omega^e} \in R_k(\Omega^e) \right\} \subset \Psi \quad (2.30)$$

$$\Phi_h = \left\{ \phi \in \Phi \mid \phi|_{\Omega^e} \in R_k(\Omega^e) \right\} \subset \Phi \quad (2.31)$$

( $R_k$  definido en (1.39)) y siendo,

$$\begin{aligned} a_d(\phi_h, \psi_h) &= \int_{\Omega} \left[ \psi_h \mathbf{u} \cdot \nabla \phi_h + \nabla \psi_h \cdot \mathbf{k} \cdot \nabla \phi_h \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha |\mathbf{u}|h}{2} \nabla \psi_h \cdot \frac{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2} \cdot \nabla \phi_h \right] \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$l(\psi_h) = \int_{\Omega} \psi_h f \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \psi_h r \, d\Gamma \quad (2.33)$$

donde el término nuevo que se le ha adicionado a la forma clásica de Galerkin puede reescribirse como:

$$\int_{\Omega} \frac{\alpha |\mathbf{u}| h}{2} \nabla \psi_h \cdot \frac{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2} \cdot \nabla \phi_h \, d\Omega = \int_{\Omega} \tau (\mathbf{u} \cdot \nabla \psi_h) (\mathbf{u} \cdot \nabla \phi_h) \, d\Omega \quad (2.34)$$

con,

$$\tau = \frac{\alpha h}{2|\mathbf{u}|} \quad (2.35)$$

De lo anterior se observa que la nueva forma débil es igual a la de Galerkin, pero tomando como función de prueba para el término convectivo:

$$\psi_h + \tau \mathbf{u} \cdot \nabla \psi_h \quad (2.36)$$

Para corregir esta inconsistencia del método, se toma entonces (2.36) como función de prueba para toda la ecuación y no sólo para la parte convectiva [HB82, BH82]. El problema final se escribe entonces como: Encontrar  $\phi_h \in \Phi_h$  tal que,

$$a_{supg}(\phi_h, \psi_h) = l_{supg}(\psi_h) \quad \forall \psi_h \in \Psi_h \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} a_{supg}(\phi_h, \psi_h) &= a(\phi_h, \psi_h) \\ &+ \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} (\tau^e \mathbf{u}^e \cdot \nabla \psi_h) [\mathbf{u} \cdot \nabla \phi_h - \nabla \cdot (\mathbf{k} \cdot \nabla \phi_h)] \, d\Omega \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$l_{supg}(\psi_h) = l(\psi_h) + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} (\tau^e \mathbf{u}^e \cdot \nabla \psi_h) f \, d\Omega \quad (2.39)$$

donde  $a$  y  $l$  son las formas clásicas de Galerkin dadas por:

$$a(\phi_h, \psi_h) = \int_{\Omega} [\psi_h \mathbf{u} \cdot \nabla \phi_h + \nabla \psi_h \cdot \mathbf{k} \cdot \nabla \phi_h] \, d\Omega \quad (2.40)$$

$$l(\psi_h) = \int_{\Omega} \psi_h f \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \psi_h \tau \, d\Gamma \quad (2.41)$$

y el parámetro  $\tau$ , comúnmente denominado tiempo intrínseco, se evalúa a nivel elemental. Esto es:

$$\tau^e = \frac{\alpha^e h^e}{2|\mathbf{u}^e|} \quad (2.42)$$

tomando para la función  $\alpha$  su aproximación asintótica dependiendo del tipo de elemento (2.18) o (2.19), siendo  $h^e$  el diámetro del elemento, y  $|\mathbf{u}^e|$  la norma de una velocidad típica del elemento.  $h^e$  se evalúa en la dirección del flujo mediante la siguiente ecuación [Cod92]:

$$h^e = h_0 \frac{|\mathbf{u}^e|}{|\mathbf{J}^{-1} \mathbf{u}^e|} \quad (2.43)$$

donde  $\mathbf{J}$  es la matriz jacobiana de la transformación isoparamétrica evaluada en el centroide del elemento, y  $h_0$  el diámetro del elemento en el dominio natural, tomado como 2 y como 0.7 para cuadriláteros (o hexaédros) y triángulos (o tetraédros) respectivamente. Se comprueba fácilmente que la solución del problema fuerte satisface (2.37), verificando así la consistencia del método.

• *Observaciones:*

- Los nuevos términos en (2.37) se computan sólo en el interior de los elementos. Esto se debe a que para las funciones de forma con continuidad  $C^0$  utilizadas comúnmente, el  $\Delta\phi$  (proveniente del término difusivo si  $\mathbf{k} = k\mathbf{I}$ ) no está definido sobre el contorno de los elementos. En el caso de elementos lineales este término es cero, pero en elementos de mayor orden debe ser incluido para mantener la consistencia del método.

### 2.2.3 Problema de convección-difusión multidimensional. Método GLS

El método SUPG presentado en la sección anterior consiste en añadir a la función de prueba de Galerkin el operador del término convectivo aplicado a la función de prueba y multiplicado por un parámetro  $\tau$ . Como extensión directa de este método, se puede ahora añadir a la función de prueba de Galerkin todo el operador diferencial aplicado a dicha función de prueba y multiplicado por  $\tau$ . El nuevo método introducido por Hughes y colaboradores [HFH89, HFB86, HF87, FH88] se denomina comúnmente “Galerkin/Least-Squares method” (GLS) y ya fue presentado en el capítulo anterior de este trabajo para el problema de Stokes.

La formulación variacional se formula entonces como: Encontrar  $\phi_h \in \Phi_h$  tal que,

$$a_{gls}(\phi_h, \psi_h) = l_{gls}(\psi_h) \quad \forall \psi_h \in \Psi_h \quad (2.44)$$

donde,

$$a_{gls}(\phi_h, \psi_h) = a(\phi_h, \psi_h) + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau^e \mathcal{L}(\psi_h) \mathcal{L}(\phi_h) \, d\Omega \quad (2.45)$$

$$l_{gls}(\psi_h) = l(\psi_h) + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau^e \mathcal{L}(\psi_h) f \, d\Omega \quad (2.46)$$

$$\mathcal{L}(\phi_h) = \mathbf{u} \cdot \nabla \phi_h - \nabla \cdot (\mathbf{k} \cdot \nabla \phi_h) \quad (2.47)$$

Las formas  $a$  y  $l$  son las dadas por (2.40) y (2.41) respectivamente, y  $\mathcal{L}(\cdot)$  es el operador diferencial de la ecuación de convección-difusión.

El método GLS no ofrece ninguna ventaja sobre el SUPG para el caso de la ecuación de convección-difusión. Sin embargo, como se vio en el capítulo anterior, en el caso del problema de Stokes permite evitar la condición BB. La función  $\alpha^e$  óptima para el GLS será diferente que para el SUPG, pero puede determinarse analizando nuevamente el problema de convección-difusión unidimensional [Cod92].

El tiempo intrínseco  $\tau^e$  para el método GLS se toma igual que para el método SUPG, pero teniendo en cuenta que en el caso de cero convección la perturbación de la función de prueba no desaparece (es claro que para el método SUPG la perturbación es exactamente cero si no existe convección). A partir de (2.42), (2.18) y (2.19), tomando el límite difusivo ( $|\mathbf{u}|^e = 0$ ) para el caso  $\gamma^e < 1$ , se tiene entonces:

$$\tau^e = \begin{cases} \frac{\beta h^e{}^2}{4k^e} & \text{para } \gamma^e \leq 1 \\ \frac{\alpha_a^e h^e}{2|\mathbf{u}|^e} & \text{para } \gamma^e > 1 \end{cases} \quad (2.48)$$

donde el parámetro  $\beta$  depende del tipo de elemento, y es de  $1/3$  para elementos lineales y de  $1/9$  en el caso de cuadráticos [Cod92]. La función  $\alpha_a^e$  viene dada por (2.18) y (2.19) dependiendo nuevamente del tipo de elemento.  $k^e$  es la constante de difusión típica del elemento.

Obsérvese que el parámetro  $\tau^e$  para el caso difusivo ( $\gamma^e \leq 1$ ) es el usado para el problema de Stokes presentado en el capítulo anterior, reemplazando  $k^e$  por la viscosidad  $\mu$  (1.70).

### 2.3 Problema de convección-difusión-reacción

Como se mencionó anteriormente, los métodos SUPG (y GLS), proporcionan estimadores globales de error óptimos [Näv82, JNP84, HFH89] para el problema de convección-difusión. Sin embargo, en aquellos lugares donde la solución presenta altos gradientes (capas límites, etc.), no se tiene control sobre la solución (no se tienen estimadores de error punto a punto, o en los gradientes de la solución). Debido a ello pueden producirse oscilaciones localizadas, que pueden impedir la convergencia en problemas no lineales. Esta situación se ve agravada cuando a la ecuación de convección-difusión se le añaden términos de reacción importantes. Aún en la ausencia de convección, la presencia de estos términos puede producir oscilaciones localizadas debido a la falta de control de la solución en los lugares con altos gradientes. El problema es similar al que se tiene cuando la convección es dominante y se utiliza el método SUPG: la norma  $L_2$  del error es óptima (o casi óptima), pero no se tiene control en norma  $L_\infty$  ni en la seminorma  $H^1$  [FdC89].

Para analizar el problema expuesto en el párrafo anterior, se plantea el siguiente problema de convección-difusión-reacción:

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \phi - k \Delta \phi + \sigma \phi = f \quad \text{en } \Omega \quad (2.49)$$

$$\phi = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \quad (2.50)$$

donde  $k > 0$  es la constante de difusión,  $\sigma \geq 0$  la constante de reacción,  $f$  el término de fuente, y  $\mathbf{u}$  un campo de velocidades dado tal que  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ .

El problema débil asociado al anterior problema fuerte, aplicando el método de Galerkin es: Encontrar  $\phi \in H_0^1(\Omega)$  tal que,

$$a(\phi, \psi) = l(\psi) \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega) \quad (2.51)$$

Las formas se definen como:

$$a(\phi, \psi) = \int_{\Omega} \psi (\mathbf{u} \cdot \nabla) \phi \, d\Omega + \int_{\Omega} k \nabla \psi \cdot \nabla \phi \, d\Omega + \int_{\Omega} \sigma \psi \phi \, d\Omega \quad (2.52)$$

$$l(\psi) = \int_{\Omega} \psi f \, d\Omega \quad (2.53)$$

Como se puede verificar fácilmente, las constantes de coercividad  $K_a$  y continuidad  $N_a$  de la forma bilineal  $a$  vienen dadas por:

$$K_a = C_p f k \quad \text{y} \quad N_a = k + \|\mathbf{u}\|_\infty + \sigma \quad (2.54)$$

Como para la ecuación de convección-difusión, si se denomina  $\phi_h$  a la aproximación por elementos finitos de  $\phi$ , se tiene que (aplicando el lema de Cea):

$$\|\phi - \phi_h\|_1 \leq \frac{N_a}{K_a} C h^p \quad (2.55)$$

donde  $C$  es una constante positiva,  $h$  el diámetro de la malla y  $p$  el orden del polinomio con que se aproxima el espacio de solución. Se puede observar que si  $k \rightarrow 0$  (o si  $k$  es mucho menor que  $\mathbf{u}$  o que  $\sigma$ ) el anterior estimador de error es totalmente inútil ya que  $N_a/K_a \rightarrow \infty$ . De igual forma se tiene (aplicando la desigualdad de Cauchy):

$$\|\phi_h\|_1 \leq \frac{\|f\|_0}{K_a} \quad (2.56)$$

y nuevamente si  $k \rightarrow 0$  no se tiene ningún control sobre  $\phi_h$ , y por lo tanto la estabilidad del método no está garantizada. Una forma sencilla de ver que aún cuando se utilice el método SUPG el problema no desaparece, es que para el caso de convección cero (y por lo tanto la perturbación del SUPG sería exactamente cero), el problema persiste debido a la presencia de los términos de reacción ( $K_a$  permanecería igual y  $N_a = k + \sigma$ ). La falta de control sobre los gradientes de la solución se ve claramente en la siguiente desigualdad:

$$a(\phi, \phi) = k \|\nabla \phi\|_0^2 + \sigma \|\phi\|_0^2 \leq \|f\|_0 \|\phi\|_0 \quad (2.57)$$

Si  $k \rightarrow 0$  se tiene control sobre la solución, mas no sobre su gradiente (éste puede ser muy grande). De aquí que en las zonas con rápida variación de  $\phi$  puedan producirse oscilaciones espúreas localizadas, y no se tenga convergencia puntual.

En problemas de evolución temporal, un esquema numérico que evite oscilaciones localizadas debe ser monótono o preservar monotonía [Cod93a]. Se dice que un esquema es monótono si la solución numérica de todos los pasos de tiempo, mantiene el signo de la solución numérica del paso de tiempo anterior para todos los nodos de la malla espacial. Se dice que un esquema preserva monotonía si sólo la monotonicidad de los datos iniciales es mantenida [LeV90]. Según el teorema de Godunov [LeV90], un método lineal que preserve monotonía es cuando mucho de primer orden en exactitud. Por consiguiente, la única forma de tener un método que mantenga la precisión en las regiones donde la solución es suave, y que evite las oscilaciones numéricas en los lugares donde se presenten altos gradientes es que sea no lineal [Cod93a]. La idea entonces para diseñar un método de captura de discontinuidades (o de eliminación de oscilaciones en los lugares con altos gradientes), es añadir difusión numérica en las zonas con altos gradientes, pero siendo ésta proporcional al residuo de la ecuación diferencial para conservar la consistencia del método (y cumplir el teorema de Godunov), y de tal forma que su influencia en las zonas donde la solución es suave sea prácticamente nula.

### 2.3.1 Principio del máximo discreto

Para el caso particular de la ecuación de convección-difusión, la convergencia puntual y monotonía de un esquema numérico, y por lo tanto el diseño de un método de captura de discontinuidades, esta íntimamente ligada al cumplimiento del principio del máximo discreto (PMD) [Cod93a, Cod93c]. Es claro que el problema continuo cumple el principio del máximo [CH62], esto es, la solución tiene su máximo en el contorno cuando el término de fuente  $f$  es no-positivo. La cuestión es saber si el problema discreto cumple el principio del máximo discreto (PMD).

El PMD se escribe (tomado de [Cod93a]) como sigue: Sea  $N_t$  el número total de nodos de la malla de elementos finitos y  $N_f$  el número de nodos interiores. La discretización de elementos finitos genera el siguiente sistema de ecuaciones algebraico:

$$Ax = b \quad (2.58)$$

donde  $x$  es el vector de incógnitas nodales  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, N_t$ . Los valores  $x_i$ ,  $i = N_f + 1, \dots, N_t$  se conocen de las condiciones de contorno tipo Dirichlet. El PMD se cumple si:

$$\max_{i=1, \dots, N_t} \{x_i\} = x_m, \quad \text{con } N_f + 1 \leq m \leq N_t \quad (2.59)$$

es decir, si el máximo del vector  $x$  pertenece a un nodo del contorno.

El cumplimiento del PMD tiene importantes consecuencias para la convergencia del esquema numérico [Cod93a]. La convergencia uniforme y la estabilidad punto a punto pueden demostrarse por medio los siguientes teoremas:

**Teorema 2.1** Si para el siguiente problema continuo y estacionario de convección-difusión-reacción:

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \phi - k \Delta \phi + \sigma \phi = f \quad \text{en } \Omega \quad (2.60)$$

$$\phi = g \quad \text{en } \partial\Omega \quad (2.61)$$

se cumple que,  $\mathbf{u} \in L^\infty(\Omega)$ ,  $f \in L^p(\Omega)$  con  $2 \leq n_{\text{sd}} < p$ , y  $g' \in W^{1,p}(\Omega)$  siendo  $g'$  la extensión de  $g$ , entonces [CR73],

$$\begin{aligned} \|\phi\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq \|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + C\|f\|_{L^p(\Omega)}, \text{ y} \\ \phi &\in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \end{aligned}$$

**Teorema 2.2** Con las condiciones del Teorema 2.1, si el algoritmo numérico cumple el PMD se tiene:

- 1) La solución del problema discreto  $\phi_h$  cumple [CR73]:

$$\|\phi_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + C\|f\|_{L^p(\Omega)} \quad (2.62)$$

- 2) Si  $\phi \in W^{1,p}(\Omega)$ ,  $p > n_{\text{sd}}$ , y  $h$  es el diámetro de la partición de elementos finitos [CR73],

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\phi - \phi_h\|_{L^\infty(\Omega)} = 0 \quad (2.63)$$

- 3) Si se toman elementos lineales:

– 3.1) Si  $\phi \in W^{2,p}(\Omega)$ ,  $p > n_{\text{sd}}/2$  entonces,  $\|\phi - \phi_h\|_{L^\infty(\Omega)} = O(h)$  [CR73] (sub-óptimo).

– 3.2) Si además  $f \in H^1(\Omega)$  y la convección es despreciable (problema auto-adjunto) entonces,  $\|\phi - \phi_h\|_{L^\infty(\Omega)} = O(h^{2-\epsilon}) \forall \epsilon > 0$  [Nit75] (casi óptimo).

- 4) Si se toman elementos cuadráticos, la convección es despreciable (problema auto-adjunto) y  $f \in W^{1,3}(\Omega)$  entonces,  $\|\phi - \phi_h\|_{L^\infty(\Omega)} = O(h^{3-\epsilon}) \forall \epsilon > 0$  [Wah78] (casi óptimo).

Una condición suficiente para que un esquema numérico cumpla el PMD, viene dada por el siguiente teorema tomado de [Cod93a]:

**Teorema 2.3** Si la matriz del sistema (2.58) cumple:

$$a_{ij} \leq 0, \quad \text{para } i \neq j, \quad i = 1, \dots, N_f, \quad j = 1, \dots, N_t \quad (2.64)$$

$$\sum_{j=1}^{N_t} a_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, N_f \quad (2.65)$$

la submatriz  $\mathcal{A}_s = [a_{ij}]$ ,  $i, j = 1, \dots, N_f$  es no singular, y  $b_i \leq 0$ ,  $i = 1, \dots, N_f$ , entonces el PMD se cumple.

A continuación se tratará de verificar (a la luz del Teorema 2.3) el cumplimiento del PMD para el siguiente problema de convección-difusión-reacción unidimensional:

$$u \frac{d\phi}{dx} - k \frac{d^2\phi}{dx^2} + \sigma \phi = 0 \quad 0 < x < l \quad (2.66)$$

$$\phi(0) = 0, \quad \phi(l) = 0 \quad (2.67)$$

con  $u \geq 0$ .

Aplicando el método de Galerkin, utilizando elementos lineales y una partición uniforme del intervalo  $[0, l]$  de tamaño  $h$ , se obtienen las siguientes matrices elementales de difusión  $\mathbf{A}_d^{(e)}$ , convección  $\mathbf{A}_c^{(e)}$  y reacción  $\mathbf{A}_r^{(e)}$ :

$$\mathbf{A}_d^{(e)} = \frac{k}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_c^{(e)} = \frac{u}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_r^{(e)} = \frac{\sigma h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

Para analizar si el sistema cumple el PMD, basta con revisar las condiciones del Teorema 2.3 para las matrices elementales, ya que la matriz global del sistema se obtiene mediante el operador de ensamblaje (el cual es lineal). La condición (2.64) implica:

$$-\frac{k}{h} \pm \frac{u}{2} + \frac{\sigma h}{6} \leq 0 \quad (2.69)$$

Obsérvese que si la matriz  $\mathbf{A}_r^{(e)}$  fuese diagonal (como en diferencias finitas), el término de reacción no influiría en el cumplimiento del PMD. Para elementos finitos es claro que de (2.69) el término de reacción influye negativamente para el cumplimiento del PMD.

Utilizar el método SUPG para discretizar (2.66) es equivalente a redefinir la velocidad  $u$  y la difusión  $k$  en (2.69) por:

$$\bar{u} := u - \frac{\alpha h}{2} \sigma, \quad \bar{k} := k + \frac{\alpha h}{2} u \quad (2.70)$$

donde  $\alpha$  es la función de "upwind" definida para el método SUPG. Entonces, (2.69) se transforma en las siguientes desigualdades al reemplazar  $u$  y  $k$  por  $\bar{u}$  y  $\bar{k}$  respectivamente:

$$(6\gamma + 3\rho)\alpha \geq -6 + 6\gamma + 2\rho \quad \text{y} \quad (6\gamma - 3\rho)\alpha \geq -6 - 6\gamma + 2\rho \quad (2.71)$$

donde los números adimensionales son:

$$\gamma = \frac{|u|h}{2k} \quad \text{y} \quad \rho = \frac{\sigma h^2}{2k} \quad (2.72)$$

En general no es posible cumplir ambos requerimientos en (2.71), y se puede concluir entonces que el método SUPG no conlleva siempre a un esquema monótono (que satisfaga el PMD). Por el contrario, si  $\sigma = 0$  (y por lo tanto  $\rho = 0$ ), se tiene de (2.71) que  $\alpha \geq 1 - 1/\gamma$ . Éste es el mismo valor presentado en (2.21) como condición para que la solución no oscile de un nodo a otro.

A continuación se presenta el método de captura de discontinuidades "shock-capturing method" adoptado en el presente trabajo, y extraído de [Cod93a, Cod93c]. Éste fue diseñado basándose en el PMD, y teniendo en cuenta la consistencia, exactitud y la difusión numérica que ya se tiene al adoptar el esquema SUPG (o GLS) para estabilizar los términos convectivos.

### 2.3.2 Método anisotrópico de captura de discontinuidades ASC

Para solucionar el problema de oscilaciones localizadas en las capas con altos gradientes, se han propuesto diferentes metodologías. Entre éstas se tienen métodos como el "Galerkin Gradient least-squares" [FdC89], el "Subgrid scale method" [Hug95], y métodos de captura de discontinuidades "Shock-capturing methods" como los expuestos en [HMM86, GdC88, JSH87, Sha88, TP86]. En este trabajo se ha adoptado un método que sigue la línea de estos últimos.

Los métodos de captura de discontinuidades básicamente añaden difusión artificial en las zonas del dominio con altos gradientes, siendo ésta proporcional al residuo de la ecuación diferencial para mantener la consistencia. El método expuesto en [HMM86] tiene el inconveniente

de que esta difusión puede llegar a ser negativa. En [GdC88, JSH87, Sha88] este defecto es corregido, y se plantea una forma estándar para la adición de difusión numérica en este tipo de métodos. El término de difusión que se añade a la forma débil del esquema adoptado (Galerkin, SUPG, GLS o cualquier otro) se puede escribir como:

$$a_{isc}(\phi_h, \psi_h) = \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \frac{1}{2} \alpha_c^e h^e \frac{|\mathcal{R}(\phi_h)|}{|\nabla \phi_h|} \nabla \psi_h \cdot \nabla \phi_h \, d\Omega \quad (2.73)$$

si  $|\nabla \phi_h| \neq 0$  y cero de lo contrario. En (2.73) se introdujo el término

$$\mathcal{R}(\phi_h) = \mathbf{u} \cdot \nabla \phi_h - k \Delta \phi_h + \sigma \phi_h - f \quad (2.74)$$

el cual es el residuo de la ecuación diferencial (2.49) evaluado dentro de cada elemento, siendo entonces el método consistente. La función  $\alpha_c^e$  depende del método específico utilizado.

Es fácil ver que la difusión numérica adicionada es isotropa, es decir, se añade en todas las direcciones de flujo. Sin embargo, en el caso de utilizar el método SUPG o GLS para discretizar el problema ya se tiene una difusión numérica a lo largo de las líneas de corriente, añadida con el fin de estabilizar los términos convectivos y con valor  $k'$  (2.15). La idea del método propuesto en [Cod93a, Cod93c] es añadir en la dirección perpendicular a las líneas de corriente la difusión:

$$k_{iso} = \frac{1}{2} \alpha_c^e h^e \frac{|\mathcal{R}(\phi_h)|}{|\nabla \phi_h|} \text{ si } |\nabla \phi_h| \neq 0 \text{ y } k_{iso} = 0 \text{ de lo contrario,} \quad (2.75)$$

que es la dada por el método de captura de discontinuidades (2.73), y en la dirección de las líneas de corriente la máxima entre lo que añade el método SUPG o GLS para estabilizar la convección  $k'$  (2.15), y lo que se necesita para evitar las oscilaciones en las capas con altos gradientes  $k_{iso}$  (2.75). Por lo tanto, el término de difusión que se añade a la forma débil del esquema adoptado (Galerkin, SUPG, GLS o cualquier otro) queda como:

$$a_{asc}(\phi_h, \psi_h) = \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \left[ k_{iso} \nabla \psi_h \cdot \left( \mathbf{I} - \frac{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2} \right) \cdot \nabla \phi_h + \langle k_{iso} - k' \rangle \nabla \psi_h \cdot \left( \frac{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2} \right) \cdot \nabla \phi_h \right] d\Omega \quad (2.76)$$

donde se introduce la función  $\langle \cdot \rangle$  definida como:

$$\langle v \rangle = \begin{cases} v & \text{si } v > 0 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases} \quad (2.77)$$

De (2.76) se observa que si se utiliza el método de Galerkin se recupera (2.73), y la difusión añadida es igual en todas las direcciones. Si se utiliza SUPG o GLS la difusión numérica total (sumando la debida a la del método de captura de discontinuidades y a la del método para estabilizar la convección) es anisótropa en el caso que  $k' > 0$ , lo cual da origen al nombre del método. La ecuación (2.76) puede reescribirse de una forma más sencilla como:

$$a_{asc}(\phi_h, \psi_h) = \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \left[ k_{iso} \nabla \psi_h \cdot \nabla \phi_h + (\langle k_{iso} - k' \rangle - k_{iso}) \nabla \psi_h \cdot \left( \frac{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2} \right) \cdot \nabla \phi_h \right] d\Omega \quad (2.78)$$

Finalmente la función  $\alpha_c^e$  se obtiene de verificar el PMD para el problema multidimensional de convección-difusión [Cod93a]. La expresión obtenida en dicha referencia es:

$$\alpha_c^e = \max\left(0, C - \frac{2k}{|\mathbf{u}_{||}|h}\right) \quad (2.79)$$

donde  $C$  es una constante positiva que depende del tipo de elemento utilizado. Por medio de experimentos numéricos y estudios analíticos de casos particulares [Cod93a] se ha obtenido que  $C = 0.7$  para elementos lineales, y  $C = 0.35$  para elementos cuadráticos.  $\mathbf{u}_{||}$  viene dado por la siguiente expresión:

$$\mathbf{u}_{||} = \frac{\mathcal{R}(\phi_h)}{|\nabla\phi_h|^2} \nabla\phi_h \quad (2.80)$$

Obsérvese que si  $\mathcal{R}(\phi_h)$  es pequeño,  $|\mathbf{u}_{||}|$  también lo es, siendo entonces  $\alpha_c^e = 0$ , y por lo tanto  $k_{iso} = 0$ . Esta característica es muy importante para lograr que el efecto del método de captura de discontinuidades desaparezca rápidamente en los lugares donde la solución es suave. De esta forma se tiene un método que, además de consistente, no afecta la exactitud y convergencia de la solución en las partes del dominio donde no hay capas con altos gradientes.

### 2.3.3 Método SUPG o GLS + ASC para el problema de convección-difusión-reacción

Finalmente se presenta un método para la solución por elementos finitos de la ecuación de convección-difusión-reacción, el cual estabiliza no sólo las oscilaciones globales debidas a los efectos convectivos (mediante los métodos SUPG o GLS), sino que también elimina las oscilaciones localizadas en los lugares del dominio donde la solución presenta altos gradientes (mediante el método ASC).

Entonces, se plantea el siguiente problema de convección-difusión-reacción multidimensional:

$$\mathbf{u} \cdot \nabla\phi - k\Delta\phi + \sigma\phi = f \quad \text{en } \Omega \quad (2.81)$$

$$\phi = g \quad \text{en } \Gamma_D \quad (2.82)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \cdot \nabla\phi = \tau \quad \text{en } \Gamma_N \quad (2.83)$$

Sea  $\{\Omega^e\}$  una partición de elementos finitos del dominio  $\Omega$  siendo  $n_{el}$  el número de elementos, y definiendo  $h^e$  como el diámetro del elemento  $e$ . El problema discreto utilizando los métodos SUPG + ASC se escribe como: Encontrar  $\phi_h \in \Phi_h$  tal que,

$$a_{supg+asc}(\phi_h, \psi_h) = l(\psi_h) \quad \forall \psi_h \in \Psi_h \quad (2.84)$$

donde los espacios funcionales son los definidos en (2.30) y (2.31), la forma lineal  $l(\psi_h)$  es la definida en (2.33), y la forma  $a_{supg+asc}(\phi_h, \psi_h)$  se define como:

$$a_{supg+asc}(\phi_h, \psi_h) = a(\phi_h, \psi_h) + a'_{supg}(\phi_h, \psi_h) + a_{asc}(\phi_h, \psi_h) \quad (2.85)$$

siendo  $a$  la contribución debida al método de Galerkin,

$$a(\phi_h, \psi_h) = \int_{\Omega} [\psi_h \mathbf{u} \cdot \nabla\phi_h + \nabla\psi_h \cdot \mathbf{k} \cdot \nabla\phi_h + \sigma\psi_h\phi_h] \, d\Omega \quad (2.86)$$

$a'_{supg}$  la debida al método SUPG,

$$a'_{supg}(\phi_h, \psi_h) = \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} (\tau^e \mathbf{u}^e \cdot \nabla\psi_h) \mathcal{R}(\phi_h) \, d\Omega \quad (2.87)$$

( $\tau^e$  se calcula de (2.42)), y  $a_{asc}(\phi_h, \psi_h)$  la debida al método anisotrópico de captura de discontinuidades dada en (2.78).  $\mathcal{R}(\phi_h)$  es el residuo dentro de cada elemento (2.74), y  $\mathbf{u}^e$  una velocidad típica del elemento.

En el caso que los efectos convectivos sean estabilizados utilizando el método GLS, el problema discreto quedaría casi igual, reemplazando el término  $a'_{supg}(\phi_h, \psi_h)$  por el término  $a'_{gls}(\phi_h, \psi_h)$  definido como:

$$a'_{gls}(\phi_h, \psi_h) = \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau^e (\mathbf{u}^e \cdot \nabla \psi_h - k \Delta \phi_h + \sigma \phi_h) \mathcal{R}(\phi_h) \, d\Omega. \quad (2.88)$$

y utilizando  $\tau^e$  de (2.48), el cual incluye el caso de convección cero (límite difusivo). El problema débil discretizado será entonces: Encontrar  $\phi_h \in \Phi_h$  tal que,

$$a_{gls+asc}(\phi_h, \psi_h) = l(\psi_h) \quad \forall \psi_h \in \Psi_h \quad (2.89)$$

donde,

$$a_{gls+asc}(\phi_h, \psi_h) = a(\phi_h, \psi_h) + a'_{gls}(\phi_h, \psi_h) + a_{asc}(\phi_h, \psi_h) \quad (2.90)$$

Como en el caso de la ecuación de convección-difusión, el método GLS no aporta beneficios adicionales al método SUPG para el problema de convección-difusión-reacción. Sin embargo, como se vio en el capítulo anterior, en el caso del problema de Stokes permite evitar la condición BB. Este método se presentó con el fin de ser retomado para las ecuaciones de Navier-Stokes más adelante.

## 2.4 Aspectos computacionales

A continuación se presentan algunos detalles de la programación de los métodos presentados anteriormente. El primer aspecto computacional a tratar tiene que ver con el cálculo de la perturbación del método SUPG (2.38). Las integrales de dicha perturbación se evalúan numéricamente como sigue:

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} (\tau^e \mathbf{u}^e \cdot \nabla \psi_h) [\mathbf{u} \cdot \nabla \phi_h - \nabla \cdot (\mathbf{k} \cdot \nabla \phi_h) - f] \, d\Omega \approx \\ & \sum_{e=1}^{n_{el}} \sum_{ig=1}^{n_g} (\tau_{ig}^e \mathbf{u}_{ig}^e \cdot \nabla \psi_h) [\mathbf{u} \cdot \nabla \phi_h - \nabla \cdot (\mathbf{k} \cdot \nabla \phi_h) - f]_{ig} W_{ig} |J|_{ig} \end{aligned} \quad (2.91)$$

donde  $n_g$  es el número de puntos de integración del elemento,  $W_{ig}$  el peso del punto de integración y  $|J|_{ig}$  el determinante del jacobiano de la transformación isoparamétrica entre las coordenadas naturales del elemento y las coordenadas globales. Como puede observarse, los términos de la función de perturbación como del residuo elemental también son evaluados en el punto de integración del elemento. El parámetro  $\tau_{ig}^e$  se computa utilizando la longitud elemental a lo largo de las líneas de corriente dada en (2.43). Dicha longitud se calcula en el centroide del elemento y se utiliza la misma para todos los puntos de integración. Es decir:

$$\tau_{ig}^e = \frac{\alpha_{ig}^e h^e}{2|\mathbf{u}|_{ig}^e} \quad (2.92)$$

tomando para la función  $\alpha^e$  su aproximación asintótica dependiendo del tipo de elemento (2.18) o (2.19) y evaluándola en cada punto de integración. Como puede observarse,  $|\mathbf{u}|^e$  también es

evaluado en cada punto de integración, mas no  $h^e$ , que se computa en el centroide del elemento y es constante a nivel elemental.

Un segundo aspecto a resaltar es el cálculo de los términos del método de captura de discontinuidades. Al ser aproximados numéricamente se tiene:

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \left[ k_{iso} \nabla \psi_h \cdot \left( \mathbf{I} - \frac{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2} \right) \cdot \nabla \phi_h + \langle k_{iso} - k' \rangle \nabla \psi_h \cdot \left( \frac{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2} \right) \cdot \nabla \phi_h \right] d\Omega \approx \\ \sum_{e=1}^{n_{el}} \sum_{ig=1}^{n_g} \left[ k_{iso} \nabla \psi_h \cdot \left( \mathbf{I} - \frac{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2} \right) \cdot \nabla \phi_h \right. \\ \left. + \langle k_{iso} - k' \rangle \nabla \psi_h \cdot \left( \frac{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2} \right) \cdot \nabla \phi_h \right]_{ig} W_{ig} |J|_{ig} \quad (2.93) \end{aligned}$$

Nuevamente, todos los términos se evalúan en el punto de integración, excepto la longitud del elemento  $h^e$  utilizada en  $k'$  y  $k_{iso}$ .  $k'$  es la difusión añadida por el método SUPG, por lo cual se calcula en el punto de integración como:

$$k' = \tau_{ig}^e (|\mathbf{u}|_{ig}^e)^2 \quad (2.94)$$

Puede observarse de (2.92) que  $h^e$  es constante a nivel elemental y se calcula en el centroide del elemento mediante (2.43). Por el contrario  $|\mathbf{u}|^e$  se evalúa en cada punto de integración.

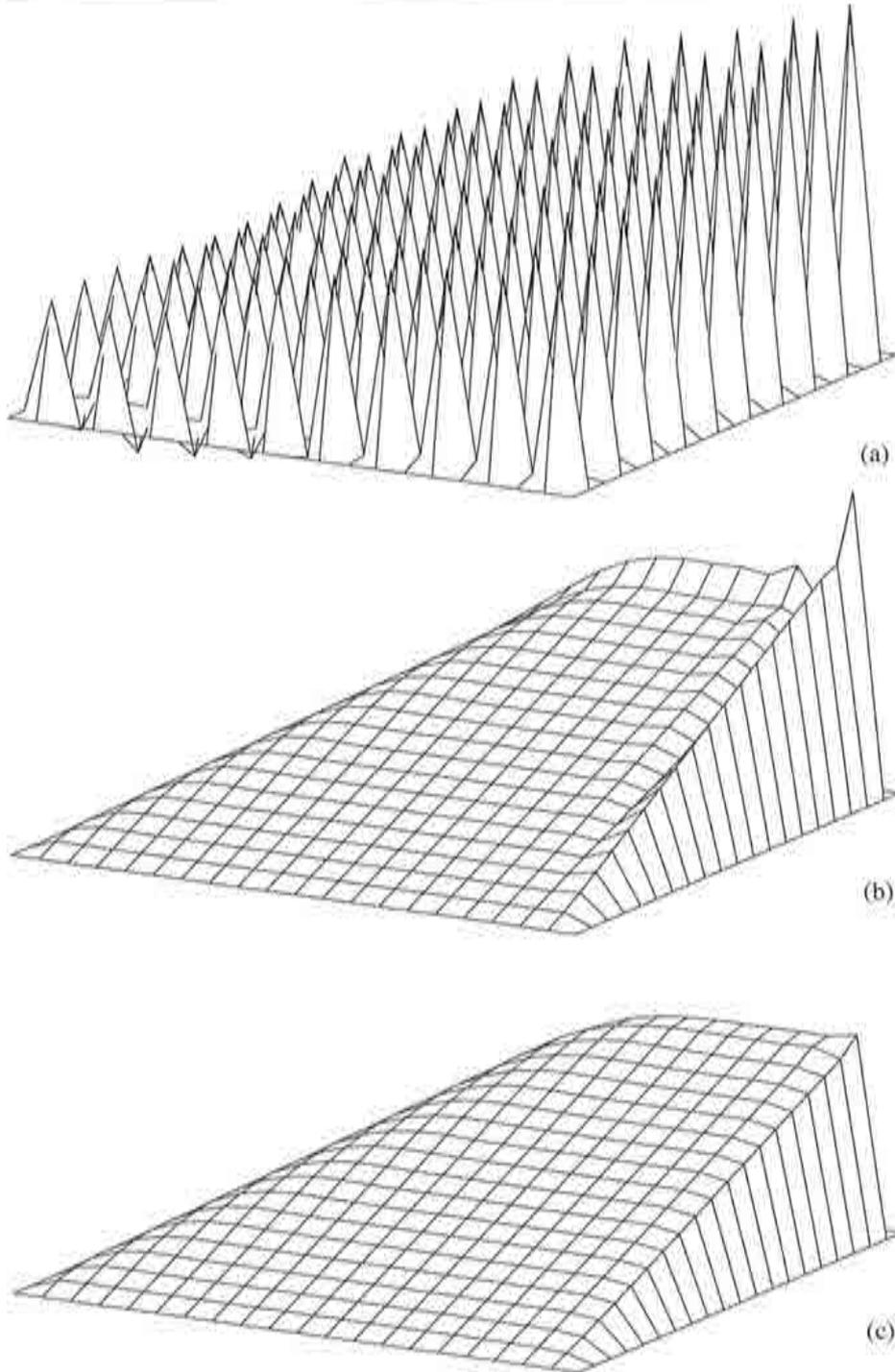
$k_{iso}$  es la difusión añadida por el método de captura de discontinuidades (2.75). Nuevamente todos los términos para el cálculo de  $k_{iso}$  se evalúan en el punto de integración del elemento, excepto  $h^e$ , que se toma constante a nivel elemental con un valor igual al máximo entre las longitudes del elemento a lo largo de los ejes cartesianos. Los valores necesarios para el cómputo de la función  $\alpha_p^e$  (2.79), que aparece en el cálculo de  $k_{iso}$  (2.75), también son evaluados en el punto de integración del elemento, excepto  $h^e$  que se toma igual que para  $k_{iso}$ .

## 2.5 Ejemplos numéricos

En este apartado se presenta un ejemplo sencillo con el fin de estudiar el comportamiento del método SUPG y del método anisotrópico de captura de discontinuidades (SUPG+ASC). Los datos para el problema (2.49) con la condición de contorno homogénea (2.50) se describen a continuación. El dominio  $\Omega$  donde el problema se resuelve es el cuadrado,  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ , el cual se discretizó utilizando una malla de  $20 \times 20$  elementos bilineales ( $Q1$ ) y 441 nodos. El término de fuente se tomó como  $f = 1$ , constante, y el coeficiente de difusión como  $k = 10^{-4}$ . El campo de velocidades se prescribió a  $\mathbf{u} = |\mathbf{u}|(\cos(\pi/3), \sin(\pi/3))$ , no estando entonces alineado con la malla de elementos finitos.

Se consideraron tres casos diferentes, los cuales corresponden a convección dominante, reacción dominante y una combinación de convección y reacción respectivamente. Los casos se presentan en el la Tabla 2.1.

Los resultados del primer caso se muestran en la Figura 2.1. Con el fin de observar lo que ocurre al utilizar el método de Galerkin estándar en problemas de convección dominante, se presentan los resultados en la Figura 2.1a. Como puede corroborarse, la solución es oscilatoria en todo el dominio. La solución utilizando sólo el método SUPG (Figura 2.1b) presenta algunas oscilaciones en la capa límite debidas a la bajísima difusión  $k$ . Dichas oscilaciones son prácticamente eliminadas al añadir los términos del método anisotrópico de captura de discontinuidades (Figura 2.1c).



**Figura 2.1.** Caso  $|u| = 1$ ,  $\sigma = 0.0001$ . (a): Método de Galerkin. (b): Método SUPG. (c): Método SUPG+ASC.

**Tabla 2.1 Casos del ejemplo numérico**

- |    |                 |                   |
|----|-----------------|-------------------|
| 1) | $ u  = 1,$      | $\sigma = 0.0001$ |
| 2) | $ u  = 0.0001,$ | $\sigma = 1$      |
| 3) | $ u  = 0.5,$    | $\sigma = 1$      |

Los resultados del caso 2) se muestran en la Figura 2.2. En este caso al utilizar el método

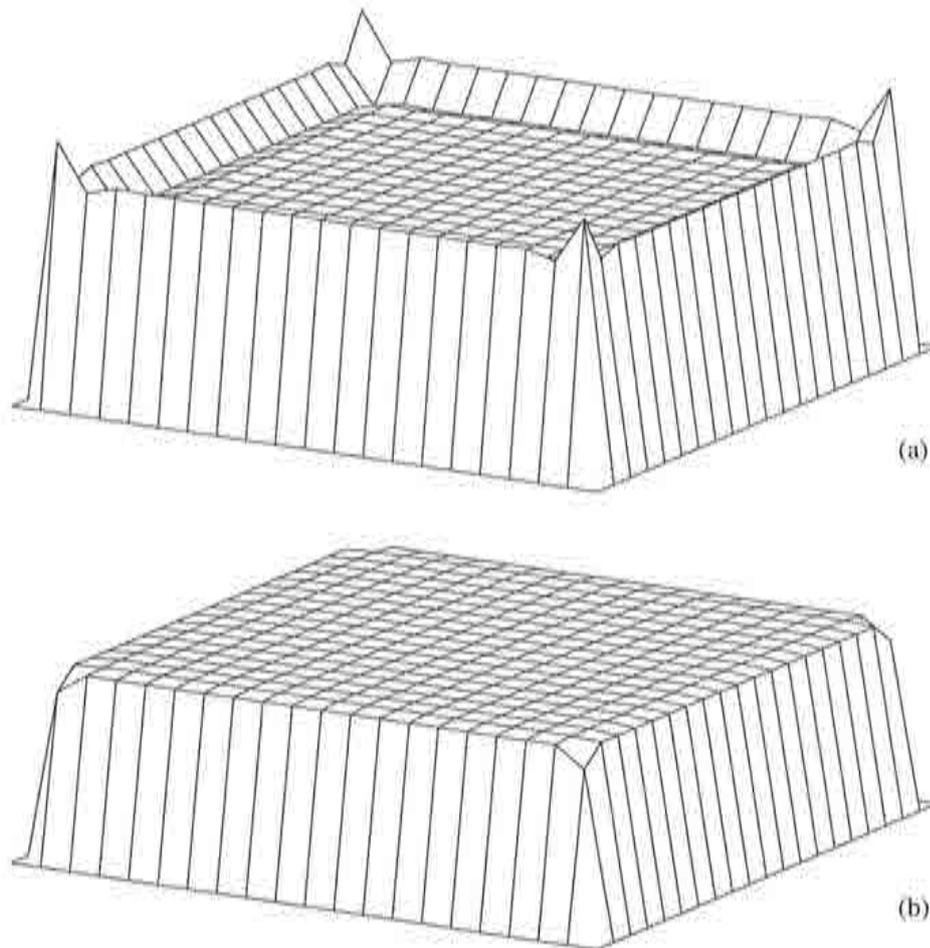


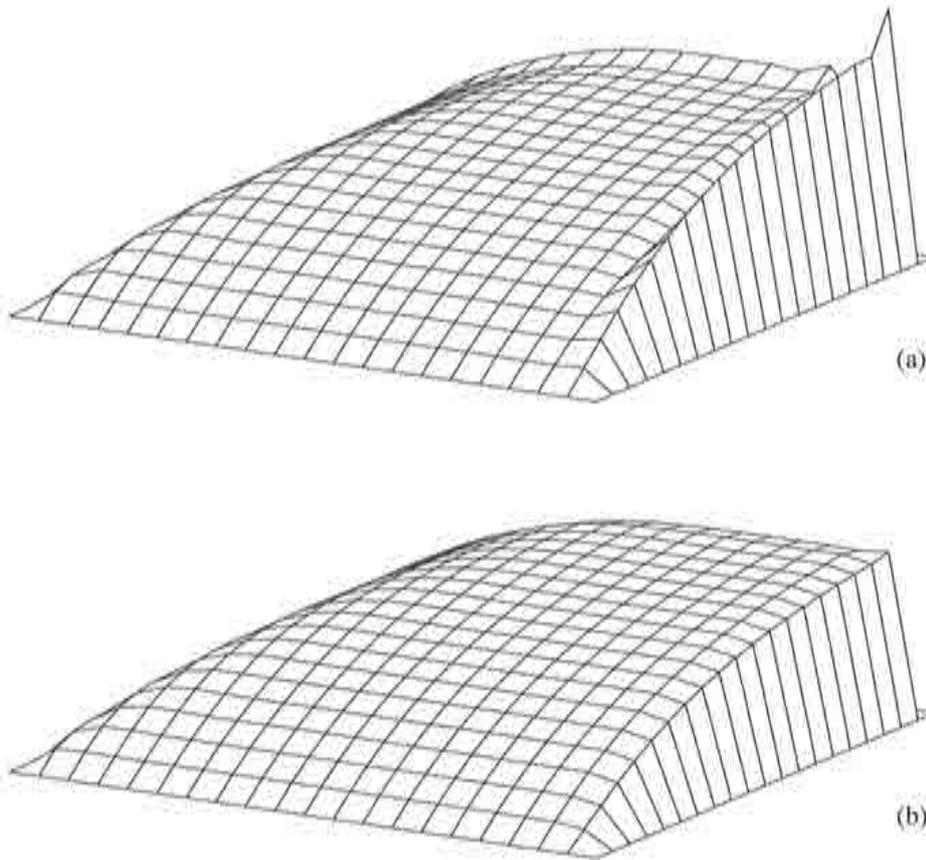
Figura 2.2. Caso  $|u| = 0.0001$ ,  $\sigma = 1$ . (a): Método SUPG. (b): Método SUPG+ASC.

SUPG (Figura 2.2a) se tienen nuevamente oscilaciones en la capa límite, esta vez debidas a los altos términos de reacción. Al utilizar el método SUPG+ASC dichas oscilaciones desaparecen (Figura 2.2b).

Los resultados del tercer caso se muestran en la Figura 2.3. Nuevamente el método SUPG (Figura 2.3a) presenta oscilaciones en la capa límite debidas tanto a la baja difusión  $k$  como a los términos de reacción importantes. El método SUPG+ASC elimina estas oscilaciones como se puede observar en la Figura 2.3b.

## 2.6 Conclusiones

En el presente capítulo se plantearon los problemas numéricos que se tienen al intentar resolver numéricamente las ecuaciones de convección-difusión y de convección-difusión-reacción utilizando el método estándar de elementos finitos (método de Galerkin). Se presentaron los métodos SUPG y GLS para eliminar las oscilaciones espúreas en todo el dominio que resultan cuando se tienen términos de convección dominante. También se presentó un método anisotrópico de captura de discontinuidades (ASC) para eliminar las oscilaciones remanentes que se obtienen en las capas con altos gradientes aún utilizando los métodos SUPG o GLS. Dichas oscilaciones se deben tanto al dominio de los términos convectivos como a términos de reacción importantes.



**Figura 2.3.** Caso  $|\mathbf{u}| = 0.5$ ,  $\sigma = 1$ . (a): Método SUPG. (b): Método SUPG+ASC.

En los ejemplos numéricos se corroboró lo expuesto en el capítulo, observándose que el método SUPG es eficiente para evitar las oscilaciones espúreas que se obtienen en todo el dominio cuando los términos convectivos son importantes, mas no elimina las oscilaciones remanentes en las capas con altos gradientes. Estas últimas se eliminan al añadir los términos del método anisotrópico de captura de discontinuidades (ASC).

Por último cabe remarcar que el método anisotrópico de captura de discontinuidades (ASC) no es necesario para la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles debido a que éstas no presentan términos de reacción. Sin embargo, va a ser de trascendental importancia cuando se traten las ecuaciones diferenciales que rigen algunos modelos de turbulencia en el capítulo 5 del presente trabajo.

## Capítulo 3

# Problema de Stokes con rotación

### 3.1 Introducción y objetivos

En el presente capítulo se estudia la solución por elementos finitos del problema de Stokes sobre un sistema de ejes que rotan con una velocidad angular dada. Este problema modelo se elige con el fin de extender más adelante los resultados obtenidos a las ecuaciones de Navier-Stokes, y tener de esa forma la capacidad de simular el flujo a través de máquinas con álabes rotantes (ventiladores, turbinas, reactores químicos, etc.).

Como se verá a continuación, al escribir el problema de Stokes respecto a unos ejes no inerciales (que se trasladan y/o rotan respecto a los ejes fijos), aparecen dos nuevos términos. El primero de ellos es la fuerza centrífuga, la cual es independiente de la velocidad y de la presión, pudiendo entonces ser tratada como una fuerza de cuerpo (o incluida en la presión, ya que puede ser escrita como el gradiente de un campo escalar). Este término no induce problemas adicionales a los presentados en el capítulo 1, cuando se intenta aproximar por elementos finitos el problema de Stokes. El segundo término es la denominada fuerza de Coriolis. Esta fuerza depende del campo de velocidades, y añade un término antisimétrico a la forma débil del problema el cual deteriora la estabilidad del método estándar de Galerkin. Dicha inestabilidad está muy relacionada con la presencia de la presión, y se presenta cuando las fuerzas viscosas son pequeñas respecto a las de rotación. Si se escribe el problema sin presión, y por lo tanto sin condición de incompresibilidad, se encuentran sólo inestabilidades localizadas en las capas con altos gradientes, típicas de la ecuación de difusión-reacción (ver capítulo 2). Cuando se fuerza la incompresibilidad del flujo, y por lo tanto se añade la presión (la cual, como se presentó en el capítulo 1, puede verse como el multiplicador de Lagrange asociado a dicha restricción), se presentan oscilaciones espúreas en todo el dominio de flujo.

A continuación se presenta la formulación del problema utilizando elementos finitos tipo Galerkin. Se describen las inestabilidades mencionadas, y se presentan dos metodologías que eliminan las oscilaciones, manteniendo la precisión e incrementando la estabilidad. Tanto el planteamiento del problema como las metodologías de solución expuestas, han sido previamente publicadas por Codina y el autor de este trabajo en [CS97, CS94b, CS95, SCO95]. Por consiguiente, la mayor parte del contenido de este capítulo fue extraído de las anteriores referencias.

### 3.2 Problema de Stokes en ejes no inerciales

La ecuación de Stokes estacionaria escrita respecto a unos ejes no inerciales que rotan con una velocidad angular  $\omega/2$  puede escribirse como:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} + \frac{1}{4}\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - \nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (3.2)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{en } \partial\Omega \quad (3.3)$$

donde se ha tomado la condición  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  sobre todo el contorno para simplificar la exposición. El término  $\frac{1}{4}\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$  es la fuerza centrífuga (de aquí en adelante se supondrá incluida en  $\mathbf{f}$ ) y  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}$  la fuerza de Coriolis.  $\nu = \mu/\rho$  es la viscosidad cinemática del fluido,  $\mathbf{f}$  las fuerzas de cuerpo,  $\mathbf{r}$  la posición respecto a los ejes no inerciales,  $p$  el campo de presiones y  $\mathbf{u}$  el campo de velocidades relativo a los ejes no inerciales. La velocidad respecto a los ejes fijos  $\mathbf{u}_f$  esta dada por [Bat67]:

$$\mathbf{u}_f = \mathbf{u} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (3.4)$$

Existen dos dificultades numéricas asociadas al problema (3.1)-(3.3). La primera de ellas fue expuesta en el capítulo 1, y trata sobre la compatibilidad de los espacios de elementos finitos para la velocidad y la presión (condición BB [BF91]). En el mismo capítulo se expuso la posibilidad de utilizar igual interpolación modificando la forma variacional estándar de Galerkin [BD88, FH88, DW89].

La segunda dificultad encontrada al tratar de resolver el problema (3.1)-(3.3) con valores pequeños de la viscosidad es la presencia de oscilaciones espúreas cuando se utiliza la formulación de elementos finitos tipo Galerkin. Se verá más adelante que éstas son debidas a la presencia de la presión  $p$ , que puede entenderse como el multiplicador de Lagrange de la restricción de incompresibilidad (3.2). Si no se impone dicha condición, sólo se encuentran oscilaciones localizadas en las vecindades de las capas con altos gradientes. Este fenómeno es típico de los problemas con términos de reacción dominantes como se expuso en el capítulo anterior. En el caso del problema con presión, no se puede obtener un estimador global de estabilidad, lo cual sí es posible para el problema sin restricción de incompresibilidad (para este último se obtienen estimadores en norma  $L^2$ , mas no en norma  $H^1$ , por lo cual se esperan sólo oscilaciones locales, ver capítulo 2). Por consiguiente, en el problema con presión, no sólo se esperaran oscilaciones localizadas, sino que también pueden aparecer oscilaciones globales que deterioren la solución. El problema es similar al de la ecuación de convección-difusión presentado en el capítulo anterior, pero su estudio es más complicado debido a que es un fenómeno genuinamente multidimensional.

El número adimensional que permite cuantificar la importancia relativa de los términos viscosos y de rotación (o de Coriolis) es el número de Ekman, definido como:

$$\text{Ek} = \frac{\nu}{\omega L^2} \quad (3.5)$$

donde  $\omega = |\boldsymbol{\omega}|$  y  $L$  es una longitud característica del dominio computacional  $\Omega$ . El número de Ekman elemental se define como:

$$\text{Ek}_h = \frac{\nu}{\omega (h^e)^2} \quad (3.6)$$

siendo  $h^e$  el diámetro del elemento en consideración.

A continuación se desarrollarán dos formulaciones de elementos finitos libres de oscilaciones espúreas aún en el caso de números de Ek bajos, esto es, cuando las fuerzas de Coriolis dominan a las fuerzas viscosas. Primero se presentará la formulación estándar de Galerkin, con el fin de presentar los problemas numéricos descritos anteriormente, para luego presentar los métodos de estabilización.

### 3.3 Aproximación por elementos finitos tipo Galerkin

Sea  $n_{sd} = 2$  o  $3$  la dimensión del problema, y considérense los siguientes espacios funcionales:

$$\mathbf{V} = \left( H_0^1(\Omega) \right)^{n_{sd}} \quad (3.7)$$

$$Q = \left\{ q \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} q \, d\Omega = 0 \right\} \quad (3.8)$$

y las formas:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, d\Omega \quad (3.9)$$

$$b(q, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\Omega \quad (3.10)$$

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega \quad (3.11)$$

$$l(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega \quad (3.12)$$

con  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$  y  $q \in Q$ . La forma débil del problema (3.1)-(3.3) se escribe entonces como: Encontrar  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$  y  $p \in Q$  tal que,

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - b(p, \mathbf{v}) + b(q, \mathbf{u}) + d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \text{ y } \forall q \in Q \quad (3.13)$$

Como se mencionó anteriormente, en (3.13) así como en el resto del capítulo, se supondrá que la fuerza centrífuga está incluida en el término de fuerzas de cuerpo  $\mathbf{f}$ , esto es, se redefine  $\mathbf{f}$  como  $\mathbf{f} - (1/4)\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ .

La existencia y unicidad de solución para el problema anterior puede probarse exactamente igual que para el problema de Stokes sin la fuerza de Coriolis (ver capítulo 1). Obsérvese que la forma bilineal  $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  es continua y antisimétrica en  $\mathbf{V}$ , por lo cual  $d(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ , y entonces  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  es continua y coerciva en  $\mathbf{V}$ , ya que  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  es coerciva en dicho espacio (ver capítulo 1).

La aproximación por elementos finitos de (3.13) se obtiene tomando una partición regular de elementos finitos  $\{\Omega^e\}$  del dominio  $\Omega$ , y reemplazando los espacios  $\mathbf{V}$  y  $Q$  por los subespacios de elementos finitos  $\mathbf{V}_h \subset \mathbf{V}$  y  $Q_h \subset Q$  (de aquí en adelante se introduce el subíndice  $h$  para referirse al problema discreto de elementos finitos), definidos como:

$$\mathbf{V}_h = \left\{ \mathbf{v} \in C^0(\Omega)^{n_{sd}} \mid \mathbf{v}|_{\Omega^e} \in R_k(\Omega^e)^{n_{sd}} \right\} \quad (3.14)$$

$$Q_h = \left\{ q \mid q|_{\Omega^e} \in R_k(\Omega^e) \right\} \quad (3.15)$$

donde  $R_k(\Omega)$  se definió en (1.39). Nuevamente, los espacios  $\mathbf{V}_h$  y  $Q_h$  deben cumplir la condición de BB (1.41). Varias combinaciones de interpolaciones de velocidad y presión satisfacen la anterior condición. En el capítulo 1 del presente trabajo y en las referencias [Hug87, CSvS86] pueden consultarse algunas de ellas.

### 3.3.1 Estabilidad del método de Galerkin

A continuación se intentará estudiar las propiedades de estabilidad de la versión discreta del problema (3.13). Primero se introduce la forma bilineal  $\mathcal{A}$  actuando sobre  $(\mathbf{V}_h \times Q_h) \times (\mathbf{V}_h \times Q_h)$  definida como:

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{v}_h, q_h) := a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - b(p_h, \mathbf{v}_h) + b(q_h, \mathbf{u}_h) + d(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \quad (3.16)$$

y la forma lineal  $\mathcal{L}$  definida sobre  $\mathbf{V}_h \times Q_h$  como:

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}_h, q_h) := l(\mathbf{v}_h) \quad (3.17)$$

El problema discreto se escribe entonces como: Encontrar  $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$  tal que,

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{v}_h, q_h) = \mathcal{L}(\mathbf{v}_h, q_h) \quad \forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h \quad (3.18)$$

La estabilidad numérica del problema se tiene por la coercividad de la forma bilineal  $\mathcal{A}$  en  $\mathbf{V}_h$  y por la condición de BB (1.41). Si ahora definimos un escalar  $\alpha \geq 0$  dado, se verifica fácilmente que:

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{u}_h + \alpha(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_h), p_h) = \nu \|\nabla \mathbf{u}_h\|_0^2 + \alpha \|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_h\|_0^2 + \alpha \int_{\Omega} p_h \boldsymbol{\omega} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}_h) \, d\Omega \quad (3.19)$$

donde se ha hecho uso de las siguientes relaciones:

$$\mathbf{u}_h \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_h) = 0 \quad (3.20)$$

$$\nabla \mathbf{u}_h : \nabla (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_h) = 0 \quad (3.21)$$

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_h) = -\boldsymbol{\omega} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}_h) \quad (3.22)$$

De la ecuación (3.19) se observa que para  $\alpha = 0$  se tiene control sobre  $\|\nabla \mathbf{u}_h\|_0$ , siendo  $\mathbf{u}_h$  la solución del problema (3.18). Utilizando la desigualdad de Poincaré-Friedrics se puede obtener una acotación a priori para  $\|\mathbf{u}\|_1$ . Sin embargo, dicho estimador está multiplicado por el inverso de la viscosidad cinemática  $\nu$ . Si ésta es muy pequeña, no sirve para nada desde el punto de vista numérico y la fuerza de Coriolis  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_h$  estará completamente fuera de control. Obsérvese que si el problema se escribe en forma adimensional,  $\nu$  se reemplaza por el número de Ekman  $Ek$  definido en (3.5).

Si se toma  $\alpha > 0$  en (3.19) se ve que el posible control que se podría tener sobre  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_h$  puede ser destruido por el último término en esta ecuación. Es claro que dicho término no aparecería si no se impone la condición de incompresibilidad, esto es, si en vez de la forma bilineal  $\mathcal{A}$  definida en (3.16) se considera

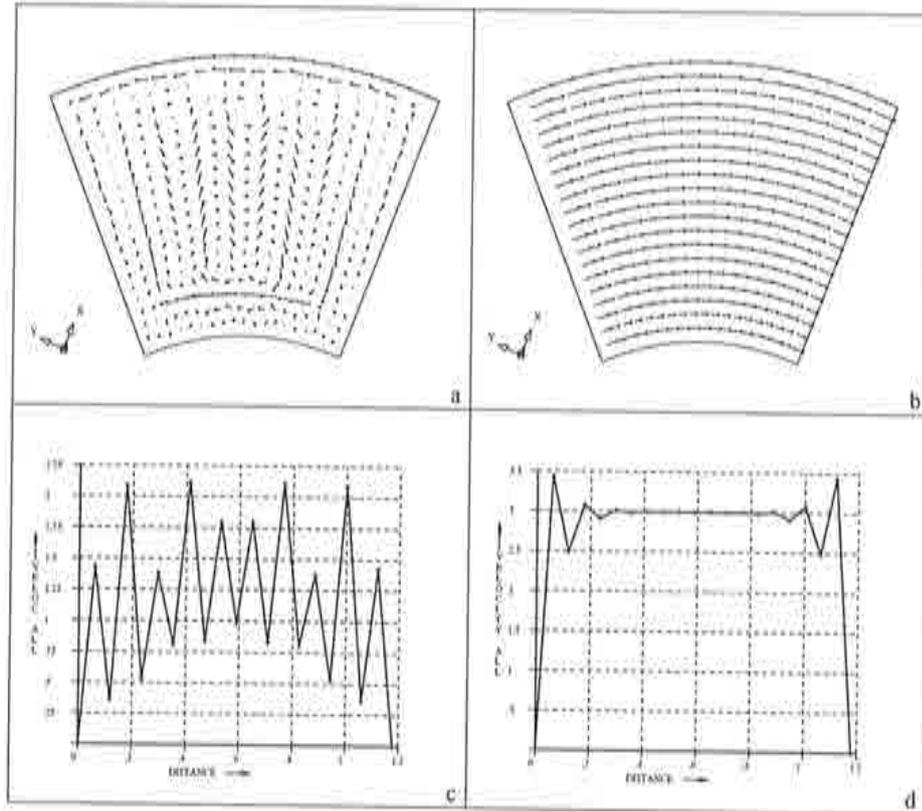
$$\mathcal{A}_0(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) := \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{v}_h \, d\Omega + \int_{\Omega} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{v}_h \, d\Omega \quad (3.23)$$

la cual es la forma bilineal asociada a la aproximación por elementos finitos de la ecuación vectorial continua

$$-\nu \Delta \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega \quad (3.24)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{en } \partial\Omega \quad (3.25)$$

Por consiguiente, la falta de estabilidad debida al término  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_h$  es un problema originado exclusivamente por la presencia de la presión  $p_h$  (o lo que es igual, por la condición de incompresibilidad del flujo). La solución de (3.24)-(3.25) utilizando elementos finitos puede presentar



**Figura 3.1.** Problema de Stokes con fuerza de Coriolis dominante  $Ek = 5 \times 10^{-9}$ , (a): Campo de velocidades elemento  $Q2/Q1$  método de Galerkin. (b): Campo de velocidades sin imponer condición de incompresibilidad. (c): Magnitud de la velocidad en un corte a lo largo de una circunferencia de radio 1.5 imponiendo incompresibilidad. (d): Magnitud de la velocidad en un corte a lo largo de una circunferencia de radio 1.5 sin imponer condición de incompresibilidad.

sólo oscilaciones localizadas en las capas con altos gradientes, típicas de problemas de difusión-reacción (ver capítulo 2). Estas oscilaciones serán analizadas en el siguiente apartado de este trabajo.

A continuación se presenta un ejemplo numérico bidimensional, que corrobora lo expuesto anteriormente. El dominio es el sector circular comprendido entre las circunferencias de radio uno y de radio dos con centro en el origen, y entre las rectas  $y = 0$  e  $y = x$ . La malla consta de  $10 \times 10$  elementos  $Q2/Q1$  (bicuadrático en velocidades y bilineal en presiones) y 441 nodos. La velocidad  $u$  ha sido prescrita a cero en todo el contorno, excepto en la circunferencia exterior donde se ha prescrito la velocidad normal a cero y la velocidad tangente a dos. El número de Ekman del problema (tomando  $L = 1$  en (3.5)) es de  $5 \times 10^{-9}$ . En la Figura 3.1 se pueden observar las oscilaciones en todo el dominio debidas a la pérdida de estabilidad global descrita anteriormente. En la misma figura se puede observar también el resultado que se obtiene para el problema sin condición de incompresibilidad (3.24)-(3.25) (sin presión). En este caso sólo se tienen oscilaciones en los contornos (capas límites), típicas de problemas con términos de reacción altos. Estas últimas pueden ser corregidas con técnicas de captura de discontinuidades

(ver capítulo anterior o [Cod93a, Cod93c, JSH87, Sha88, HMM86, GdC88]).

### 3.3.2 Error de truncamiento del problema unidimensional

En este apartado se trata de estudiar más a fondo la solución numérica del problema (3.24)-(3.25). Para ello se considera el siguiente problema unidimensional:

$$-\nu \frac{d^2 u}{dx^2} - \omega v = f_1, \quad 0 < x < 1 \quad (3.26)$$

$$-\nu \frac{d^2 v}{dx^2} + \omega u = f_2, \quad 0 < x < 1 \quad (3.27)$$

$$u(0) = u(1) = v(0) = v(1) = 0, \quad (3.28)$$

donde  $u(x)$  y  $v(x)$  son las incógnitas del problema y  $f_1$  y  $f_2$  son constantes. Excepto por las condiciones de contorno ( las cuales son fácilmente generalizables), éste es el llamado problema de Ekman [Bat67, Tri77]. Como se mencionó previamente, no se esperan oscilaciones globales cuando se utilice el método de Galerkin. Sólo se esperan oscilaciones localizadas cerca a los contornos para valores de la viscosidad  $\nu$  que generen capas límites (valores de  $\nu$  muy pequeños).

Si se discretiza el intervalo  $[0, 1]$  utilizando una partición uniforme de tamaño  $h$  y elementos finitos lineales, la aproximación de Galerkin para el problema unidimensional genera el siguiente conjunto de ecuaciones en diferencias:

$$-\hat{u}_{i-1} + 2\hat{u}_i - \hat{u}_{i+1} - \frac{\omega h^2}{6\nu} (\hat{v}_{i-1} + 4\hat{v}_i + \hat{v}_{i+1}) = \frac{h^2}{\nu} f_1 \quad (3.29)$$

$$-\hat{v}_{i-1} + 2\hat{v}_i - \hat{v}_{i+1} + \frac{\omega h^2}{6\nu} (\hat{u}_{i-1} + 4\hat{u}_i - \hat{u}_{i+1}) = \frac{h^2}{\nu} f_2 \quad (3.30)$$

donde  $\hat{u}_j$  y  $\hat{v}_j$  son los valores nodales de la solución aproximada en un nodo  $j$  de la malla e  $i$  en la ecuación anterior indica un nodo interior. La abscisa del nodo  $i$  se denota por  $x_i$  en lo que sigue.

A continuación se computa el error de truncamiento de (3.29). Sean  $u$  y  $v$  la solución del problema continuo (3.26)-(3.28). Se usará las siguientes abreviaciones:

$$u_i^{(n)} := \left. \frac{d^n u}{dx^n} \right|_{x=x_i} \quad \text{y} \quad u_i := u(x_i) \quad (3.31)$$

y de forma similar para  $v(x)$ . Desarrollando  $u_{i-1}$  y  $u_{i+1}$  en series de Taylor se puede escribir:

$$\begin{aligned} -u_{i-1} + 2u_i + u_{i+1} &= -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{h^n}{n!} u_i^{(n)} + 2u_i - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} u_i^{(n)} \\ &= -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^{4k}}{(4k)!} u_i^{(4k)} - 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{4k+2}}{(4k+2)!} u_i^{(4k+2)}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Se puede verificar fácilmente que  $u(x)$  satisface la siguiente relación:

$$\frac{d^{4k} u}{dx^{4k}} = (-1)^k \frac{\omega^{2k}}{\nu^{2k}} \left( u - \frac{f_2}{\omega} \right), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.33)$$

Usando esto en (3.32) se encuentra que

$$\begin{aligned} -u_{i-1} + 2u_i + u_{i+1} &= 2 \left[ \frac{f_2}{\omega} - u_i \right] \left[ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left( \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} h \right)^{4k} \frac{1}{(4k)!} - 1 \right] \\ &\quad - 2u_i^{(2)} \frac{\nu}{\omega} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left( \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} h \right)^{4k+2} \frac{1}{(4k+2)!}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Operando un poco sobre la serie anterior, ésta puede expresarse en término de funciones simples, obteniéndose:

$$\begin{aligned} -u_{i-1} + 2u_i + u_{i+1} &= 2 \left[ \frac{f_2}{\omega} - u_i \right] \left[ \cos \left( \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} h \right) \cosh \left( \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} h \right) - 1 \right] \\ &\quad - 2u_i^{(2)} \frac{\nu}{\omega} \left[ \sin \left( \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} h \right) \sinh \left( \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} h \right) \right] \end{aligned} \quad (3.35)$$

y una expresión similar se obtiene reemplazando  $u$  por  $v$  y  $\omega$  por  $-\omega$ . Introduciendo el parámetro adimensional

$$\lambda := \sqrt{\frac{\omega h^2}{2\nu}} \quad (3.36)$$

y haciendo uso de (3.35) (de forma analoga para  $v$ ) se obtiene que:

$$\begin{aligned} -u_{i-1} + 2u_i + u_{i+1} &= \frac{\omega h^2}{6\nu} (v_{i-1} + 4v_i + v_{i+1}) \\ &= \frac{h^2}{\nu} (-\nu u_i^{(2)} - \omega v_i) + E_{u,i}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

donde  $E_{u,i}$  es el error de truncamiento del nodo  $i$  para el sistema (3.29)-(3.30) multiplicado por  $h^2/\nu$ . Este viene dado por:

$$\begin{aligned} E_{u,i} &= -2 \frac{\nu}{\omega} v_i^{(2)} \left[ \cos(\lambda) \cosh(\lambda) - \frac{\lambda^2}{3} \sin(\lambda) \sinh(\lambda) - 1 \right] \\ &\quad - 2 \frac{\nu}{\omega} u_i^{(2)} \left[ \sin(\lambda) \sinh(\lambda) - \frac{\lambda^2}{3} (\cos(\lambda) \cosh(\lambda) + 2) \right]. \end{aligned} \quad (3.38)$$

El valor del error de truncamiento en cada punto se encuentra reemplazando en (3.38) las segundas derivadas para  $u$  y  $v$  por sus expresiones exactas. Se obtiene entonces:

$$\begin{aligned} E_{u,i} &= 2 [C_3 \exp(\alpha x_i) \sin(\alpha x_i) - C_2 \exp(-\alpha x_i) \cos(\alpha x_i)] \\ &\quad \times \left[ \sin(\lambda) \sinh(\lambda) - \frac{\lambda^2}{3} (\cos(\lambda) \cosh(\lambda) + 2) \right] \\ &\quad + 2 [C_4 \exp(\alpha x_i) \sin(\alpha x_i) - C_1 \exp(-\alpha x_i) \cos(\alpha x_i)] \\ &\quad \times \left[ \cos(\lambda) \cosh(\lambda) - \frac{\lambda^2}{3} \sin(\lambda) \sinh(\lambda) - 1 \right], \end{aligned} \quad (3.39)$$

donde  $\alpha := \lambda/h$  y las constantes  $C_j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  están dadas por:

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{1}{\omega \Delta} [f_1 \sin(\alpha) + f_2 (\cos(\alpha) + \exp(\alpha))] \\ C_2 &= -\frac{1}{\omega \Delta} [f_2 \sin(\alpha) - f_1 (\cos(\alpha) + \exp(\alpha))] \\ C_3 &= -\frac{f_2}{\omega} - C_1 \\ C_4 &= \frac{f_1}{\omega} - C_2 \\ \Delta &:= \exp(-\alpha) + 2 \cos(\alpha) + \exp(\alpha). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Interesa estudiar el comportamiento de  $E_{u,i}$  en los casos límites  $\omega \rightarrow 0$  y  $\nu \rightarrow 0$ . Considérese primero el caso de  $\lambda$  pequeño, ya sea porque  $\omega$  es muy pequeño o porque  $h \rightarrow 0$ . De las expresiones de las constantes  $C_j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  en (3.40) es fácil ver que permanecen acotadas cuando  $\lambda \rightarrow 0$ . Adicionalmente, de (3.39) se tiene que el error de truncamiento de  $\nu E_{u,i}/h^2$  es de orden  $\lambda^2$  para todos los nodos de la malla. Este es el error de discretización esperado para la ecuación que se ha utilizado.

El caso de más interés ocurre cuando  $\nu \rightarrow 0$  para  $\omega$  fijo. De la expresión (3.40) se encuentra que  $C_1 \rightarrow -f_2/\omega$  cuando  $\alpha \rightarrow \infty$ , mientras que  $C_3$  y  $C_4$  se comportan como  $\exp(-\alpha)$ . Por consiguiente, salvo constantes,  $E_{u,i}$  se comporta como

$$[\exp(-\alpha) \exp(\alpha x_i) \exp(\alpha h) + \exp(-\alpha x_i) \exp(\alpha h)] [1 + \alpha^2 h^2]. \quad (3.41)$$

De esta ecuación se puede observar que el error de truncamiento tiende a cero en el interior del dominio, y a infinito en los nodos cercanos al contorno. Como se mencionó anteriormente, éste es el comportamiento típico de una ecuación escalar con términos de reacción dominantes [FdC89, Cod93a, Cod93c, TP86]. Es importante observar que estas oscilaciones son localizadas, y que no pueden propagarse al interior del dominio. Así, éstas son sólo un problema menor desde un punto de vista práctico para las ecuaciones lineales aquí consideradas, y para problemas con soluciones suaves.

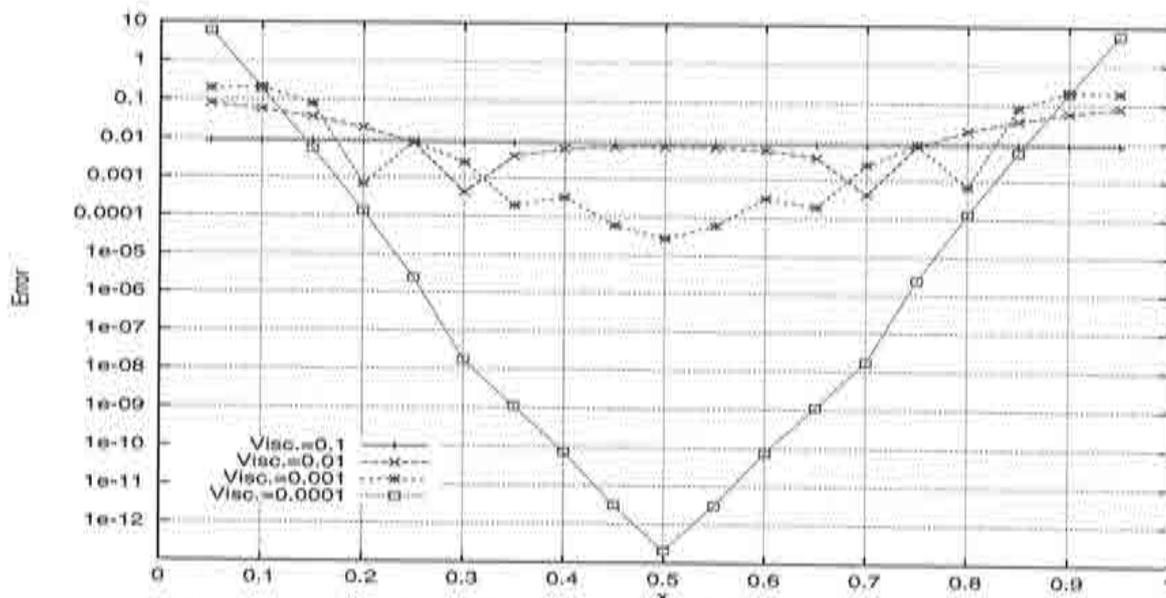


Figura 3.2. Error de truncamiento multiplicado por  $h^2/\nu$  para la solución de Galerkin del problema (3.26)-(3.28).

En la Figura 3.2 se ha dibujado el valor absoluto de  $E_{u,i}$  para diferentes valores de la viscosidad. En este caso se ha discretizado el intervalo  $[0, 1]$  en 20 elementos lineales de igual tamaño, y se ha tomado  $f_1 = f_2 = 1$ ,  $\omega = 1$ .

### 3.4 Formulación GLS para el problema de Stokes con rotación

El método que se describe a continuación está motivado por la necesidad de estabilizar la aproximación estándar de Galerkin del problema (3.1)-(3.3). En particular se asegurará la positividad de la forma bilineal  $\mathcal{A}$  definida en (3.16).

La primera formulación que se expone es la llamada "Galerkin/least-squares" (GLS), la cual ya fue presentada en el primer capítulo de este trabajo para el problema de Stokes sin rotación. El método fue introducido por Hughes y colaboradores en [HFB86]. Otras referencias importantes son [FH88, HF87, FS91, HFH89]. La motivación original del método es la de permitir el no cumplimiento de la condición BB (1.41) para los espacios de velocidad y presión, pudiéndose en particular utilizar igual interpolación para ambas incógnitas. Precisamente la posibilidad de utilizar igual interpolación es lo que hace el método GLS atractivo desde el punto de vista computacional. Como se verá a continuación, el método GLS para el problema con rotación es la extensión lógica del presentado en el capítulo I para el problema en ejes fijos. Para ello se introduce el término de Coriolis en (1.64)-(1.65) (la fuerza centrífuga se incluye en  $f$ ) como sigue:

$$\mathcal{S}(\mathbf{u}, p) = \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{S}_1(\mathbf{u}, p) \\ \mathcal{S}_2(\mathbf{u}, p) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p \\ \nabla \cdot \mathbf{u} \end{array} \right\} \quad (3.42)$$

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F}_1 \\ \mathcal{F}_2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{f} \\ 0 \end{array} \right\} \quad (3.43)$$

Nuevamente, la idea del método GLS es adicionar a la forma discreta de Galerkin un término de estabilización. Éste es el producto en  $L^2$  dentro de cada elemento del operador  $\mathcal{S}$  aplicado a las funciones de prueba por el residuo elemental multiplicado por el tensor  $\tau$ , esto es,  $\tau[\mathcal{S}(\mathbf{u}_h, p_h) - \mathcal{F}]$ .

El problema (3.18) se reemplaza entonces por el siguiente problema discreto: Encontrar  $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$  tal que,

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{v}_h, q_h) - \mathcal{L}(\mathbf{v}_h, q_h) + \mathcal{R}(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{v}_h, q_h) = 0 \quad \forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h \quad (3.44)$$

Si se toma el tensor  $\tau$  diagonal como en (1.66), el término estabilizador se escribe como:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{v}_h, q_h) &= \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} [\tau_1 \mathcal{S}_1(\mathbf{v}_h, q_h) \cdot (\mathcal{S}_1(\mathbf{u}_h, p_h) - \mathbf{f}) \\ &\quad + \tau_2 \mathcal{S}_2(\mathbf{v}_h, q_h) \cdot \mathcal{S}_2(\mathbf{u}_h, p_h)] \, d\Omega \end{aligned} \quad (3.45)$$

La escogencia de  $\tau_1$  y  $\tau_2$  se discutirá más adelante.

La forma expandida de (3.44) se escribe como: encontrar  $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$  y  $p_h \in Q_h$  tal que,

$$\begin{aligned} l(\mathbf{v}_h) &= a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - b(p_h, \mathbf{v}_h) + b(q_h, \mathbf{u}_h) + d(\mathbf{u}_h, q_h) \\ &\quad + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} [\tau_1^e (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_h - \nu \Delta \mathbf{v}_h + \nabla q_h) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_h - \nu \Delta \mathbf{u}_h + \nabla p_h - \mathbf{f}) \\ &\quad + \tau_2^e (\nabla \cdot \mathbf{v}_h) (\nabla \cdot \mathbf{u}_h)] \, d\Omega \quad \forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h \end{aligned} \quad (3.46)$$

La estructura matricial del sistema resultante es igual a la presentada en (1.69) (añadiendo a  $\mathbf{K}_1$ , a  $\mathbf{K}_2$  y a  $\mathbf{G}_2$  las contribuciones debidas a la rotación). La estabilización del método de GLS sobre la incompresibilidad (y por consiguiente sobre la presión) viene dada por la matriz  $\mathbf{L}_2$ , la cual es la misma matriz discreta de (1.69).

La escogencia de  $\tau_1$  y  $\tau_2$  se basa en la obtención de un esquema numérico estable y con óptima velocidad de convergencia. La forma bilineal asociada al problema (3.44) es:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{glS}(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{v}_h, q_h) &= \mathcal{A}(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{v}_h, q_h) + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} [\tau_1 \mathcal{S}_1(\mathbf{v}_h, q_h) \cdot \mathcal{S}_1(\mathbf{u}_h, p_h) \\ &\quad + \tau_2 \mathcal{S}_2(\mathbf{v}_h, q_h) \cdot \mathcal{S}_2(\mathbf{u}_h, p_h)] \, d\Omega \end{aligned} \quad (3.47)$$

de donde se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{glS}(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{u}_h, p_h) &= \nu \|\nabla \mathbf{u}_h\|_0^2 \\ &+ \sum_{e=1}^{n_{el}} \tau_1 \|\mathcal{S}_1(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{0,\Omega^e}^2 + \sum_{e=1}^{n_{el}} \tau_2 \|\mathcal{S}_2(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{0,\Omega^e}^2 \end{aligned} \quad (3.48)$$

donde  $\|\cdot\|_{0,\Omega^e}$  es la norma  $L^2$  restringida al elemento  $e$  de la partición. En (3.48) se toman los parámetros algorítmicos  $\tau_1$  y  $\tau_2$  como

$$\tau_1 = \frac{\beta h^2}{4\nu}, \quad \text{con } \beta = \min\{C_{1\beta} \text{Ek}_h, C_{2\beta}\} \quad (3.49)$$

$$\tau_2 = \frac{\gamma \omega^2 h^4}{\nu}, \quad \text{con } \gamma = \min\{C_{1\gamma} \text{Ek}_h, C_{2\gamma}\} \quad (3.50)$$

donde  $C_{1\beta}$ ,  $C_{2\beta}$ ,  $C_{1\gamma}$  y  $C_{2\gamma}$  son constantes que dependen del tipo de elemento usado. Los parámetros  $\tau_1$  y  $\tau_2$  se evalúan para cada elemento, siendo  $h$  su diámetro.

Cuando  $\omega \rightarrow 0$  y  $\nu$  es fija se tiene que  $\tau_1 \rightarrow C_{2\beta} h^2 / 4\nu$  y  $\tau_2 \rightarrow 0$ , recuperando la expresión expuesta en (1.70) y (2.48) ([FS91, HFH89]), conocida por producir velocidad de convergencia óptima para el problema sin fuerza de Coriolis. Como se expuso en los capítulos anteriores, la constante  $C_{2\beta}$  es tomada como 1/3 para elementos lineales y 1/9 para cuadráticos [Cod92, COC92]. Estos son los valores utilizados para los ejemplos numéricos al final del capítulo.

Por otra parte, cuando  $\nu \rightarrow 0$ , de (3.48), (3.49) y (3.50) se encuentra que para  $\Delta \mathbf{v}_h = \Delta \mathbf{u}_h = 0$

$$\mathcal{A}_{glS}(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{u}_h, p_h) \geq \sum_{e=1}^{n_{el}} \frac{C_{1\beta}}{4\omega} \|\omega \times \mathbf{u}_h + \nabla p_h\|_{0,\Omega^e}^2 + C_{1\gamma} \omega h^2 \|\nabla \cdot \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega^e}^2 \quad (3.51)$$

que es el estimador de estabilidad para el método GLS cuando  $\nu \rightarrow 0$ . Se observa que la estabilidad está dada por el valor de las constantes  $C_{1\beta}$  y  $C_{1\gamma}$ . Los valores de estas constantes, así como de  $C_{2\gamma}$ , se han encontrado en base a experimentación numérica y se presentan en los ejemplos numéricos al final del capítulo. La efectividad del método GLS para eliminar las oscilaciones de Galerkin cuando se tiene un número de Ekman bajo puede también observarse en dichos ejemplos.

Finalmente cabe resaltar que, como se verá en el próximo capítulo, para las ecuaciones de Navier-Stokes también es necesario tomar  $\tau_2 > 0$  ([FF92, TMRS92]). En el problema de Stokes sin rotación se toma  $\tau_2 = 0$  (ver capítulo 1), sin embargo cuando en las ecuaciones de Navier-Stokes el término convectivo es importante puede generarse una cierta relajación de la restricción de incompresibilidad, y debe tomarse  $\tau_2 > 0$  para mejorar el resultado numérico y la convergencia del esquema iterativo.

### 3.5 Formulación DRS para el problema de Stokes con rotación

La idea del método descrito a continuación es añadir a los términos originales de Galerkin una forma de mínimos cuadrados de la divergencia del residuo de la ecuación de momento dentro de cada elemento (3.1). Este método presentado en [CS94b, CS97] se denomina "Divergence of the Residual Stabilization" (DRS). El problema débil aplicando el método mencionado se escribe: Encontrar  $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$  y  $p_h \in Q_h$  tal que,

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{v}_h, q_h) - \mathcal{L}(\mathbf{v}_h, q_h) + \mathcal{D}(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{v}_h, q_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \text{ y } q_h \in Q_h \quad (3.52)$$

El término de estabilización  $\mathcal{D}(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{v}_h, q_h)$  reemplaza la forma de mínimos cuadrados del residuo en la formulación GLS, es decir, al término  $\mathcal{R}(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{v}_h, q_h)$ . La expresión de  $\mathcal{D}(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{v}_h, q_h)$  es la siguiente:

$$\mathcal{D}(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{v}_h, q_h) = \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \left[ \tau \nabla \cdot \mathcal{S}^v(\mathbf{v}_h, q_h) (\nabla \cdot \mathcal{S}^v(\mathbf{u}_h, p_h) - (\nabla \cdot \mathbf{f})) \right] d\Omega \quad (3.53)$$

donde el operador  $\mathcal{S}^v$  es el operador de la ecuación de momento (3.1) sin el término viscoso, es decir:

$$\mathcal{S}^v(\mathbf{u}_h, p_h) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_h - \nabla p_h \quad (3.54)$$

y el parámetro  $\tau > 0$  se toma para cada elemento como:

$$\tau = \delta \frac{h^2}{|\boldsymbol{\omega}|} \quad (3.55)$$

con  $\delta$  una función del número de Ekman elemental  $Ek_h$ . Más adelante se describirá la forma de esta función basándose en un simple estimador de estabilidad, aunque en los experimentos numéricos se ha observado que tomando  $\delta = 0$  para altos números de  $Ek_h$  y  $\delta$  constante cuando éstos son pequeños los resultados son buenos (libres de oscilaciones). Los valores específicos de estas constantes dependen del tipo de elemento, y se especifican en los ejemplos numéricos.

El problema variacional discreto (3.52) es consistente, en el sentido que la solución exacta del problema (3.1)-(3.3) la satisface (para soluciones lo suficientemente suaves). Obsérvese que se ha utilizado el operador  $\mathcal{S}^v$  definido en (3.54) en vez del operador  $\mathcal{S}_1$  definido en (3.42). Sin embargo la consistencia del método se conserva ya que la solución exacta es de divergencia nula, y por lo tanto:

$$\nabla \cdot \mathcal{S}^v(\mathbf{u}, p) = \nabla \cdot \mathcal{S}_1(\mathbf{u}, p) \quad (3.56)$$

El uso de  $\mathcal{S}^v$  para el problema discreto evita el cálculo de terceras derivadas de las funciones de forma, lo cual sería costoso y complicaría la programación.

Es importante remarcar en este punto que el término adicionado  $\mathcal{D}(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{v}_h, q_h)$  no se introduce para estabilizar la interpolación de velocidad presión, teniéndose entonces que usar interpolaciones div-estables (que satisfagan BB (1.41)).

La forma expandida del problema (3.52) se lee como: Encontrar  $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$  y  $p_h \in Q_h$  tal que,

$$\begin{aligned} l(\mathbf{v}_h) &= a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - b(p_h, \mathbf{v}_h) + b(q_h, \mathbf{u}_h) + d(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \\ &+ \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau [\nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_h - \nabla q_h)] [\Delta p_h + \nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_h) - \nabla \cdot \mathbf{f}] d\Omega \\ &\forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \text{ y } q_h \in Q_h \end{aligned} \quad (3.57)$$

La estructura de la matriz del sistema de ecuaciones resultante del problema (3.57) es la misma que para el GLS (1.69). Sin embargo, ahora la matriz  $L_2$  es el producto de dos laplacianos de las funciones de forma de presión evaluados elemento a elemento. Por consiguiente esta matriz es cero para interpolaciones lineales (ésta es una forma de ver que el DRS no permite evitar la condición BB).

Si se considera precisamente el caso de elementos lineales, la mejora en la estabilidad debida a  $\mathcal{D}$  se explica como sigue:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{drs}(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{v}_h, q_h) &= \mathcal{A}(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{v}_h, q_h) \\ &+ \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau [\nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_h)] [\nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_h)] d\Omega \end{aligned} \quad (3.58)$$

Usando (3.20)-(3.22) se obtiene el siguiente estimador de estabilidad:

$$\mathcal{A}_{drs}(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{u}_h, p_h) = \nu \|\nabla \mathbf{u}_h\|_0^2 + \sum_{e=1}^{n_e} \tau \|\boldsymbol{\omega} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}_h)\|_{0,\Omega^e}^2 \quad (3.59)$$

La ecuación (3.59) muestra que la mejora en la estabilidad viene dada al ganar control sobre  $\boldsymbol{\omega} \cdot (\nabla \times \mathbf{u})$ . Si este término es cero o muy pequeño, se recuperan las propiedades de estabilidad del problema (3.18). Sin embargo, de (3.19) se observa que el método de Galerkin posee buena estabilidad en este caso y por consiguiente no se necesita modificar, excepto si se quieren eliminar oscilaciones locales cerca a los contornos. En este sentido, la motivación del método es diferente a la del "Galerkin-Gradient/least squares" presentada en [FdC89] para la ecuación escalar de difusión-reacción, aunque aparentemente la idea es similar.

Tomando en cuenta las consideraciones previas, se supone que:

$$\|\boldsymbol{\omega} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}_h)\|_{0,\Omega^e}^2 \geq C_\theta |\boldsymbol{\omega}|^2 \|\nabla \times \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega^e}^2 \quad (3.60)$$

para una cierta constante  $C_\theta > 0$  independiente del elemento  $e$ , y que la función  $\delta$  en (3.55) es de la forma:

$$\begin{aligned} \delta(\text{Ek}_h) &= \min\left\{\frac{C_1}{\text{Ek}_h}, C_2\right\} \\ &= \min\left\{C_1 \frac{|\boldsymbol{\omega}| h^2}{\nu}, C_2\right\} \end{aligned} \quad (3.61)$$

donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes positivas. Suponiendo que en (3.58)  $\tau$  es igual para todos los elementos, de (3.53) se sigue que

$$\mathcal{A}_{drs}(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{u}_h, p_h) \geq \nu \|\nabla \mathbf{u}\|_0^2 + \frac{C_1 C_\theta}{\nu} |\boldsymbol{\omega}|^2 h^4 \|\nabla \times \mathbf{u}_h\|_0^2 \quad (3.62)$$

cuando  $\text{Ek}_h$  es alto, es decir cuando la fuerza viscosa domina, y

$$\mathcal{A}_{drs}(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{u}_h, p_h) \geq \nu \|\nabla \mathbf{u}\|_0^2 + C_2 C_\theta |\boldsymbol{\omega}| h^2 \|\nabla \times \mathbf{u}_h\|_0^2 \quad (3.63)$$

cuando la viscosidad es pequeña y por lo tanto domina la fuerza de Coriolis.

De los estimadores (3.62) y (3.63) se observa que el término adicionado a la forma de Galerkin es importante sólo si la viscosidad es pequeña, haciendo que (3.60) se cumpla. En particular, de (3.63) se ve que el término sobre el cual se gana control es el rotacional de la velocidad, y por consiguiente sobre la vorticidad. Por otra parte la velocidad es solenoidal y cero sobre el contorno. Bajo estas consideraciones una acotación sobre la vorticidad implica una acotación sobre todo el gradiente de velocidad  $\nabla \mathbf{u}_h$  (ver [GR86]), lo cual revierte en un estimador sobre la velocidad usando la desigualdad de Poincaré-Friedrics. En conclusión, la estabilidad mejora.

### 3.6 Ejemplos numéricos

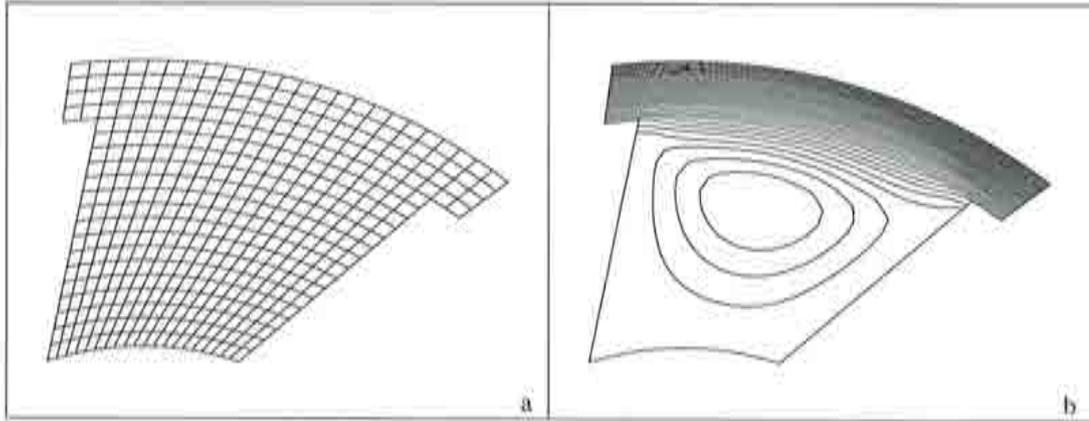
En este apartado se presentan los resultados obtenidos sobre un ejemplo bidimensional. El dominio es un sector de un ventilador centrifugo comprendido entre dos álabes. El ángulo entre los ejes de los álabes es de  $45^\circ$ , mientras que ellos forman un ángulo de  $30^\circ$  con el cilindro de radio 1 al cual se encuentran fijos y ocupan un sector de  $7.5^\circ$ . El flujo está confinado por un cilindro exterior de radio 2. Éste está separado de los álabes por un espacio de 0.2. El cilindro exterior se encuentra en reposo, mientras que los álabes y el cilindro interior giran a una velocidad angular

de  $\omega/2 = 1$ , teniendo entonces la velocidad relativa del cilindro exterior una norma de  $|\mathbf{u}| = 2$  y una dirección tangente a éste.

Las condiciones de contorno para la velocidad expresadas en un sistema de referencia fijo a los álabes es de cero sobre éstos y sobre el cilindro interior, tangente al cilindro exterior, deslizante (normal cero y tangente libre) en la parte superior de los álabes (parte concéntrica con los cilindros) y periódica entre la entrada y la salida del dominio. Esto último es:

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_{in}} = \mathbf{R}\mathbf{u}|_{\Gamma_{out}} \quad (3.64)$$

donde  $\Gamma_{in}$  es la parte del dominio donde el flujo entra, y  $\Gamma_{out}$  donde sale. En el problema discreto esta condición se prescribe sobre las velocidades en los nodos, por lo que la malla de contorno sobre  $\Gamma_{in}$  debe ser exactamente igual a la malla de contorno sobre  $\Gamma_{out}$ .  $\mathbf{R}$  es la respectiva matriz de rotación.



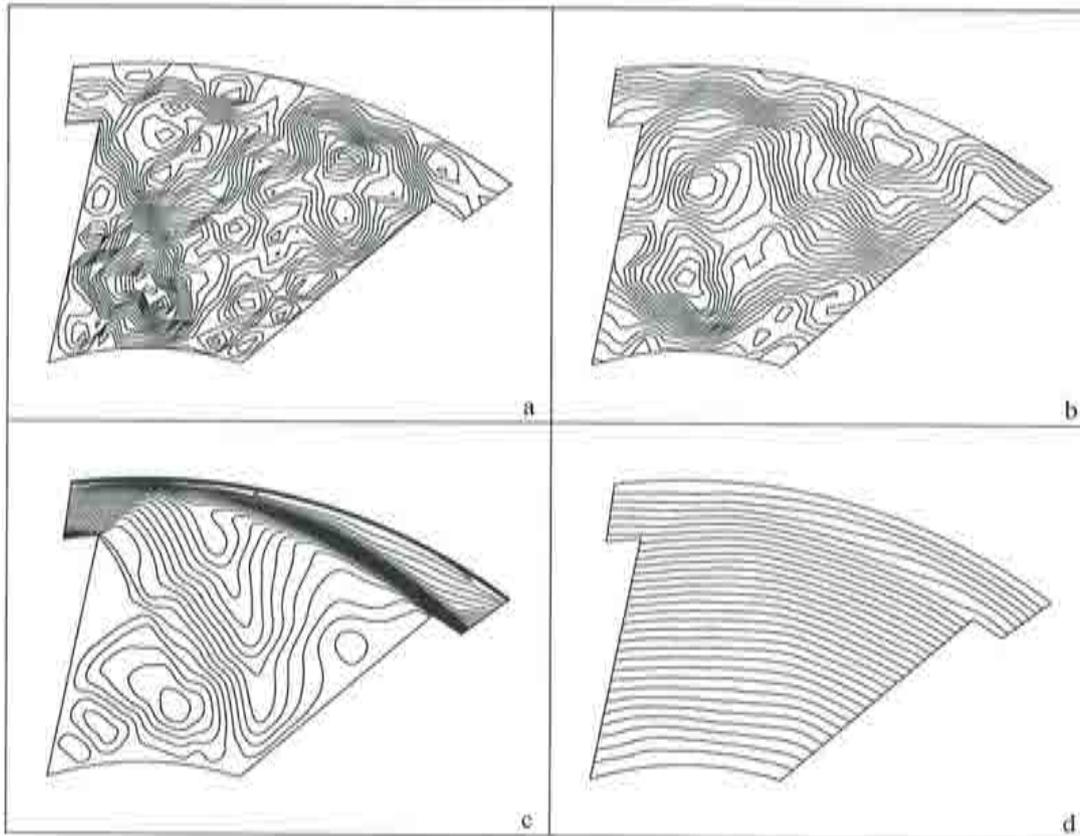
**Figura 3.3.** (a): Dominio computacional y malla 1 de elementos bilineales y 461 nodos. (b): Líneas de corriente para el caso  $\omega = 0$  y usando elementos  $Q2/Q1$ . Los picos de la función de corriente son 0.342 y -0.0479.

El dominio computacional, así como una malla de 416 elementos  $Q1$  y 461 nodos se presentan en la Figura 3.3a. De aquí en adelante se denominará malla 1. También se presentarán algunos resultados sobre otras dos mallas de elementos finitos, obtenidas dividiendo sucesivamente cada elemento de la malla 1 en cuatro. La malla 2 tendrá por consiguiente 1753 nodos, y la malla 3 6833. Para obtener resultados con elementos bicuadráticos  $Q2$ , se obtienen también 3 mallas agrupando cuatro elementos bilineales de las anteriores.

La viscosidad cinemática del fluido se toma como  $\nu = 5 \times 10^{-8}$ , valor para el cual se tienen resultados oscilatorios con el método de Galerkin. La única fuerza de cuerpo que se considera es la fuerza centrífuga dada por  $\mathbf{f} = 1/4\omega \times (\omega \times \mathbf{r})$ , donde  $\mathbf{r}$  es el vector de posición de las partículas. Si el término viscoso es pequeño, el gradiente de la presión es aproximadamente igual a  $\mathbf{f}$ .

La solución exacta en velocidades de este problema es la misma que para el problema de Stokes sin rotación. Esto se debe a que para el caso 2D y flujo incompresible, tanto la fuerza de Coriolis como la fuerza centrífuga pueden ser escritas como el gradiente de una función escalar. Es claro que para la fuerza centrífuga se cumple que:

$$\frac{1}{4}\omega \times (\omega \times \mathbf{r}) = \nabla\left(-\frac{1}{8}|\omega \times \mathbf{r}|^2\right) \quad (3.65)$$



**Figura 3.4.** Solución usando el método de Galerkin con elementos  $Q1/P0$ . (a): Líneas de corriente malla 1. (b): Contornos de presión malla 1. (c): Líneas de corriente malla 3. (d): Contornos de presión malla 3.

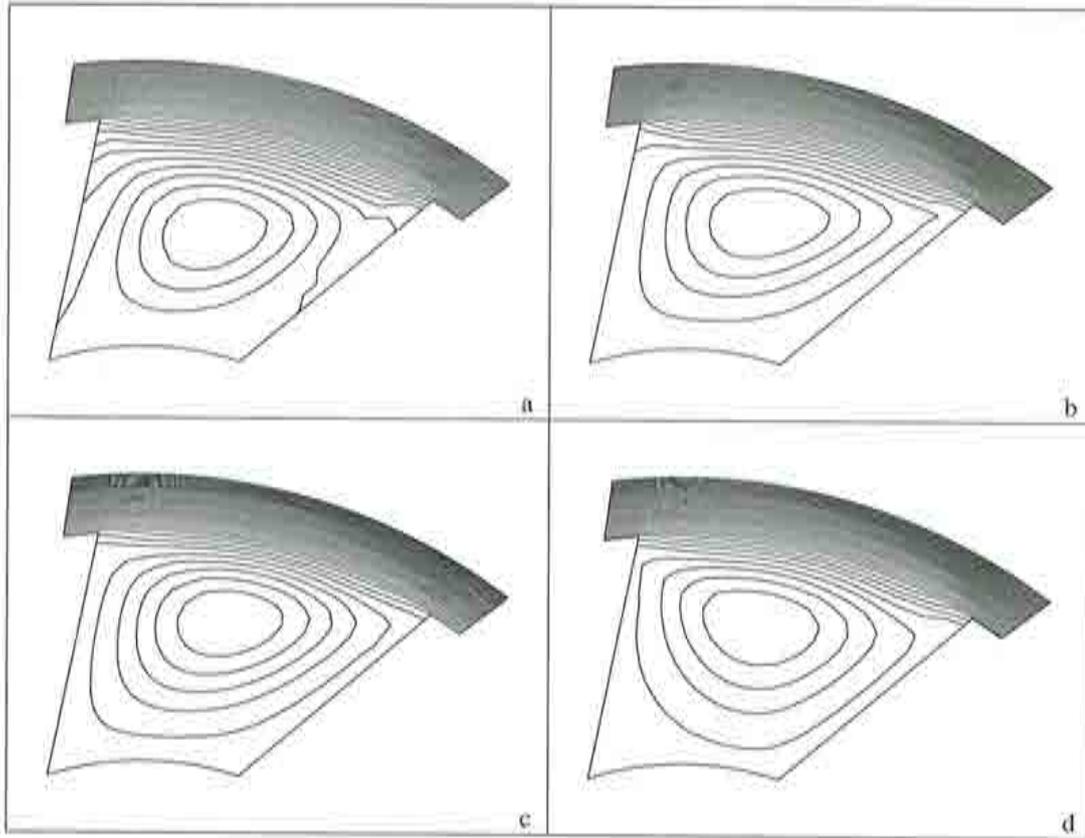
Para la fuerza de Coriolis se tiene que:

$$\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) = |\boldsymbol{\omega}| \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.66)$$

por lo cual la fuerza de Coriolis debe ser el gradiente de una función escalar que puede ser incluido en el término de presión. Claro está que esto sólo se cumple si en todo el contorno las velocidades normales están prescritas. En el caso de que en alguna parte del contorno la tensión normal esté prescrita, indirectamente estaría prescrita la presión real, y por lo tanto ya no se podría incluir la fuerza de Coriolis ni la centrífuga dentro de este término.

El patrón de líneas de corriente obtenido con  $|\boldsymbol{\omega}| = 0$  y usando la malla 1 con elementos  $Q2/Q1$  (velocidades continuas y bicuadráticas, y presiones continuas y bilineales), los cuales cumplen BB (1.41), se presenta en la Figura 3.3b. Este resultado se toma como referencia para los casos con rotación  $|\boldsymbol{\omega}| = 2$ .

Primero se considerarán los elementos bilineales. Es bien sabido que no existen elementos con interpolación bilineal en velocidades que satisfagan la condición BB (1.41). Sin embargo, como se mencionó en el capítulo 1, el elemento  $Q1/P0$ , con presión constante a trozos, da buenos resultados en la mayoría de los casos, aunque algunas veces presenta modos de presión espúreos que deben ser filtrados (ver [BF91] para una mayor discusión acerca de este elemento controvertido). Se ha utilizado para este ejemplo con buenos resultados, como se verá más adelante.



**Figura 3.5.** Líneas de corriente utilizando métodos de estabilización y elementos  $Q1$ . (a): Método GLS  $\beta = 1/3$  y  $\gamma = 0$  en (3.49) y (3.50). Picos de la función de corriente: 0.4444 y -0.0637. (b): Método GLS,  $C_{1\beta} = 4$ ,  $C_{1\gamma} = 0$ . Picos de la función de corriente: 0.361 y -0.0613. (c): Método GLS,  $C_{1\beta} = 4$ ,  $C_{1\gamma} = 10$ . Picos de la función de corriente: 0.322 y -0.0672. (d): Método DRS (elemento  $Q1/P0$ ),  $\delta = 0.02$ . Picos de la función de corriente: 0.346 y -0.0546

Las líneas de corriente obtenidas utilizando la malla 1 con elementos  $Q1/P0$  se presentan en la Figura 3.4a. Se observa que la solución es completamente oscilatoria, así como los contornos de presión presentados en la Figura 3.4b). La solución mejora a medida que la malla se refina, aunque para este caso el patrón de líneas de corriente es todavía muy malo usando la malla 3, como se puede ver en la Figura 3.4c. Las presiones no son tan malas para esta última malla, debido principalmente a que la componente debida a la fuerza centrífuga domina (Figura 3.4d).

Como una primera alternativa para estabilizar la solución, se considerará el método GLS. Para este problema el número de Ekman local es de  $Ek_h = 2.5 \times 10^{-8} h^{-2}$ , donde  $h$  es el tamaño del elemento donde el número de Ekman se calcula. Para dicho valor del número de Ekman y para los valores de las constantes que aparecen en (3.49)-(3.50) que se usaron (las cuales se dan más adelante), la expresión para  $\tau_1$  y  $\tau_2$  se reduce a

$$\tau_1 = \frac{C_{1\beta}}{4\omega}, \quad \tau_2 = C_{1\gamma}\omega h^2 \quad (3.67)$$

Con el fin de determinar el mejor valor de las constantes  $C_{1\beta}$  y  $C_{1\gamma}$ , se experimentó numéricamente hasta conseguir el valor que diera los resultados más parecidos a los presentados en la Figura

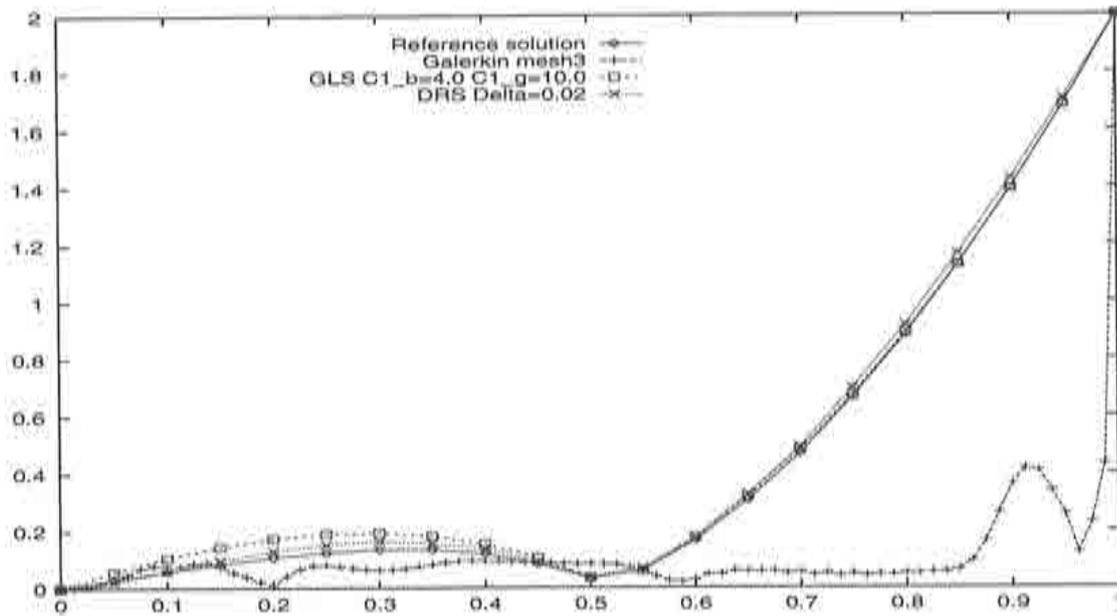


Figura 3.6. Variación de la velocidad a lo largo de la sección media usando elementos  $Q1$  ( $C1_b \equiv C1_\beta$  y  $C1_g \equiv C1_\gamma$ ). La solución de referencia se calculó con  $\omega = 0$  y elementos  $Q1/P0$ .

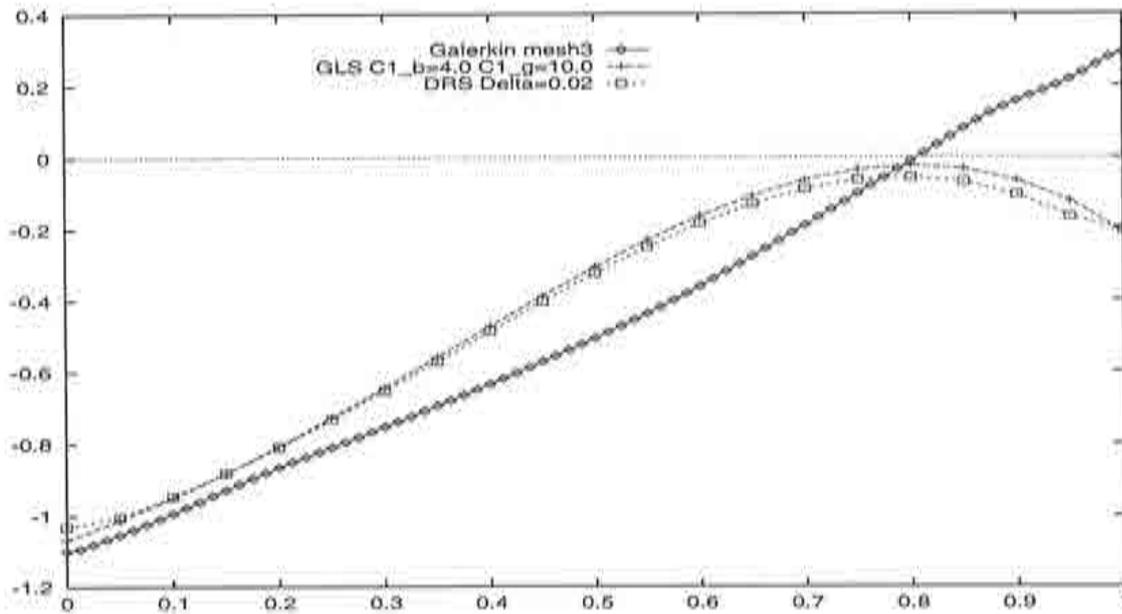
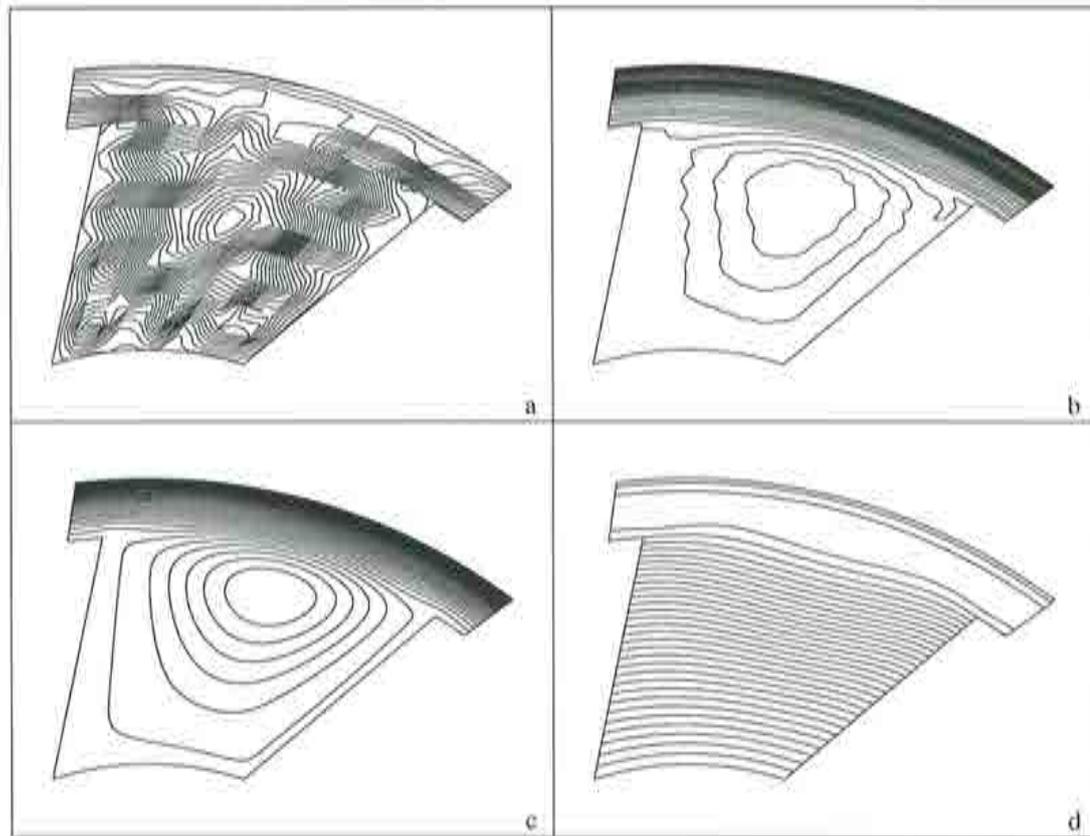


Figura 3.7. Variación de la presión a lo largo de la sección media usando elementos  $Q1$  ( $C1_b \equiv C1_\beta$  y  $C1_g \equiv C1_\gamma$ ).

3.3b. La mejor solución se obtuvo con

$$C1_\beta = 4, \quad C1_\gamma = 10 \quad (\text{elemento } Q1) \quad (3.68)$$

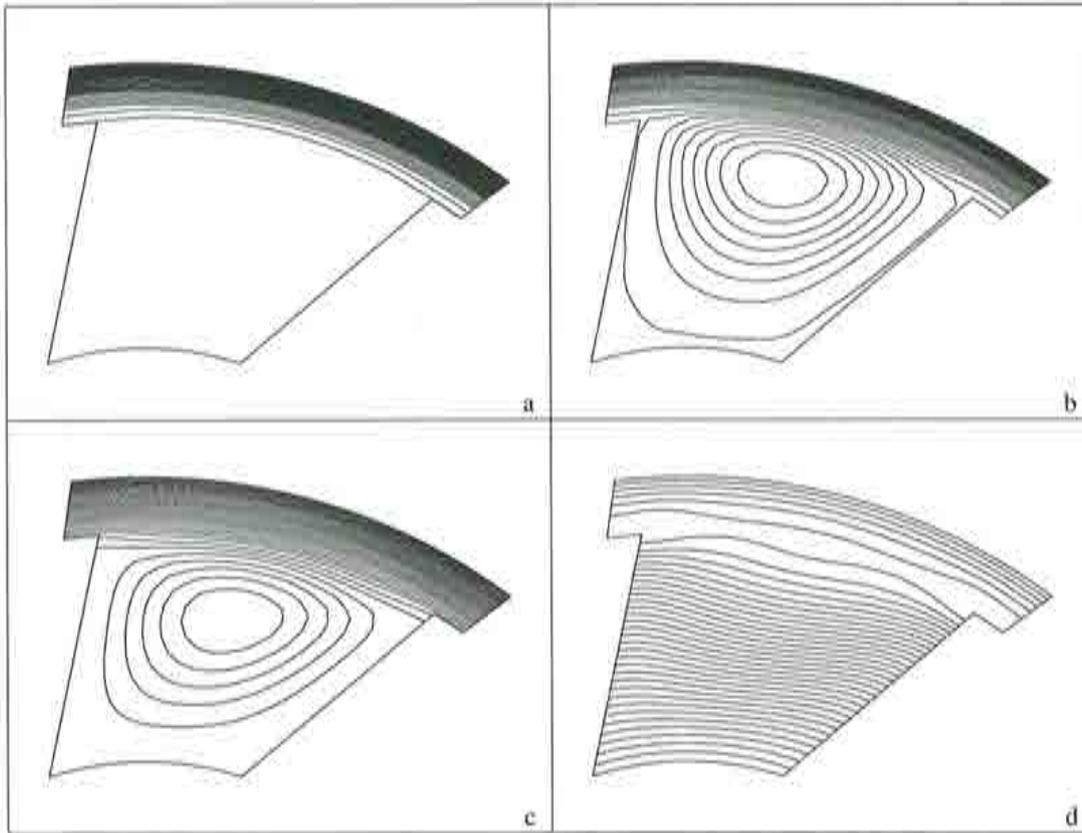
para el conjunto de las mallas 1, 2 y 3. De aquí en adelante, todos los resultados numéricos utilizando los métodos de estabilización han sido obtenidos utilizando la malla 1. En la Figura 3.5a se presentan las líneas de corriente obtenidas usando el método GLS con  $\tau_2 = 0$  y calculando



**Figura 3.8.** Solución utilizando el método de Galerkin con elementos  $Q2/Q1$ . (a): Líneas de corriente malla 1. (b): Líneas de corriente malla 2. (c): Líneas de corriente malla 3. Picos de la función de corriente 0.203 y  $-0.0502$ . (d): Contornos de presión malla 3.

$\tau_1$  como en el caso sin fuerza de Coriolis, esto es, usando la expresión dada en (3.49) pero con  $\beta = C_{2\beta} = 1/3$  constante y no una función del número de Ekman. Se ve claramente que la solución es mala, aunque no presenta oscilaciones. En particular, la incompresibilidad está mal aproximada, por lo que el algoritmo para generar las líneas de corriente muestra algunas de éstas saliendo de los álabes. En la Figura 3.5b y 3.5c se presentan los resultados obtenidos con  $C_{1\gamma} = 0$  y  $C_{1\beta} = 4$ , y con  $C_{1\gamma} = 10$  y  $C_{1\beta} = 4$  respectivamente. Se puede observar que en este último caso hay una mejor aproximación de la incompresibilidad (aunque la combinación dada en (3.68) es la mejor, si se escoge  $C_{1\gamma} = 0$  hay valores de  $C_{1\beta}$  que dan mejores resultados que 4). Para completar la definición de las funciones  $\beta$  y  $\gamma$  en (3.49)-(3.50), se toma  $C_{2\beta} = 1/3$ , como se mencionó anteriormente, y  $C_{2\gamma} = 5/6$ , con lo cual  $\gamma = 5\beta/2$ . La solución obtenida usando el elemento  $Q1/P0$  y el método DRS se presenta en la Figura 3.5d. Se tomó  $\delta = 0.02$  para este caso (ver (3.55)). Se observa que la solución es mejor que utilizando el método GLS, con una mejor aproximación de la incompresibilidad y con picos de la función de corriente más cercanos a los obtenidos para  $|\omega| = 0$  (Figura 3.3b).

Con el fin de comparar la calidad de los resultados numéricos, se graficó en la Figura 3.6 la variación de la norma de la velocidad a lo largo de la sección que une los centros de los sectores de circunferencia de los dos cilindros concéntricos que encierran el dominio computacional. De aquí en adelante llamaremos a esta sección recta la *sección media*. Tomando como referencia la



**Figura 3.9.** Resultados método GLS y elementos  $Q2$ . (a): Líneas de corriente  $\beta = 1/9$  y  $\gamma = 0$  en (3.49) y (3.50). Picos de la función de corriente: 0.182 y -0.00583. (b): Líneas de corriente  $C_{1\beta} = 0.4$ ,  $C_{1\gamma} = 0$ . Picos de la función de corriente: 0.225 y -0.0791. (c): Líneas de corriente  $C_{1\beta} = 0.4$ ,  $C_{1\gamma} = 1$ . Picos de la función de corriente: 0.310 y -0.0699. (d): Contornos de presión.

curva para  $|\omega| = 0$  obtenida utilizando el método de Galerkin y el elemento  $Q1/P0$ , se observa que los resultados obtenidos utilizando DRS son un poco mejores que usando el GLS. En la misma figura también se graficó los resultados obtenidos usando el método de Galerkin (con rotación) y la malla más fina (malla 3), para mostrar el tipo de oscilaciones encontradas. La variación de la presión a lo largo de la sección media se muestra en la Figura 3.7. Se observa que la presión encontrada usando el método de Galerkin y la malla 3 no es más que la debida a la fuerza centrífuga, sin reproducir la pequeña caída de presión cerca al cilindro exterior que se observa al utilizar los métodos de estabilización GLS o DRS.

Ahora se considerarán los casos para elementos bicuadráticos. Las líneas de corriente obtenidas usando el método de Galerkin y las mallas 1, 2 y 3 se presentan en las Figuras 3.8a, b y c respectivamente. Se puede observar claramente que la solución mejora a medida que la malla se refina. Con la malla 3 los resultados no presentan oscilaciones en las líneas de corriente, aunque la posición del vórtice central aún no es correcta. Adicionalmente los picos de la función de corriente presentan un error importante. Los contornos de presión utilizando la malla 3 se presentan en la Figura 3.8d.

La Figura 3.9a presenta las líneas de corriente utilizando igual interpolación velocidad presión

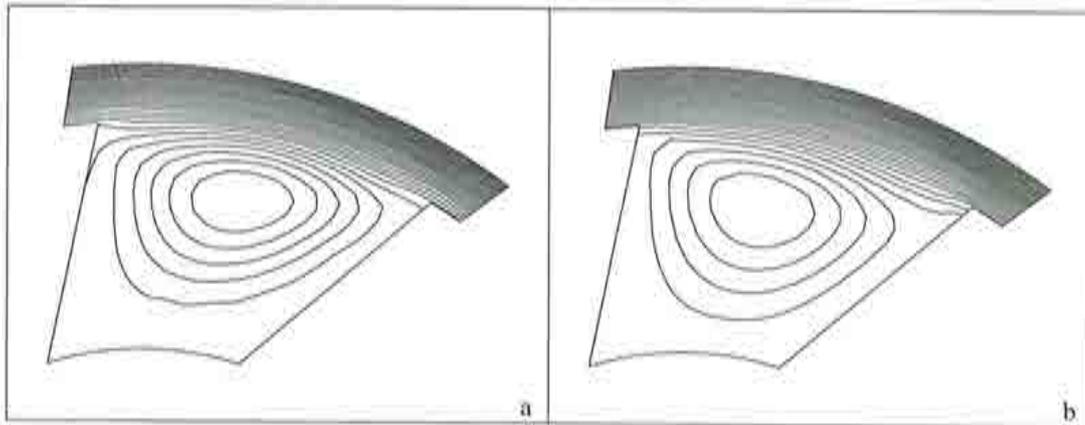


Figura 3.10. Líneas de corriente método DRS y elementos  $Q2$ . (a): Elementos  $Q2/Q1$   $\delta = 0.001$ . Picos de la función de corriente: 0.302 y -0.0735. (b): Elementos  $Q2/P1$   $\delta = 0.02$ . Picos de la función de corriente: 0.344 y -0.0667.

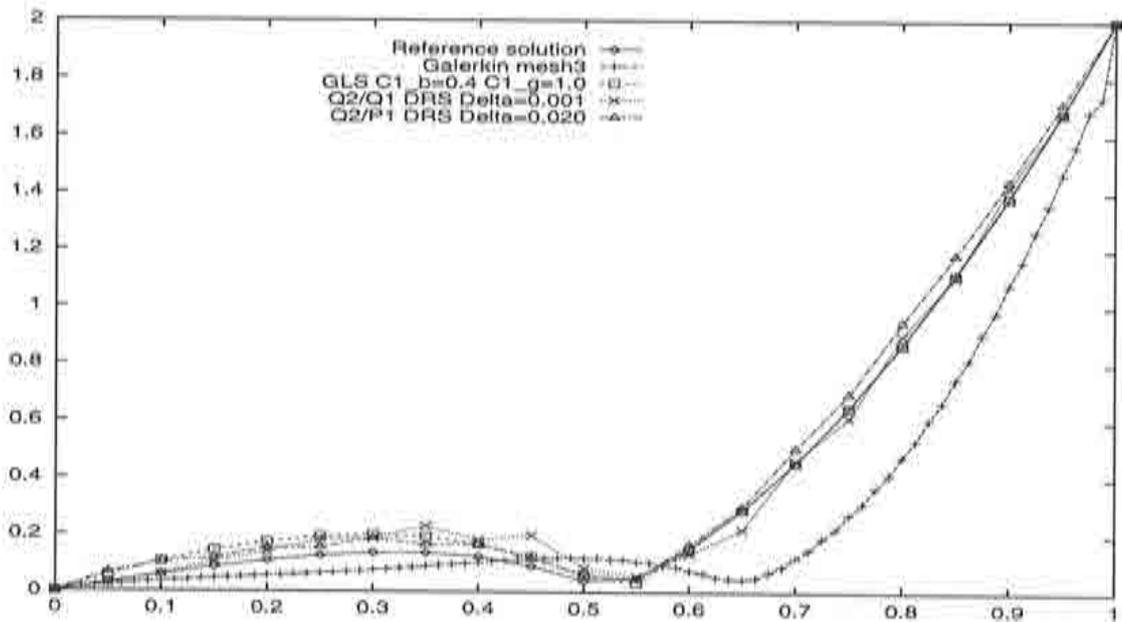
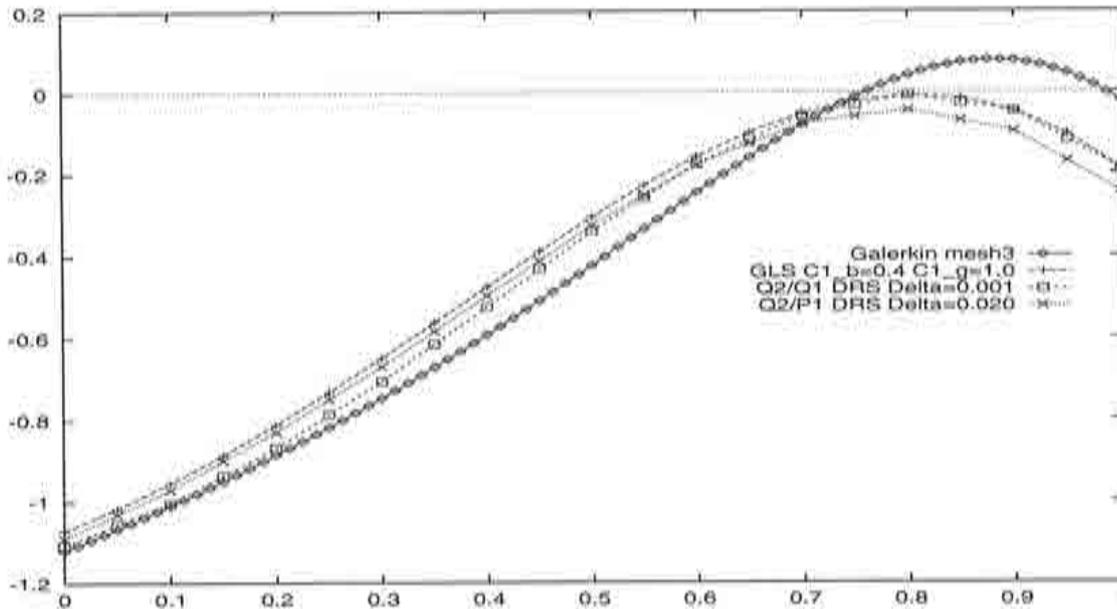


Figura 3.11. Variación de la velocidad a lo largo de la sección media usando elementos  $Q2$  ( $C1_b \equiv C1_\beta$  y  $C1_g \equiv C1_\gamma$ ). La solución de referencia se calculó con  $\omega = 0$  y elementos  $Q2/P1$ .

y el método GLS con  $\beta = 1/9$  y  $\gamma = 0$ , los cuales son los parámetros óptimos para el caso  $|\omega| = 0$  (ver capítulo 1). Claramente la solución es errónea. La incompresibilidad está muy mal aproximada y el fluido fluye básicamente cerca al cilindro exterior. Utilizando la misma estrategia que para el elemento bilineal, se ha encontrado que los mejores resultados se obtienen si en (3.67) se utiliza

$$C1_\beta = 0.4, \quad C1_\gamma = 1 \quad (\text{elemento } Q2) \quad (3.69)$$

La solución obtenida para  $C1_\beta = 0.4$  y  $C1_\gamma = 0$  se presenta en la Figura 3.9b, mientras que la



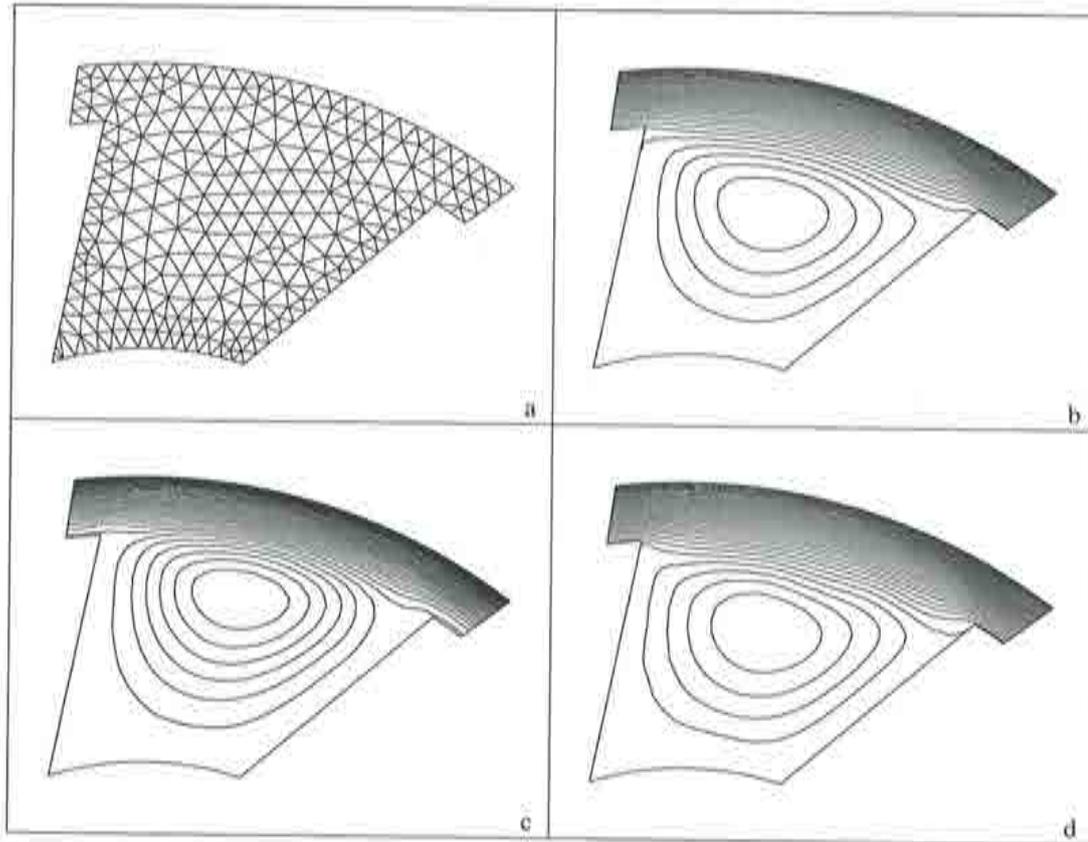
**Figura 3.12.** Variación de la presión a lo largo de la sección media usando elementos  $Q2$  ( $C1,b \equiv C1,\beta$  y  $C1,g \equiv C1,\gamma$ ).

solución con  $C_{1\gamma} = 1$  se presenta en la Figura 3.9c. Los contornos de presión obtenidos para este último caso se presentan en la Figura 3.9d. Para este elemento se usaron los valores de las constantes de (3.69) y  $C_{2\beta} = 1/9$  y  $C_{2\gamma} = 5/18$  (y por lo tanto  $\gamma = 5\beta/2$ , como para el elemento bilineal).

Para el método DRS se han utilizado los elementos  $Q2/Q1$  y  $Q2/P1$  (bicuadrático en velocidades y bilineal continuo en presiones, y bicuadrático en velocidades y lineal a trozos discontinuo en presiones). Los patrones de líneas de corriente se presentan en las Figuras 3.10a y 3.10b respectivamente, mostrando un buen ajuste con la solución de referencia (Figura 3.3b). Para el elemento  $Q2/Q1$  se tomó  $\delta = 0.001$  en (3.55), y para el  $Q2/P1$   $\delta = 0.02$ .

Las Figuras 3.11 y 3.12 presentan respectivamente la variación de la velocidad y la presión a lo largo de la sección media usando el método de Galerkin y la malla 3, el método DRS tanto para los elementos  $Q2/Q1$  y  $Q2/P1$  y la malla 1, y el método GLS usando interpolación bicuadrática para la velocidad y la presión y la malla 1.

Finalmente, para ver la efectividad de las técnicas presentadas en mallas no estructuradas se resolvió el problema utilizando la malla de 441 triángulos cuadráticos (elemento  $P2$ ) y 968 nodos presentada en la Figura 3.13a. Las líneas de corriente utilizando el método GLS y una malla de elementos  $P1$ , obtenida dividiendo cada triángulo cuadrático en cuatro, se presentan en la Figura 3.13b. En la Figura 3.13c se presenta el mismo resultado pero en el caso de utilizar GLS y elementos  $P2$  (cuadráticos y continuos en velocidad y presión). Para los elementos lineales  $P1$  se utilizaron los valores de las constantes dados en (3.68) (igual que para elementos  $Q1$ ), y para los cuadráticos  $P2$  se tomó  $C_{1\beta} = 0.004$  y  $C_{1\gamma} = 1$ . Para el método DRS se utilizó el elemento  $P2^+/P1$  (cuadrático continuo en velocidades y enriquecido con una función burbuja, y lineal a trozos discontinuo en presiones), eliminando los grados de libertad correspondientes a las burbujas interiores usando condensación estática. Las líneas de corriente obtenidas para este caso se presentan en la Figura 3.13d;  $\delta$  se tomó como 0.02 igual que para el elemento  $Q2/P1$ .



**Figura 3.13.** (a): Malla no estructurada de triángulos. (b): Líneas de corriente método GLS y elementos  $P1$ .  $C_{1\beta} = 4$ ,  $C_{1\gamma} = 10$ . Picos de la función de corriente: 0.354 y -0.00151. (c): Líneas de corriente método GLS y elementos  $P2$ .  $C_{1\beta} = 0.001$ ,  $C_{1\gamma} = 1$ . Picos de la función de corriente: 0.318 y -0.00534. (d): Líneas de corriente método DRS y elementos  $P2^+/P1$ .  $\delta = 0.02$ . Picos de la función de corriente: 0.372 y -0.000347.

### 3.7 Conclusiones

En el capítulo se trató el problema encontrado cuando se considera la presencia de la fuerza de Coriolis en la ecuación de Stokes y ésta es importante respecto al término difusivo. En este caso el método de Galerkin para aproximar la solución por elementos finitos produce oscilaciones espúreas en todo el dominio. Para solucionar este problema, se estudiaron dos posibilidades diferentes. La primera de ellas es el método GLS, para el cual se propuso una nueva expresión para calcular los parámetros numéricos que definen dicho método. La segunda es novedosa, y se basa en la adición de una forma de mínimos cuadrados de la divergencia del residuo de la ecuación de momento a los términos de Galerkin. Se esbozó una base teórica para explicar porqué se logra estabilizar la solución, y de los ejemplos numéricos se observó que el método es efectivo. Este evita las oscilaciones numéricas sin añadir excesiva difusión.

La extensión de estas técnicas a las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles se presentará en el siguiente capítulo. Hay que tener en cuenta que los valores del número de Ekman para los cuales la formulación de Galerkin falla corresponden a valores extremadamente altos del número de Reynolds. Por consiguiente, en situaciones reales el problema de tener un término

---

importante de Coriolis se ve acompañado por flujos complicados y, probablemente, turbulencia. Sin embargo, las soluciones propuestas en el presente capítulo y en los anteriores son la base para diseñar esquemas efectivos en el caso de las ecuaciones de Navier-Stokes y las ecuaciones que modelan los fenómenos turbulentos.

## Capítulo 4

# Problema de Navier-Stokes

### 4.1 Introducción y objetivos

En el presente capítulo se expondrá la solución numérica de las ecuaciones que rigen el flujo incompresible, o ecuaciones de Navier-Stokes (1.1)-(1.2). Este sistema de ecuaciones se combina todas las dificultades numéricas expuestas en los capítulos anteriores, y por consiguiente su solución numérica tendrá todos los ingredientes presentados hasta el momento.

La condición de incompresibilidad obliga a utilizar interpolaciones de velocidad-presión div-estables (que cumplan la condición BB (1.41)) o, como se estableció en el primer capítulo, métodos como el GLS que modifican la forma variacional del método de Galerkin permitiendo el uso de espacios iguales para interpolar la velocidad y la presión.

Por otra parte, cuando el término convectivo de las ecuaciones de Navier-Stokes es importante (altos números de Reynolds), se generan las inestabilidades numéricas debidas a convección dominante expuestas en el segundo capítulo de este trabajo. Para eliminar las oscilaciones espúreas debidas a altos números de Reynolds, es necesario utilizar métodos que añadan viscosidad (o difusión) artificial al algoritmo numérico tales como los métodos SUPG y GLS, expuestos en el segundo capítulo. Adicionalmente, la no linealidad del término convectivo causa, a medida que sube el número de Reynolds, la pérdida de unicidad de solución, inestabilidades hidrodinámicas y turbulencia. En el presente capítulo se tratará la solución numérica de las ecuaciones de Navier-Stokes en régimen laminar, dejando el tratamiento de la turbulencia para más adelante.

Por último, si se escriben las ecuaciones de Navier-Stokes sobre ejes no inerciales, lo cual es conveniente para simular el flujo en sistemas en rotación, aparecen dos nuevos términos en las ecuaciones originales tal como se expuso en el tercer capítulo del presente trabajo. El primero de ellos es la fuerza de Coriolis, que depende de la velocidad del flujo y, como se expuso anteriormente, su discretización utilizando el método de Galerkin genera inestabilidades numéricas cuando se tienen bajos números de Ekman (fuerza de viscosa pequeña respecto a la fuerza de Coriolis). Las oscilaciones espúreas en todo el dominio de flujo debidas a la fuerza de Coriolis están íntimamente ligadas a la condición de incompresibilidad del flujo, o lo que es igual, a la presencia de la presión (ver capítulo 3). El otro término generado por la rotación del sistema de ejes es la fuerza centrífuga. Ésta es una fuerza de cuerpo que no depende de las incógnitas del problema y, por lo tanto, no genera complicaciones adicionales a las ya mencionadas. Para estabilizar los problemas generados por bajos números de Ekman se extenderán los métodos expuestos para el problema de Stokes a las ecuaciones de Navier-Stokes (método GLS y método DRS).

En conclusión, el presente capítulo expondrá dos líneas básicas para la solución numérica

por elementos finitos de las ecuaciones de Navier-Stokes. La primera de ellas es el método GLS, la cual permite utilizar igual interpolación para los espacios de velocidad y presión, además de estabilizar los efectos convectivos y de rotación. La segunda utiliza elementos div-estables, estabiliza los efectos convectivos por medio del método SUPG y los de rotación con el método DRS. Adicionalmente a esto, se presentarán esquemas de linealización para el término convectivo, y esquemas de discretización temporal para el término transitorio.

## 4.2 Ecuación de Navier-Stokes estacionaria. Problema continuo

Las ecuaciones de Navier-Stokes estacionarias escritas sobre unos ejes que rotan con una velocidad angular  $\omega/2$  y condiciones de contorno homogéneas, se escriben [Tri77, Bat67]: Encontrar  $\mathbf{u}$  y  $p$  tal que,

$$\rho \left( (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \omega \times \mathbf{u} + \frac{1}{4} \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) \right) - \nabla \cdot (2\mu \varepsilon(\mathbf{u})) + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega \quad (4.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (4.2)$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \quad (4.3)$$

donde  $\rho$  es la densidad del fluido,  $\mathbf{u}$  el campo de velocidades relativo al sistema no inercial (rotante),  $\mathbf{r}$  el vector de posición en el sistema no inercial,  $\mu$  la viscosidad dinámica del fluido,  $p$  el campo de presiones y  $\mathbf{f}$  las fuerzas de cuerpo.  $\Omega$  es el dominio de flujo y  $\partial\Omega$  su contorno.

La forma débil de Galerkin asociada al problema (4.1)-(4.3) se escribe como: Encontrar  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$  y  $p \in Q$  tal que,

$$c(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - b(p, \mathbf{v}) + b(q, \mathbf{u}) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \text{ y } q \in Q \quad (4.4)$$

donde los espacios funcionales son:

$$\mathbf{V} = H_0^1(\Omega)^{n_{\text{sd}}}, \quad Q = L^2(\Omega)/\mathbb{R} \quad (4.5)$$

y las formas multilineares se definen como:

$$c(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{t}) = \rho \int_{\Omega} [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}] \cdot \mathbf{t} \, d\Omega \quad (4.6)$$

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \rho \int_{\Omega} (\omega \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega \quad (4.7)$$

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} 2\mu \varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v}) \, d\Omega \quad (4.8)$$

$$b(q, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} q(\nabla \cdot \mathbf{v}) \, d\Omega \quad (4.9)$$

$$l(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \left[ \mathbf{f} - \frac{\rho}{4} (\omega \times (\omega \times \mathbf{r})) \right] \cdot \mathbf{v} \, d\Omega \quad (4.10)$$

La continuidad de las formas  $a$ ,  $b$ ,  $d$  y  $l$  es obvia. La continuidad de la forma  $c$  se demuestra por medio del teorema de inmersión de Sobolev y de la desigualdad de Hölder [GR86, Tem84]. Los mismos resultados de existencia y unicidad para el problema sin términos de rotación pueden ser extendidos al problema con rotación redefiniendo la bilineal  $a$  como:

$$a'(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (4.11)$$

Es  $d(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ , por lo que  $a'$  conserva la misma constante de coercividad  $K_a$  de  $a$ . La continuidad de  $a'$  también es obvia si se tiene en cuenta que,

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq |\omega| \|\mathbf{u}\|_V \|\mathbf{v}\|_V \quad (4.12)$$

por lo cual

$$a'(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq \max\{N_a, |\omega|\} \|\mathbf{u}\|_V \|\mathbf{v}\|_V = N_{a'} \|\mathbf{u}\|_V \|\mathbf{v}\|_V. \quad (4.13)$$

Establecida entonces la continuidad y coercividad de  $a'$ , y la continuidad de  $c$  y  $l$ , se definen sus normas como:

$$N_{a'} = \sup \frac{a'(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)}{\|\mathbf{v}_1\|_V \|\mathbf{v}_2\|_V} \quad (4.14)$$

$$N_c = \sup \frac{c(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)}{\|\mathbf{v}_1\|_V \|\mathbf{v}_2\|_V \|\mathbf{v}_3\|_V} \quad (4.15)$$

$$N_l = \sup \frac{l(\mathbf{v}_1)}{\|\mathbf{v}_1\|_V} \quad (4.16)$$

donde el supremo se toma sobre todos los  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V - \{\mathbf{0}\}$ .

Finalmente, a partir de la continuidad de las formas multilineares, de la coercividad de  $a'$ , de la condición de BB (1.36), de que

$$c(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0 \quad (4.17)$$

lo cual se comprueba fácilmente para  $\mathbf{u}$  solución del problema (4.1)-(4.3), y suponiendo que:

$$\chi = \frac{N_c N_l}{K_a^2} < 1 \quad (4.18)$$

se demuestra que el problema (4.4) tiene solución y es única [GR86].

Las anteriores condiciones se satisfacen por los subespacios funcionales  $V_h$  y  $Q_h$  provenientes de la aproximación por elementos finitos de  $V$  y  $Q$ , excepto la condición de BB (1.36) la cual, al igual que para el problema de Stokes (ver capítulo 1), ha de ser requerida por medio de la elección de la pareja  $V_h$  y  $Q_h$ . Es decir, los espacios de interpolación para  $\mathbf{u}$  y  $p$  deben cumplir la condición BB discreta (1.41).

La condición  $\chi < 1$  es restrictiva y asegura la unicidad de solución del problema débil. Sin embargo, para números de Reynolds altos no se tiene unicidad de solución ( $\chi > 1$ ) [Tem84]. La extensión para condiciones no homogéneas  $\mathbf{u} = \mathbf{g}$  en el contorno es directa [GR86]. Para tracciones prescritas en el contorno (contornos tipo Neumann) la situación es más complicada. Un análisis de la aproximación por elementos finitos tipo Galerkin para este caso se puede encontrar en [Ver87].

### 4.3 Linealización del término convectivo

El término convectivo en la ecuación de momento (4.1) puede ser linealizado utilizando diferentes esquemas, que a su vez generan diferentes métodos iterativos para el problema débil (4.4). Si se utiliza el método de Galerkin, linealizar primero el problema fuerte y luego encontrar la forma débil es exactamente igual a obtener primero la forma débil y luego linealizar. Para simplificar la exposición se optó por la primera alternativa.

Para la linealización del término convectivo de la ecuación de momento (4.1) se eligieron tres esquemas diferentes: Evaluarlo totalmente en la iteración anterior (método que se denomina en este trabajo como RHS), el método de Picard o de sustituciones sucesivas y el método de Newton-Raphson.

### 4.3.1 Método RHS

Consiste en evaluar el término convectivo en la iteración anterior. Esto es, obtenido (o dado)  $\mathbf{u}^{i-1}$  el término convectivo en la iteración  $i$  se aproxima como:

$$\mathbf{u}^i \cdot \nabla \mathbf{u}^i \approx \mathbf{u}^{i-1} \cdot \nabla \mathbf{u}^{i-1} \quad (4.19)$$

donde  $i$  es el índice de la iteración.

La forma débil resultante al aplicar el método de Galerkin es entonces,

$$d(\mathbf{u}^i, \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}^i, \mathbf{v}) - b(p^i, q) + b(q, \mathbf{u}^i) = l(\mathbf{v}) - c(\mathbf{u}^{i-1}, \mathbf{u}^{i-1}, \mathbf{v}) \quad (4.20)$$

La principal ventaja del método es que el sistema de ecuaciones resultante al aproximar (4.20) por elementos finitos es simétrico y la matriz del sistema no cambia. Sin embargo, se sabe que el anterior esquema converge sólo para números de Reynolds muy pequeños.

### 4.3.2 Método de Picard

El término convectivo en (4.1) para la iteración  $i$  se aproxima como:

$$\mathbf{u}^i \cdot \nabla \mathbf{u}^i \approx \mathbf{u}^{i-1} \cdot \nabla \mathbf{u}^i \quad (4.21)$$

En la anterior aproximación el mayor término que se desprecia es de orden  $\delta \mathbf{u}^i$ , donde

$$\delta \mathbf{u}^i = \mathbf{u}^i - \mathbf{u}^{i-1} \quad (4.22)$$

La forma débil resultante al aplicar el método de Galerkin es entonces,

$$c(\mathbf{u}^{i-1}, \mathbf{u}^i, \mathbf{v}) + d(\mathbf{u}^i, \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}^i, \mathbf{v}) - b(p^i, \mathbf{v}) + b(q, \mathbf{u}^i) = l(\mathbf{v}) \quad (4.23)$$

Para el método de Picard se tienen los siguientes resultados [GR86]:

**Lema 4.1** El problema de Picard tiene solución única y se cumple que:

$$\|\mathbf{u}^i\|_V \leq \frac{N_l}{K_a} \quad (4.24)$$

$$\|p^i\|_Q \leq \frac{N_l}{K_b} \left( \frac{N_c N_l}{K_a^2} + \frac{N_{a'}}{K_a} + 1 \right) \quad (4.25)$$

**Teorema 4.1** Sea  $\mathbf{u}^0 \in V$  cualquiera. Si  $\chi < 1$  se cumple que:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^i\|_V = 0 \quad (4.26)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|p - p^i\|_Q = 0 \quad (4.27)$$

y además

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^i\|_V \leq \chi \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{i-1}\|_V \quad (4.28)$$

$$\|p - p^i\|_Q \leq \frac{2K_a + N_{a'}}{K_a} \chi \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{i-1}\|_V \quad (4.29)$$

Es decir, para  $\chi < 1$  el problema de Picard converge y lo hace linealmente.

Es fácil ver por inducción en (4.28) y (4.29) que:

$$\log \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^i\|_V \leq i \log \chi + \log \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^0\|_V \quad (4.30)$$

$$\log \|p - p^i\|_Q \leq i \log \chi + \log \left( \frac{2K_a + N_{a'}}{K_a} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^0\|_V \right) \quad (4.31)$$

de donde se observa la convergencia lineal tanto en velocidades como en presiones con pendiente  $\log \chi$  (por lo tanto  $\chi$  debe ser menor que 1).

### 4.3.3 Método de Newton-Raphson

El término convectivo en (4.1) para la iteración  $i$  se aproxima como:

$$\mathbf{u}^i \cdot \nabla \mathbf{u}^i \approx \mathbf{u}^{i-1} \cdot \nabla \mathbf{u}^i + \mathbf{u}^i \cdot \nabla \mathbf{u}^{i-1} - \mathbf{u}^{i-1} \cdot \nabla \mathbf{u}^{i-1} \quad (4.32)$$

donde se han despreciado términos de orden mayor o igual a  $(\delta \mathbf{u}^i)^2$ .

La forma débil del problema de Newton-Raphson queda entonces como:

$$\begin{aligned} c(\mathbf{u}^{i-1}, \mathbf{u}^i, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}^i, \mathbf{u}^{i-1}, \mathbf{v}) + d(\mathbf{u}^i, \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}^i, \mathbf{v}) - b(p^i, \mathbf{v}) \\ + b(q, \mathbf{u}^i) = l(\mathbf{v}) + c(\mathbf{u}^{i-1}, \mathbf{u}^{i-1}, \mathbf{v}) \end{aligned} \quad (4.33)$$

Para el método de Newton-Raphson se tienen los siguientes resultados [GR86]:

**Teorema 4.2** Si se tiene  $\chi < 1$  y  $\mathbf{u}_0 \in V$  es tal que,

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|_V < \frac{1}{C} \sigma \quad (4.34)$$

donde  $\sigma < 1$  y  $C$  se define como:

$$C := \frac{2N_c}{K_a(1 - \chi)} \quad (4.35)$$

se cumple lo siguiente:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^i\|_V = 0 \quad (4.36)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|p - p^i\|_Q = 0 \quad (4.37)$$

y además

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^i\|_V \leq \frac{1}{C} \sigma^{2^i} \quad (4.38)$$

$$\|p - p^i\|_Q \leq \frac{C'}{C} \sigma^{2^i} \quad (4.39)$$

donde  $C'$  es una constante que no depende de  $i$ .

De (4.38)-(4.39) se obtiene que:

$$\log \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^i\|_V \leq \log \frac{1}{C} + 2^i \log \sigma \quad (4.40)$$

$$\log \|p - p^i\|_Q \leq \log \frac{C'}{C} + 2^i \log \sigma \quad (4.41)$$

estableciendo así la convergencia cuadrática del método.

De (4.34) se deduce que el método de Newton-Raphson converge sólo si la aproximación inicial está lo suficientemente cerca de la solución (si está dentro del denominado radio de atracción). También puede verse de (4.34) y (4.35) que la convergencia se da cuando  $\chi < 1$ , y que a medida que el número de Reynolds sea mayor  $C$  se hace mayor y por lo tanto el radio de atracción ( $\sigma/C$ ) se hace más pequeño. De lo anterior se puede deducir que para números de Reynolds altos, es recomendable utilizar el método de Picard, o bien aproximarse lo suficiente a la solución con este método y luego aplicar el método de Newton-Raphson para aprovechar su convergencia cuadrática.

Cabe por último resaltar que a nivel de implementación los métodos de Picard y Newton-Raphson pueden escribirse de la siguiente forma:

$$c(\mathbf{u}^i, \mathbf{u}^i, \mathbf{v}) \approx c(\mathbf{u}^{i-1}, \mathbf{u}^i, \mathbf{v}) + \beta c(\mathbf{u}^i, \mathbf{u}^{i-1}, \mathbf{v}) - \beta c(\mathbf{u}^{i-1}, \mathbf{u}^{i-1}, \mathbf{v}) \quad (4.42)$$

si se toma  $\beta = 0$  se tiene el método de Picard y con  $\beta = 1$  el de Newton-Raphson.

## 4.4 Métodos de estabilización para las ecuaciones de Navier-Stokes

Como se ha mencionado anteriormente, el problema de Navier-Stokes presenta serias dificultades numéricas al tratar de aproximar su solución utilizando el método clásico de elementos finitos. La primera de ellas, expuesta a través del problema de Stokes en el primer capítulo, es la debida a la incompresibilidad del flujo, lo cual obliga a escoger interpolaciones diferentes para la velocidad y la presión, o a utilizar algún método de estabilización. La segunda de ellas se presenta cuando los efectos convectivos se vuelven importantes (altos números de Reynolds) presentándose oscilaciones espúreas en todo el dominio, típicas del problema de convección-difusión (ver capítulo 2). Por último, cuando se escriben las ecuaciones sobre ejes no inerciales rotando a una velocidad angular dada, es necesario estabilizar las oscilaciones espúreas que se presentan en caso de que la velocidad de rotación sea importante (bajos números de Ekman).

En resumen, el problema de Navier-Stokes contiene todos los problemas numéricos expuestos en los capítulos anteriores. En el presente apartado se extienden los métodos presentados hasta el momento al problema de flujo incompresible laminar y estacionario. Como se ha bosquejado a través de la monografía, se tratarán dos líneas básicas para la estabilización del flujo. La primera de ellas utiliza elementos div-estables para tratar el problema de la incompresibilidad del flujo, el método SUPG para estabilizar los efectos convectivos y el método DRS para atacar el problema de rotación dominante. La segunda es la extensión del método GLS aplicada al problema completo de Navier-Stokes. Este método introducido por Hughes y colaboradores [HF87, HFH89, HFB86, FF92], permite el uso de igual interpolación para la velocidad y la presión, y a su vez estabiliza los efectos convectivos y de rotación.

El problema de Navier-Stokes incompresible y estacionario a tratar de aquí en adelante es: Encontrar  $\mathbf{u}$  y  $p$  tal que,

$$\rho \left( (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} + \frac{1}{4} \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \right) - \nabla \cdot (2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega \quad (4.43)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (4.44)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_D \quad \text{en } \Gamma_D \quad (4.45)$$

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{t}_N \quad \text{en } \Gamma_N \quad (4.46)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = u_n, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{g}_1 = t_1, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{g}_2 = t_2 \quad \text{en } \Gamma_M \quad (4.47)$$

donde el significado de las diferentes variables ya fue descrito en las ecuaciones (1.1) a (1.5).

La forma débil de Galerkin asociada a la anterior forma fuerte se escribe como: Encontrar  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_g$  y  $p \in Q$  tal que,

$$c(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - b(p, \mathbf{v}) + b(q, \mathbf{u}) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0 \text{ y } q \in Q \quad (4.48)$$

donde las formas multilineales son las definidas en las ecuaciones (1.13) a (1.17), y los espacios funcionales son:

$$\mathbf{V}_g = \left\{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^{n_{sd}} \mid \mathbf{v}|_{\Gamma_D} = \mathbf{u}_g, (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})|_{\Gamma_M} = u_n \right\} \quad (4.49)$$

$$\mathbf{V}_0 = \left\{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^{n_{sd}} \mid \mathbf{v}|_{\Gamma_D} = \mathbf{0}, (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})|_{\Gamma_M} = 0 \right\} \quad (4.50)$$

$$Q = L^2(\Omega)/\mathbb{R} \quad (4.51)$$

El problema discreto se obtiene tomando una partición regular de elementos finitos  $\{\Omega\}^e$  del dominio  $\Omega$ , y los espacios funcionales conformes asociados  $\mathbf{V}_{h,0} \subset \mathbf{V}_0$ ,  $\mathbf{V}_{h,g} \subset \mathbf{V}_g$  y  $Q_h \subset Q$  tales que:

$$\mathbf{V}_{h,0} = \left\{ \mathbf{v} \in C^0(\Omega)^{n_{sd}} \mid \mathbf{v}|_{\Omega^e} \in R_k(\Omega^e)^{n_{sd}}, \mathbf{v}|_{\Gamma_D} = \mathbf{0} \text{ y } (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})|_{\Gamma_M} = 0 \right\} \quad (4.52)$$

$$\mathbf{V}_{h,g} = \left\{ \mathbf{v} \in C^0(\Omega)^{n_{sd}} \mid \mathbf{v}|_{\Omega^e} \in R_k(\Omega^e)^{n_{sd}}, \mathbf{v}|_{\Gamma_D} = \mathbf{u}_g \text{ y } (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})|_{\Gamma_M} = 0 \right\} \quad (4.53)$$

$$Q_h = \left\{ q \mid q|_{\Omega^e} \in R_k(\Omega^e) \right\} \quad (4.54)$$

$R_k(\Omega^e)$  definido en (1.39). La formulación de elementos finitos de Galerkin se escribe entonces como: Encontrar  $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_{h,g} \times Q_h$  tal que,

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h; p_h, q_h) = \mathcal{L}(\mathbf{v}_h) \quad \forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{V}_{h,0} \times Q_h \quad (4.55)$$

donde  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{L}$  se definen como:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h; p_h, q_h) &= c(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + d(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \\ &\quad - b(p_h, \mathbf{v}_h) + b(q_h, \mathbf{u}_h) \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}_h) = l(\mathbf{v}_h) \quad (4.57)$$

La forma trilineal  $c$  se reemplazará por su respectiva linealización dependiendo del método utilizado (RHS, Picard o Newton-Raphson, ver apartado anterior).

#### 4.4.1 Elementos div-estables + SUPG + DRS

La forma débil discreta del problema de Navier-Stokes utilizando elementos que cumplan BB (1.41) para tratar la incompresibilidad del flujo, SUPG [HB79, HB82, BH82] para estabilizar los efectos convectivos y DRS [CS97, CS94b, SCO95] para evitar las oscilaciones espúreas, se escribe como: Encontrar  $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_{h,g} \times Q_h$  tal que,

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h; p_h, q_h) - \mathcal{L}(\mathbf{v}_h) + \mathcal{D}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h; p_h, q_h) = 0 \quad \forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{V}_{h,0} \times Q_h \quad (4.58)$$

Las formas  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{L}$  son los términos de Galerkin definidos en (4.56) y (4.57). Los términos residuales (forma  $\mathcal{D}$ ) contiene las aportaciones de los métodos SUPG y DRS, y vienen dados por:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h; p_h, q_h) &= \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_1 (\mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{v}_h) \cdot (\mathcal{S}_1(\mathbf{u}_h, p_h) - \mathbf{f}_e) \, d\Omega \\ &\quad + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau \nabla \cdot \mathcal{S}^v(\mathbf{v}_h, q_h) (\nabla \cdot \mathcal{S}^v(\mathbf{u}_h, p_h) - \nabla \cdot \mathbf{f}_e) \, d\Omega \end{aligned} \quad (4.59)$$

Todos los términos de (4.59) se evalúan en el interior de los elementos.  $f_c$  es el término de fuerzas de cuerpo conteniendo la fuerza centrífuga, es decir:

$$f_c = f - \frac{\rho}{4} \omega \times (\omega \times r) \quad (4.60)$$

La primera integral en (4.59) contiene los términos provenientes del método SUPG (ver la analogía con (2.38) y (2.39)), mientras la segunda los generados por el método DRS (obsérvese que es sólo añadir el término convectivo en (3.53)).  $\mathcal{S}_1$  es el operador diferencial de la ecuación de momento definido como:

$$\mathcal{S}_1(\mathbf{u}, p) = \rho((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \omega \times \mathbf{u}) + \nabla p - \mu \Delta \mathbf{u} \quad (4.61)$$

y  $\mathcal{S}^\vee$  el operador de la ecuación de momento pero sin el término viscoso (la divergencia de este término es cero en el problema continuo), es decir:

$$\mathcal{S}^\vee(\mathbf{u}, p) = \rho((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \omega \times \mathbf{u}) + \nabla p \quad (4.62)$$

$\tau_1$  es el tiempo intrínseco evaluado a nivel elemental para el método SUPG (ver (2.42)). Es decir,  $\tau_1$  viene dado por:

$$\tau_1 = \frac{\alpha_a h}{2|\mathbf{u}_h|} \quad (4.63)$$

$\alpha_a$  es la función asintótica de "upwind" que depende del tipo de elemento (ver (2.18) y (2.19)), y del número de Péclet (Reynolds) elemental definido como:

$$\gamma_h = \frac{|\mathbf{u}_h| h}{2\nu} \quad (4.64)$$

siendo  $\nu$  la viscosidad cinemática del fluido ( $h$  es el diámetro del elemento). El segundo parámetro  $\tau$  es el del método DRS definido en (3.55).

La linealización de los términos convectivos en  $\mathcal{S}_1(\mathbf{u}_h, p_h)$  se realiza utilizando cualquiera de los métodos expuestos en el apartado 4.3 (RHS, Picard o Newton-Raphson), mientras que en las funciones de perturbación ( $\mathcal{S}_1(\mathbf{v}_h, q_h)$  y  $\mathcal{S}^\vee(\mathbf{v}_h, q_h)$ ) y en la evaluación del tiempo intrínseco  $\tau_1$ ,  $\mathbf{u}_h$  se toma siempre como la solución de la iteración anterior (linealización tipo Picard). En el operador  $\mathcal{S}^\vee$  la linealización se realiza utilizando siempre un esquema tipo Picard. Esta elección es bastante lógica ya que los términos del DRS sólo son importantes para muy bajos números de Ekman, lo cual en problemas de flujo reales implican altos números de Reynolds. Se conoce que en este caso la linealización con el método de Newton-Raphson tiene un radio de atracción muy pequeño [GR86], siendo el método de Picard el más conveniente para asegurar la convergencia. El problema débil discreto linealizado se escribe entonces como: Dado  $(\mathbf{u}_h^0, p_h^0) \in \mathbf{V}_{h,g} \times Q_h$ , para  $i = 1, 2, \dots$  encontrar  $(\mathbf{u}_h^i, p_h^i) \in \mathbf{V}_{h,g} \times Q_h$  tal que,

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}(\mathbf{u}_h^i, p_h^i; \mathbf{v}_h, q_h) + \sum_{\sigma=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^\sigma} \tau_1^{i-1} (\mathbf{u}_h^{i-1} \cdot \nabla \mathbf{v}_h) \cdot (\mathcal{S}_1(\mathbf{u}_h^i, p_h^i) - f_c) \, d\Omega \\ & + \sum_{\sigma=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^\sigma} \tau \nabla \cdot \mathcal{S}^\vee(\mathbf{v}_h, q_h) (\nabla \cdot \mathcal{S}^\vee(\mathbf{u}_h^i, p_h^i) - \nabla \cdot f_c) \, d\Omega = \mathcal{L}(\mathbf{v}_h) \end{aligned} \quad (4.65)$$

donde la linealización del término convectivo de la forma  $\mathcal{A}$  (4.56) fue expuesta en el apartado anterior. El término convectivo en  $\mathcal{S}_1(\mathbf{u}_h^i, p_h^i)$  queda como:

$$(\mathbf{u}_h^i \cdot \nabla) \mathbf{u}_h^i \approx (\mathbf{u}_h^{i-1} \cdot \nabla) \mathbf{u}_h^{i-1}, \quad (4.66)$$

$$(\mathbf{u}_h^i \cdot \nabla) \mathbf{u}_h^i \approx (\mathbf{u}_h^{i-1} \cdot \nabla) \mathbf{u}_h^i, \quad (4.67)$$

$$(\mathbf{u}_h^i \cdot \nabla) \mathbf{u}_h^i \approx (\mathbf{u}_h^{i-1} \cdot \nabla) \mathbf{u}_h^i + (\mathbf{u}_h^i \cdot \nabla) \mathbf{u}_h^{i-1} - (\mathbf{u}_h^{i-1} \cdot \nabla) \mathbf{u}_h^{i-1}, \quad (4.68)$$

según se linealiza con los métodos RHS, Picard o Newton-Raphson, respectivamente. En el término  $\nabla \cdot \mathcal{S}^Y(\mathbf{u}_h^i, p_h^i)$  queda:

$$\nabla \cdot ((\mathbf{u}_h^i \cdot \nabla) \mathbf{u}_h^i) \approx \nabla \mathbf{u}_h^{i-1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^i \quad (4.69)$$

En la ecuación anterior se utilizó la condición de incompresibilidad (4.2). El producto contraído  $\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$  se define como:

$$\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \partial_k u_l \partial_l u_k \quad (4.70)$$

En la función de perturbación  $\nabla \cdot \mathcal{S}^Y(\mathbf{v}_h, q_h)$  el término convectivo queda igual que en (4.69) reemplazando  $\mathbf{u}_h^i$  por  $\mathbf{v}_h$ .

El método presentado es consistente en el sentido que la solución del problema fuerte satisface (4.58). El análisis de estabilidad y convergencia del método SUPG sin términos de rotación puede ser consultado en [BH82, HB79, HB82]. Para el método DRS dicho análisis se esbozó en el capítulo anterior para el problema de Stokes y en la referencia [CS97].

En los ejemplos numéricos se muestra la eficacia del método para estabilizar tanto los efectos convectivos como los de rotación. Una de las principales ventajas de este esquema consiste en poder utilizar elementos de presión discontinua, con lo cual pueden eliminarse los grados de libertad de esta variable a nivel elemental por medio de un esquema de penalización (ver capítulo 1). El esquema más utilizado en el presente trabajo es el de penalización iterativa. Este se obtiene sumando al lado izquierdo del problema planteado en (4.65) los términos:

$$\epsilon(p_h^i, q_h) - \epsilon(p_h^{i-1}, q_h) \quad (4.71)$$

donde  $\epsilon > 0$ , pequeño, es el parámetro de penalización. El análisis de convergencia y estabilidad para el problema débil de Navier-Stokes penalizado puede ser consultado en [Cod92].

#### 4.4.2 Método GLS

La forma débil discreta del método GLS para el problema de Navier-Stokes se obtiene igual que para el problema de Stokes (ver apartado 3.4), añadiendo los términos convectivos linealizados tanto a la parte de Galerkin como a los términos residuales. Es decir, el problema se escribe como: Dado  $(\mathbf{u}_h^0, p_h^0) \in \mathbf{V}_{h,g} \times Q_h$ , para  $i = 1, 2, \dots$  encontrar  $(\mathbf{u}_h^i, p_h^i) \in \mathbf{V}_{h,g} \times Q_h$  tal que,

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}_h^i, p_h^i; \mathbf{v}_h, q_h) - \mathcal{L}(\mathbf{v}_h, q_h) + \mathcal{R}(\mathbf{u}_h^i, p_h^i; \mathbf{v}_h, q_h) = 0 \quad \forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h \quad (4.72)$$

donde los términos residuales ( $\mathcal{R}$ ) están dados por:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\mathbf{u}_h^i, p_h^i; \mathbf{v}_h, q_h) = & \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \left[ \tau_1 \mathcal{S}_1(\mathbf{v}_h, q_h) \cdot (\mathcal{S}_1(\mathbf{u}_h^i, p_h^i) - \mathbf{f}_\sigma) \right. \\ & \left. + \tau_2 \mathcal{S}_2(\mathbf{v}_h, q_h) \mathcal{S}_2(\mathbf{u}_h^i, p_h^i) \right] d\Omega \end{aligned} \quad (4.73)$$

donde el operador  $\mathcal{S}_1$  es el definido en (4.61), la forma linealizada del término convectivo en  $\mathcal{S}_1(\mathbf{u}_h^i, p_h^i)$  viene dada por (4.66) a (4.68) según el método utilizado (RHS, Picard o Newton-Raphson), y para evaluar la función de perturbación  $\mathcal{S}_1(\mathbf{v}_h, q_h)$  se utiliza  $\mathbf{u}_h^{i-1}$ .  $\mathcal{S}_2$  es el operador diferencial de la ecuación de incompresibilidad definido en (3.42).

El parámetro  $\tau_1$  se define como el mínimo entre el obtenido por convección dominante y rotación dominante. Es decir,  $\tau_1$  para el problema sin rotación se define como (ver (2.48) y

[FF92, Cod92]):

$$\tau_1^c = \begin{cases} \frac{\beta h^2}{4\nu} & \text{para } \gamma_h \leq 1 \\ \frac{\alpha_a h}{2|\mathbf{u}_h^{i-1}|} & \text{para } \gamma_h > 1 \end{cases} \quad (4.74)$$

donde  $\beta$  depende del tipo de elemento (1/3 para lineales y 1/9 para cuadráticos) y  $\alpha_a$  son las aproximaciones asintóticas a la función de "upwind" dadas en (2.18) y (2.19).  $\gamma_h$  es el número de Reynolds elemental (4.64). Para el problema con rotación  $\tau_1 = \tau_1^r$  definido en (3.49). En el caso con convección y rotación importantes, el tiempo intrínseco  $\tau_1$  se define entonces como:

$$\tau_1 = \min\{\tau_1^c, \tau_1^r\} \quad (4.75)$$

Esta escogencia se debe a que de (4.74) para convección dominante el  $\tau_1$  es menor a medida que sube el número de Reynolds, y de (3.49) para rotación dominante  $\tau_1$  también es menor a medida que baja el número de Ekman.

El segundo parámetro ( $\tau_2$ ), el cual para el caso sin rotación y sin convección se toma como cero (ver capítulo 1), en el caso de altos números de Reynolds debe ser positivo con el fin de mejorar la convergencia y forzar la incompresibilidad del flujo [FF92, BT94]. El diseño óptimo de este parámetro para el caso de convección dominante (sin términos de rotación) se presenta en [FF92], y viene dado por:

$$\tau_2^c = \begin{cases} \frac{\lambda \beta h^2 |\mathbf{u}_h^{i-1}|^2}{2\nu} & \text{para } \gamma_h \leq 1 \\ \lambda |\mathbf{u}_h^{i-1}|/h & \text{para } \gamma_h > 1 \end{cases} \quad (4.76)$$

donde  $\lambda > 0$  es una constante y  $\beta$  se definió para  $\tau_1$  en (4.74). Para el caso de rotación dominante  $\tau_2 = \tau_2^r$  y se define en (3.50). Cuando se tienen ambos términos, el convectivo y el de rotación,  $\tau_2$  se escoge como:

$$\tau_2 = \max\{\tau_2^c, \tau_2^r\} \quad (4.77)$$

$\tau_2^c$  es mayor a medida que el número de Reynolds sube, y  $\tau_2^r$  también se hace más grande a menor número de Ekman. De aquí (4.77).

El método GLS presentado es consistente en el sentido que la solución del problema fuerte satisface (4.72). El análisis de convergencia y estabilidad del método para el caso sin rotación puede ser consultado en [FF92]. Para el caso de rotación dominante (sin convección) se presentó en el capítulo anterior, y en la referencia [CS97]. La efectividad del método se muestra en los ejemplos numéricos presentados al final del presente capítulo.

## 4.5 Problema transitorio

En el presente apartado se retoma el problema completo de Navier-Stokes planteado en (1.1)-(1.2), con las condiciones de contorno e iniciales expresadas en (1.3)-(1.6). Por el momento se toma  $\Gamma_M = \emptyset$  (contorno donde se prescribe la velocidad normal y las tensiones tangenciales) para simplificar la exposición. En [Ver87] se estudia este tipo de condiciones de contorno para el problema estacionario.

La forma débil del problema completo de Navier-Stokes se escribe: Encontrar  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_s$  y  $p \in Q_s$  tal que,

$$\rho(\partial_t \mathbf{u}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - b(p, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_t \quad (4.78)$$

$$b(q, \mathbf{u}) = 0 \quad \forall q \in Q_t \quad (4.79)$$

$$(\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0), \mathbf{v}) = (\mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_t \quad (4.80)$$

donde las formas multilineales son las definidas en (1.13)-(1.17), y los espacios funcionales los definidos en (1.18)-(1.21). Los datos  $\mathbf{f}$ ,  $t_N$ ,  $\mathbf{u}_g$  y  $\mathbf{u}_0$  se supone que satisfacen:

$$\mathbf{f} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^{n_{nd}}) \quad (4.81)$$

$$\mathbf{u}_g \in L^2(0, T; H^{1/2}(\Gamma)^{n_{nd}}) \quad (4.82)$$

$$t_N \in L^2(0, T; H^{-1/2}(\Gamma)^{n_{nd}}) \quad (4.83)$$

$$\mathbf{u}_0 \in \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^{n_{nd}} \mid \nabla \cdot \mathbf{v} = 0\} \quad (4.84)$$

Para el caso de  $\Gamma_N = \emptyset$ , se demuestra que todos los términos de (4.78) a (4.80) tienen sentido, y que la regularidad de la solución es más alta de lo que se requiere a priori [Tem84]. Si  $n_{nd} = 2$  se prueba la existencia y unicidad de la solución. Para  $n_{nd} = 3$  se prueba la existencia de solución débil, pero la unicidad sólo se puede demostrar en espacios funcionales más regulares que  $\mathbf{V}_s$  y  $Q_s$  (ver (1.20) y (1.21)), en cuyo caso sólo puede ser probada existencia local, es decir, para  $T$  suficientemente pequeño (ver [CF89, Lad63, Lio68, Tem84]).

Tanto la condición de coercividad (1.35) como la de BB (1.36) se necesitan para el problema transitorio continuo y discreto. Sin embargo la condición (4.18) no es necesaria.

### 4.5.1 Discretización en el tiempo

Para discretizar los términos temporales se utilizó la regla trapezoidal, o método  $\theta$ . Sea un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{F}(\mathbf{u}, t) \quad (4.85)$$

Se define,

$$\mathbf{u}^{n+\theta} := \theta \mathbf{u}^{n+1} + (1 - \theta) \mathbf{u}^n \quad (4.86)$$

donde  $t^n := n\Delta t$  y  $\mathbf{u}^n$  es una aproximación a  $\mathbf{u}(t^n)$ .  $\Delta t$  es el tamaño de una partición uniforme de  $[0, T]$ . El método  $\theta$  aplicado a (4.85) puede escribirse entonces en cualquiera de las dos formas siguientes:

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = \mathbf{F}(\mathbf{u}^{n+\theta}, t^{n+\theta}) \quad (4.87)$$

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = \theta \mathbf{F}(\mathbf{u}^{n+1}, t^{n+1}) + (1 - \theta) \mathbf{F}(\mathbf{u}^n, t^n) \quad (4.88)$$

Para la ecuación de Navier-Stokes, el esquema que se utiliza de forma más común es (4.87) [Gun89, HR90], aunque (4.88) también es usada [CSvS86, Cod92].

Claramente la implementación del primer esquema implica la programación de menos términos, sin embargo se tendría que almacenar no sólo  $\mathbf{u}^n$  y  $\mathbf{u}^{n+1}$ , sino que también  $\mathbf{u}^{n+\theta}$ . Este inconveniente se evita si se observa que:

$$\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n = \frac{\mathbf{u}^{n+\theta} - \mathbf{u}^n}{\theta} \quad (4.89)$$

de donde (4.87) se reescribe como:

$$\frac{\mathbf{u}^{n+\theta} - \mathbf{u}^n}{\theta \Delta t} = \mathbf{F}(\mathbf{u}^{n+\theta}, t^{n+\theta}) \quad (4.90)$$

Obtenida  $\mathbf{u}^{n+\theta}$ ,  $\mathbf{u}^{n+1}$  se calcula usando (4.86). Por consiguiente, el esquema presentado en (4.90) fue el escogido para el presente trabajo. La forma débil de Galerkin del problema transitorio (4.78)-(4.80) se reescribe entonces como:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\theta \Delta t} (\mathbf{u}^{n+\theta} - \mathbf{u}^n, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}^{n+\theta}, \mathbf{u}^{n+\theta}, \mathbf{v}) + d(\mathbf{u}^{n+\theta}, \mathbf{v}) \\ + a(\mathbf{u}^{n+\theta}, \mathbf{v}) - b(p^{n+\theta}, \mathbf{v}) = l^{n+\theta}(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_t \end{aligned} \quad (4.91)$$

$$b(q, \mathbf{u}^{n+\theta}) = 0 \quad \forall q \in Q_t \quad (4.92)$$

$$(\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0), \mathbf{v}) = (\mathbf{u}^0(\mathbf{x}), \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_t \quad (4.93)$$

donde  $p^{n+\theta} = \theta p^{n+1} + (1-\theta)p^n$  y  $l^{n+\theta}(\mathbf{v})$  se calcula con  $\mathbf{f}^{n+\theta} = \theta \mathbf{f}^{n+1} + (1-\theta)\mathbf{f}^n$  (ver (1.17)). En el caso de haber sido adoptado el esquema (4.88) para la discretización temporal, la diferencia entre las formas débiles de Galerkin sería de orden  $\Delta t^2$  [Cod92]. Dicha diferencia proviene sólo del término convectivo debido a su no linealidad. Como se verá más adelante,  $\Delta t^2$  es el mínimo error que se comete debido a la discretización temporal, por lo tanto la escogencia de uno u otro esquema es irrelevante desde este punto de vista.

La escogencia del parámetro  $\theta$  depende de la estabilidad y exactitud que se requiera en el tiempo. Los únicos casos interesantes son  $\theta = 0$  (Euler hacia adelante),  $\theta = 1/2$  (Crank-Nicholson) y  $\theta = 1$  (Euler hacia atrás). Los dos últimos valores conllevan a algoritmos incondicionalmente estables en el tiempo mientras que el primero conlleva a algoritmos condicionalmente estables [Tem84]. Sin embargo, debido al carácter implícito de la presión, el caso  $\theta = 0$  es incondicionalmente inestable usando la formulación  $\mathbf{u} - p$  [Cod92, CSvS86]. Debido a la restricción de incompresibilidad, el  $\Delta t_c$  para el cual el esquema sería estable tiende a cero. Esto se ve claramente si se utiliza un método de penalización para satisfacer la condición de incompresibilidad. Si se elimina la presión de la ecuación de incompresibilidad penalizada y se sustituye en la ecuación de momento, la viscosidad efectiva que multiplica a las segundas derivadas de la velocidad es  $\mu + 1/\epsilon$  ( $\epsilon$  es el parámetro de penalización) [Cod92, CSvS86]. Es bien conocido que para el problema de convección-difusión  $\Delta t_c$  es inversamente proporcional a esta viscosidad [Cod92] por lo tanto  $\Delta t_c \sim \epsilon$  para  $\epsilon \rightarrow 0$ .

El esquema de Crank-Nicholson se debe utilizar si la exactitud en el tiempo es importante. Este esquema es de segundo orden [HR90], mientras que  $\theta = 1$  es sólo de  $O(\Delta t)$ . Si la evolución temporal no es muy importante,  $\theta = 1$  es una buena escogencia debido a su menor coste computacional (se obtiene directamente  $\mathbf{u}^{n+1}$  y no hay que calcularlo a partir de  $\mathbf{u}^{n+\theta}$  y  $\mathbf{u}^n$ ). Sin embargo, aunque se utilice  $\theta = 1/2$ , para los primeros pasos de tiempo es recomendable utilizar  $\theta = 1$  con el fin de amortiguar los armónicos de alta frecuencia asociados a la solución de las ecuaciones parabólicas en los primeros pasos de tiempo. Otro motivo para utilizar en los primeros pasos de tiempo un esquema disipativo (por ejemplo  $\theta = 1$ ), es la singularidad que presenta el esquema de Crank-Nicholson cuando  $t \rightarrow 0$  [Cod92, HR82, HR86, HR88, HR90]. Esta consiste en que las constantes de error tanto en velocidades como en presiones tienden a infinito para  $t \rightarrow 0^+$ .

Respecto al orden de discretización, hacerlo primero en el tiempo y luego en el espacio es exactamente igual si se utiliza el método de Galerkin. Sin embargo, si se utilizan métodos tipo Petrov-Galerkin como los presentados para la ecuación estacionaria (SUPG, DRS o GLS), lo anterior no ocurre. Si se discretiza primero en el espacio se llega a una situación confusa. La

explicación es la siguiente: Los métodos presentados consisten en añadir a la forma variacional de Galerkin términos que multiplican al residuo elemental de la ecuación diferencial fuerte. En el caso transitorio, este residuo contiene también la derivada temporal, por lo tanto se llega a un esquema del tipo:

$$(\partial_t \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{F}_1(\mathbf{u}, t) + \mathbf{F}_2(\mathbf{u}, \partial_t \mathbf{u}, t) = \mathbf{0} \quad (4.94)$$

con  $\mathbf{F}_1(\mathbf{u}, t)$  los términos que provienen del método de Galerkin y  $\mathbf{F}_2(\mathbf{u}, \partial_t \mathbf{u}, t)$  los términos residuales. Ahora si se trata de aplicar el método  $\theta$  a (4.94), se encuentra la dificultad de evaluar  $\mathbf{F}_2(\mathbf{u}^{n+\theta}, \partial_t \mathbf{u}^{n+\theta}, t^{n+\theta})$  debido a la derivada temporal  $\partial_t \mathbf{u}^{n+\theta}$ . Por consiguiente, la extensión de los métodos de estabilización presentados para la ecuación de Navier-Stokes estacionaria se realizará primero discretizando en el tiempo para después hacerlo en el espacio. En el caso de utilizar elementos en el espacio-tiempo, no se tendría el anterior inconveniente, siendo irrelevante discretizar primero en el espacio o primero en el tiempo.

#### 4.5.2 Elementos div-estables + SUPG + DRS. Extensión al problema transitorio

El problema de Navier-Stokes discretizado en el intervalo de tiempo  $[0, T]$  con una partición uniforme de tamaño  $\Delta t$  que se trata de aquí en adelante se escribe como: Dado  $\mathbf{u}^0$ , encontrar  $\mathbf{u}^{n+1}$  y  $p^{n+1}$  para  $n = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1$  donde  $T = N\Delta t$ , tal que,

$$\rho \left( \frac{\mathbf{u}^{n+\theta} - \mathbf{u}^n}{\theta \Delta t} + (\mathbf{u}^{n+\theta} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+\theta} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}^{n+\theta} + \frac{1}{4} \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \right) - \nabla \cdot (2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{n+\theta})) + \nabla p^{n+\theta} = \mathbf{f}^{n+\theta} \quad \text{en } \Omega \quad (4.95)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+\theta} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (4.96)$$

con  $1/2 \leq \theta \leq 1$  y las condiciones de contorno:

$$\mathbf{u}^{n+\theta} = \mathbf{u}_g \quad \text{en } \Gamma_D \quad (4.97)$$

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{n+\theta} = t_N \quad \text{en } \Gamma_N \quad (4.98)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{n+\theta} \cdot \mathbf{n} &= u_n, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{n+\theta} \cdot \mathbf{g}_1 = t_1, \\ \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{n+\theta} \cdot \mathbf{g}_2 &= t_2 \quad \text{en } \Gamma_M \end{aligned} \quad (4.99)$$

donde para todas las variables  $x^{n+\theta} = \theta x^{n+1} + (1-\theta)x^n$ .

El problema débil discreto se lee entonces: Dado  $\mathbf{u}^{n+1,0} = \mathbf{u}^n \in \mathbf{V}_{h,g}$  para  $i = 1, 2, \dots$  (hasta convergencia) encontrar  $(\mathbf{u}^{n+1,i}, p^{n+1,i}) \in \mathbf{V}_{h,g} \times Q_h$  tal que ( $i$  se refiere a la iteración dentro del intervalo de tiempo),

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{u}_h^{n+\theta,i}, \mathbf{v}_h; p_h^{n+\theta,i}, q_h) - \mathcal{L}^{n+\theta}(\mathbf{v}_h) + \mathcal{D}(\mathbf{u}_h^{n+\theta,i}, \mathbf{v}_h; p_h^{n+\theta,i}, q_h) &= 0 \\ \forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{V}_{h,0} \times Q_h \end{aligned} \quad (4.100)$$

donde las formas que aparecen son las presentadas para el problema estacionario pero añadiendo las contribuciones transitorias. Esto es, para las aportaciones de Galerkin  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{L}$  se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{u}_h^{n+\theta,i}, \mathbf{v}_h; p_h^{n+\theta,i}, q_h) &= \frac{\rho}{\theta \Delta t} (\mathbf{u}^{n+\theta,i} - \mathbf{u}^n, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}_h^{n+\theta,i}, \mathbf{u}_h^{n+\theta,i}, \mathbf{v}_h) \\ &\quad + d(\mathbf{u}_h^{n+\theta,i}, \mathbf{v}_h) + a(\mathbf{u}_h^{n+\theta,i}, \mathbf{v}_h) \\ &\quad - b(p_h^{n+\theta,i}, \mathbf{v}_h) + b(q_h, \mathbf{u}_h^{n+\theta,i}) \end{aligned} \quad (4.101)$$

$$\mathcal{L}^{n+\theta}(\mathbf{v}_h) = l^{n+\theta}(\mathbf{v}_h) \quad (4.102)$$

y para los términos residuales:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(\mathbf{u}_h^{n+\theta,i}, \mathbf{v}_h; p_h^{n+\theta,i}, q_h) &= \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_1(\mathbf{u}_h^{n+\theta,i-1}, \nabla) \mathbf{v}_h \cdot \\
&\quad \left( \rho \frac{\mathbf{u}_h^{n+\theta,i} - \mathbf{u}_h^n}{\theta \Delta t} + \mathcal{S}_1(\mathbf{u}_h^{n+\theta,i}, p_h^{n+\theta,i}) - \mathbf{f}_c^{n+\theta} \right) d\Omega \\
&\quad + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau \nabla \cdot \mathcal{S}^v(\mathbf{v}_h, q_h) \\
&\quad (\nabla \cdot \mathcal{S}^v(\mathbf{u}_h^{n+\theta,i}, p_h^{n+\theta,i}) - \nabla \cdot \mathbf{f}_c^{n+\theta}) d\Omega
\end{aligned} \tag{4.103}$$

donde el operador  $\mathcal{S}_1$  es el correspondiente a la ecuación de momento (4.95):

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_1(\mathbf{u}^{n+\theta,i}, p^{n+\theta,i}) &= \rho \left( (\mathbf{u}^{n+\theta,i} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+\theta,i} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}^{n+\theta,i} \right) \\
&\quad - \nabla \cdot (2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{n+\theta,i})) + \nabla p^{n+\theta,i}
\end{aligned} \tag{4.104}$$

y  $\mathcal{S}^v$  el operador

$$\mathcal{S}^v(\mathbf{u}^{n+\theta,i}, p^{n+\theta,i}) = \rho \left( (\nabla \mathbf{u}^{n+\theta,i-1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+\theta,i} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}^{n+\theta,i} \right) + \nabla p^{n+\theta,i} \tag{4.105}$$

Debido a la incompresibilidad del flujo

$$\nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{u}^{n+\theta} - \mathbf{u}^n}{\theta \Delta t} \right) = 0 \tag{4.106}$$

de manera que  $\nabla \cdot \mathcal{S}_1 = \nabla \cdot \mathcal{S}^v$  para la solución del problema continuo.

La linealización de los términos convectivos es exactamente igual que en el problema estacionario. Es decir:

$$(\mathbf{u}_h^{n+\theta,i} \cdot \nabla) \mathbf{u}_h^{n+\theta,i} \approx (\mathbf{u}_h^{n+\theta,i-1} \cdot \nabla) \mathbf{u}_h^{n+\theta,i-1} \tag{4.107}$$

$$(\mathbf{u}_h^{n+\theta,i} \cdot \nabla) \mathbf{u}_h^{n+\theta,i} \approx (\mathbf{u}_h^{n+\theta,i-1} \cdot \nabla) \mathbf{u}_h^{n+\theta,i} \tag{4.108}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u}_h^{n+\theta,i} \cdot \nabla) \mathbf{u}_h^{n+\theta,i} &\approx (\mathbf{u}_h^{n+\theta,i-1} \cdot \nabla) \mathbf{u}_h^{n+\theta,i} + (\mathbf{u}_h^{n+\theta,i} \cdot \nabla) \mathbf{u}_h^{n+\theta,i-1} \\
&\quad - (\mathbf{u}_h^{n+\theta,i-1} \cdot \nabla) \mathbf{u}_h^{n+\theta,i-1}
\end{aligned} \tag{4.109}$$

según se utilice RHS, Picard o Newton-Raphson, respectivamente. De igual forma se procede para linealizar la forma trilineal  $c$ . Es decir:

$$c(\mathbf{u}_h^{n+\theta,i}, \mathbf{u}_h^{n+\theta,i}, \mathbf{v}_h) \approx c(\mathbf{u}_h^{n+\theta,i-1}, \mathbf{u}_h^{n+\theta,i-1}, \mathbf{v}_h) \tag{4.110}$$

$$c(\mathbf{u}_h^{n+\theta,i}, \mathbf{u}_h^{n+\theta,i}, \mathbf{v}_h) \approx c(\mathbf{u}_h^{n+\theta,i-1}, \mathbf{u}_h^{n+\theta,i}, \mathbf{v}_h) \tag{4.111}$$

$$\begin{aligned}
c(\mathbf{u}_h^{n+\theta,i}, \mathbf{u}_h^{n+\theta,i}, \mathbf{v}_h) &\approx c(\mathbf{u}_h^{n+\theta,i-1}, \mathbf{u}_h^{n+\theta,i}, \mathbf{v}_h) + c(\mathbf{u}_h^{n+\theta,i}, \mathbf{u}_h^{n+\theta,i-1}, \mathbf{v}_h) \\
&\quad - c(\mathbf{u}_h^{n+\theta,i-1}, \mathbf{u}_h^{n+\theta,i-1}, \mathbf{v}_h)
\end{aligned} \tag{4.112}$$

según se utilice RHS, Picard o Newton-Raphson respectivamente.

Los parámetros  $\tau_1$  y  $\tau$  se calculan exactamente igual que para el problema estacionario reemplazando  $\mathbf{u}_h^{i-1}$  por  $\mathbf{u}_h^{n+\theta,i-1}$  donde sea necesario (linealización tipo Picard, ver (4.63) y (3.55) respectivamente).

### 4.5.3 Método GLS. Extensión al problema transitorio

En este apartado se trata la extensión del método GLS al problema de Navier-Stokes discretizado en el tiempo (4.95) a (4.99).

El problema débil discreto se escribe entonces como: Dado  $\mathbf{u}^{n+1,0} = \mathbf{u}^n \in \mathbf{V}_{h,g}$  para  $i = 1, 2, \dots$  (hasta convergencia) encontrar  $(\mathbf{u}^{n+1,i}, p^{n+1,i}) \in \mathbf{V}_{h,g} \times Q_h$  tal que,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{u}_h^{n+\theta,i}, \mathbf{v}_h; p_h^{n+\theta,i}, q_h) - \mathcal{L}^{n+\theta}(\mathbf{v}_h) + \mathcal{R}(\mathbf{u}_h^{n+\theta,i}, \mathbf{v}_h; p_h^{n+\theta,i}, q_h) = 0 \quad (4.113) \\ \forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{V}_{h,0} \times Q_h \end{aligned}$$

donde los términos de Galerkin son los definidos en (4.99) y (4.101), y los términos residuales se expresan como:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\mathbf{u}_h^{n+\theta,i}, p_h^{n+\theta,i}; \mathbf{v}_h, q_h) = \sum_{c=1}^{n_{\theta i}} \int_{\Omega^c} \left[ \tau_1 \mathcal{S}_1(\mathbf{v}_h, q_h) \cdot \left( \rho \frac{\mathbf{u}_h^{n+\theta,i} - \mathbf{u}_h^n}{\theta \Delta t} + \mathcal{S}_1(\mathbf{u}_h^{n+\theta,i}, p_h^{n+\theta,i}) \right. \right. \\ \left. \left. - \mathbf{f}_c^{n+\theta} \right) + \tau_2 \mathcal{S}_2(\mathbf{v}_h, q_h) \mathcal{S}_2(\mathbf{u}_h^{n+\theta,i}, p_h^{n+\theta,i}) \right] d\Omega \quad (4.114) \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{S}_1$  está definido en (4.104) y  $\mathcal{S}_2$  es el operador diferencial de la ecuación de incompresibilidad (ver (3.42)):

$$\mathcal{S}_2(\mathbf{u}_h^{n+\theta,i}, p_h^{n+\theta,i}) = \nabla \cdot \mathbf{u}_h^{n+\theta,i} \quad (4.115)$$

Nuevamente la linealización de los términos convectivos en  $\mathcal{S}_1$  se realiza como en el apartado anterior (ver (4.107) a (4.109)), al igual que la linealización de la forma trilineal  $c$  (ver (4.110) a (4.112)).

Los parámetros  $\tau_1$  y  $\tau_2$  se calculan exactamente igual que para el problema estacionario, reemplazando  $\mathbf{u}_h^{i-1}$  por  $\mathbf{u}_h^{n+\theta,i-1}$  donde sea necesario (linealización tipo Picard, ver (4.75) y (4.77) respectivamente).

Otra posibilidad de extender el método GLS al problema transitorio es la de hacer elementos finitos en el espacio tiempo (método ST-GLS [HFH89, BT94, SH91]). La idea se basa en el método de Galerkin con elementos discontinuos en el tiempo introducida por Lesaint y Raviart en [LR74] para discretizaciones espaciales de ecuaciones de transporte. Si se utilizan elementos finitos discontinuos a trozos en el tiempo, es decir se toma  $\mathbf{V}_h \subset \mathbf{V}$  tal que,

$$\mathbf{V}_h = \{ \mathbf{v} \mid \mathbf{v}|_{[t^n, t^{n+1}]} = \sum_{i=0}^q \mathbf{v}_i(\mathbf{x})(t - t^n)^i, \mathbf{v}_i(\mathbf{x}) \in \mathbf{V}_{h,0} \} \quad (4.116)$$

y se escoge  $q = 0$  (constante a trozos), se llega a una formulación similar a (4.113), pero escogiendo  $\theta = 1$  (Euler hacia atrás) y no incluyendo los términos temporales en el residuo  $\mathcal{R}$ . Es decir la formulación ST-GLS se escribirá: Dado  $\mathbf{u}^{n+1,0} = \mathbf{u}^n \in \mathbf{V}_{h,g}$  para  $i = 1, 2, \dots$  (hasta convergencia) encontrar  $(\mathbf{u}^{n+1,i}, p^{n+1,i}) \in \mathbf{V}_{h,g} \times Q_h$  tal que,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{u}_h^{n+1,i}, \mathbf{v}_h; p_h^{n+1,i}, q_h) - \mathcal{L}^{n+1}(\mathbf{v}_h) + \bar{\mathcal{R}}(\mathbf{u}_h^{n+1,i}, \mathbf{v}_h; p_h^{n+1,i}, q_h) = 0 \quad (4.117) \\ \forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{V}_{h,0} \times Q_h \end{aligned}$$

donde  $\bar{\mathcal{R}}$  se redefine como

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{R}}(\mathbf{u}_h^{n+1,i}, p_h^{n+1,i}; \mathbf{v}_h, q_h) = \sum_{c=1}^{n_{\theta i}} \int_{\Omega^c} \left[ \tau_1 \mathcal{S}_1(\mathbf{v}_h, q_h) \cdot (\mathcal{S}_1(\mathbf{u}_h^{n+1,i}, p_h^{n+1,i}) - \mathbf{f}_c^{n+1}) \right. \\ \left. + \tau_2 \mathcal{S}_2(\mathbf{v}_h, q_h) \mathcal{S}_2(\mathbf{u}_h^{n+1,i}, p_h^{n+1,i}) \right] d\Omega \quad (4.118) \end{aligned}$$

Ambas formulaciones son conceptualmente válidas. Sin embargo, en los ejemplos numéricos se presentan importantes diferencias al introducir o no el término temporal en el residuo elemental del método GLS.

## 4.6 Algoritmo para el problema de Navier-Stokes

Una vez presentadas las diferentes técnicas de estabilización para el problema de Navier-Stokes, en el Cuadro 4.1 se muestra el algoritmo implementado para la solución del problema transitorio.

Las variables por definir en el Cuadro 4.1 son las siguientes:  $n_{eu}$  número de pasos de tiempo utilizando integración temporal tipo Euler hacia atrás ( $\theta = 1$ );  $\beta$  define el tipo de linealización para los términos convectivos, si es igual a cero se utiliza linealización tipo Picard, si es igual a uno tipo Newton-Raphson ( $i_{pi}$  es el número de iteraciones de Picard a realizar antes de usar Newton-Raphson);  $TOL$  tolerancia de convergencia en el lazo de iterativo dentro de un paso de tiempo; y  $TOL_s$  tolerancia de convergencia al estado estacionario.

### Cuadro 4.1 Algoritmo para la ecuación de Navier-Stokes transitoria

- Lea condiciones iniciales y de contorno para  $\mathbf{u}_h$  y haga  $p_h^0 = 0$
- $n \leftarrow -1$
- WHILE  $n < N$  y (no-estacionario) DO
  - $n \leftarrow n + 1$
  - IF  $n < n_{eu}$  THEN  $\theta \leftarrow 1$
  - ELSE seleccione  $\theta$  requerido con  $\theta \geq 1/2$
  - $i \leftarrow 0$
  - $\mathbf{u}^{n+\theta,i} \leftarrow \mathbf{u}^n$ ;  $p^{n+\theta,i} \leftarrow p^n$
  - WHILE (no convergido) DO
    - $i \leftarrow i + 1$
    - IF  $i < i_{pi}$  THEN  $\beta \leftarrow 0$
    - ELSE seleccione  $\beta$  según linealización
    - FOR  $e = 1, n_{el}$  DO
      - Construya matriz  $\mathbf{A}^e$  y lado derecho  $\mathbf{B}^e$  elementales según método de discretización espacial. (4.100) o (4.117) o (4.113)
      - Ensamble  $\mathbf{A}^e$  y  $\mathbf{B}^e$
    - END FOR  $e = 1, n_{el}$
    - Resuelva sistema de ecuaciones: Se obtiene  $\mathbf{u}_h^{n+\theta,i}$  y  $p_h^{n+\theta,i}$
    - IF  $\|\mathbf{u}_h^{n+\theta,i} - \mathbf{u}_h^{n+\theta,i-1}\|_{L^q} \leq TOL \|\mathbf{u}_h^{n+\theta,i}\|_{L^q}$  THEN (convergido)
  - END WHILE (no convergido)
  - IF  $\theta < 1$  THEN obtenga  $\mathbf{u}_h^{n+1}$  y  $p_h^{n+1}$
  - IF  $\|\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n\|_{L^q} \leq TOL_s \Delta t \|\mathbf{u}_h^{n+1}\|$  THEN (estacionario)
- END WHILE  $n < N$  y (no-estacionario)
- END

## 4.7 Ejemplos numéricos

A continuación se presentan algunos ejemplos numéricos con el fin de corroborar el buen comportamiento de los métodos expuestos durante el presente capítulo.

Los cálculos se realizaron en un servidor Power-Challenger marca Silicon-Graphics con procesador R-8000.

### -Flujo sobre un escalón inverso

Para este caso se tienen datos experimentales en las referencias [ADPS83, Gar90, GCLU84, HRS84, Kim87, KM85, Soh86]. El dominio de flujo es el rectángulo  $[0, 0] \times [40, 2]$  quitándole el rectángulo  $[0, 0] \times [4, 1]$  (escalón de longitud 4 y altura 1 en la esquina inferior izquierda). Se utilizó el método SUPG con elementos tipo  $Q1/P0$  (bilineal en velocidades y constante a trozos en presiones, ver Figura 4.1). En  $x = 0$  se prescribió un perfil de velocidades parabólico con velocidad máxima de 1. En  $x = 40$  se dejaron todas las componentes de la velocidad libres (tensiones prescritas a cero). En el resto del contorno se prescribió la condición de no deslizamiento ( $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ).

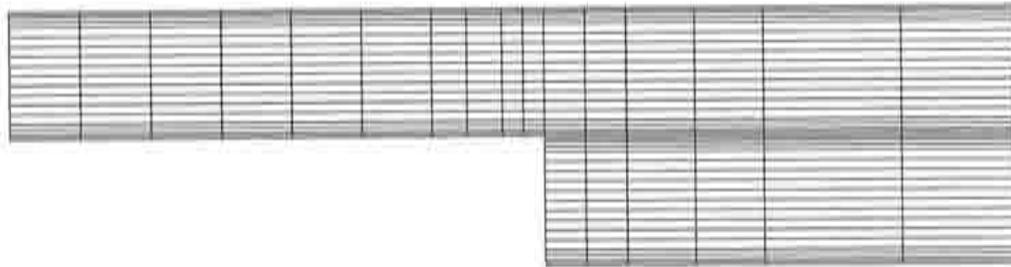


Figura 4.1. Detalle de la malla de elementos finitos para el problema del escalón inverso (1980 elementos  $Q1/P0$  y 2077 nodos).

En [ADPS83], el número de Reynolds se calcula con la velocidad media de entrada y el ancho de la sección transversal total (a la salida). Para  $Re < 500$  existe sólo una zona de recirculación detrás del escalón. Para valores más altos del número de Reynolds, aparece otra zona de recirculación en la parte superior del canal. Para  $Re$  mayores que 1000 aparece una tercera zona de recirculación en la pared inferior del canal.



Figura 4.2. Patrón general de las líneas de corriente  $Re = 1000$ .

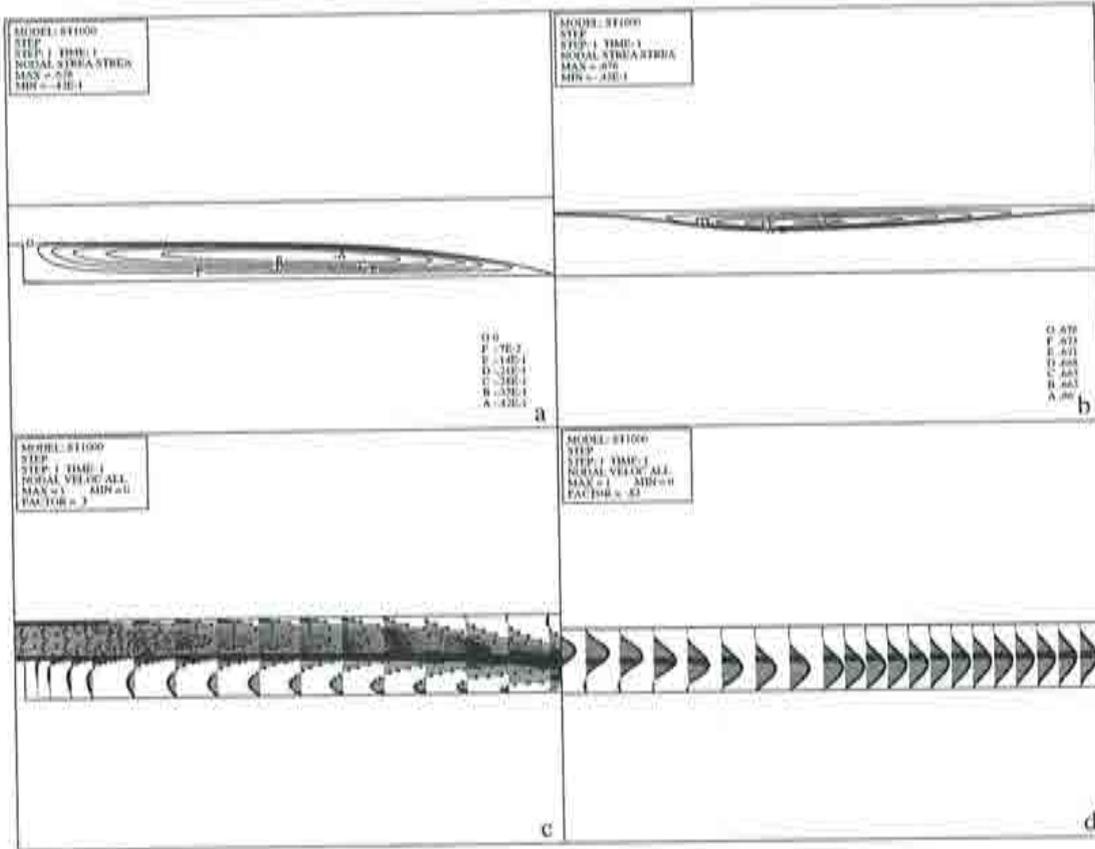


Figura 4.3. Contornos de vorticidad  $Re = 1000$ .



Figura 4.4. Contornos de presión  $Re = 1000$ .

El principal resultado de este ejemplo para la ecuación de Navier-Stokes estacionaria es la predicción de los vórtices y de las posiciones donde éstos empiezan y acaban (puntos de despegue y reatamiento del flujo). Para valores bajos de  $Re$ , hasta 500 aproximadamente, existe una buena concordancia entre los valores numéricos y experimentales [ADPS83, Kim87, KM85, Soh86].



**Figura 4.5.** Detalles de la velocidad y de las líneas de corriente en las zonas de recirculación  $Re = 1000$ . (a): Líneas de corriente detrás del escalón. (b): Líneas de corriente en la zona de recirculación superior. (c): Vectores de velocidad detrás del escalón. (d): Vectores de velocidad en la zona de recirculación superior.

Para  $Re > 600$ , se argumenta que los efectos tridimensionales generan las diferencias entre los resultados numéricos y experimentales [ADPS83].

Los resultados numéricos del presente trabajo concuerdan muy bien con las mediciones experimentales para  $Re \leq 600$ . Por brevedad se presentan sólo los resultados para altos números de  $Re$ , específicamente para  $Re = 1000$ .

En los cálculos se utilizó el método SUPG con  $\alpha_0$  dado por (2.18) y  $h_0 = 2.0$  (ver (2.43)). Se utilizó un esquema de penalización iterativa con un parámetro de penalización  $\epsilon = 7.5 \times 10^{-4}$ . Se utilizó el método de Newton-Raphson para la linealización del término convectivo, pero se realizaron primero 34 iteraciones de Picard para acercarse lo suficiente a la solución y se pudiera converger a una norma de  $10^{-5}\%$  en velocidades. En el caso de realizar sólo 33 iteraciones de Picard no se consigue converger partiendo de una condición para la iteración cero de  $u^0 = \mathbf{0}$  en todo el dominio excepto, claro está, en el contorno de entrada donde se encuentra prescrita la velocidad siguiendo un perfil parabólico con velocidad máxima de 1.

En la Figura 4.2 se presenta el patrón general de las líneas de corriente. En las figuras 4.3 y 4.4 se presentan los contornos de vorticidad y de presión, respectivamente.

El detalle de las líneas de corriente y de los vectores de velocidad en las zonas de recirculación se presenta en la Figura 4.5. El vórtice detrás del escalón es mucho más fuerte que el superior.

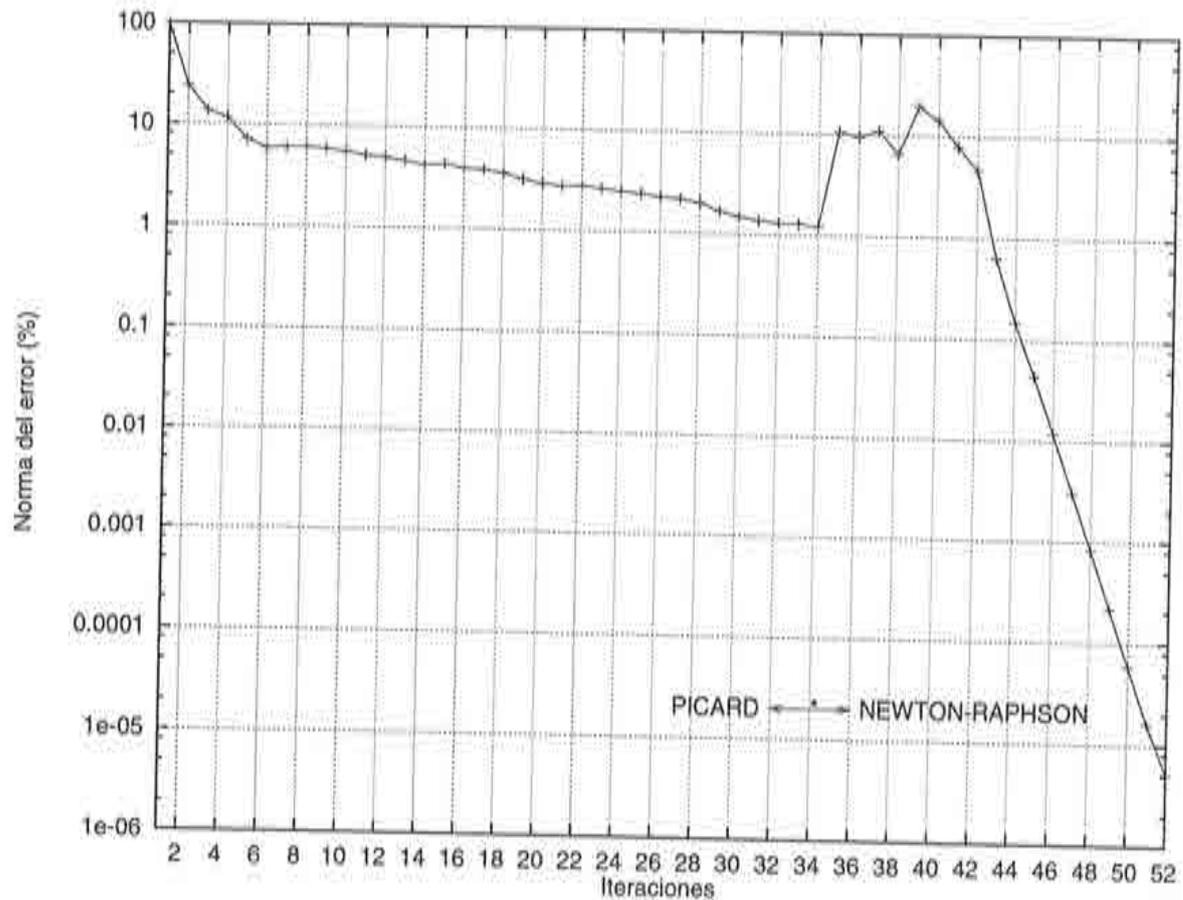


Figura 4.6. Historia de convergencia para el flujo sobre un escalón inverso. Las primeras 34 iteraciones se realizaron linealizando con el método de Picard, y las últimas con el método de Newton-Raphson.

Los valores pico de la función de corriente son  $-0.042$  y  $0.676$ . El vórtice del escalón tiene una longitud numérica de aproximadamente 13.0, mientras que los resultados experimentales dan un valor de 14.3. El vórtice superior empieza en  $x = 13.8$  contra un valor experimental de  $x = 14.6$ , y termina en  $x = 27.7$  (el valor experimental donde termina es  $x = 23.8$ ). Como se mencionó anteriormente se deben esperar discrepancias entre los resultados numéricos y experimentales (a altos números de Reynolds) debido a los efectos tridimensionales.

Finalmente en la Figura 4.6 se presenta la historia de convergencia. Puede observarse claramente la convergencia cuadrática del método de Newton-Raphson, partiendo de una solución inicial lo suficientemente cerca a la solución del problema (se realizan, como ya se mencionó, 34 iteraciones de Picard antes de utilizar el método de Newton-Raphson). El tiempo total de CPU para la solución del problema fue de 195 segundos.

#### -Vórtices de cortante detrás de un cilindro

Éste es otro ejemplo muy utilizado para la validación de códigos numéricos de la ecuación de Navier-Stokes incompresible. Trata de un cilindro circular embebido dentro de un fluido viscoso. El número de Reynolds se calcula con el diámetro del cilindro y la velocidad uniforme prescrita en la entrada del dominio de flujo. Este último es el rectángulo  $[0, 0] \times [16, 8]$  quitándole un círculo de diámetro 1.0 y centro en  $[4, 4]$ . El campo de velocidades se prescribe a  $\mathbf{u} = (1, 0)$  en

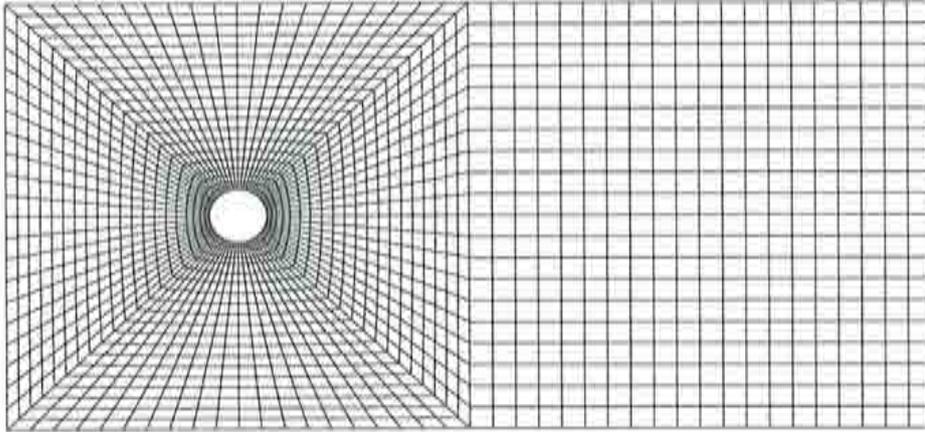


Figura 4.7. Malla de elementos finitos para el problema del flujo pasando un cilindro (2000 elementos  $Q1$  y 2100 nodos).

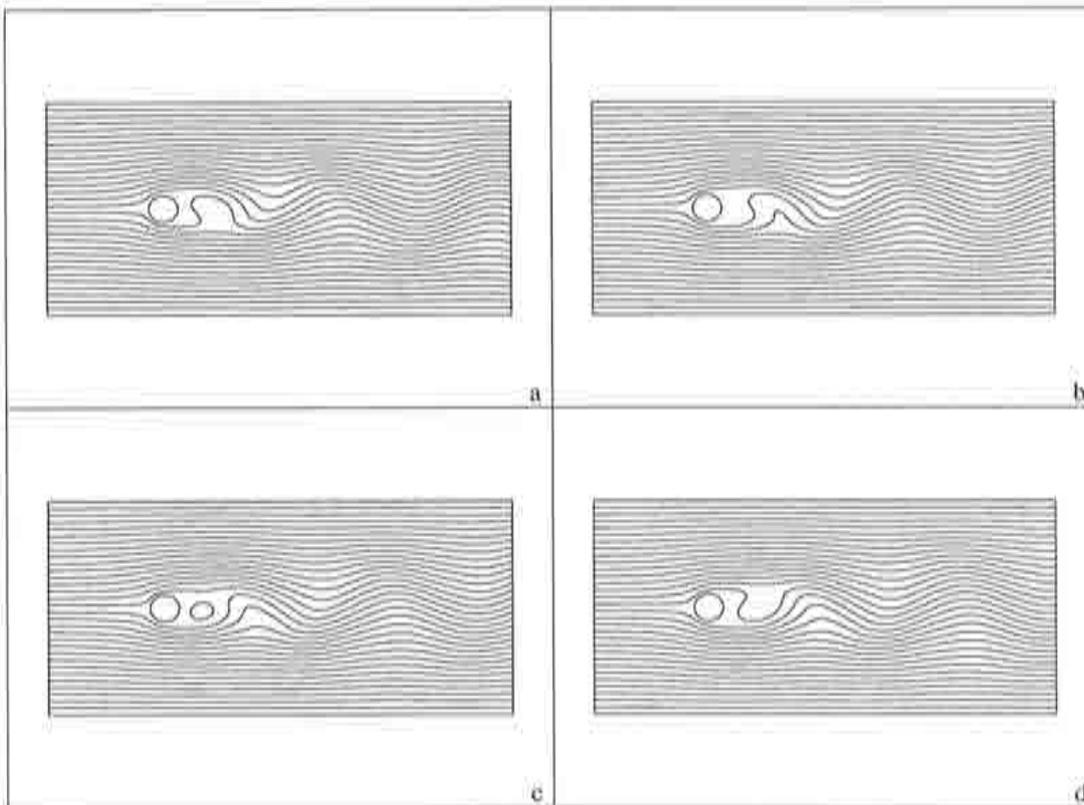
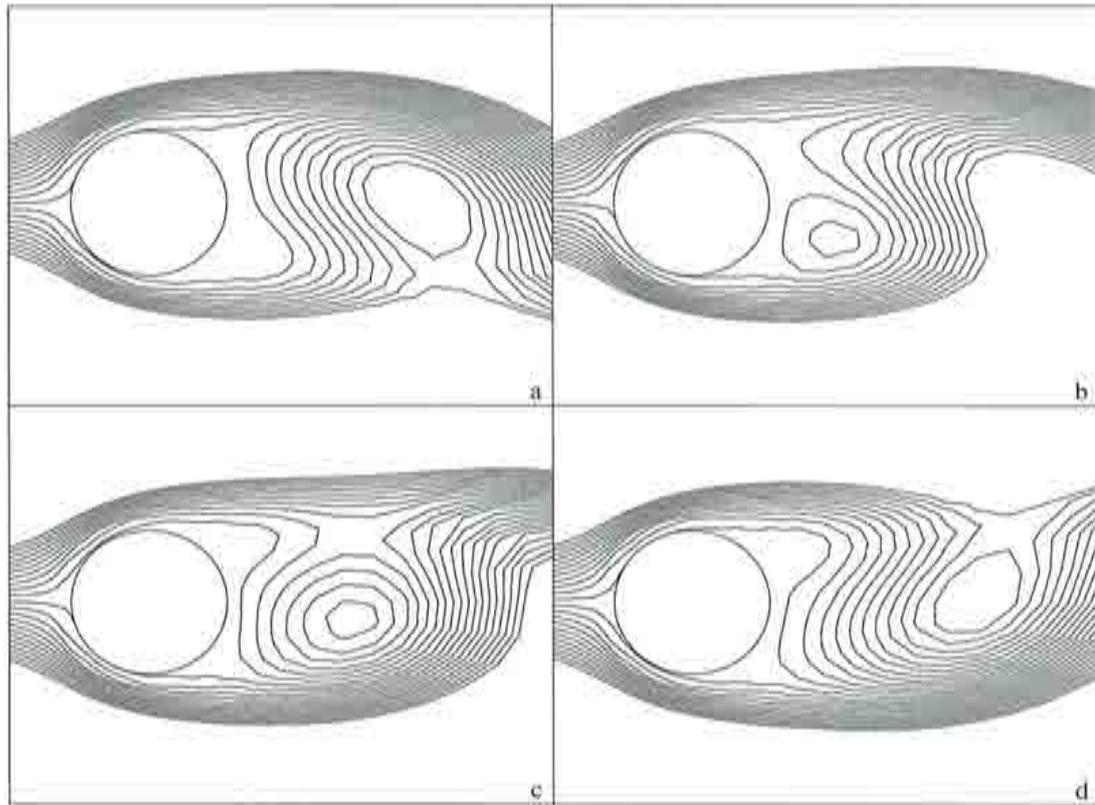


Figura 4.8. Desarrollo de los vórtices de cortante: Líneas de corriente. (a):  $t = 10$ . (b):  $t = 11$ . (c):  $t = 12$ . (d):  $t = 13$ .

las rectas  $x = 0$  (entrada al dominio),  $y = 0$  (contorno inferior) e  $y = 8$  (contorno superior). Sobre la circunferencia del cilindro se toma  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  (condición de no deslizamiento), y se deja libre el campo de velocidades sobre la recta  $x = 16$  (salida del dominio).

Para números de Reynolds aproximadamente menores a 40, se desarrollan dos vórtices



**Figura 4.9.** Desarrollo de los vórtices de cortante; Detalle de las líneas de corriente.

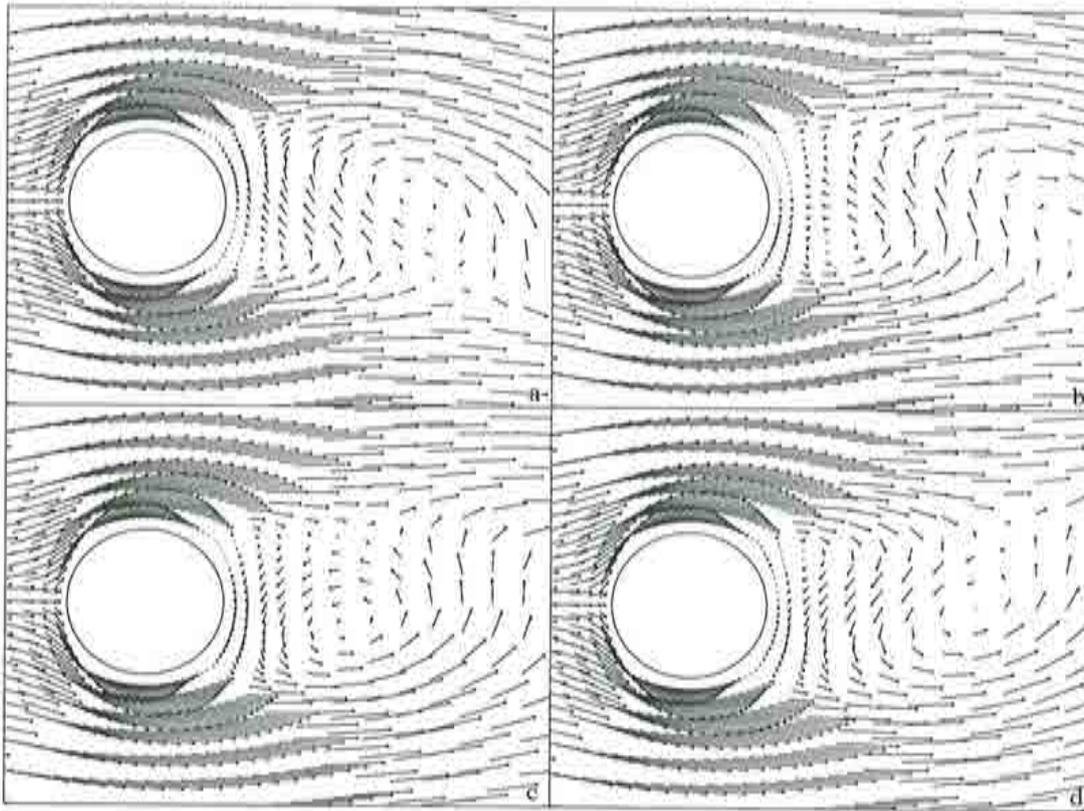
(a):  $t = 10$ . (b):  $t = 11$ . (c):  $t = 12$ . (d):  $t = 13$ .

simétricos detrás del cilindro. Éstos se vuelven inestables a medida que crece el número de Reynolds, desarrollándose vórtices periódicos de cortante, los cuales son comúnmente llamados vórtices de von Karman. El caso  $Re = 100$  que se presenta a continuación es el que se toma comúnmente como prueba estándar. Diversos resultados numéricos pueden consultarse en las referencias [EJ90, GCLU84, TGL88, TL90, TMS91].

Se calculó primero la solución estacionaria e inestable (los resultados no se muestran). Para llegar a ella se utilizó una malla de 500 elementos  $Q2/P1$  y 2100 nodos (en la Figura 4.7 se muestra la malla dividida en elementos  $Q1$ , por consiguiente 4 elementos forman un elemento  $Q2$ ). Se usó el método SUPG y un esquema de penalización iterativa con  $\epsilon = 10^{-3}$ . Obtenida dicha solución, se perturbó introduciendo una pequeña rotación al campo de velocidades alrededor del cilindro.

Para obtener una solución con los vórtices de cortante desarrollados, se realizaron 90 pasos de tiempo de tamaño  $\Delta t = 1$  y  $\theta = 0.5$  (Crank-Nicholson), aunque se utilizó  $\theta = 1.0$  para el primer paso de tiempo. Dentro de cada paso de tiempo se convergió al 1% en norma de velocidades.

La anterior aproximación poco precisa ( $\Delta t$  grande) se tomó como condición inicial para obtener una solución más exacta. Para ello se utilizó el método GLS con elementos bilineales de presión continua  $Q1/Q1$ . La malla es la presentada en la Figura 4.7. El parámetro  $\beta$  para el cálculo de  $\tau_1^c$  (ver (4.74)) se tomó de  $1/3$ , que es el indicado para elementos lineales en el caso de no existir fuerzas de rotación, y la función de “upwind”  $\alpha_a$  se calculó como en (2.18) (función



**Figura 4.10.** Desarrollo de los vórtices de cortante: Detalle de los vectores de velocidad. (a):  $t = 10$ . (b):  $t = 11$ . (c):  $t = 12$ . (d):  $t = 13$ .

óptima para elementos lineales). El parámetro  $\lambda$  para el cálculo de  $\tau_2^2$  (4.76) se escogió igual a 1 (este valor es el más utilizado en la literatura). Se utilizó un paso de tiempo de  $\Delta t = 0.1$  con  $\theta = 0.5$  y se linealizaron los términos convectivos utilizando el método de Newton-Raphson. En cada paso de tiempo se convergió a una norma relativa  $L_2$  en velocidades de 0.01%, necesiándose máximo tres iteraciones por paso de tiempo y 28 segundos de CPU aproximadamente.

En la Figura 4.8 se presentan las líneas de corriente para  $t = 10, 11, 12, 13$ , lo cual concuerda aproximadamente con medio periodo. En las Figuras 4.9 y 4.10 se muestra un detalle de las líneas de corriente y de los vectores de velocidad después del cilindro, respectivamente. En las figuras 4.11 y 4.12 se muestran los contornos de presión y de vorticidad para  $t = 95$ , respectivamente. En la figura 4.13 se muestra la evolución temporal de la fuerza vertical de presión sobre el cilindro. En esta gráfica se observa claramente el carácter periódico del flujo. El periodo es de 5.7 unidades de tiempo, el cual es muy parecido al reportado en [EJ90] con una malla mucho más fina (3426 elementos  $Q2/P1$  y 14000 nodos). En las referencias [BH82, GCLU84] se reportó 6.0 y 5.6, respectivamente. En general todos los resultados obtenidos concuerdan muy bien con los reportados en la literatura.

Con el fin de comparar diferentes métodos de integración temporal, se realizó el mismo ejemplo pero utilizando ahora los métodos de Euler hacia atrás ( $\theta = 1.0$ ), y ST-GLS con elementos constantes a trozos en el tiempo. Como se mostró en el apartado 4.5.3, este último es exactamente igual a el método GLS integrando en el tiempo con el esquema de Euler hacia atrás

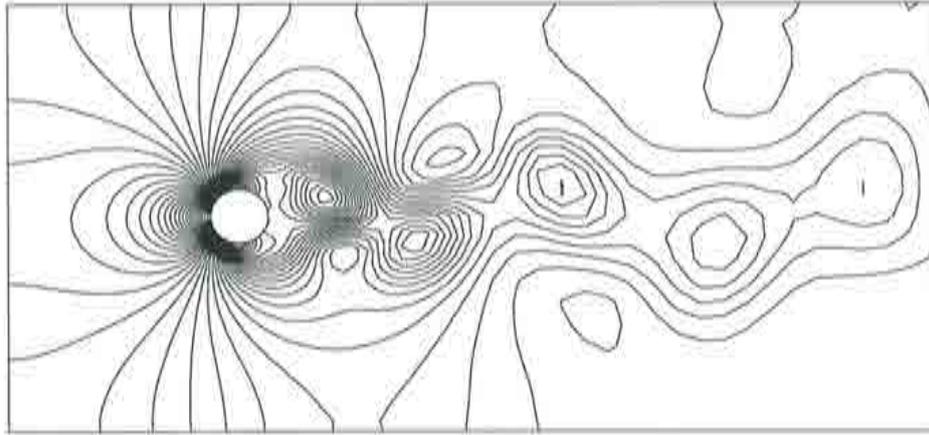


Figura 4.11. Contornos de presión a  $t = 95$  unidades de tiempo. Método Crank-Nicholson GLS.

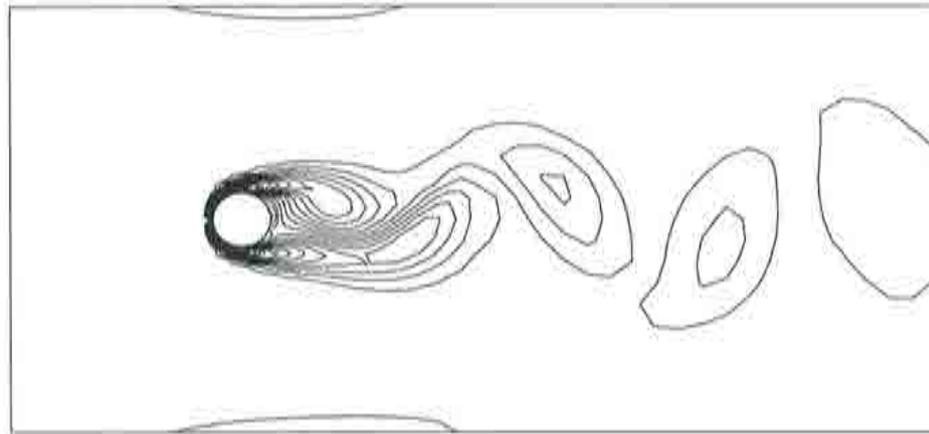


Figura 4.12. Contornos de vorticidad a  $t = 95$  unidades de tiempo. Método Crank-Nicholson GLS.

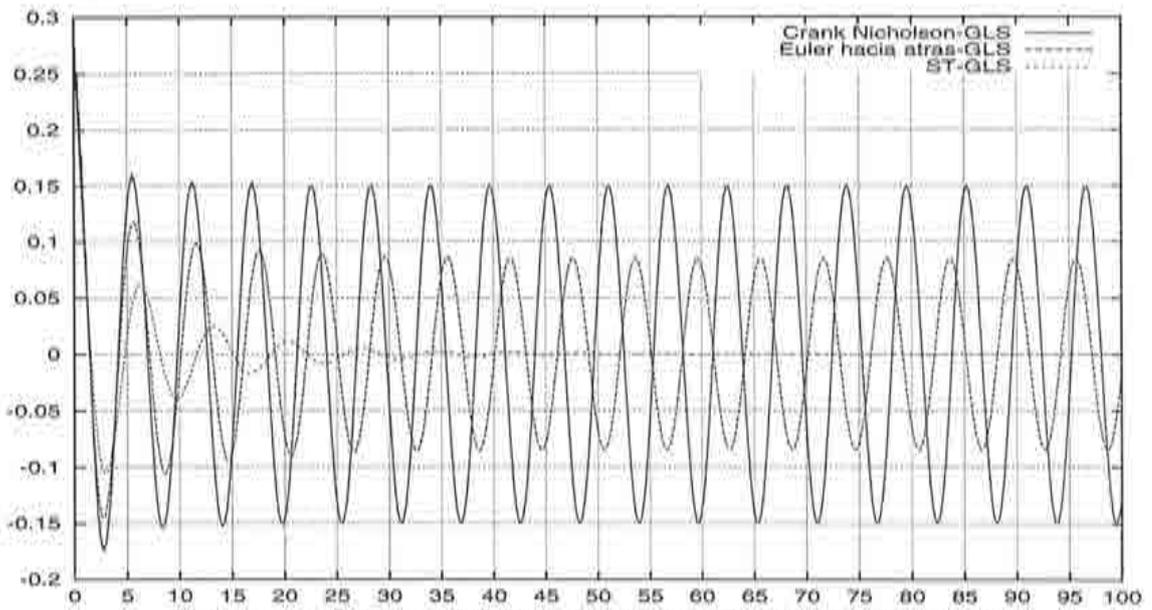


Figura 4.13. Fuerza vertical de presión sobre el cilindro a lo largo del tiempo.

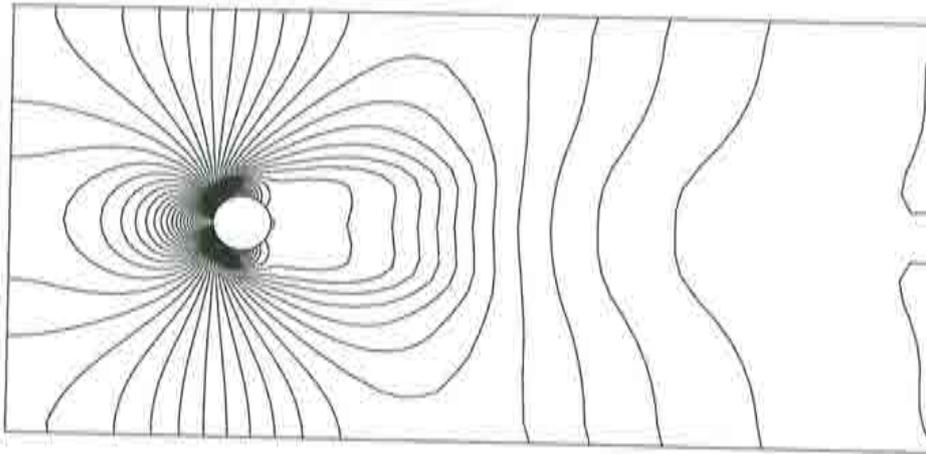


Figura 4.14. Contornos de presión a  $t = 95$  unidades de tiempo. Método ST-GLS.

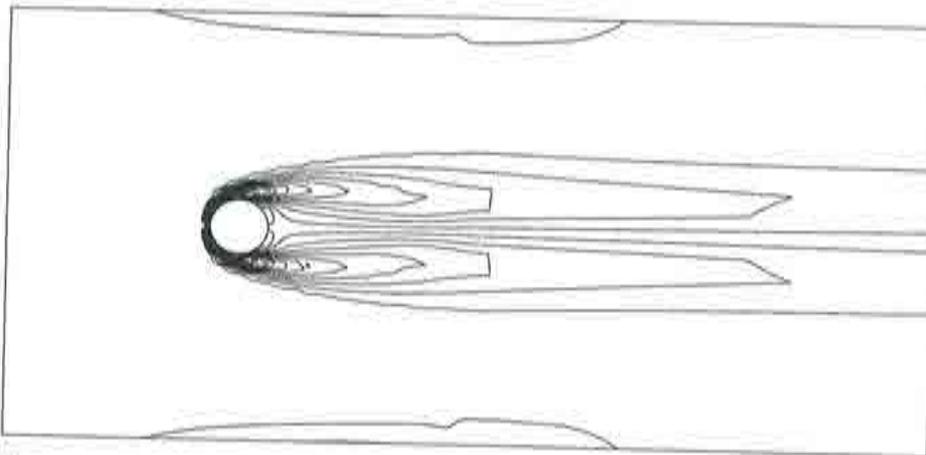
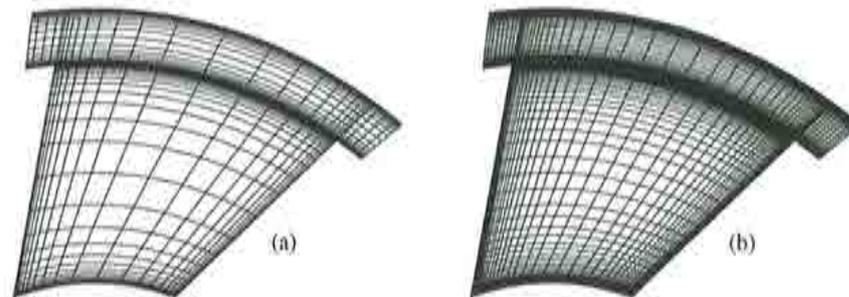


Figura 4.15. Contornos de vorticidad a  $t = 95$  unidades de tiempo. Método ST-GLS.

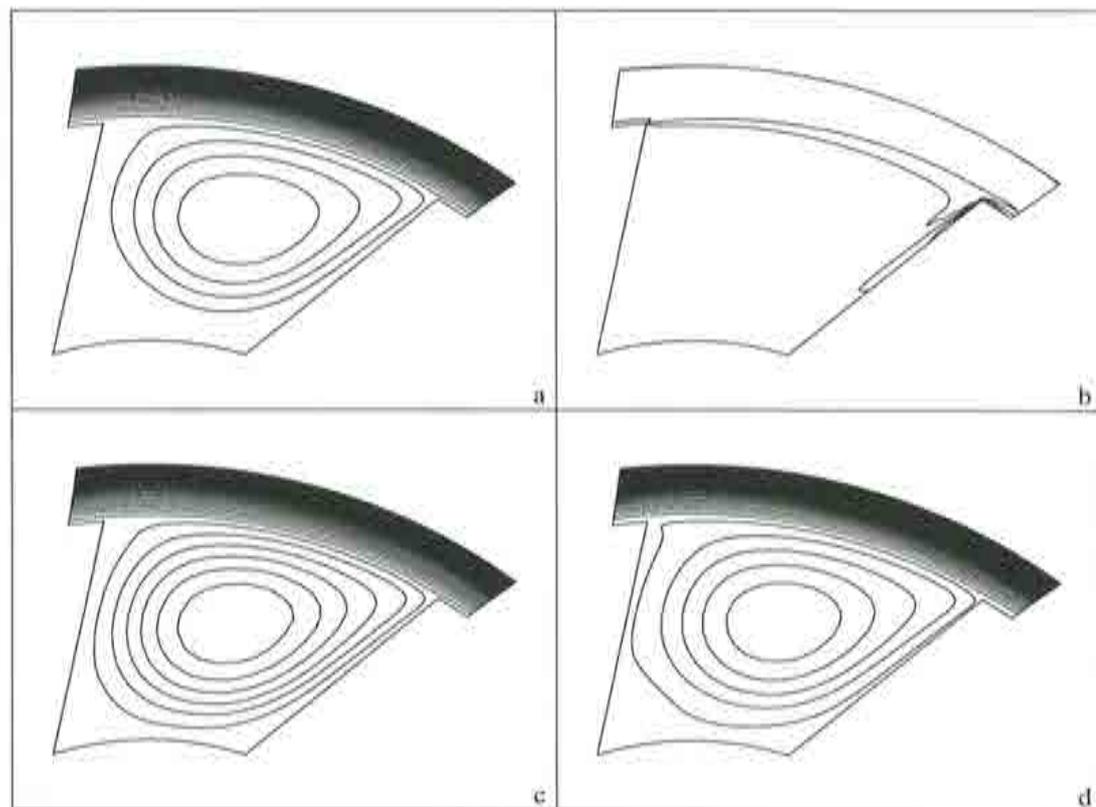
( $\theta = 1.0$ ) pero sin incluir el residuo temporal en los términos residuales de la formulación GLS (ver (4.117)). Los valores de las constantes para el cálculo de los parámetros  $\tau_1$  y  $\tau_2$  de los métodos Euler GLS y ST-GLS se escogieron exactamente igual que para el caso Crank-Nicholson GLS presentado anteriormente. En la Figura 4.13 se muestra la evolución temporal de la fuerza vertical de presión sobre el cilindro para los tres métodos. En ésta se observa que tanto el método de Euler hacia atrás como el ST-GLS son difusivos en el tiempo, por lo cual la amplitud de la fuerza decrece y el periodo crece a medida que  $t$  aumenta. El método de Euler hacia atrás introduce mucha menos difusión en el tiempo que el método ST-GLS, a pesar que sólo se diferencian en introducir o no la derivada temporal en el residuo de la ecuación de Navier-Stokes. Por el contrario, la integración temporal utilizando un esquema de segundo orden (Crank-Nicholson), mantiene perfectamente el carácter periódico del flujo a lo largo del tiempo.

Finalmente en las Figuras 4.14 y 4.15 se presentan los contornos de presión y vorticidad para el esquema ST-GLS (y para  $t = 95$  unidades de tiempo). Las presiones son totalmente erróneas (la fuerza vertical de presión sobre el cilindro es cero), y la vorticidad es simétrica, lo cual se debe a que el método es excesivamente difusivo, es decir, añade viscosidad a medida que  $t$  crece, obteniéndose una solución estacionaria correspondiente a un número de Reynolds mucho menor que 100 (la solución es prácticamente simétrica al eje  $y = 4$  tanto en velocidades como en presiones).

## -Flujo en un ventilador centrífugo

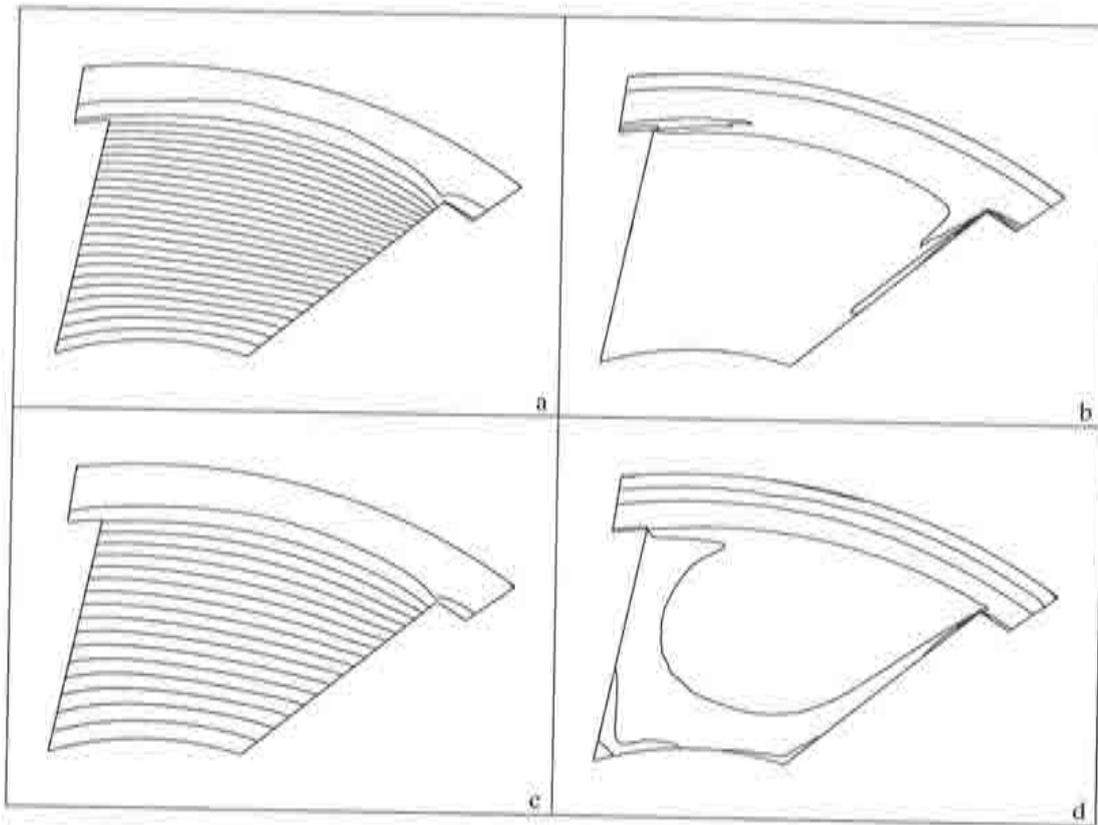


**Figura 4.16.** Ventilador centrífugo. (a): Malla de 1216 elementos  $Q2/P1$  y 5025 nodos. (b): Malla de 4864 elementos  $Q1/Q1$  y 5025 nodos obtenida de dividir cada elemento de la malla anterior en cuatro elementos bilineales.



**Figura 4.17.** Ventilador centrífugo. (a): Líneas de corriente para el problema sin rotación. Picos  $(-0.0266, 0.217)$ . (b): Contornos de vorticidad para el problema sin rotación. Picos  $(-83.1, 108.0)$ . (c): Líneas de corriente para  $\omega/2 = 1$  método SUPG+DRS y elementos  $Q2/P1$ . Picos  $(-0.0403, 0.215)$ . (d): Líneas de corriente para  $\omega/2 = 1$  método GLS y elementos  $Q1/Q1$ . Picos  $(-0.032, 0.223)$ .

El ejemplo numérico que se presenta a continuación tiene el mismo dominio de flujo del



**Figura 4.18.** Ventilador centrífugo. (a): Contornos de presión para  $\omega/2 = 1$  método SUPG+DRS y elementos  $Q2/P1$ . Picos  $(-0.766, 0.712)$ . (b): Contornos de vorticidad para  $\omega/2 = 1$  método SUPG+DRS y elementos  $Q2/P1$ . Picos  $(-105.0, 123.0)$ . (c): Contornos de presión para  $\omega/2 = 1$  método GLS y elementos  $Q1/Q1$ . Picos  $(0.0, 2.14)$ . (d): Contornos de vorticidad para  $\omega/2 = 1$  método GLS y elementos  $Q1/Q1$ . Picos  $(-120.0, 166.0)$

ejemplo bidimensional que se mostró en el capítulo 3 del presente trabajo (apartado 3.6, Figura 3.3). En dicho capítulo se trató el problema de Stokes, mientras que a continuación se presenta la solución del problema de Navier-Stokes para un valor de Reynolds  $Re = 10000$  ( $\nu = 2.0 \times 10^{-4}$ ).

Las condiciones de contorno son las mismas que en el capítulo 3 (condiciones de no deslizamiento sobre las paredes y periodicidad entre la entrada y salida del flujo). La velocidad angular de rotación se tomó de  $\omega/2 = 1$  (igual que en el capítulo 3). La malla de elementos finitos utilizada para el problema de Navier-Stokes es, lógicamente, diferente a la utilizada para el problema de Stokes. Ésta se refinó en los contornos sólidos como puede observarse en la Figura 4.16a y b (la malla consta de 1216 elementos  $Q2/P1$  y 5025 nodos, o de 4864 elementos  $Q1/Q1$  y el mismo número de nodos cuando se utiliza el método GLS).

En la Figura 4.17a y b se presentan las líneas de corriente y los contornos de vorticidad para el problema sin rotación utilizando el método SUPG. La solución en velocidades para el problema sin rotación debe ser la misma que para el problema con rotación en el caso de que no exista ningún contorno tipo Neumann (este es el caso del ejemplo, ver apartado 3.6). En las Figuras 4.17c y 4.17d se presentan las líneas de corriente para el problema con rotación utilizando los

métodos SUPG+DRS y GLS, respectivamente.

Para el método GLS se utilizó una malla de 4864 elementos  $Q1/Q1$  y 5025 nodos, obtenida de dividir cada elemento bicuadráticos  $Q2$  en cuatro bilineales  $Q1$  (ver Figura 4.16b). Los parámetros numéricos utilizados para el cálculo de  $\tau_1$  y  $\tau_2$  del método GLS fueron los que se encontraron como óptimos para el problema de Stokes con rotación ( $C_{1\beta} = 1.0$  y  $C_{1\gamma} = 10.0$  para estabilizar la rotación con elementos lineales, ver ecuaciones (4.75) y (4.77)).

Para el método SUPG+DRS se utilizaron elementos  $Q2/P1$  y se utilizó penalización iterativa con un parámetro de  $\epsilon = 5.0 \times 10^{-3}$ . El parámetro  $\tau$  del DRS (ver (3.55)) para estabilizar la rotación se calculó con un valor de  $\delta = 0.02$  (valor óptimo encontrado para el problema de Stokes con rotación). La convección se estabiliza con el método SUPG y tomando  $\alpha_u$  dado en (2.19) (forma óptima para elementos cuadráticos). Como puede observarse en la Figura 4.17, las líneas de corriente para el problema sin rotación y con rotación son prácticamente iguales, con lo cual se corrobora la efectividad de los métodos de estabilización de la rotación presentados en el trabajo.

Finalmente en las Figuras 4.18a, b, c y d se presentan los resultados de presión y vorticidad utilizando ambos métodos (SUPG+DRS y GLS). Como puede observarse los resultados son parecidos. La presión es básicamente la dada por la fuerza centrífuga, ya que la presión del problema sin rotación es mucho menor que la contribución debida a la fuerza centrífuga (el salto en la presión para el problema sin rotación es  $\delta p = 0.442$  y la contribución de la fuerza centrífuga es de  $\delta p = 1/8|\omega \times r|^2 = 2.0$ ). La vorticidad para el método SUPG+DRS se aproxima mejor a la obtenida para el problema sin rotación que la vorticidad obtenida con el método GLS (ver Figuras 4.17a, 4.18b y 4.18d). Además, el salto en presión para el método GLS es  $\delta p = 2.14$ , mientras que el método SUPG+DRS da un valor de  $\delta p = 1.478$ , el cual se aproxima mejor al valor obtenido de restar el salto de presión para el problema sin rotación del salto producido por la fuerza centrífuga (esto es,  $\delta p = -0.442 + 2.0 = 1.558$ ).

## 4.8 Conclusiones

En el presente capítulo se extendieron las técnicas de estabilización mostradas en los capítulos anteriores a las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles. Básicamente se plantearon dos esquemas para resolver por el método de los elementos finitos las ecuaciones que rigen el flujo laminar e incompresible.

El primero de ellos utiliza elementos div-estables para estabilizar la presión, o, lo que es igual, para solucionar el problema de la incompresibilidad del flujo. Estabiliza las oscilaciones debidas a convección dominante por medio del método SUPG, y las oscilaciones debidas a rotación dominante con el método DRS. Este método se le denominó SUPG+DRS y es original del trabajo.

El segundo esquema es la extensión del método GLS al problema de Navier-Stokes con fuerzas de rotación. En el presente capítulo se diseñaron de forma heurística los diferentes parámetros del método (tiempos intrínsecos  $\tau_1$  y  $\tau_2$ ), basándose en el estudio hecho en el capítulo 3 para el problema de Stokes con rotación. La originalidad del presente trabajo radica precisamente en la extensión del método GLS al problema con rotación y en la forma como fueron diseñados los tiempos intrínsecos de dicho esquema.

También se comentó sobre la discretización temporal de las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles y se probaron varios esquemas (regla trapezoidal y ST-GLS). En los ejemplos numéricos se observó que para problemas en los cuales la solución transitoria es importante, se debe elegir una integración temporal de alto orden (en este trabajo se probó la integración

temporal de segundo orden tipo Crank-Nicholson,  $\theta = 0.5$ ), con el fin de obtener precisión a medida que se avanza en el tiempo. Se observó que esquemas de primer orden (ST-GLS con elementos constantes a trozos en el tiempo o Euler hacia atrás,  $\theta = 1.0$ ) son disipativos, llegándose a soluciones erróneas cuando  $t$  se hace grande. El método ST-GLS fue el más disipativo (el que introduce mayor error de difusión). Con este método se llega a una solución estacionaria correspondiente a un número de Reynolds menor que el real, lo cual es totalmente erróneo. El método de Euler hacia atrás GLS ( $\theta = 1.0$ ) sólo se diferencia del ST-GLS en que el primero introduce en los términos residuales la derivada temporal y el segundo no (ver (4.114) con  $\theta = 1.0$  y (4.118)). Sin embargo la solución con el método de Euler hacia atrás es mucho mejor (menos disipativa) que utilizando el esquema ST-GLS.

Finalmente, en los ejemplos numéricos se demostraron las capacidades de ambos métodos para solucionar las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles en régimen laminar, tanto si existen o no fuerzas de rotación. En general las soluciones obtenidas son similares a los resultados de tipo numérico y experimental existentes en la literatura.

## Capítulo 5

# Turbulencia

### 5.1 Introducción y objetivos

Hasta el momento se propusieron dos esquemas para solucionar por el método de los elementos finitos las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles en régimen laminar. Sin embargo, en la realidad la mayoría de problemas ingenieriles requieren la simulación de flujos a muy altos números de Reynolds, que por lo general son de carácter turbulento.

A pesar de los últimos avances en la tecnología de computadores, los flujos turbulentos no pueden calcularse de una forma exacta. La turbulencia se supone regida por los principios de la mecánica de medios continuos, debido a que las escalas de longitudes más pequeñas de los flujos turbulentos son mucho mayores que las escalas moleculares. Las ecuaciones exactas que describen el flujo turbulento (ecuaciones de Navier-Stokes) pueden ser simuladas numéricamente como se expuso en el capítulo 4. Sin embargo, la capacidad de almacenamiento y la velocidad de los ordenadores actuales no permiten la simulación de ningún flujo turbulento con alguna importancia práctica. La razón para ello es que la turbulencia presenta fluctuaciones mucho más pequeñas que el dominio de flujo. Los vórtices más pequeños sólo podrían capturarse con tamaños de malla de  $h \approx \nu^{3/4}$  [MP94]. El número total de nodos en 3 dimensiones sería entonces del orden de  $\nu^{-9/4}$ . Si  $\nu = 10^{-6}$ , lo cual es razonable para aplicaciones industriales, se necesitarían entonces alrededor de  $10^{14}$  nodos. En estos momentos los superordenadores son capaces de trabajar con un orden de  $10^6$  nodos, y se espera que en el siguiente siglo se llegue a  $10^9$ .

En el presente capítulo no se pretende describir el fenómeno turbulento desde el punto de vista físico, sino presentar varios modelos basados en la descomposición de Reynolds [Wil93, MP94, Rod80, Mar86], y plantear una estrategia numérica para su solución. Es decir, en ningún momento se pretende cuestionar o no la validez física de los modelos implementados numéricamente, sino estudiar la convergencia y robustez del método de elementos finitos planteado para su solución. La capacidad para reproducir fenómenos turbulentos reales de los modelos implementados se demostrará en los ejemplos numéricos al final del capítulo. Para un estudio desde el punto de vista físico de la turbulencia, el lector puede consultar las siguientes referencias [TL83, LMC92, Red93]. Un enfoque más matemático se presenta en [Cho75]. Una breve historia del desarrollo de los modelos turbulentos puede consultarse en [Wil93, Red93]. Otras formas de simular la turbulencia no clásicas (no basadas en las ecuaciones de Reynolds), como son los modelos tipo LES ("Large-eddy simulation") introducidos por Deardorff [Dea73] o la simulación directa DNS ("Direct Numerical Simulation") no se tratarán en el presente trabajo, aunque un modelo sencillo tipo LES se describe en el marco de los modelos clásicos de "Cero Ecuaciones".

Las referencias [BFR83, BR81, Spe85, VC83] pueden consultarse acerca de los modelos tipo LES. En [MP94] se puede consultar acerca de la simulación directa.

Finalmente, se plantean modelos que tienen en cuenta la rotación del sistema de ejes (ejes no inerciales). Es conocido que la hipótesis clásica de Boussinesq [GS93], sobre la cual se basan la mayoría de modelos turbulentos que se aplican en la práctica, es incapaz de reproducir flujos turbulentos con fuerzas de cuerpo importantes como las que se generan debidas a la rotación, teniéndose por consiguiente que recurrir a modelos que eviten de alguna manera dicha hipótesis, simulando directamente las componentes del tensor de Reynolds [GS93, Spe91],

## 5.2 Ecuaciones de Reynolds

Las ecuaciones que gobiernan el flujo incompresible en un cierto dominio  $\Omega$  son las ecuaciones de conservación de masa y momento (ecuaciones de Navier-Stokes). Éstas se escriben como sigue:

Conservación de momento:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nabla \cdot (2\nu \varepsilon(\mathbf{U})) + \mathbf{F} \quad \text{en } \Omega \quad (5.1)$$

Conservación de masa:

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (5.2)$$

con las condiciones iniciales y de contorno requeridas, las cuales no son importantes para la siguiente exposición. En las ecuaciones anteriores,  $\mathbf{U}$  es el campo de velocidades instantáneo,  $\rho$  la densidad del fluido,  $P$  el campo de presiones instantáneo,  $\nu$  la viscosidad cinemática del fluido y  $\mathbf{F}$  el campo de fuerzas de cuerpo instantáneas, en las cuales pueden incluirse la fuerzas debidas a la rotación (fuerza de Coriolis y fuerza centrífuga). Como se mencionó anteriormente, las ecuaciones anteriores no pueden ser resueltas numéricamente para flujos turbulentos. Sin embargo, para la mayoría de problemas ingenieriles no es necesario conocer exactamente las velocidades y presiones instantáneas del flujo, siendo suficiente obtener una aproximación de sus valores medios tanto en el tiempo como en el espacio. Por consiguiente, se adopta un método estadístico, el cual se basa en el concepto de valores medios de las variables del flujo, sugerido por Osborne Reynolds en 1895 (hipótesis de Reynolds). Las tres formas de tomar la media estadística en el ámbito de la investigación acerca de los fenómenos turbulentos son: La media temporal, la media espacial y la media de experimentos ("ensemble averaging").

La media temporal es apropiada para turbulencia estacionaria, esto es, un flujo turbulento que, en media, no varía con el tiempo. Para tal tipo de flujo, la media de una variable instantánea  $U(\mathbf{x}, t)$  se define como:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) dt \quad (5.3)$$

La media espacial es apropiada para la turbulencia homogénea. Esto ocurre en un flujo turbulento que, en media, es uniforme en todas las direcciones. La media espacial se define entonces como:

$$\mathbf{u}(t) = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int_V \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) dV \quad (5.4)$$

La media de experimentos (o media estadística) "ensemble averaging" es la más general. Ésta es la media de  $N$  experimentos idealmente idénticos. Si se define  $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}_n(\mathbf{x}, t)$  en el  $n$ -ésimo

experimento, la media de experimentos se expresa como:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{U}_n(\mathbf{x}, t) \quad (5.5)$$

Para un flujo turbulento que sea homogéneo y estacionario, se supone que las tres medias son iguales (hipótesis ergódica). En el presente trabajo se referirá siempre a la media estadística (5.5), considerando las variables del flujo como variables estadísticas las cuales puede escribirse como la suma de su valor medio más una fluctuación aleatoria. El campo de velocidades y presiones instantáneas pueden ser expresados entonces como:

$$\mathbf{U} = \mathbf{u} + \mathbf{u}' \quad (5.6)$$

$$P = p + p' \quad (5.7)$$

donde las variables  $\mathbf{u}$  y  $p$  son las medias de las respectivas variables  $\mathbf{U}$  y  $P$ , y  $\mathbf{u}'$  y  $p'$  las fluctuaciones aleatorias. Introduciendo la descomposición de Reynolds (5.6)-(5.7) en las ecuaciones de momento y continuidad (5.1)-(5.2) y tomando la media de estas últimas se llega a las siguientes expresiones:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0 \quad (5.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \cdot (2\nu \varepsilon(\mathbf{u}) - \overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'}) + \mathbf{f} \quad (5.10)$$

donde  $\mathbf{f} = \mathbf{F} - \mathbf{f}'$  es la media de las fuerzas de cuerpo, y el término

$$\boldsymbol{\tau} = -\rho \overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'} \quad (5.11)$$

es el tensor de Reynolds o tensor de tensiones turbulentas. De aquí en adelante una línea sobre la variable indica el valor medio estadístico de la misma. Por ejemplo:

$$\overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\mathbf{u}'_n \otimes \mathbf{u}'_n) \quad (5.12)$$

El tensor de Reynolds debe ser modelado de alguna manera para cerrar el sistema de ecuaciones (5.9)-(5.10) (la ecuación (5.8) ya fue usada para obtener (5.10)). La propuesta más antigua para modelar las tensiones de Reynolds se debe a Boussinesq (1877), quien introdujo el concepto de viscosidad turbulenta ("eddy viscosity"). Dicho concepto supone que las tensiones turbulentas son proporcionales a el gradiente de las velocidades medias. Esto es:

$$\frac{\boldsymbol{\tau}}{\rho} = 2\nu_t \varepsilon(\mathbf{u}) - \frac{2}{3}k \mathbf{I} \quad (5.13)$$

donde  $\nu_t$  es la viscosidad turbulenta y  $k$  la energía cinética de las fluctuaciones definida como (de aquí en adelante se utiliza la notación de Einstein, índices repetidos suman):

$$k = \frac{1}{2} \overline{(u'_k u'_k)} \quad (5.14)$$

Cuando la ecuación (5.13) se introduce en la ecuación de Reynolds (5.10),  $k$  puede incluirse en el término de presión y por consiguiente no se necesita su determinación; sólo es necesario calcular

la distribución de  $\nu_t$ . La viscosidad turbulenta no es una propiedad del fluido, sino que depende del estado de la turbulencia. El concepto de viscosidad turbulenta se concibió por analogía entre el movimiento molecular y el movimiento turbulento. Los vórtices turbulentos (“turbulent eddies”) se pensaron como partículas de fluido las cuales, como las moléculas, colisionan e intercambian momento. La viscosidad molecular es proporcional a la velocidad media y al camino medio libre entre moléculas, y la viscosidad turbulenta se consideró proporcional a una velocidad característica del movimiento fluctuante y a una escala de longitud típica de éste, la cual Prandtl llamó longitud de mezcla. Dicho argumento tiene algunas objeciones, por ejemplo, que los vórtices turbulentos no son cuerpos rígidos, mas el concepto de viscosidad turbulenta funciona bien en la práctica. Por consiguiente la viscosidad turbulenta puede ser expresada como:

$$\nu_t \propto \hat{V}L \quad (5.15)$$

donde  $\hat{V}$  es la mencionada velocidad característica del movimiento fluctuante y  $L$  la escala de longitud típica de éste. La forma en que  $\hat{V}$  y  $L$  se determinan es la principal diferencia entre los modelos turbulentos, teniéndose entonces los llamados modelos de “Cero Ecuaciones” en los cuales ambos parámetros se calculan en base a ecuaciones empíricas o explícitas, los modelos de “Una Ecuación” los cuales calculan  $\hat{V}$  resolviendo una ecuación diferencial, y los modelos de “Dos Ecuaciones” en los cuales tanto  $\hat{V}$  como  $L$  se obtienen a partir de la resolución de sendas ecuaciones diferenciales. Todos los anteriores modelos están basados en la hipótesis de Boussinesq (5.13), la cual es incapaz de reproducir los efectos generados por fuerzas de cuerpo debidas a la rotación [GS93]. Por lo tanto, se debe recurrir a modelos que de alguna manera obtengan las componentes del tensor de Reynolds obviando dicha hipótesis. Un resumen más detallado de los diferentes modelos de turbulencia puede consultarse en [Rod80, Mar86, Spe91].

A continuación se exponen los modelos de “Cero”, “Una” y “Dos” ecuaciones implementados en el presente trabajo. Todos ellos se basan en la hipótesis de Boussinesq (5.13). También se exponen dos modelos que simulan directamente las tensiones de Reynolds los cuales fueron implementados con el fin de tener en cuenta las fuerzas de cuerpo generadas por la rotación del sistema de ejes (fuerza de Coriolis y fuerza Centrifuga). Éstos son del tipo ASM (“Algebraic Stress Models”), y calculan cada una de las componentes del tensor de Reynolds mediante una ecuación algebraica que depende básicamente de los gradientes de la velocidad media  $\mathbf{u}$  y de la energía y disipación turbulentas.

### 5.3 Modelos de Cero Ecuaciones

Estos modelos suponen que la turbulencia se disipa en el mismo lugar donde se genera. No utilizan ecuaciones para transportar las cantidades turbulentas, y se basan en el concepto de viscosidad turbulenta. Especifican dicha viscosidad por medio de experimentos o fórmulas empíricas. En el presente trabajo se implementaron los siguientes:

#### 5.3.1 Modelo de longitud de mezcla

Este fue el primer modelo que describió la distribución de la viscosidad turbulenta [Rod80], y por consiguiente el primer modelo de turbulencia propiamente dicho. Fue introducido por Prandtl [Pra25] en 1925 y se conoce como la hipótesis de longitud de mezcla de Prandtl. Éste postuló que la velocidad característica  $\hat{V}$  (5.15) era proporcional al gradiente de la velocidad media por una longitud de mezcla  $l_m$ . El modelo se basó en la observación de las capas de cortante donde sólo

se tiene una tensión turbulenta importante y una sola componente del gradiente de velocidad. Una explicación detallada se puede consultar en [Rod80, Sch69]. La hipótesis de Prandtl en dos dimensiones es entonces:

$$\hat{V} = l_m |\partial_2 u_1| \quad (5.16)$$

donde  $u_1$  es la componente de la velocidad en dirección al flujo y la 2 es la dirección perpendicular. La extensión directa a un caso general es por lo tanto:

$$\hat{V} = l_m \sqrt{2 \varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{u})} \quad (5.17)$$

Con esta relación y a partir de (5.15) la viscosidad turbulenta puede expresarse entonces como:

$$\nu_t = C l_m^2 \sqrt{2 \varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{u})} \quad (5.18)$$

donde  $C$  es la constante de proporcionalidad en (5.15).

La longitud de mezcla  $l_m$  se especifica mediante fórmulas empíricas en algunas aplicaciones, dependiendo del tipo de flujo. Algunas de ellas pueden consultarse en [Rod80, Mar86]. En el presente trabajo  $l_m$  se considera constante, o puede ser calculado según la fórmula de Nikuradse [Sch69], la cual funciona bien para flujo desarrollado en ductos (canales, tubos, etc.). Ésta es:

$$\frac{l_m}{R} = 0.14 - 0.018 \left(1 - \frac{y}{R}\right)^2 - 0.06 \left(1 - \frac{y}{R}\right)^4 \quad (5.19)$$

donde  $R$  es una distancia característica del dominio de flujo (el radio del tubo, la altura media del flujo en canales a presión, o la altura total del flujo en canales abiertos), e  $y$  es la distancia a la superficie sólida (pared).

### 5.3.2 Modelo de Smagorinsky

El modelo de Smagorinsky es un caso sencillo de los modelos tipo LES ("Large-eddy simulation"). Dichos modelos intentan resolver el movimiento de las escalas mayores de la turbulencia (vórtices grandes) por medio de una malla que pueda ser resuelta con la capacidad computacional actual, y modelar las escalas pequeñas que no pueden ser capturadas con dicha malla.

Smagorinsky propuso que la viscosidad turbulenta depende del tamaño de la malla mediante la siguiente expresión [Sma63]:

$$\nu_t = C h^2 \sqrt{2 \varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{u})} \quad (5.20)$$

donde  $C$  es una constante que debe ser del orden de  $C \approx 0.01$ , y  $h$  el tamaño del elemento en cuestión.

Aunque conceptualmente el modelo de Smagorinsky y el de longitud de mezcla son diferentes, si se comparan (5.20) y (5.18), se observa que este modelo es similar al de longitud de mezcla propuesto por Prandtl, tomando  $l_m$  como el tamaño del elemento.

## 5.4 Modelos de una ecuación

Los modelos de cero ecuaciones no tienen en cuenta los procesos de transporte convectivo y difusivo de la turbulencia, los cuales son muy importantes en flujos que se desarrollan rápidamente,

y en flujos recirculantes. Adicionalmente, especificar la longitud de mezcla  $l_m$  es muy difícil en flujos complejos.

En el modelo de una ecuación presentado a continuación, se escoge como la velocidad característica de las fluctuaciones la raíz cuadrada de la energía cinética turbulenta (5.14), y se desarrolla una ecuación diferencial para la misma, con el fin de tener en cuenta el transporte convectivo y difusivo de dicha variable.

### 5.4.1 Modelo $k$

La escala con más sentido físico para caracterizar la velocidad de las fluctuaciones es  $\sqrt{k}$ , debido a que la energía se concentra principalmente en los vórtices grandes.  $\sqrt{k}$  es entonces una escala de velocidad apropiada para el movimiento turbulento de las escalas grandes, y por lo tanto del flujo medio. La expresión para la viscosidad turbulenta en función de  $k$  fue introducida independientemente por Kolmogorov [Kol68] y Prandtl [Pra45]; ésta es:

$$\nu_t = C_D \sqrt{k} L \quad (5.21)$$

donde  $C_D$  es una constante empírica (en general se toma como 1.0). Si se resta la ecuación exacta de momento (5.1) de la ecuación de Reynolds (5.10) se obtiene la siguiente ecuación de momento para las fluctuaciones:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{u}') &= \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}' + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}' + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u} \\ &+ \frac{1}{\rho} \nabla p' - \nabla \cdot (2\nu \varepsilon(\mathbf{u}')) - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} - \mathbf{f}' = 0 \end{aligned} \quad (5.22)$$

Tomando el producto escalar  $\mathbf{u}' \cdot \mathcal{L}(\mathbf{u}')$ , teniendo en cuenta que  $\mathbf{u}' \cdot \mathbf{f}' = 0$  (esto es cierto en el caso de que  $\mathbf{F}' = \mathbf{f} + \mathbf{f}'$  sólo incluya las fuerzas de rotación y las gravitacionales, ya que entonces  $\mathbf{f}' = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}'$  y es obvio que  $\mathbf{u}' \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}') = 0$ ), introduciendo la definición de la energía cinética turbulenta (5.14) y tomando la media de la ecuación resultante se obtiene la ecuación diferencial para  $k$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) k &= -\nabla \cdot \left( \overline{\mathbf{u}' \left( \frac{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}'}{2} + \frac{p'}{\rho} \right)} \right) - \overline{2\nu \mathbf{u}' \cdot (\nabla \cdot \varepsilon(\mathbf{u}'))} \\ &- \overline{(\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}') : \nabla \mathbf{u}} - \overline{2\nu \varepsilon(\mathbf{u}') : \varepsilon(\mathbf{u}')} \end{aligned} \quad (5.23)$$

El primer término del lado izquierdo es la variación temporal de  $k$ , el segundo es el término de transporte convectivo, los dos primeros términos del lado derecho son el transporte difusivo, el tercero es el término de producción de turbulencia  $P_k$ , y el último término es la disipación de la energía turbulenta debida a la viscosidad. En (5.23) se introdujeron nuevas correlaciones, las cuales deben modelarse con el fin de tener un sistema de ecuaciones cerrado. El término de producción

$$P_k = 1/\rho \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u} \quad (5.24)$$

se modela con la hipótesis de Boussinesq (5.13), y teniendo en cuenta la incompresibilidad del flujo, quedando entonces como:

$$P_k = 2\nu_t \varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{u}) \quad (5.25)$$

El flujo difusivo de  $k$  se supone proporcional a su gradiente [Rod80, Mar86]:

$$-\mathbf{u}' \left( \frac{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}'}{2} + \frac{p'}{\rho} \right) \simeq \frac{\nu_t}{\sigma_k} \nabla k \quad (5.26)$$

donde  $\sigma_k$  es una constante empírica, y es fácil comprobar que:

$$2\nu_t \mathbf{u}' \cdot (\nabla \cdot \varepsilon(\mathbf{u}')) = \nu \Delta k \quad (5.27)$$

El término de disipación  $\varepsilon = 2\nu_t \overline{\varepsilon(\mathbf{u}') : \varepsilon(\mathbf{u}')}$ , por argumentos de tipo dimensional y teniendo en cuenta que la velocidad de disipación de la energía es gobernada por el movimiento de las escalas grandes (aunque la disipación se lleva a cabo en los vórtices pequeños [Rod80, Mar86, Red93]), se modela como:

$$\varepsilon = C_\mu \frac{k^{3/2}}{L} \quad (5.28)$$

donde  $C_\mu$  es otra constante empírica. La ecuación diferencial para la energía cinética turbulenta se escribe finalmente como:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)k = P_k - C_\mu \frac{k^{3/2}}{L} + \nabla \cdot \left( \frac{\nu_t}{\sigma_k} \nabla k \right) + \nu \Delta k \quad (5.29)$$

$P_k$  es el término de producción (5.24). Finalmente las ecuaciones de Reynolds (5.9)-(5.10) con la hipótesis de Boussinesq (5.13), la definición de  $\nu_t$  en (5.21) y la ecuación para la energía cinética turbulenta (5.29), forman un conjunto cerrado de ecuaciones para simular los flujos turbulentos. Sin embargo, este modelo de una ecuación aún tiene el inconveniente de que la longitud característica  $L$  debe ser determinada de fórmulas empíricas o experimentación, lo cual no es fácil para problemas ingenieriles reales. De aquí nace la necesidad de encontrar también una ecuación que describa el transporte de  $L$  en el flujo, como se verá a continuación en los modelos de dos ecuaciones.

El modelo de longitud de mezcla puede verse como un caso particular del modelo  $k$ . Si en (5.29) se desprecian todos los términos excepto el de producción y el de disipación (la energía se disipa donde se produce) se obtiene:

$$2\nu_t \varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{u}) = C_\mu \frac{k^{3/2}}{L} \quad (5.30)$$

Despejando  $k$  de (5.21), reemplazando su expresión en la ecuación anterior y despejando  $\nu_t$  se llega a:

$$\nu_t = \left( \frac{C_D^3}{C_\mu} \right)^{1/2} L^2 \sqrt{2 \varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{u})} \quad (5.31)$$

La anterior ecuación es exactamente igual a la del modelo de longitud de mezcla (5.18), si se redefine en esta última  $C = (C_D^3/C_\mu)^{1/2}$  y  $l_m := L$ .

## 5.5 Modelos de dos ecuaciones

Como se mencionó en el apartado anterior, los modelos de una ecuación aún presentan el inconveniente de definir  $L$  en una forma empírica, lo cual no siempre es posible para flujos complicados como los que se tienen en problemas reales. Los modelos de dos ecuaciones obtienen la distribución de escalas para  $L$  resolviendo una ecuación diferencial para alguna combinación  $z = Ck^m L^n$  ( $C$  constante). A continuación se presentan varios modelos de este tipo.

### 5.5.1 Modelo $k - \varepsilon$

Este modelo es el más usado en la práctica. Consiste en obtener una ecuación diferencial para la disipación turbulenta definida como:

$$\varepsilon = 2\nu \overline{\mathcal{L}(\mathbf{u}')} : \overline{\mathcal{L}(\mathbf{u}')} \quad (5.32)$$

con lo cual  $L$  queda definida por (5.28).

Para obtener la ecuación de transporte para  $\varepsilon$  se realiza el producto escalar  $2\nu \overline{\mathcal{L}(\mathbf{u}')} : \overline{\mathcal{L}(\mathbf{u}')}$ , se toma la media de la ecuación resultante, y después de algunas suposiciones como las hechas para  $k$  [Rod80, Mar86, Spe91], se obtiene la siguiente ecuación diferencial para la disipación turbulenta:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \varepsilon = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \nabla \cdot \left( \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \nabla \varepsilon \right) + \nu \Delta \varepsilon \quad (5.33)$$

donde  $\sigma_\varepsilon$ ,  $C_{\varepsilon 1}$  y  $C_{\varepsilon 2}$  son constantes empíricas y  $P_k$  el término de producción definido en (5.24).

Si se combinan las ecuaciones (5.21) y (5.28) (tomando  $C_D = 1.0$ ) se obtiene,

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (5.34)$$

además de (5.28),

$$L = C_\mu \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} \quad (5.35)$$

Las ecuaciones de Reynolds (5.9)-(5.10), junto con la hipótesis de Boussinesq (5.13), las ecuaciones para  $k$  (5.29) y  $\varepsilon$  (5.33), y las expresiones para  $\nu_t$  (5.34) y  $L$  (5.35), forman un conjunto cerrado de ecuaciones diferenciales a las cuales se les debe adicionar una serie de condiciones iniciales y de contorno adecuadas (sobre las condiciones de contorno se tratará más adelante).

El modelo  $k - \varepsilon$  estándar fue introducido por Launder y Spalding [LS74] en 1974, y ha sido ampliamente usado y comparado con resultados experimentales. Las constantes del modelo han sido calibradas [LS74, Rod80, Mar86, MP94] mediante experimentación, y se presentan en la Tabla 5.1.

$C_\mu$	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$	$\sigma_k$	$\sigma_\varepsilon$
0.09	1.44	1.92	1.0	1.3

Tabla 5.1. Valores de las constantes para el modelo  $k - \varepsilon$

El modelo  $k - \varepsilon$  está limitado para altos números de Reynolds, debido a que sólo involucra una velocidad característica y una escala de longitudes para el movimiento turbulento. Por lo tanto el modelo supone que  $\nu_t$  es igual en todas las direcciones (turbulencia isotrópica), lo cual es válido sólo cuando los vórtices más pequeños (donde ocurre la disipación) son lo suficientemente chicos para que la anisotropía del flujo medio (vórtices grandes) desaparezca. Esto es cierto para altos números de Reynolds. Sin embargo, cerca de las superficies sólidas donde los efectos viscosos son muy importantes la posible isotropía del flujo desaparece. Por consiguiente, este tipo de modelos deben ser acoplados con alguna metodología para la región cercana a las paredes (superficies sólidas), lo cual será expuesto más adelante. Algunos autores introducen modificaciones al modelo con el fin de hacerlo más adecuado para bajos números de Reynolds y para modelar la zona cercana a las paredes [Spe91, Wil93].

### 5.5.2 Modelo $k - \omega$

A continuación se presenta el modelo de dos ecuaciones  $k - \omega$ , donde  $k$  es la energía cinética turbulenta y  $\omega$  se define como la disipación por unidad de energía cinética. La ecuación de transporte para  $\omega$  ha tenido varias transformaciones debidas a diferentes autores. Una breve historia de su desarrollo puede ser consultada en [Wil93]. El modelo aquí presentado es el más probado, y fue presentado por Wilcox en [Wil88]. La ecuación diferencial que describe la distribución de  $\omega$  en el dominio de flujo es la siguiente:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega = C_{\omega 1} \frac{\omega}{k} P_k - C_{\omega 2} \omega^2 + \nabla \cdot \left( \frac{\nu_t}{\sigma_\omega} \nabla \omega \right) + \nu \Delta \omega \quad (5.36)$$

donde  $P_k$  es el término de producción definido en (5.24), y  $\nu_t$  y  $L$  vienen dados por las siguientes expresiones [Wil93]:

$$\nu_t = \frac{k}{\omega} \quad (5.37)$$

$$L = \frac{k^{1/2}}{\omega} \quad (5.38)$$

Además, igualando (5.34) y (5.37) se obtiene:

$$\varepsilon = C_\mu \omega k \quad (5.39)$$

Las ecuaciones de Reynolds (5.9)-(5.10), junto con la hipótesis de Boussinesq (5.13), las ecuaciones para  $k$  (5.29) y  $\omega$  (5.36), y las expresiones para  $\nu_t$  (5.37) y  $L$  (5.38), forman un conjunto cerrado de ecuaciones diferenciales a las cuales se les debe adicionar una serie de condiciones iniciales y de contorno adecuadas.

Las constantes del modelo han sido calibradas [Wil93] mediante experimentación, y se presentan en la Tabla 5.2.

$C_\mu$	$C_{\omega 1}$	$C_{\omega 2}$	$\sigma_k$	$\sigma_\omega$
0.09	5/9	3/40	2.0	2.0

Tabla 5.2. Valores de las constantes para el modelo  $k - \omega$

Los modelos  $k - \varepsilon$  y  $k - \omega$  no son completamente análogos en el sentido que para obtener la ecuación para  $\omega$  (5.36) no basta reemplazar la expresión para  $\varepsilon$  en función de  $\omega$  (5.39) en la ecuación para  $\varepsilon$  (5.33). Sin embargo, para la obtención de (5.36) se hacen hipótesis similares que para (5.33).

Ambas variables, tanto  $\varepsilon$  como  $\omega$ , se hacen singulares en los contornos sólidos, sin embargo hay evidencia computacional que sugiere una mayor robustez del modelo  $k - \omega$  para integrar hasta las paredes del dominio [Wil93, Wil88]. Este tema será retomado más adelante en el tratamiento de las condiciones de contorno, y en los ejemplos numéricos al final del capítulo.

### 5.5.3 Modelo $k - k\tau$

Este modelo fue introducido por Zeierman y Wolfshtein (1986) [ZW86].  $\tau$  es la escala de tiempo integral,  $k\tau$  se define como:

$$k\tau = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} R_{ii}(\mathbf{x}, t; t') dt' \quad (5.40)$$

donde  $t$  y  $t'$  se refieren al tiempo, y  $R_{ij}$  es el tensor de correlación entre las fluctuaciones en el mismo punto pero a diferentes tiempos. Es decir,

$$R_{ij}(\mathbf{x}, t; t') = \overline{u'_i(\mathbf{x}, t)u'_j(\mathbf{x}, t + t')} \quad (5.41)$$

La energía cinética turbulenta es entonces:

$$k = \frac{1}{2} R_{ii}(\mathbf{x}, t; 0) \quad (5.42)$$

La principal motivación para implementar este modelo es que la variable  $k\tau$  no se hace singular en las superficies sólidas como ocurre con  $\varepsilon$  y  $\omega$ , no teniéndose por consiguiente que implementar condiciones de contorno especiales (más adelante se tratará el tema de las condiciones de contorno para  $\varepsilon$  y  $\omega$ ).

La ecuación diferencial para  $k\tau$  se presenta a continuación [Wil93]:

$$\frac{\partial(k\tau)}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)(k\tau) = C_{\tau 1} \frac{(k\tau)}{k} P_k - C_{\tau 2} k + \nabla \cdot \left( \frac{\nu_t}{\sigma_\tau} \nabla(k\tau) \right) + \nu \Delta(k\tau) \quad (5.43)$$

Las constantes del modelo se presentan en la Tabla 5.3.

$C_\mu$	$C_{\tau 1}$	$C_{\tau 2}$	$\sigma_k$	$\sigma_\tau$
0.09	0.173	0.225	1.46	10.8

Tabla 5.3. Valores de las constantes para el modelo  $k - k\tau$

La viscosidad turbulenta viene dada por:

$$\nu_t = C_\mu k\tau \quad (5.44)$$

de donde,

$$\varepsilon = \frac{k}{\tau}, \quad \omega = \frac{1}{C_\mu \tau}, \quad \text{y} \quad L = C_\mu \sqrt{k\tau} \quad (5.45)$$

## 5.6 Modelos de tensiones algebraicas

Todos los modelos presentados hasta el momento se basan en la hipótesis de Boussinesq (5.13) para calcular el tensor de Reynolds (5.11), siendo por lo tanto incapaces de reproducir flujos turbulentos con fuerzas de cuerpo importantes como las debidas a la rotación [GS93, Spe91]. Para cada una de las tensiones turbulentas puede obtenerse una ecuación de transporte tomando el segundo momento de la ecuación de momento para las fluctuaciones (5.22), esto es:

$$\overline{(\mathbf{u}' \otimes \mathcal{L}(\mathbf{u}'))_{ij}} + \overline{(\mathbf{u}' \otimes \mathcal{L}(\mathbf{u}'))_{ji}} \quad (5.46)$$

donde  $(\cdot)_{ij}$  se refiere a la componente  $ij$  del respectivo tensor. La ecuación de transporte para la componente  $\tau_{ij}$  del tensor de Reynolds es entonces [GS93, Spe91]:

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} + u_k \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} = -\tau_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \tau_{jk} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \Pi_{ij} + \varepsilon_{ij} + \frac{\partial C_{ijk}}{\partial x_k} + \nu \Delta \tau_{ij} \quad (5.47)$$

donde  $u_k$  se refiere a las componentes del campo de velocidades medias,  $\nu$  es la viscosidad cinemática del fluido y:

$$\Pi_{ij} \equiv \overline{p' \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)} \quad (5.48)$$

$$\varepsilon_{ij} \equiv 2\nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}} \quad (5.49)$$

$$C_{ijk} \equiv \overline{u'_i u'_j u'_k + p' u'_i \delta_{jk} + p' u'_j \delta_{ik}} \quad (5.50)$$

son las correlaciones de presión-velocidad de deformación, de disipación de energía, y la correlación difusiva de tercer orden respectivamente.  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecher. Resolver las ecuaciones de transporte para cada una de las componentes del tensor de Reynolds, acopladas con las ecuaciones de Reynolds (5.9) y (5.10), es lo que comúnmente se llama modelos de cierre de segundo orden. Además del alto coste computacional que esto conlleva (las ecuaciones son todas no lineales, acopladas y en 3D se tienen seis componentes del tensor de Reynolds), aún se deben modelar los términos de tercer orden.

Sin embargo, si se toman una serie de suposiciones sobre el tensor de Reynolds y el flujo turbulento, se puede llegar a los llamados modelos algebraicos, los cuales involucran más física que los modelos de basados en la hipótesis de Boussinesq [GS93, Spe91].

### 5.6.1 Modelo de tensiones algebraicas regularizado

Este modelo desarrollado por Gatski y Speziale se tomó de [GS93]. En dicha referencia se demuestra su eficacia para tratar con fuerzas de cuerpo debidas a sistemas en rotación. El modelo es el siguiente:

$$\frac{\tau_{ij}}{\rho} = \frac{6(1 + \eta^2)\alpha_1 k}{3 + \eta^2 + 6\zeta^2\eta^2 + 6\zeta^2} \left[ S_{ij}^* + (S_{ik}^* W_{kj}^* + S_{jk}^* W_{ki}^*) - 2(S_{ik}^* S_{kj}^* - \frac{1}{3} S_{kl}^* S_{kl}^* \delta_{ij}) \right] \quad (5.51)$$

donde  $\alpha_1 = (C_2 - \frac{1}{3})/(C_3 - 2)$ ,

$$S_{ij}^* = \frac{1}{2} g \tau (2 - C_3) S_{ij} \quad (5.52)$$

$$W_{ij}^* = \frac{1}{2} g \tau (2 - C_4) \left[ W_{ij} + \left( \frac{C_4 - 4}{C_4 - 2} \right) e_{mji} \omega_m \right] \quad (5.53)$$

$$\eta = (S_{ij}^* S_{ij}^*), \quad \zeta = (W_{ij}^* W_{ij}^*) \quad (5.54)$$

y

$$g = \left( \frac{1}{2} C_1 + \frac{P_k}{\varepsilon} - 1 \right)^{-1}, \quad \tau = \frac{k}{\varepsilon} \quad (5.55)$$

donde  $P_k$  es el término de producción definido en (5.24),  $k$  la energía cinética turbulenta y  $\varepsilon$  la disipación turbulenta, las cuales se determinan de sus respectivas ecuaciones de transporte (5.29) y (5.33).  $\omega_m$  es la componente  $m$  del vector de velocidad angular de rotación  $\omega$ , y  $e_{mji}$  las componentes del tensor de permutación.  $S_{ij}$  y  $W_{ij}$  están dados por:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (5.56)$$

$$W_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (5.57)$$

Las constantes del modelo para turbulencia bidimensional se calibran mediante un modelo de segundo orden (ver [GS93]) y son:

$$C_1 = 6.80, \quad C_2 = 0.36, \quad C_3 = 1.25, \quad C_4 = 0.40, \quad g = 0.233 \quad (5.58)$$

Aunque este modelo de tensiones algebraicas explícito es un modelo de dos ecuaciones, incorpora más física que el modelo  $k-\varepsilon$ , ya que es consistente con los modelos de cierre de segundo orden en el límite de flujos turbulentos homogéneos en equilibrio [GS93]. Al final del capítulo se presentan algunos resultados numéricos utilizando este modelo.

### 5.6.2 Modelo implícito de tensiones algebraicas

Éste se basa en la suposición de Rodi [Rod80] de que el transporte de  $\tau_{ij}$  es proporcional al transporte de  $k$ , siendo el factor de proporcionalidad  $-\tau_{ij}/k$  (el cual no es constante). Ésta es una buena aproximación cuando la variación espacial y temporal de  $-\tau_{ij}/k$  es pequeña comparada con la variación de  $-\tau_{ij}$ . El modelo de tensiones algebraicas que se obtiene es [BA94]:

$$\frac{\boldsymbol{\tau}}{\rho} = \frac{2}{3}k\mathbf{I}\left[1 - \frac{(1-c_2)\frac{P_k}{\varepsilon}}{\frac{P_k}{\varepsilon} - (1-c_1)}\right] + \frac{(1-c_2)}{\frac{P_k}{\varepsilon} - (1-c_1)}\frac{k}{\varepsilon}(\mathbf{P}^* - \frac{2}{3}P_k\mathbf{I}) \quad (5.59)$$

donde

$$\mathbf{P}^* = \frac{1}{\rho}(\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{u} + (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{u})^t) \quad (5.60)$$

$\mathbf{I}$  es el tensor identidad, y nuevamente  $k$  y  $\varepsilon$  se obtienen de sus respectivas ecuaciones de transporte (5.29) y (5.33). Es claro que para obtener  $\boldsymbol{\tau}$  de (5.59) se debe implementar algún esquema de tipo iterativo. En el presente trabajo se realizan sustituciones sucesivas hasta cumplir (5.59) (el valor inicial de  $\boldsymbol{\tau}$  se obtiene utilizando la hipótesis de Boussinesq).

## 5.7 Condiciones de contorno

Las variables de disipación turbulenta  $\varepsilon$  y  $\omega$  se hacen singulares en los contornos sólidos (la disipación tiende a infinito cerca a las paredes). Aunque existen metodologías para integrar estos modelos hasta los contornos sólidos, en general éstas son complicadas o requieren mucho coste computacional (mallas muy finas cerca a las paredes). Debido a ello, para la mayoría de problemas prácticos se integran las ecuaciones hasta una distancia  $\delta$  a la superficie sólida, y se prescribe la muy conocida ley de pared en los nodos cercanos a dicha superficie.

### 5.7.1 Ley de pared

La ley de pared se deduce a partir del modelo de longitud de mezcla, suponiendo que cerca a una superficie sólida  $l_m$  (5.18) está dada por [Rod80, Spe91, Mar86, Wil93]:

$$l_m = \kappa y \quad (5.61)$$

donde  $y$  es la distancia a la pared y  $\kappa = 0.41$  la constante de von Kármán. La ecuación anterior junto al modelo de longitud de mezcla para el caso de flujo de cortante puro:

$$\nu_t = l_m^2 \left| \frac{du}{dy} \right| \quad (5.62)$$

( $u$  es la componente de la velocidad paralela a la pared e  $y$  la dirección perpendicular a la pared) y la suposición de que la tensión de corte es constante en la región cercana a la superficie sólida, resultan en la celebrada ley de pared:

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C \quad (5.63)$$

donde  $C = 5.5$  es una constante,

$$u^+ = \frac{u_t}{u_*} \quad (5.64)$$

y

$$y^+ = \frac{yu_*}{\nu} \quad (5.65)$$

$u_*$  es la llamada velocidad de fricción,  $u_t$  es la norma de la velocidad tangente a la pared  $u_t$ ,  $y$  la distancia normal a la pared y  $\nu$  la viscosidad cinemática del fluido. La tensión de corte en la región cercana a la pared viene dada por:

$$\sigma_t = -\rho u_*^2 \frac{u_t}{u_t} \quad (5.66)$$

Entonces dado  $u_t$ ,  $y$  y  $\nu$ , se obtiene  $u_*$  de (5.63) utilizando un esquema iterativo (Newton-Raphson en el caso del presente trabajo), para luego calcular  $\sigma_t$  de (5.66) y aplicar dicha tensión al fluido (luego se recalcula el campo de velocidades, y por lo tanto  $u_t$ , y se repite hasta convergencia).

La anterior ley de pared compara muy bien con resultados experimentales de flujo en tubos y canales para  $30 \leq y^+ \leq 100$  (ver [Sch69] para más detalles). Para el caso  $y^+ < 30$  se supone  $u_t = u_* y^+$  [Soh86].

En la región cercana a las superficies sólidas, prevalece el equilibrio local. Ello implica que  $P_k = \varepsilon$ , lo cual, junto al perfil logarítmico de velocidades (5.63), lleva a [Rod80, Mar86, Wil93, Spe91]:

$$k = \frac{u_*^2}{\sqrt{C_\mu}} \quad (5.67)$$

donde  $C_\mu$  es la misma constante que en el modelo  $k - \varepsilon$  (Tabla 5.1). Igualmente se obtiene para la disipación turbulenta  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \frac{u_*^3}{\kappa y} \quad (5.68)$$

donde nuevamente  $y$  es la distancia perpendicular a la superficie sólida.

A partir de las anteriores expresiones, y de la relación entre  $\varepsilon$  y  $\omega$  (5.39), se tiene que en la región cercana a las paredes:

$$\omega = \frac{u_*}{\sqrt{C_\mu} \kappa y} \quad (5.69)$$

Igualmente para  $k\tau$  se tiene de (5.45):

$$k\tau = \frac{\kappa y u_*}{C_\mu} \quad (5.70)$$

Obsérvese que para este último modelo se puede utilizar  $y = 0$  (se tendría entonces  $k\tau = k = 0$  en las paredes).

### 5.7.2 Integración hasta la pared

En [Wil93] se demuestra que el el modelo  $k - \omega$  tiene solución para  $\omega$  arbitrario sobre la pared (lógicamente  $k = 0$  en las superficies sólidas). Esta ventaja se utiliza para tener en cuenta condiciones de rugosidad en las superficies sólidas. La condición de contorno sobre  $\omega$  presentada en [Wil93] se escribe como:

$$\omega = \frac{u_*^2}{\nu} S_R, \quad \text{para } y = 0 \quad (5.71)$$

donde

$$S_R = \begin{cases} (50/k_R^+)^2, & k_R^+ < 25 \\ 100/k_R^+, & k_R^+ \geq 25 \end{cases} \quad (5.72)$$

donde,

$$k_R^+ = \frac{u_* k_R}{\nu} \quad (5.73)$$

siendo  $k_R$  la altura de la rugosidad de la pared. La relación (5.72) compara muy bien con los datos de Nikuradse hasta valores de  $k_R^+ = 400$ . Además se tiene evidencia de que (5.72) funciona bien para flujos separados, los cuales violan las hipótesis de la ley de pared.

Para el modelo  $k - k\tau$ , las condiciones de contorno sobre la pared son triviales.  $k = 0$ , por lo tanto  $k\tau = 0$ . En el caso del modelo  $k - \varepsilon$  la situación es más complicada, y se tiene que recurrir a modelos  $k - \varepsilon$  para bajo número de Reynolds [Wil93], los cuales introducen funciones de amortiguamiento para los coeficientes del modelo. En este trabajo no se implementó ninguno de estos modelos.

### 5.7.3 Contornos con velocidad media impuesta y contornos libres

En los contornos con velocidad media impuesta se imponen condiciones tipo Dirichlet tanto en  $k$  como en la segunda variable turbulenta ( $\varepsilon$ ,  $\omega$  o  $k\tau$ ). Lo anterior se hace bajo la suposición de que estos contornos son el límite entre el flujo con turbulencia homogénea (o turbulencia ambiental) y el flujo turbulento que se desea calcular.

En este trabajo se impone un valor para  $k$  en los contornos de velocidad tipo Dirichlet  $\Gamma_D$ , y se da un valor a  $L$  con el fin de imponer la segunda variable turbulenta al valor dado por su respectiva relación con  $k$  y  $L$ . En los contornos libres (tipo Neumann  $\Gamma_N$ ) se prescriben los gradientes en la dirección normal al contorno de las variables turbulentas a cero, esto es:

$$\nabla k \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (5.74)$$

$$\nabla \varepsilon \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{o } \nabla \omega \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{o } \nabla(k\tau) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (5.75)$$

## 5.8 Elementos finitos aplicados al flujo turbulento

En los apartados anteriores de este capítulo se presentó en forma breve algunos modelos físicos que describen de alguna manera los fenómenos turbulentos. A continuación se plantea un esquema numérico basado en el método de los elementos finitos, para solucionar las ecuaciones que rigen el flujo turbulento.

Primero se planteará el problema por elementos finitos de cada una de las ecuaciones que rigen el flujo turbulento, para luego mediante los algoritmos iterativos adoptados, presentar la solución acoplada de las ecuaciones que conforman el modelo utilizado.

### 5.8.1 Solución por elementos finitos de las ecuaciones de Reynolds

Resumiendo lo expuesto hasta el momento, el flujo turbulento se supone gobernado por las ecuaciones de Reynolds (5.9)-(5.10) con las siguientes condiciones iniciales y de contorno:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_g \quad \text{en } \Gamma_D \times (0, T) \quad (5.76)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\tau}) = \mathbf{t}_N \quad \text{en } \Gamma_N \times (0, T) \quad (5.77)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = u_n, \quad \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{g}_1 = t_1, \quad (5.78)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{g}_2 = t_2 \quad \text{en } \Gamma_M \times (0, T)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad \text{en } \Omega \times \{0\} \quad (5.79)$$

donde  $\Omega$  es el dominio de flujo,  $(0, T)$  el intervalo de tiempo,  $\Gamma := \partial\Omega$  es el contorno de  $\Omega$ ,  $\Gamma_D$  es la parte de  $\Gamma$  donde se encuentra prescrito el campo de velocidades a  $\mathbf{u}_g$  (contorno tipo Dirichlet),  $\Gamma_N$  donde se prescriben las tensiones a  $\mathbf{t}_N$  (contorno tipo Neumann),  $\Gamma_M$  la parte del contorno donde se encuentra prescrita la velocidad normal a  $u_n$  y las componentes tangenciales de la fuerza a  $t_1$  y  $t_2$  ( $\mathbf{g}_1$  y  $\mathbf{g}_2$  son los vectores unitarios que definen una base local tangente a  $\Gamma_M$  en 3D), y  $\boldsymbol{\tau}$  son las tensiones de Reynolds. De aquí en adelante se toma  $\Gamma_M$  como la parte del contorno donde se aplica la ley de pared. Por lo tanto  $u_n = 0$  y

$$t_1 = \boldsymbol{\sigma}_t \cdot \mathbf{g}_1 \quad (5.80)$$

$$t_2 = \boldsymbol{\sigma}_t \cdot \mathbf{g}_2 \quad (5.81)$$

siendo  $\boldsymbol{\sigma}_t$  el vector de tensiones tangente a la superficie sólida dado por la ley de pared (5.66). En el caso que se utilice integración hasta la pared,  $\Gamma_M = \emptyset$ , y la superficie sólida pasa a ser parte del contorno de Dirichlet con  $\mathbf{u}_g = \mathbf{0}$ .

Las ecuaciones de Reynolds se discretizan exactamente igual que las de Navier-Stokes (ver capítulo 4), agregando los términos correspondientes al tensor de Reynolds. Esto es, se utiliza la regla trapezoidal para la discretización temporal, y para la discretización espacial se utiliza cualquiera de los dos métodos presentados en el capítulo 4 (elementos div-estables + SUPG + DRS o GLS). El problema de Reynolds escrito en unos ejes no inerciales que rotan con una velocidad angular  $\omega/2$ , discretizado en el tiempo utilizando la regla trapezoidal, se escribe como: Encontrar  $\mathbf{u}^{n+1}$  y  $p^{n+1}$  para  $n = 0, 1, 2, 3, \dots, N - 1$  tal que,

$$\rho \left( \frac{\mathbf{u}^{n+\theta} - \mathbf{u}^n}{\theta \Delta t} + (\mathbf{u}^{n+\theta} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+\theta} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}^{n+\theta} + \frac{1}{4} \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \right) - \nabla \cdot \left( 2(\mu) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{n+\theta}) + \boldsymbol{\tau}^{n+\theta} \right) + \nabla p^{n+\theta} = \mathbf{f}^{n+\theta} \quad \text{en } \Omega \quad (5.82)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+\theta} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (5.83)$$

con  $1/2 \leq \theta \leq 1$  y las condiciones de contorno:

$$\mathbf{u}^{n+\theta} = \mathbf{u}_g \quad \text{en } \Gamma_D \quad (5.84)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\tau})^{n+\theta} = \mathbf{t}_N \quad \text{en } \Gamma_N \quad (5.85)$$

$$\mathbf{u}^{n+\theta} \cdot \mathbf{n} = u_n, \quad \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\tau})^{n+\theta} \cdot \mathbf{g}_1 = t_1^{n+\theta}, \quad (5.86)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\tau})^{n+\theta} \cdot \mathbf{g}_2 = t_2^{n+\theta} \quad \text{en } \Gamma_M$$

donde como se mencionó anteriormente,  $t_1$  y  $t_2$  vienen dadas por la ley de pared en el caso que esta sea utilizada.

Se puede observar que en el caso de utilizar la hipótesis de Boussinesq (5.13), la ecuación (5.82) queda:

$$\rho \left( \frac{\mathbf{u}^{n+\theta} - \mathbf{u}^n}{\theta \Delta t} + (\mathbf{u}^{n+\theta} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+\theta} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}^{n+\theta} + \frac{1}{4} \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \right) - \nabla \cdot \left( 2(\mu + \rho \nu_t) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{n+\theta}) \right) + \nabla p^{n+\theta} = \mathbf{f}^{n+\theta} \quad \text{en } \Omega \quad (5.87)$$

con lo cual el problema semidiscreto (5.82)-(5.86) es exactamente igual al problema semidiscreto de Navier-Stokes dado de (4.95) a (4.99), sumando a la viscosidad dinámica del fluido la viscosidad dinámica turbulenta  $\mu_t = \rho \nu_t$ , sumando a las tensiones reales  $\boldsymbol{\sigma}$  las tensiones de Reynolds  $\boldsymbol{\tau}$ , y redefiniendo el término de fuerzas de cuerpo como:

$$\mathbf{f}_* = \mathbf{f} + \frac{2}{3} \rho \nabla k^{n+\theta} \quad (5.88)$$

Aquí cabe recalcar que aunque matemáticamente los problemas son iguales, desde el punto de vista físico en el problema de Navier-Stokes los valores de todas las variables son los instantáneos, y en el problema de Reynolds los valores medios.

De lo anterior, el problema discreto de Reynolds (con la hipótesis de Boussinesq) utilizando elementos div-estables, SUPG y DRS es igual al presentado en (4.100), reemplazando  $\mu$  por  $\mu + \mu_t$ , redefiniendo  $\mathbf{f}_c$  como:

$$\mathbf{f}_c = \mathbf{f} - \frac{\rho}{4} \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - \frac{2}{3} \rho \nabla k \quad (5.89)$$

y, por consiguiente, redefiniendo la forma lineal  $l(\mathbf{v})$  como:

$$l(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \left[ \mathbf{f} - \frac{\rho}{4} (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})) \right] \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{t}_N \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_M} (t_1 \mathbf{g}_1 + t_2 \mathbf{g}_2) \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{2}{3} \rho k \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\Omega \quad (5.90)$$

que es igual a (1.17) añadiendo el término de la energía cinética turbulenta integrado por partes. En el caso de usar modelos de cero ecuaciones para obtener  $\nu_t$ ,  $k$  no se conoce, por lo cual se supone incluido en la presión (se redefine  $p := p + \frac{2}{3} \rho k$ ), y  $l(\mathbf{v})$  queda igual que en (1.17).

De forma análoga, el problema discreto de Reynolds (con hipótesis de Boussinesq) utilizando el método GLS es igual al presentado en (4.72), reemplazando  $\mu$  por  $\mu + \mu_t$ , y utilizando las definiciones de  $\mathbf{f}_c$  y  $l(\mathbf{v})$  dadas en (5.89) y (5.90), respectivamente. Nuevamente, en el caso de no conocerse la distribución de  $k$ , se supone incluida en el término de presión.

Por último cabe anotar que para el cálculo de los parámetros  $\tau_1$  y  $\tau$  del método elementos div-estables + SUPG + DRS, y de los parámetros  $\tau_1$  y  $\tau_2$  del método GLS, también debe añadirse a la viscosidad cinemática  $\nu$  la viscosidad turbulenta  $\nu_t$  (es decir en donde aparezca  $\nu$  se reemplaza por  $\nu + \nu_t$ ).

### 5.8.2 Solución por elementos finitos de la ecuación para $k$

El problema para la energía cinética turbulenta puede escribirse como: Dados  $\mathbf{u}$  y  $\nu_t$  encontrar  $k$  tal que,

$$\frac{\partial k}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) k = P_k - C_\mu \frac{k^2}{\nu_t} + \nabla \cdot \left( (\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k}) \nabla k \right) \quad \text{en } \Omega \times (0, T) \quad (5.91)$$

con las siguientes condiciones iniciales y de contorno:

$$k = g \quad \text{en } \Gamma_{D'} \times (0, T) \quad (5.92)$$

$$\nabla k \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{en } \Gamma_N \times (0, T) \quad (5.93)$$

$$k(\mathbf{x}, 0) = k^0 \quad \text{en } \Omega \times \{0\} \quad (5.94)$$

donde  $\Gamma_{D'} = \overline{\Gamma_D \cup \Gamma_M}$ . Sobre  $\Gamma_M$ ,  $g$  viene dado por la función de pared (5.67), o  $g = 0$  si se integra hasta la superficie sólida. Sobre  $\Gamma_D$ , la condición de contorno  $g$  es dado como dato de entrada. Esta puede tomarse como un valor directamente proporcional a la velocidad media impuesta.

Como se observa en (5.91), la ecuación para  $k$  se escribe suponiendo la viscosidad turbulenta dada. Como se vio en los modelos de turbulencia de una y dos ecuaciones, en realidad dicha variable depende de la misma energía cinética turbulenta  $k$ . Sin embargo, si  $\nu_t$  no se supone dado en el proceso iterativo para resolver  $k$  (la ecuación para  $k$  es no lineal), se puede llegar a tener términos de difusión negativa, los cuales acarrean problemas numéricos fuertes además de no tener ningún sentido físico.

La ecuación para la energía cinética turbulenta (5.91) es del tipo convección-difusión-reacción (2.49) con un coeficiente de difusión de  $\nu + \nu_t/\sigma_k$  y un término de reacción no lineal, el cual puede ser linealizado utilizando el método de Picard como:

$$\left(-2\frac{C_\mu}{\varepsilon} \varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{u}) + \frac{C_\mu}{\nu_t}\right) k^{i-1} k \quad (5.95)$$

donde el superíndice  $i$  se refiere a la iteración, y el término de producción  $P_k$  se escribió como en (5.25) usando (5.34) para  $\nu_t$ . En el apartado 2.3 se demostró que para las ecuaciones de este tipo la forma débil asociada es coerciva si el coeficiente de difusión y el de reacción poseen el mismo signo, y por lo tanto la aproximación por elementos finitos es en principio posible (sólo quedan problemas menores de oscilaciones localizadas). Sin embargo la coercividad puede perderse si los coeficientes de difusión y reacción son de signos contrarios (dependiendo de los valores relativos entre ellos).

Claramente el coeficiente de difusión para la ecuación de  $k$  es positivo (tanto  $\nu$  como  $\nu_t$  son positivos). Sin embargo el primer coeficiente del término de reacción (5.95) es negativo (tanto  $k^{i-1}$  como  $\varepsilon$  son positivos por definición) y el segundo positivo. La idea es entonces dejar constante el primer término de reacción durante el proceso iterativo para calcular  $k$  (pasarlo a la derecha como un término de fuerzas de cuerpo), y dejar sólo como término de reacción la parte positiva. Ésta es la idea básica para los algoritmos numéricos que se presentaran más adelante para la solución del flujo turbulento utilizando modelos de una o dos ecuaciones, o modelos de tensiones algebraicas (ASM).

Teniendo lo anterior en mente, la ecuación para  $k$  puede escribirse en forma linealizada como:

$$\frac{\partial k^i}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) k^i - \nabla \cdot \left( \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k^i \right) + \frac{C_\mu}{\nu_t} \left( (\lambda + 1) k^{i-1} k^i - \lambda (k^{i-1})^2 \right) = P_k \quad \text{en } \Omega \times (0, T) \quad (5.96)$$

donde  $\nu_t$ ,  $\mathbf{u}$  y  $P_k$  están dados.  $\lambda$  toma los valores de 0, 1, -1 según se linealice con los métodos de Picard, Newton-Raphson o RHS respectivamente. El superíndice  $i$  se refiere nuevamente a la iteración para resolver (5.96) hasta convergencia en  $k$ .

La discretización temporal de la ecuación (5.96) utilizando el método de Euler hacia atrás ( $\theta = 1$ ) se escribe como: dado  $k^{n+1,0} = k^n$ , encontrar  $k^{n+1,i}$  para  $n = 0, 1, \dots, N-1$ , para

$i = 1, 2, \dots$  (hasta convergencia), tal que

$$\begin{aligned} \frac{k^{n+1,i} - k^n}{\Delta t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)k^{n+1,i} - \nabla \cdot \left( (\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k}) \nabla k^{n+1,i} \right) \\ + \frac{C_\mu}{\nu_t} \left( (\lambda + 1)k^{n+1,i-1}k^{n+1,i} - \lambda(k^{n+1,i-1})^2 \right) = P_k \quad \text{en } \Omega \end{aligned} \quad (5.97)$$

con las siguientes condiciones de contorno:

$$k^{n+1,i} = g \quad \text{en } \Gamma_{D'} \quad (5.98)$$

$$\nabla k^{n+1,i} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{en } \Gamma_N \quad (5.99)$$

donde  $g$  viene dado por la función de pared sobre  $\Gamma_M$  en el caso que se esté utilizando dicho método, o  $g = 0$  sobre  $\Gamma_M$  si se está integrando hasta la superficie sólida.

Para la discretización espacial se definen los espacios funcionales:

$$\Psi_0 = \left\{ \psi \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \mid \psi|_{\Gamma_{D'}} = 0 \right\} \quad (5.100)$$

$$\Psi_g = \left\{ \psi \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \mid \psi|_{\Gamma_{D'}} = g \right\} \quad (5.101)$$

y los subespacios funcionales asociados a una partición regular de elementos finitos  $\{\Omega\}^e$  del dominio  $\Omega$ ,  $\Psi_{h,0} \subset \Psi_0$  y  $\Psi_{h,g} \subset \Psi_g$  tales que:

$$\Psi_{h,0} = \left\{ \psi \in C^0(\Omega) \mid \psi|_{\Omega^e} \in R_k(\Omega^e), \psi|_{\Gamma_{D'}} = 0 \right\} \quad (5.102)$$

$$\Psi_{h,g} = \left\{ \psi \in C^0(\Omega) \mid \psi|_{\Omega^e} \in R_k(\Omega^e), \psi|_{\Gamma_{D'}} = g \right\} \quad (5.103)$$

$R_k(\Omega^e)$  está definido en (1.39).

Al ser una ecuación de convección-difusión-reacción, la discretización espacial se lleva a cabo mediante el método SUPG + ASC descrito en el apartado 2.3.3. De esta manera la difusión añadida por el método SUPG estabilizará problemas con convección dominante, y el método anisotrópico de captura de discontinuidades ASC evitará las oscilaciones localizadas debidas a términos de reacción importantes (ver apartado 2.3). El problema discreto de elementos finitos se escribe entonces como: Dado  $k_h^{n+1,0} = k_h^n \in \Psi_{h,g}$  encontrar  $k_h^{n+1,i} \in \Psi_{h,g}$  para  $n = 0, 1, \dots, N-1$ , para  $i = 1, 2, \dots$  (hasta convergencia), tal que (ver (2.84) y (2.85)):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} (k_h^{n+1,i} - k_h^n, \psi_h) + a(k_h^{n+1,i}, \psi_h) + s_{\text{supg}}(k_h^{n+1,i}, \psi_h) + s_{\text{asc}}(k_h^{n+1,i}, \psi_h) = l(\psi_h) \\ \forall \psi_h \in \Psi_{h,0} \end{aligned} \quad (5.104)$$

La forma bilineal  $a$ , y la forma lineal  $l$  se deben a los términos de Galerkin:

$$\begin{aligned} a(k_h^{n+1,i}, \psi_h) = \int_{\Omega} \left[ (\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k}) \nabla k_h^{n+1,i} \cdot \nabla \psi_h + \psi_h \mathbf{u} \cdot \nabla k_h^{n+1,i} \right. \\ \left. + \psi_h \frac{C_\mu}{\nu_t} \left( (\lambda + 1)k_h^{n+1,i-1}k_h^{n+1,i} - \lambda(k_h^{n+1,i-1})^2 \right) \right] d\Omega \end{aligned} \quad (5.105)$$

$$l(\psi_h) = \int_{\Omega} \psi_h P_k d\Omega \quad (5.106)$$

los términos residuales del método SUPG ( $s_{\text{supg}}$ ) son:

$$s_{\text{supg}}(k_h^{n+1,i}, \psi_h) = \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau^e (\mathbf{u} \cdot \nabla) \psi_h \mathcal{R}_1(k_h^{n+1,i}) d\Omega \quad (5.107)$$

donde  $\tau^e$  es el tiempo intrínseco del método SUPG calculado mediante (2.42). Esto es:

$$\tau^e = \frac{\alpha_a^e h^e}{2|\mathbf{u}|^e} \quad (5.108)$$

donde  $\alpha_a^e$  es la función de "upwind" asintótica definida en (2.18)-(2.19) (es claro que para el cálculo de  $\alpha_a^e$  se usa como difusión  $\nu + \nu_t/\sigma_k$ ),  $h^e$  el diámetro del elemento definido en (2.43) y  $|\mathbf{u}|^e$  la norma euclidiana de la velocidad típica del elemento.  $\mathcal{R}_1$  es el residuo elemental dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1(k_h^{n+1,i}) &= \frac{k_h^{n+1,i-1} - k_h^n}{\Delta t} - (\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k}) \Delta k_h^{n+1,i-1} - \frac{1}{\sigma_k} \nabla \nu_t \cdot \nabla k_h^{n+1,i-1} \\ &\quad + \mathbf{u} \cdot \nabla k_h^{n+1,i} + \frac{C_\mu}{\nu_t} (k_h^{n+1,i-1})^2 - P_k \end{aligned} \quad (5.109)$$

En (5.109) cabe notar que todos los términos del residuo se evalúan en la iteración anterior (por simplicidad en la programación), menos el término convectivo, el cual es el que añade la difusión artificial del método (ver apartado 2.2.2).

Finalmente los términos del método anisotrópico de captura de discontinuidades  $s_{\text{asc}}$  (ver (2.78)), vienen dados por:

$$\begin{aligned} s_{\text{asc}}(k_h^{n+1,i}, \psi_h) &= \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega^e} \left[ \xi_{\text{iso}} \nabla \psi_h \cdot \nabla k_h^{n+1,i} \right. \\ &\quad \left. + (\langle \xi_{\text{iso}} - \xi_{\text{supg}} \rangle - \xi_{\text{iso}}) \nabla \psi_h \cdot \left( \frac{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2} \right) \cdot \nabla k_h^{n+1,i} \right] d\Omega \end{aligned} \quad (5.110)$$

donde  $\langle \cdot \rangle$  es la función definida en (2.77),  $\xi_{\text{supg}}$  la difusión debida al método SUPG (ver (2.15)):

$$\xi_{\text{supg}} = \frac{1}{2} \alpha_a^e h^e |\mathbf{u}|^e \quad (5.111)$$

y  $\xi_{\text{iso}}$  la difusión a añadir en sentido perpendicular a las líneas de corriente (ver (2.75)):

$$\xi_{\text{iso}} = \frac{1}{2} \alpha_c^e h^e \frac{|\mathcal{R}(k_h^{n+1,i-1})|}{|\nabla k_h^{n+1,i-1}|} \quad \text{si } |\nabla k_h^{n+1,i-1}| \neq 0 \quad \text{y } \xi_{\text{iso}} = 0 \quad \text{de lo contrario,} \quad (5.112)$$

donde  $\alpha_c^e$  viene dado por (ver (2.79)):

$$\alpha_c^e = \max\left(0, C - \frac{2(\nu + \nu_t/\sigma_k)}{|\mathbf{u}_{||}|^e h^e}\right) \quad (5.113)$$

$C$  es una constante que depende del tipo de elemento (0.7 para lineales y 0.35 para cuadráticos),  $\mathbf{u}_{||}$  viene dado por (ver (2.80)):

$$\mathbf{u}_{||} = \frac{\mathcal{R}(k_h^{n+1,i-1})}{|\nabla k_h^{n+1,i-1}|^2} \nabla k_h^{n+1,i-1} \quad (5.114)$$

y  $\mathcal{R}$  es el residuo elemental definido como:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(k_h^{n+1,i-1}) &= \frac{k_h^{n+1,i-1} - k_h^n}{\Delta t} - (\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k}) \Delta k_h^{n+1,i-1} - \frac{1}{\sigma_k} \nabla \nu_t \cdot \nabla k_h^{n+1,i-1} \\ &\quad + \mathbf{u} \cdot \nabla k_h^{n+1,i-1} + \frac{C_\mu}{\nu_t} (k_h^{n+1,i-1})^2 - P_k \end{aligned} \quad (5.115)$$

Todos los términos del residuo elemental están evaluados en la iteración anterior por facilidad en la implementación. Es fácil verificar la consistencia del método, en el sentido que la solución del problema continuo (5.91)-(5.94), satisface el problema discreto (5.104).

### 5.8.3 Solución por elementos finitos de la ecuación para $\varepsilon$

El problema para la disipación turbulenta es, al igual que el de la energía cinética turbulenta, un problema de convección-difusión-reacción no lineal. Éste puede escribirse como: Dados  $\mathbf{u}$ ,  $\nu_t$  y  $k$  encontrar  $\varepsilon$  tal que,

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \varepsilon = P_\varepsilon - \frac{C_{\varepsilon 2}}{k} \varepsilon^2 + \nabla \cdot \left( \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right) \quad \text{en } \Omega \times (0, T) \quad (5.116)$$

con las siguientes condiciones iniciales y de contorno:

$$\varepsilon = g \quad \text{en } \Gamma_{D'} \times (0, T) \quad (5.117)$$

$$\nabla \varepsilon \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{en } \Gamma_N \times (0, T) \quad (5.118)$$

$$\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \varepsilon^0 \quad \text{en } \Omega \times \{0\} \quad (5.119)$$

dónde  $\Gamma_{D'} = \overline{\Gamma_D} \cup \Gamma_M$ . Sobre  $\Gamma_M$ ,  $g$  viene dado por la función de pared (5.68), y  $\varepsilon$  se hace singular si se intenta integrar hasta la pared. En este trabajo no se implementó ninguna estrategia para integrar el modelo  $k - \varepsilon$  hasta las superficies sólidas. Sobre  $\Gamma_D$ , la condición de contorno  $g$  se calcula mediante la ecuación (5.28), a partir del valor dado como condición de contorno para  $k$  y el dato de entrada para  $L$ .

Nuevamente se linealiza la ecuación para  $\varepsilon$  tomando la viscosidad cinemática turbulenta  $\nu_t$  constante dentro del esquema iterativo para resolver  $\varepsilon$ , por las mismas razones que en la ecuación para  $k$ .

El término  $P_\varepsilon$  viene dado por:

$$P_\varepsilon = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k \quad (5.120)$$

siendo nuevamente un término de reacción negativo. De forma análoga a lo expuesto para  $k$ , el término  $P_\varepsilon$  se pasa al lado derecho como un término de fuerzas de cuerpo, permaneciendo constante durante el proceso iterativo para encontrar  $\varepsilon$ .

Siguiendo exactamente los mismos pasos que para la solución por elementos finitos de la energía cinética turbulenta  $k$ , el problema discreto de elementos finitos para  $\varepsilon$  utilizando el método SUPG + ASC (ver 2.3.3), y el método de Euler hacia atrás con una partición uniforme de tamaño  $\Delta t$  del intervalo de tiempo  $[0, T]$ , se escribe como: Dado  $\varepsilon_h^{n+1,0} = \varepsilon_h^n \in \Phi_{h,g}$  encontrar  $\varepsilon_h^{n+1,i} \in \Phi_{h,g}$  para  $n = 0, 1, \dots, N-1$ , para  $i = 1, 2, \dots$  (hasta convergencia), tal que (ver (2.84) y (2.85)):

$$\frac{1}{\Delta t} (\varepsilon_h^{n+1,i} - \varepsilon_h^n, \phi_h) + a(\varepsilon_h^{n+1,i}, \phi_h) + s_{\text{supg}}(\varepsilon_h^{n+1,i}, \phi_h) + s_{\text{asc}}(\varepsilon_h^{n+1,i}, \phi_h) = l(\phi_h) \quad \forall \phi_h \in \Phi_{h,0} \quad (5.121)$$

Los espacios funcionales se definen de manera análoga que para  $k$  (5.102) y (5.103). La forma bilineal  $a$ , y la forma lineal  $l$  debidas a los términos de Galerkin son:

$$a(\varepsilon_h^{n+1,i}, \phi_h) = \int_{\Omega} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon_h^{n+1,i} \cdot \nabla \phi_h + \phi_h \mathbf{u} \cdot \nabla \varepsilon_h^{n+1,i} + \phi_h \frac{C_{\varepsilon 2}}{k} \left( (\lambda + 1) \varepsilon_h^{n+1,i-1} \varepsilon_h^{n+1,i} - \lambda (\varepsilon_h^{n+1,i-1})^2 \right) \right] d\Omega \quad (5.122)$$

$$l(\phi_h) = \int_{\Omega} \phi_h P_\varepsilon d\Omega \quad (5.123)$$

donde nuevamente  $\lambda$  es igual a 0, 1 o -1 si se linealiza con Picard, Newton-Raphson o RHS respectivamente. Los demás términos se especifican a continuación, siguiendo el mismo procedimiento que para  $k$ :

$$s_{\text{supg}}(\varepsilon_h^{n+1,i}, \phi_h) = \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega^e} \tau^e (\mathbf{u} \cdot \nabla) \phi_h \mathcal{R}_1(\varepsilon_h^{n+1,i}) \, d\Omega \quad (5.124)$$

$$\tau^e = \frac{\alpha_a^e h^e}{2|\mathbf{u}|^e} \quad (5.125)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1(\varepsilon_h^{n+1,i}) &= \frac{\varepsilon_h^{n+1,i-1} - \varepsilon_h^n}{\Delta t} - \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\right) \Delta \varepsilon_h^{n+1,i-1} - \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \nabla \nu_t \cdot \nabla \varepsilon_h^{n+1,i-1} \\ &\quad + \mathbf{u} \cdot \nabla \varepsilon_h^{n+1,i} + \frac{C_{\varepsilon 2}}{k} (\varepsilon_h^{n+1,i-1})^2 - P_\varepsilon \end{aligned} \quad (5.126)$$

Igual que para  $k$  todos los términos del residuo se evalúan en la iteración anterior (por simplicidad en la programación), menos el término convectivo, el cual es el que añade la difusión artificial del método (ver apartado 2.2.2).

Finalmente la forma  $s_{\text{asc}}$  se debe a los términos del método anisotrópico de captura de discontinuidades (ver (2.78)) y se especifica a continuación:

$$\begin{aligned} s_{\text{asc}}(\varepsilon_h^{n+1,i}, \phi_h) &= \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega^e} \left[ \xi_{\text{iso}} \nabla \phi_h \cdot \nabla \varepsilon_h^{n+1,i} \right. \\ &\quad \left. + (\langle \xi_{\text{iso}} - \xi_{\text{supg}} \rangle - \xi_{\text{iso}}) \nabla \phi_h \cdot \left( \frac{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2} \right) \cdot \nabla \varepsilon_h^{n+1,i} \right] \, d\Omega \end{aligned} \quad (5.127)$$

$$\xi_{\text{supg}} = \frac{1}{2} \alpha_a^e h^e |\mathbf{u}|^e \quad (5.128)$$

$$\xi_{\text{iso}} = \frac{1}{2} \alpha_c^e h^e \frac{|\mathcal{R}(\varepsilon_h^{n+1,i-1})|}{|\nabla \varepsilon_h^{n+1,i-1}|} \text{ si } |\nabla \varepsilon_h^{n+1,i-1}| \neq 0 \text{ y } \xi_{\text{iso}} = 0 \text{ de lo contrario,} \quad (5.129)$$

$$\alpha_c^e = \max\left(0, C - \frac{2(\nu + \nu_t/\sigma_\varepsilon)}{|\mathbf{u}_{||}|^e h^e}\right) \quad (5.130)$$

$$\mathbf{u}_{||} = \frac{\mathcal{R}(\varepsilon_h^{n+1,i-1})}{|\nabla \varepsilon_h^{n+1,i-1}|^2} \nabla \varepsilon_h^{n+1,i-1} \quad (5.131)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\varepsilon_h^{n+1,i-1}) &= \frac{\varepsilon_h^{n+1,i-1} - \varepsilon_h^n}{\Delta t} - \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\right) \Delta \varepsilon_h^{n+1,i-1} - \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \nabla \nu_t \cdot \nabla \varepsilon_h^{n+1,i-1} \\ &\quad + \mathbf{u} \cdot \nabla \varepsilon_h^{n+1,i-1} + \frac{C_{\varepsilon 2}}{k} (\varepsilon_h^{n+1,i-1})^2 - P_\varepsilon \end{aligned} \quad (5.132)$$

Nuevamente la formulación para  $\varepsilon$  es consistente, en el mismo sentido que para  $k$ .

### 5.8.4 Solución por elementos finitos de la ecuación para $\omega$

El problema para la disipación por unidad de energía cinética turbulenta es, al igual que el de la energía cinética turbulenta y la disipación turbulenta, un problema de convección-difusión-reacción no lineal. Éste puede escribirse como: Dados  $\mathbf{u}$ ,  $\nu_l$  y  $k$  encontrar  $\omega$  tal que,

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega = P_\omega - C_{\omega 2} \omega^2 + \nabla \cdot \left( \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\omega} \right) \nabla \omega \right) \quad \text{en } \Omega \times (0, T) \quad (5.133)$$

con las siguientes condiciones iniciales y de contorno:

$$\omega = g \quad \text{en } \Gamma_{D'} \times (0, T) \quad (5.134)$$

$$\nabla \omega \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{en } \Gamma_N \times (0, T) \quad (5.135)$$

$$\omega(\mathbf{x}, 0) = \omega^0 \quad \text{en } \Omega \times \{0\} \quad (5.136)$$

donde  $\Gamma_{D'} = \overline{\Gamma_D \cup \Gamma_M}$ . Sobre  $\Gamma_M$ ,  $g$  viene dado por la función de pared (5.69), y en el caso de integrar hasta las superficies sólidas  $g$  viene dado por (5.71). Sobre  $\Gamma_D$  la condición de contorno  $g$  se calcula mediante la ecuación (5.38), a partir del valor dado como condición de contorno para  $k$  y el dato de entrada para  $L$ .

El término  $P_\omega$  viene dado por:

$$P_\omega = C_{\omega 1} \frac{\omega}{k} P_k \quad (5.137)$$

siendo nuevamente un término de reacción negativo. De forma análoga a lo expuesto para  $k$  y  $\varepsilon$ , el término  $P_\omega$  se pasa al lado derecho como un término de fuerzas de cuerpo, permaneciendo constante durante el proceso iterativo para encontrar  $\omega$ .

Siguiendo exactamente los mismos pasos que para  $k$  y  $\varepsilon$ , el problema discreto de elementos finitos para  $\omega$  utilizando el método SUPG + ASC (ver 2.3.3), y el método de Euler hacia atrás con una partición uniforme de tamaño  $\Delta t$  del intervalo de tiempo  $[0, T]$ , se escribe como: Dado  $\omega_h^{n+1,0} = \omega_h^n \in \Phi_{h,g}$  encontrar  $\omega_h^{n+1,i} \in \Phi_{h,g}$  para  $n = 0, 1, \dots, N-1$ , para  $i = 1, 2, \dots$  (hasta convergencia), tal que (ver (2.84) y (2.85)):

$$\frac{1}{\Delta t} (\omega_h^{n+1,i} - \omega_h^n, \phi_h) + a(\omega_h^{n+1,i}, \phi_h) + s_{\text{supg}}(\omega_h^{n+1,i}, \phi_h) + s_{\text{asc}}(\omega_h^{n+1,i}, \phi_h) = l(\phi_h) \quad \forall \phi_h \in \Phi_{h,0} \quad (5.138)$$

Los espacios funcionales se definen de manera análoga que para  $k$  (5.102) y (5.103). Las forma bilineal  $a$ , y la forma lineal  $l$  se deben a los términos de Galerkin:

$$a(\omega_h^{n+1,i}, \phi_h) = \int_{\Omega} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\omega} \right) \nabla \omega_h^{n+1,i} \cdot \nabla \phi_h + \phi_h \mathbf{u} \cdot \nabla \omega_h^{n+1,i} + \phi_h C_{\omega 2} \left( (\lambda + 1) \omega_h^{n+1,i-1} \omega_h^{n+1,i} - \lambda (\omega_h^{n+1,i-1})^2 \right) \right] d\Omega \quad (5.139)$$

$$l(\phi_h) = \int_{\Omega} \phi_h P_\omega d\Omega \quad (5.140)$$

Los términos residuales del método SUPG y del método ASC siguiendo el mismo procedimiento que para  $k$  vienen dados por:

$$s_{\text{supg}}(\omega_h^{n+1,i}, \phi_h) = \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega^e} \tau^e (\mathbf{u} \cdot \nabla) \phi_h \mathcal{R}_1(\omega_h^{n+1,i}) d\Omega \quad (5.141)$$

$$\tau^e = \frac{\alpha_a^e h^e}{2|u|^e} \quad (5.142)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1(\omega_h^{n+1,i}) &= \frac{\omega_h^{n+1,i-1} - \omega_h^n}{\Delta t} - \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\omega}\right) \Delta \omega_h^{n+1,i-1} - \frac{1}{\sigma_\omega} \nabla \nu_t \cdot \nabla \omega_h^{n+1,i-1} \\ &+ \mathbf{u} \cdot \nabla \omega_h^{n+1,i} + C_{\omega 2} (\omega_h^{n+1,i-1})^2 - P_\omega \end{aligned} \quad (5.143)$$

$$\begin{aligned} s_{\text{asc}}(\omega_h^{n+1,i}, \phi_h) &= \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega^e} \left[ \xi_{\text{iso}} \nabla \phi_h \cdot \nabla \omega_h^{n+1,i} \right. \\ &\left. + (\langle \xi_{\text{iso}} - \xi_{\text{supg}} \rangle - \xi_{\text{iso}}) \nabla \phi_h \cdot \left( \frac{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2} \right) \cdot \nabla \omega_h^{n+1,i} \right] d\Omega \end{aligned} \quad (5.144)$$

$$\xi_{\text{supg}} = \frac{1}{2} \alpha_a^e h^e |\mathbf{u}|^e \quad (5.145)$$

$$\xi_{\text{iso}} = \frac{1}{2} \alpha_c^e h^e \frac{|\mathcal{R}(\omega_h^{n+1,i-1})|}{|\nabla \omega_h^{n+1,i-1}|} \text{ si } |\nabla \omega_h^{n+1,i-1}| \neq 0 \text{ y } \xi_{\text{iso}} = 0 \text{ de lo contrario,} \quad (5.146)$$

$$\alpha_c^e = \max\left(0, C - \frac{2(\nu + \nu_t/\sigma_\omega)}{|\mathbf{u}_{||}|^e h^e}\right) \quad (5.147)$$

$$\mathbf{u}_{||} = \frac{\mathcal{R}(\omega_h^{n+1,i-1})}{|\nabla \omega_h^{n+1,i-1}|^2} \nabla \omega_h^{n+1,i-1} \quad (5.148)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\omega_h^{n+1,i-1}) &= \frac{\omega_h^{n+1,i-1} - \omega_h^n}{\Delta t} - \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\omega}\right) \Delta \omega_h^{n+1,i-1} - \frac{1}{\sigma_\omega} \nabla \nu_t \cdot \nabla \omega_h^{n+1,i-1} \\ &+ \mathbf{u} \cdot \nabla \omega_h^{n+1,i-1} + C_{\omega 2} (\omega_h^{n+1,i-1})^2 - P_\omega \end{aligned} \quad (5.149)$$

Nuevamente la formulación para  $\omega$  es consistente, en el mismo sentido que para  $k$ . Como se puede observar, el problema para  $\omega$  desde el punto de vista matemático es muy parecido al de  $\varepsilon$ , cambiando sólo un poco el término de reacción no lineal y, lógicamente, las relaciones con  $k$ ,  $L$  y  $\nu_t$ .

### 5.8.5 Solución por elementos finitos de la ecuación para $(k\tau)$

El problema para  $(k\tau)$  es, al igual que el de la energía cinética turbulenta y la disipación turbulenta, un problema de convección-difusión-reacción. Éste puede escribirse como: Dados  $\mathbf{u}$ ,  $\nu_t$  y  $k$  encontrar  $(k\tau)$  tal que,

$$\frac{\partial(k\tau)}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)(k\tau) = P_\tau - C_{\tau 2} k + \nabla \cdot \left( \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\tau}\right) \nabla(k\tau) \right) \text{ en } \Omega \times (0, T) \quad (5.150)$$

con las siguientes condiciones iniciales y de contorno:

$$(k\tau) = g \text{ en } \Gamma_D \times (0, T) \quad (5.151)$$

$$\nabla(k\tau) \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ en } \Gamma_N \times (0, T) \quad (5.152)$$

$$(k\tau)(\mathbf{x}, 0) = (k\tau)^0 \text{ en } \Omega \times \{0\} \quad (5.153)$$

donde  $\Gamma_{D'} = \overline{\Gamma_D \cup \Gamma_M}$ . Sobre  $\Gamma_M$ ,  $g$  viene dado por la función de pared (5.70), y en el caso de integrar hasta las superficies sólidas  $g = 0$ . Sobre  $\Gamma_D$ , la condición de contorno  $g$  se calcula mediante la ecuación (5.45), a partir del valor dado como condición de contorno para  $k$  y el dato de entrada para  $L$ .

El término  $P_\tau$  viene dado por:

$$P_\tau = C_{\tau 1} \frac{(k\tau)}{k} P_k \quad (5.154)$$

siendo nuevamente un término de reacción negativo. De forma análoga a lo expuesto para  $k$  y  $\varepsilon$ , el término  $P_\tau$  se pasa al lado derecho como un término de fuerzas de cuerpo, permaneciendo constante durante el proceso iterativo para encontrar  $(k\tau)$ .

Siguiendo exactamente los mismos pasos que para  $k$  y  $\varepsilon$ , el problema discreto de elementos finitos para  $(k\tau)$  utilizando el método SUPG + ASC (ver 2.3.3), y el método de Euler hacia atrás con una partición uniforme de tamaño  $\Delta t$  del intervalo de tiempo  $[0, T]$ , se escribe como: Dado  $(k\tau)_h^{n+1,0} = (k\tau)_h^n \in \Phi_{h,g}$  encontrar  $(k\tau)_h^{n+1,i} \in \Phi_{h,g}$  para  $n = 0, 1, \dots, N-1$  y para  $i = 1, 2, \dots$ , tal que (ver (2.84) y (2.85)):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} ((k\tau)_h^{n+1,i} - (k\tau)_h^n, \phi_h) + a((k\tau)_h^{n+1,i}, \phi_h) \\ & + s_{\text{supg}}((k\tau)_h^{n+1,i}, \phi_h) + s_{\text{asc}}((k\tau)_h^{n+1,i}, \phi_h) = l(\phi_h) \\ & \qquad \qquad \qquad \forall \phi_h \in \Phi_{h,0} \end{aligned} \quad (5.155)$$

Los espacios funcionales se definen de manera análoga que para  $k$  (5.102) y (5.103). Las forma bilineal  $a$ , y la forma lineal  $l$  se deben a los términos de Galerkin:

$$\begin{aligned} a((k\tau)_h^{n+1,i}, \phi_h) &= \int_{\Omega} \left[ (\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\tau}) \nabla (k\tau)_h^{n+1,i} \cdot \nabla \phi_h + \phi_h \mathbf{u} \cdot \nabla (k\tau)_h^{n+1,i} \right. \\ & \quad \left. + \phi_h C_{\tau 2} k \right] d\Omega \end{aligned} \quad (5.156)$$

$$l(\phi_h) = \int_{\Omega} \phi_h P_\tau d\Omega \quad (5.157)$$

Los términos residuales siguiendo los mismos procedimientos que para  $k$  vienen dados por:

$$s_{\text{supg}}((k\tau)_h^{n+1,i}, \phi_h) = \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega^e} \tau^e (\mathbf{u} \cdot \nabla) \phi_h \mathcal{R}_1((k\tau)_h^{n+1,i}) d\Omega \quad (5.158)$$

$$\tau^e = \frac{\alpha_a^e h^e}{2|\mathbf{u}|^n} \quad (5.159)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1((k\tau)_h^{n+1,i}) &= \frac{(k\tau)_h^{n+1,i-1} - (k\tau)_h^n}{\Delta t} - (\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\tau}) \Delta (k\tau)_h^{n+1,i-1} - \frac{1}{\sigma_\tau} \nabla \nu_t \cdot \nabla (k\tau)_h^{n+1,i-1} \\ & \quad + \mathbf{u} \cdot \nabla (k\tau)_h^{n+1,i} + C_{\tau 2} k - P_\tau \end{aligned} \quad (5.160)$$

$$\begin{aligned} s_{\text{asc}}((k\tau)_h^{n+1,i}, \phi_h) &= \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega^e} \left[ \xi_{\text{iso}} \nabla \phi_h \cdot \nabla (k\tau)_h^{n+1,i} + (\langle \xi_{\text{iso}} - \xi_{\text{supg}} \rangle \right. \\ & \quad \left. - \xi_{\text{iso}}) \nabla \phi_h \cdot \left( \frac{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2} \right) \cdot \nabla (k\tau)_h^{n+1,i} \right] d\Omega \end{aligned} \quad (5.161)$$

$$\xi_{\text{supg}} = \frac{1}{2} \alpha_a^e h^e |\mathbf{u}|^e \quad (5.162)$$

$$\xi_{\text{iso}} = \frac{1}{2} \alpha_c^e h^e \frac{|\mathcal{R}((k\tau)_h^{n+1,i-1})|}{|\nabla(k\tau)_h^{n+1,i-1}|} \quad \text{si } |\nabla(k\tau)_h^{n+1,i-1}| \neq 0 \quad \text{y } \xi_{\text{iso}} = 0 \quad \text{de lo contrario,} \quad (5.163)$$

$$\alpha_c^e = \max\left(0, C - \frac{2(\nu + \nu_t/\sigma_\tau)}{|\mathbf{u}_{||}|^e h^e}\right) \quad (5.164)$$

$\mathbf{u}_{||}$  viene dado por (ver (2.80)):

$$\mathbf{u}_{||} = \frac{\mathcal{R}((k\tau)_h^{n+1,i-1})}{|\nabla(k\tau)_h^{n+1,i-1}|^2} \nabla(k\tau)_h^{n+1,i-1} \quad (5.165)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}((k\tau)_h^{n+1,i-1}) &= \frac{(k\tau)_h^{n+1,i-1} - (k\tau)_h^n}{\Delta t} - \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\tau}\right) \Delta(k\tau)_h^{n+1,i-1} - \frac{1}{\sigma_\tau} \nabla \nu_t \cdot \nabla(k\tau)_h^{n+1,i-1} \\ &\quad + \mathbf{u} \cdot \nabla(k\tau)_h^{n+1,i-1} + C_{\tau 2} k - P_\tau \end{aligned} \quad (5.166)$$

Nuevamente la formulación para  $(k\tau)$  es consistente, en el mismo sentido que para  $k$ .

### 5.8.6 Modelos de tensiones algebraicas ASM

Como se verá más adelante, en el caso de utilizar la hipótesis de Boussinesq los algoritmos iterativos para obtener la solución acoplada de las diferentes ecuaciones que conformen un modelo turbulento básicamente calculan  $\nu_t$  (ya sea de un modelo de cero, una o dos ecuaciones), para luego resolver las ecuaciones de Reynolds (5.82)-(5.86). Es decir, la parte desviadora de las tensiones de Reynolds  $\tau_d$  se introduce a la ecuación de momento (5.82) como:

$$\tau_d^i = 2\mu_t^{i-1} \varepsilon(\mathbf{u}^i) \quad (5.167)$$

donde la viscosidad turbulenta se calcula en la iteración anterior del proceso iterativo, mas los gradientes de la velocidad se computan en la iteración actual.

Como se ve en el apartado 5.6, los modelos de tensiones algebraicas básicamente expresan las componentes del tensor de Reynolds como una función (explícita o implícita) de la energía cinética turbulenta  $k$ , la disipación turbulenta  $\varepsilon$  y los gradientes de la velocidad media  $\nabla \mathbf{u}$ . En este sentido son parecidos a (5.167). Sin embargo, las expresiones resultantes son mucho más complejas como se ve en (5.51) y (5.59), con lo cual el cálculo de los gradientes de velocidad debe hacerse con los resultados de la iteración anterior. Esto es, el tensor de Reynolds usando el modelo de tensiones algebraicas  $\tau_a$  en la iteración  $i$  se expresa como:

$$\tau_a^i = \mathbf{F}(k^i, \varepsilon^i, \nabla \mathbf{u}^i) \quad (5.168)$$

Este término se introduciría en la ecuación de momento (5.10) como un término de fuerzas. Es decir, la ecuación de momento en la iteración  $i$ , discretizada en el tiempo usando la regla trapezoidal, se escribiría como:

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\mathbf{u}^{n+\theta,i} - \mathbf{u}^n}{\theta \Delta t} + (\mathbf{u}^{n+\theta,i} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+\theta,i} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}^{n+\theta,i} + \frac{1}{4} \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \right) \\ - \nabla \cdot \left( 2\mu \varepsilon(\mathbf{u}^{n+\theta,i}) \right) + \nabla p^{n+\theta,i} = \mathbf{f}^{n+\theta} + \nabla \cdot \tau_a^{n+\theta,i-1} \end{aligned} \quad (5.169)$$

Sin importar el tipo de linealización del término convectivo (RHS, Picard o Newton-Raphson, ver apartado 4.3), la ecuación (5.169) lleva a una pobre convergencia del método debido al tipo de linealización utilizado para las tensiones algebraicas  $\tau_a$ .

Para mejorar la convergencia, se implementó la siguiente idea original del presente trabajo: Precondicionar el problema utilizando la hipótesis de Boussinesq. Es decir, a cada lado de (5.169) se le suma (5.167) (en el lado derecho evaluando los gradientes de velocidad en  $i$  y en el izquierdo en  $i-1$ ). La ecuación de momento se reescribe entonces como:

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\mathbf{u}^{n+\theta,i} - \mathbf{u}^n}{\theta \Delta t} + (\mathbf{u}^{n+\theta,i} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+\theta,i} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}^{n+\theta,i} + \frac{1}{4} \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \right) \\ - \nabla \cdot \left( 2(\mu + \mu_t^{i-1}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{n+\theta,i}) \right) + \nabla p^{n+\theta,i} = \mathbf{f}^{n+\theta} \\ - \nabla \cdot \left( 2\mu_t^{i-1} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{n+\theta,i-1}) \right) + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_a^{n+\theta,i-1} \end{aligned} \quad (5.170)$$

Tanto la ecuación de incompresibilidad como las condiciones de contorno e iniciales son las mismas (ver (5.83) a (5.86)).

Igual que en el apartado 5.8.1 donde se presentó el planteamiento por elementos finitos de las ecuaciones de Reynolds utilizando la hipótesis de Boussinesq, el problema discreto de Reynolds utilizando un modelo de tensiones algebraicas con elementos div-estables, SUPG y DRS es igual al presentado en (4.100), reemplazando  $\mu$  por  $\mu + \mu_t$ , redefiniendo  $\mathbf{f}_c$  como:

$$\mathbf{f}_c = \mathbf{f} - \frac{\rho}{4} \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - \nabla \cdot \left( 2\mu_t \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \right) + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_a \quad (5.171)$$

donde  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$  y  $\boldsymbol{\tau}_a$  se evalúan en la iteración anterior, y, por consiguiente, redefiniendo la forma lineal  $l(\mathbf{v})$  como:

$$\begin{aligned} l(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \left[ \mathbf{f} - \frac{\rho}{4} (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})) \right] \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{t}_N \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma \\ + \int_{\Gamma_M} (\mathbf{t}_1 \mathbf{g}_1 + \mathbf{t}_2 \mathbf{g}_2) \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \left[ (2\mu_t \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\tau}_a) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \right] \, d\Omega \end{aligned} \quad (5.172)$$

que es igual a (1.17) añadiendo el término de las tensiones de Reynolds integradas por partes.

De forma análoga, el problema discreto de Reynolds utilizando el método GLS es igual al presentado en (4.72), reemplazando  $\mu$  por  $\mu + \mu_t$ , y utilizando las definiciones de  $\mathbf{f}_c$  y  $l(\mathbf{v})$  dadas en (5.171) y (5.172) respectivamente.

Nuevamente cabe anotar que para el cálculo de los parámetros  $\tau_1$  y  $\tau$  del método elementos div-estables + SUPG + DRS, y de los parámetros  $\tau_1$  y  $\tau_2$  del método GLS, también debe añadirse a la viscosidad cinemática  $\nu$  la viscosidad turbulenta  $\nu_t$  (es decir, en donde aparezca  $\nu$  se reemplaza por  $\nu + \nu_t$ ).

### 5.8.7 Esquema iterativo para la solución del flujo turbulento

El esquema iterativo que se presenta en el Cuadro 5.1 para la solución acoplada del flujo turbulento es original del presente trabajo. Una versión reducida del mismo ya fue publicada por Codina y Soto en [CS96]. El algoritmo está dirigido principalmente al uso de modelos de turbulencia de dos ecuaciones, o de tensiones algebraicas (ASM).

**Cuadro 5.1 Algoritmo de solución del flujo turbulento transitorio**

- Lea condiciones iniciales y de contorno para  $\mathbf{u}_h$ ,  $k_h$ ,  $L_h$  y  $\psi_h$ . Haga  $p_h^0 = 0$
- IF (modelo ASM) THEN  $\tau_a^0 = 0$
- Calcule  $\nu_t = \sqrt{k_h^0 L_h^0}$  (5.21)
- WHILE  $n < N$  y (no-estacionario)
  - $n \leftarrow n + 1$ ;  $i \leftarrow 0$
  - $\mathbf{u}_h^{n+1,i} \leftarrow \mathbf{u}_h^n$ ;  $p_h^{n+1,i} \leftarrow p_h^n$ ;  $k_h^{n+1,i} \leftarrow k_h^n$ ;  $\psi_h^{n+1,i} \leftarrow \psi_h^n$ ;  $L_h^{n+1,i} \leftarrow L_h^n$
  - IF (modelo ASM) THEN  $\tau_a^{n+1,i} \leftarrow \tau_a^n$
  - WHILE (no convergido o máximo de iteraciones)
    - $i \leftarrow i + 1$
    - Obtenga  $\mathbf{u}_h^{n+1,i}$  y  $p_h^{n+1,i}$  resolviendo (5.87) (o (5.170) en el caso de utilizar un modelo ASM)
    - IF (hipótesis de Boussinesq) THEN Calcule  $P_k$  de (5.25) y  $P_\psi$  de (5.120), o de (5.137), o de (5.154) según el modelo
    - IF (modelo ASM) THEN  $P_k = 1/\rho \tau_a^{n+1,i-1} : \nabla \mathbf{u}_h^{n+1,i}$  de (5.24), y  $P_\psi \equiv P_\varepsilon = C_{\varepsilon 1} P_k \varepsilon / k$  de (5.120)
    - $j \leftarrow 0$ ;  $L_h^{n+1,i,j} \leftarrow L_h^{n+1,i-1}$ ;  $err_L = 1.0 + TOL_L$
    - Prescriba  $k_h$  y  $\psi_h$  sobre las paredes usando (5.67) a (5.70)
    - WHILE  $err_L > TOL_L$  y  $j \leq Max_1$ 
      - $j \leftarrow j + 1$
      - $m \leftarrow 0$ ;  $k_h^{n+1,i,j,m} \leftarrow k_h^{n+1,i,j}$ ;  $err_k = 1.0 + TOL_L$
      - WHILE  $err_k > TOL_L$  y  $m \leq Max_2$ 
        - $m \leftarrow m + 1$
        - Calcule  $k_h^{n+1,i,j,m}$  de (5.104)
        - $k_h^{n+1,i,j,m} \leftarrow \beta k_h^{n+1,i,j,m} + (1 - \beta) k_h^{n+1,i,j,m-1}$
        - $err_k = \|k_h^{n+1,i,j,m} - k_h^{n+1,i,j,m-1}\|_0 / \|k_h^{n+1,i,j,m}\|_0$
      - END WHILE (de  $k_h$ )
      - $k_h^{n+1,i,j} \leftarrow k_h^{n+1,i,j,m}$
      - $m \leftarrow 0$ ;  $\psi_h^{n+1,i,j,m} \leftarrow \psi_h^{n+1,i,j}$ ;  $err_\psi = 1.0 + TOL_L$
      - WHILE  $err_\psi > TOL_L$  y  $m \leq Max_2$ 
        - $m \leftarrow m + 1$
        - Calcule  $\psi_h^{n+1,i,j,m}$  de (5.121), o de (5.138), o de (5.155) según el modelo
        - $\psi_h^{n+1,i,j,m} \leftarrow \beta \psi_h^{n+1,i,j,m} + (1 - \beta) \psi_h^{n+1,i,j,m-1}$
        - $err_\psi = \|\psi_h^{n+1,i,j,m} - \psi_h^{n+1,i,j,m-1}\|_0 / \|\psi_h^{n+1,i,j,m}\|_0$
      - END WHILE (de  $\psi_h$ )
      - $\psi_h^{n+1,i,j} \leftarrow \psi_h^{n+1,i,j,m}$
      - Calcule  $L_h^{n+1,i,j}$  de (5.35), o de (5.38), o de (5.45) según el modelo
      - $L_h^{n+1,i,j} \leftarrow \beta L_h^{n+1,i,j} + (1 - \beta) L_h^{n+1,i,j-1}$
      - Calcule  $\nu_t = \sqrt{k_h^{n+1,i,j} L_h^{n+1,i,j}}$  (5.21)
      - $err_L = \|L_h^{n+1,i,j} - L_h^{n+1,i,j-1}\|_0 / \|L_h^{n+1,i,j}\|_0$
    - END WHILE (de  $L_h$ )
    - IF (modelo ASM) THEN  $\tau_a^{n+1,i}$  de (5.51), o de (5.59) según el modelo
  - END WHILE (no convergido o máximo de iteraciones)
  - IF  $\|\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n\|_{L^q} \leq TOL_s \Delta t \|\mathbf{u}_h^{n+1}\|$  THEN (estacionario)
  - END WHILE  $n < N$  y (no-estacionario)
  - END

Las variables del algoritmo del Cuadro 5.1 (no definidas con anterioridad) son:  $\psi$  segunda variable turbulenta ( $\varepsilon$ ,  $\omega$  o  $k\tau$ ),  $err_L$  norma del error relativo en  $L$ ,  $TOL_L$  tolerancia para converger en las variables turbulentas ( $k$ ,  $\psi$  y  $L$ ),  $Max_1$  máximo número de iteraciones para convergencia en  $L$ ,  $Max_2$  máximo número de iteraciones para convergencia en  $k$  o en  $\psi$  y  $0 < \beta \leq 1$  parámetro de relajación (en general se toma  $\beta = 0.5$ ).

Cabe recalcar que, como se mencionó en los apartados 5.8.2 a 5.8.5 del presente trabajo, los términos de producción  $P_k$  y  $P_\psi$  se dejan constantes a lo largo del proceso iterativo para converger en  $L$  con el fin de evitar términos de reacción negativos que deterioren la positividad del sistema de ecuaciones y, por lo tanto, la convergencia del método.

En el caso de utilizar modelos de cero o una ecuación, el algoritmo es más sencillo y se presenta en el Cuadro 5.2.

**Cuadro 5.2 Algoritmo de solución del flujo turbulento transitorio.  
Modelos de cero y una ecuación**

- Lea condiciones iniciales y de contorno para  $\mathbf{u}_h$ .  $p_h^0 = 0$ . Lea como calcular  $L$
- IF (una ecuación) THEN Calcule  $\nu_t = \sqrt{k_h^0 L}$  (5.21)
- $n \leftarrow -1$
- WHILE  $n < N$  y (no-estacionario)
  - $n \leftarrow n + 1$ ;  $i \leftarrow 0$
  - $\mathbf{u}_h^{n+1,i} \leftarrow \mathbf{u}_h^n$ ;  $p_h^{n+1,i} \leftarrow p_h^n$ ;
  - IF (una ecuación) THEN  $k_h^{n+1,i} \leftarrow k_h^n$
  - WHILE (no convergido o máximo de iteraciones)
    - $i \leftarrow i + 1$
    - IF (cero ecuaciones) THEN Calcule  $\nu_t$  de (5.18), o de (5.20) según el modelo
    - Obtenga  $\mathbf{u}_h^{n+1,i}$  y  $p_h^{n+1,i}$  resolviendo (5.87)
    - IF (una ecuación) THEN
      - $j \leftarrow 0$ ;  $k_h^{n+1,i,j} \leftarrow k_h^{n+1,i-1}$ ;  $err_k = 1.0 + TOL_k$
      - Prescriba  $k_h$  sobre las paredes usando (5.67)
      - WHILE  $err_k > TOL_k$  y  $j \leq Max_2$ 
        - $j \leftarrow j + 1$
        - Calcule  $k_h^{n+1,i,j}$  de (5.104)
        - $k_h^{n+1,i,j} \leftarrow \beta k_h^{n+1,i,j} + (1 - \beta) k_h^{n+1,i,j-1}$
        - $err_k = \|k_h^{n+1,i,j} - k_h^{n+1,i,j-1}\|_0 / \|k_h^{n+1,i,j}\|_0$
      - END WHILE (de  $k_h$ )
      - $k_h^{n+1,i} \leftarrow k_h^{n+1,i,j}$
      - Calcule  $\nu_t = \sqrt{k_h^{n+1,i} L}$  (5.21)
    - END IF (de una ecuación)
  - END WHILE (no convergido o máximo de iteraciones)
  - IF  $\|\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n\|_{L^q} \leq TOL_s \Delta t \|\mathbf{u}_h^{n+1}\|$  THEN (estacionario)
- END WHILE  $n < N$  y (no-estacionario)
- END

Las variables del algoritmo anterior aún no definidas son  $err_k$  y  $TOL_k$ , las cuales son el error relativo en  $k$  y la tolerancia de convergencia para  $k$  respectivamente.

Cabe anotar que se pueden realizar varias iteraciones usando un modelo de una ecuación, para luego afinar la solución con un modelo de dos ecuaciones (esquemas de este tipo se encuentran en la literatura [GRC93]). Aunque la implementación del código permite la anterior opción,

durante la etapa de experimentación numérica se observó que dicho procedimiento no mejoraba de forma notable la convergencia de los modelos de dos ecuaciones. Por tal motivo, en los ejemplos numéricos se utilizan directamente los modelos de dos ecuaciones.

Una estrategia similar, la cual se usó siempre en el presente trabajo, se realiza en el caso de utilizar algún modelo de tensiones algebraicas (ASM). Para lograr converger con dichos modelos primero se realizan varias iteraciones con un modelo de dos ecuaciones, para luego afinar la solución con el modelo ASM elegido.

Finalmente cabe mencionar que la implementación de las funciones de pared para la solución del campo de velocidades (ecuación de Reynolds) se llevó a cabo de dos formas diferentes. En la primera se parte de la velocidad tangencial en la pared obtenida en la iteración anterior, para luego calcular la velocidad de fricción  $u_*$  y con ésta la tensión tangencial en la pared  $\sigma_t$  (ver ecuaciones (5.63), (5.65) y (5.66)). Dicha tensión se pone como una condición tipo Newman sobre la pared. La otra forma de implementar la función de pared que se probó fue calcular a partir del campo de velocidades en la iteración anterior la tensión en la pared, con ésta obtener  $u_*$  y por consiguiente la velocidad tangencial  $u_t$ . Dicha velocidad se prescribe entonces como una condición tipo Dirichlet. En la etapa de experimentación numérica se obtuvo que la primera opción es más robusta desde el punto de vista de convergencia del esquema iterativo.

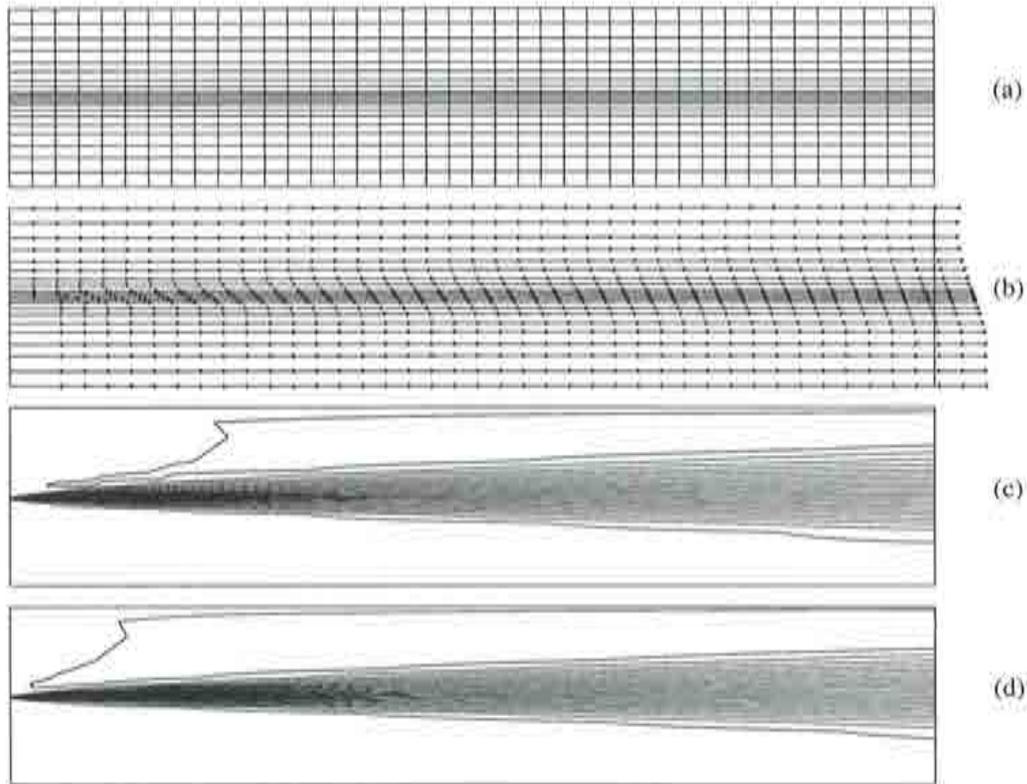
## 5.9 Ejemplos numéricos

A continuación se presentan una serie de ejemplos numéricos de flujo turbulento, con el fin de mostrar la efectividad de los métodos y algoritmos presentados en el capítulo, y comparar los resultados con los presentados en otras referencias tanto experimentales como numéricas.

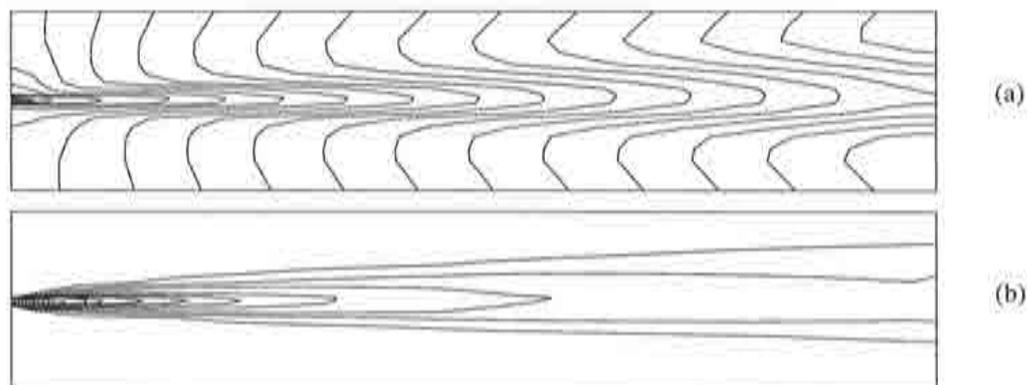
### -Flujo en una capa de mezcla

El ejemplo simula la turbulencia generada por corte en una capa de pequeño espesor, en la cual se presenta un salto importante en el campo de velocidades medias. El dominio de flujo es el rectángulo  $[0, -0.5] \times [5, 0.5]$ . La velocidad media se impone a  $(2, 0)$  en el segmento de recta comprendido entre los puntos  $[0, -0.5]$  a  $[0, 0]$  (el primero incluido y el segundo no), y en el segmento de recta que va de  $[0, -0.5]$  a  $[5, -0.5]$  (ambos incluidos). En los segmentos de recta que van de  $[0, 0]$  a  $[0, 0.5]$  y de  $[0, 0.5]$  a  $[5, 0.5]$  la velocidad media se impone a  $(1, 0)$  (todos los puntos incluidos). En la salida (segmento de recta entre  $[5, -0.5]$  y  $[5, 0.5]$ ) la velocidad media se deja libre (ninguno de los dos puntos extremos se incluye). En toda la frontera donde la velocidad está impuesta, se imponen también las variables turbulentas a un valor pequeño. El valor para  $k$  se tomó como 0.01. Para la segunda variable turbulenta se impuso en la frontera un valor calculado con  $k = 0.01$  y  $L = 0.009$ . En la frontera libre se considera que el gradiente de las variables turbulentas en la dirección a la normal exterior al contorno es cero ( $\nabla k \cdot \mathbf{n} = \nabla \psi \cdot \mathbf{n} = 0$ ). La viscosidad cinemática del fluido es de  $10^{-4}$ . Se resolvió el problema estacionario directamente (no se avanzó con un transitorio hasta el estacionario).

En la Figura 5.1a se presenta la malla de 800 elementos  $Q1/P0$  y 861 nodos. En la Figura 5.1b se presenta el campo de velocidades medias utilizando el método de Galerkin para resolver las ecuaciones de Reynolds, suponiendo la hipótesis de Boussinesq y usando el modelo  $k-\varepsilon$  para calcular la viscosidad cinética turbulenta. Las ecuaciones para  $k$  y  $\varepsilon$  se resolvieron utilizando el método SUPG+ASC en primera instancia, aunque debido a la simplicidad del ejemplo éstas también pudieron resolverse sólo con el método de Galerkin. Los parámetros del método se tomaron de la forma estándar para elementos lineales, es decir, (2.18) para  $\alpha_n$  y  $C = 0.7$ . Para ambos casos se tomó un parámetro de relajación para las variables turbulentas con un

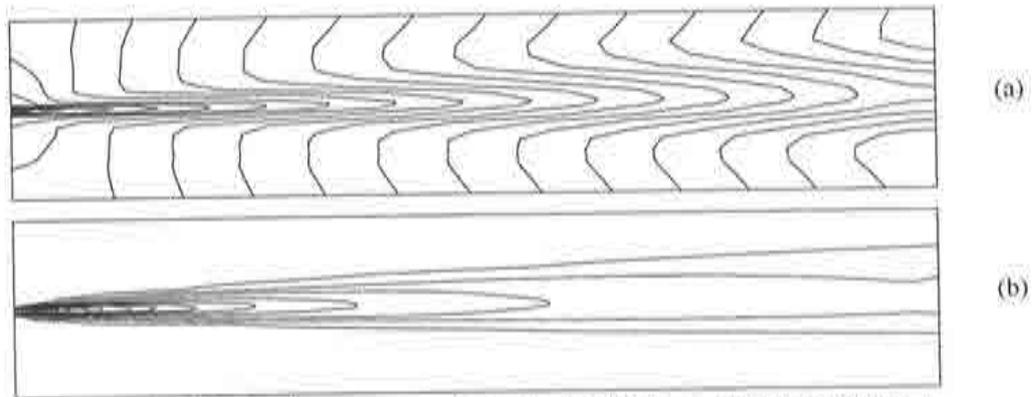


**Figura 5.1.** Turbulencia en una capa de mezcla. Modelo  $k - \varepsilon$ . (a): Malla de 800 elementos  $Q1/P0$  y 861 nodos. (b): Campo de velocidades. (c): Contornos de velocidad método SUPG+ASC. (d): Contornos de velocidad método de Galerkin.



**Figura 5.2.** Turbulencia en una capa de mezcla. Modelo  $k - \varepsilon$ . Método SUPG+ASC. (a): Contornos de presión media. Picos  $(-0.00277, -0.129)$ . (b): Contornos de vorticidad media.

valor de  $\beta = 0.5$  (ver Cuadro 5.1). Las constantes del modelo  $k - \varepsilon$  que se utilizaron fueron las estándar (ver Tabla 5.1). En la Figura 5.1c se presentan los contornos de velocidad media para el usando el método SUPG+ASC en las ecuaciones de las variables turbulentas, y en la Figura 5.1d el mismo resultado pero utilizando Galerkin para las variables turbulentas. Se puede observar que el resultado es similar, teniéndose un radio de apertura del flujo en ambos casos de 0.104. El radio de apertura se define como la diferencia entre los valores de  $y/x$  para los cuales



**Figura 5.3.** Turbulencia en una capa de mezcla. Modelo  $k-\varepsilon$ . Método de Galerkin. (a): Contornos de presión media. Picos  $(-0.00315, -0.13)$ . (b): Contornos de vorticidad media.

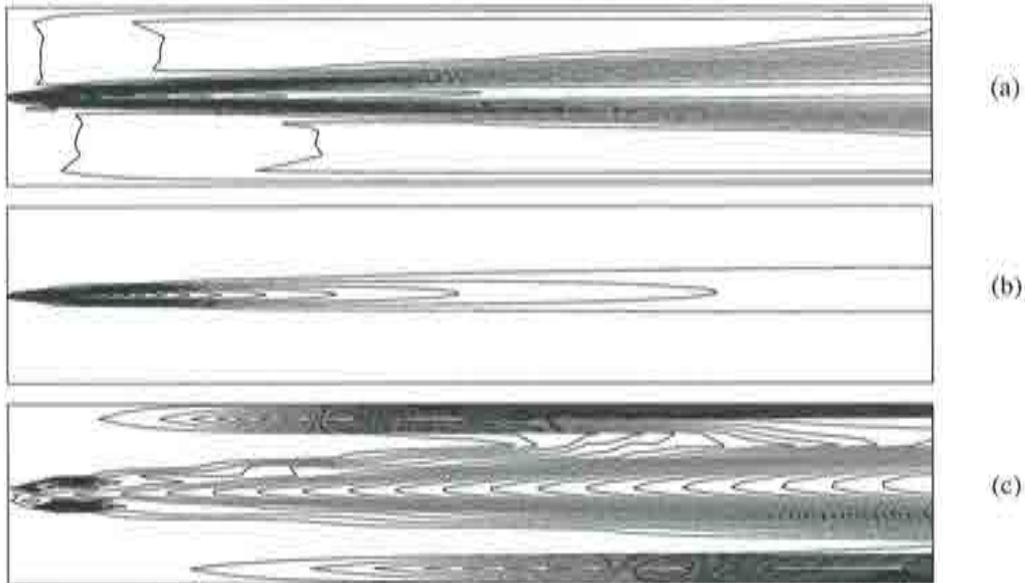


**Figura 5.4.** Turbulencia en una capa de mezcla. Modelo  $k-\varepsilon$ . Método SUPG+ASC. (a): Contornos de  $k$ . Picos  $(0.0499, 0.00199)$ . (b): Contornos de  $\varepsilon$ . Picos  $(0.125, 0.00104)$ . (c): Contornos de viscosidad cinemática total. Picos  $(0.00598, 0.000396)$ .

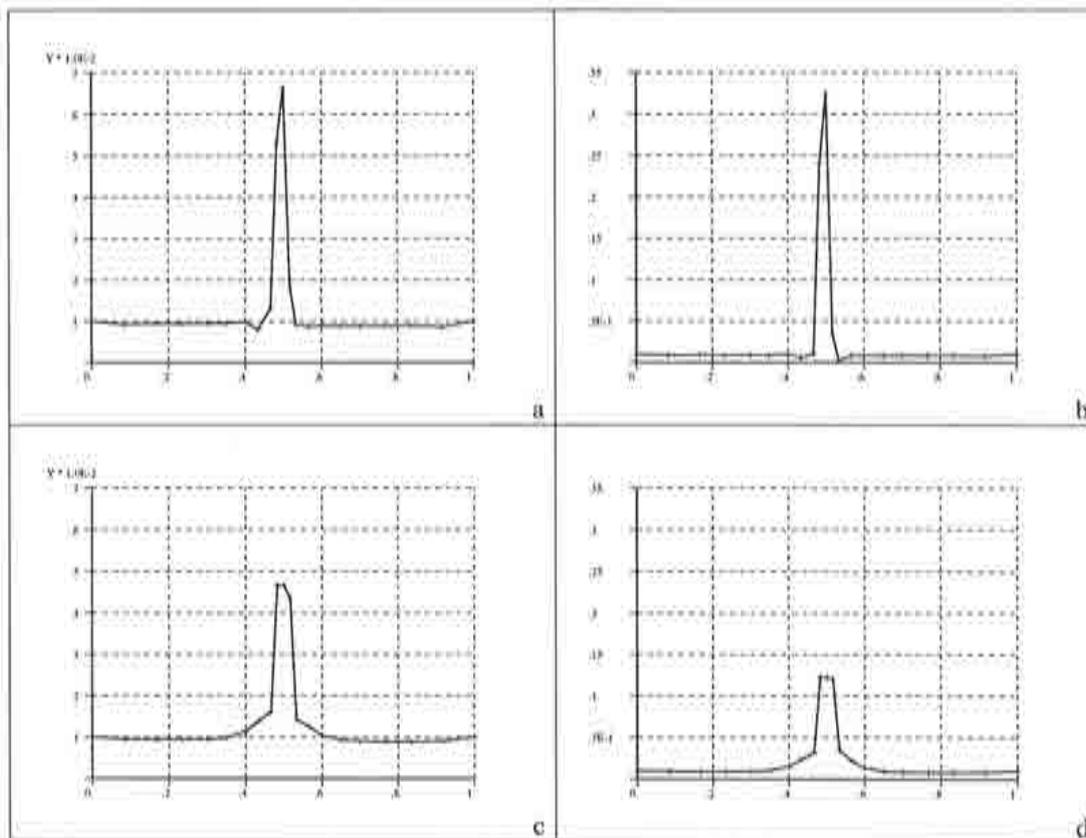
$(|\mathbf{u}| - |\mathbf{u}_2|)^2 / (|\mathbf{u}_1| - |\mathbf{u}_2|)^2$  es 0.9 y 0.1 ( $\mathbf{u}_1$  es la velocidad prescrita abajo y  $\mathbf{u}_2$  arriba, en este caso son 2 y 1 respectivamente). En [Wi193] se presenta un resultado experimental de 0.115 y un resultado numérico utilizando el modelo  $k-\varepsilon$  de 0.098. Ambos resultados son comparables al obtenido en el presente trabajo.

En las Figuras 5.2 y 5.3 se presentan los contornos de presión media y vorticidad media para el método SUPG+ASC y para el método de Galerkin, respectivamente. Se puede observar que los resultados son prácticamente iguales, lo cual se debe a la consistencia del esquema SUPG+ASC.

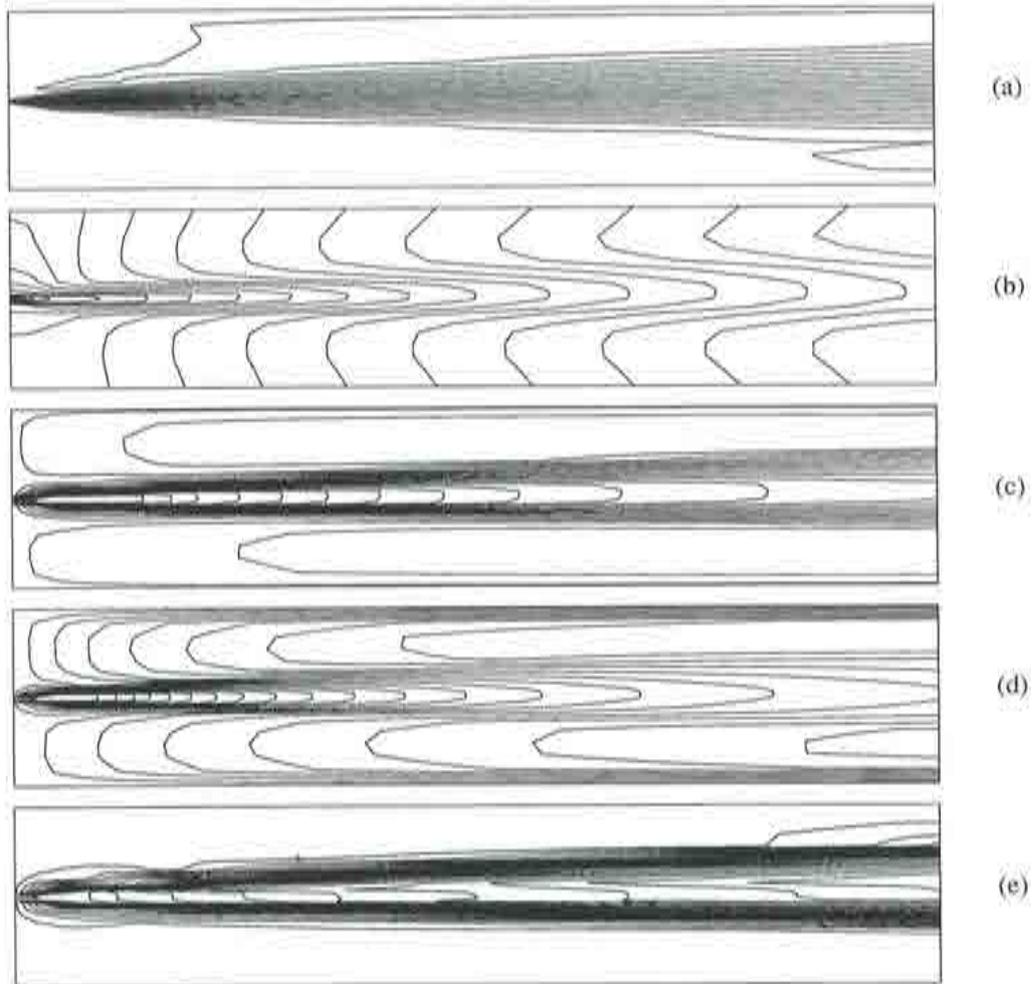
En la Figura 5.4 se presentan los contornos de las variables turbulentas y de la viscosidad cinemática total ( $\nu + \nu_t$ ), cuando se utiliza el método SUPG+ASC para resolver las dos ecuaciones del modelo turbulento. En la Figura 5.5 se muestra el mismo resultado pero aplicando sólo el método de Galerkin. Como puede observarse, los resultados con el método SUPG+ASC son mucho más suaves, siendo los picos de las variables más bajos. Esta característica del método permite la convergencia en problemas más complicados donde el método de Galerkin no funciona.



**Figura 5.5.** Turbulencia en una capa de mezcla. Modelo  $k-\varepsilon$ . Método de Galerkin. (a): Contornos de  $k$ . Picos (0.0662, 0.00236). (b): Contornos de  $\varepsilon$ . Picos (0.324, 0.00236). (c): Contornos de viscosidad cinemática total. Picos (0.00597, 0.000825).



**Figura 5.6.** Turbulencia en una capa de mezcla. Modelo  $k-\varepsilon$ . Sección transversal a  $x = 0.125$ . (a): Variación de  $k$ , método Galerkin. (b): Variación de  $\varepsilon$  método de Galerkin. (c): Variación de  $k$ , método SUPG+ASC. (d): Variación de  $\varepsilon$ , método SUPG+ASC.

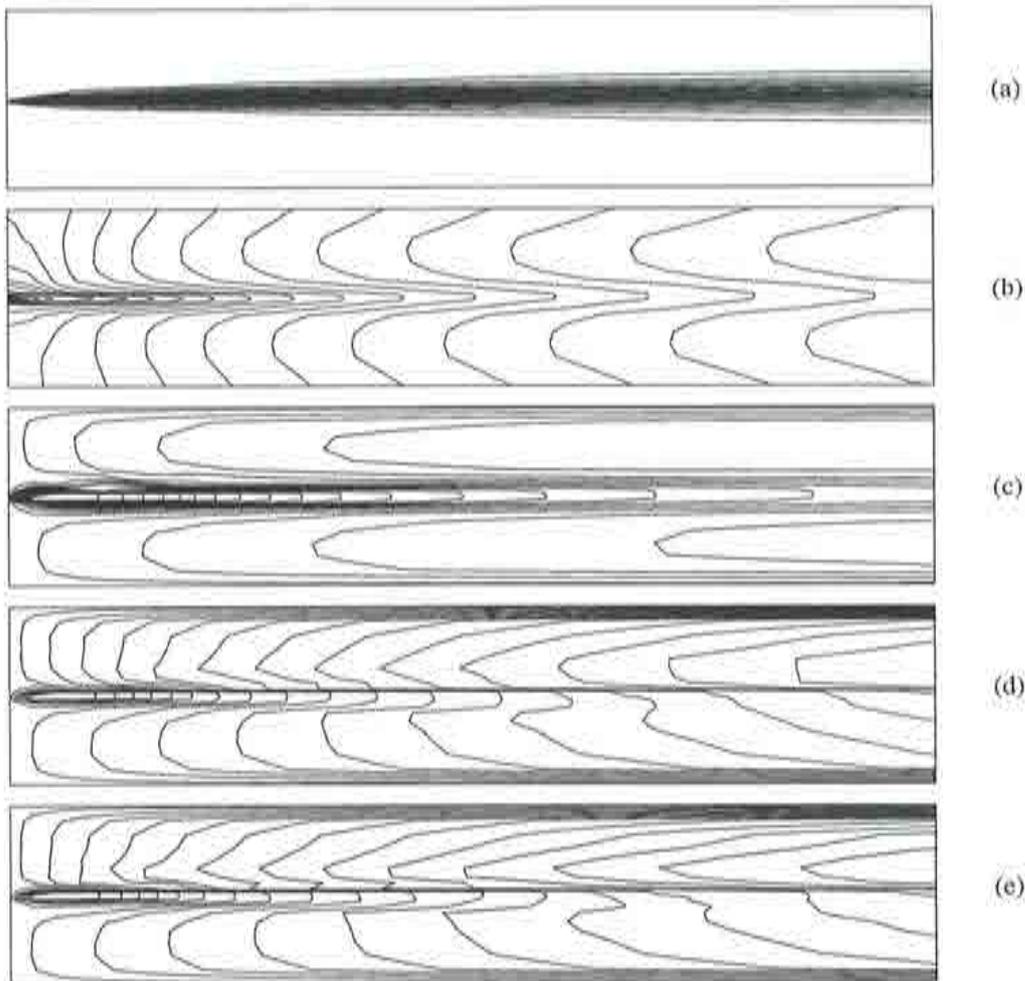


**Figura 5.7.** Turbulencia en una capa de mezcla. Modelo  $k - \omega$ . Método SUPG+ASC. (a): Contornos de velocidad. (b): Contornos de presión. Picos  $(-0.00277, -0.156)$ . (c): Contornos de  $k$ . Picos  $(0.0737, 0.00279)$ . (d): Contornos de  $\omega$ . Picos  $(25.0, 3.1)$ . (e): Contornos de viscosidad cinemática total. Picos  $(0.00478, 0.000869)$ .

En la Figura 5.6 se presentan los valores de las variables turbulentas en un corte transversal a  $x = 0.125$ . Nuevamente se puede observar que, como era de esperarse, el método SUPG+ASC suaviza la solución y corta los picos. Esto es muy importante para lograr la convergencia en flujos más complicados donde el método de Galerkin solo no funciona. Cabe remarcar que a pesar del suavizado sobre las variables turbulentas generado por el método SUPG+ASC, los resultados sobre el flujo medio ( $u$  y  $p$ ) son prácticamente iguales (ver Figuras 5.1 a 5.3).

Con el fin de comprobar la robustez del algoritmo presentado en el Cuadro 5.1 se resolvió el mismo problema pero utilizando el modelo  $k - \omega$  (se resuelve el problema estacionario directamente, al igual que en el caso del modelo  $k - \varepsilon$ ). Se empleó el método SUPG+ASC para solucionar las ecuaciones de las variables turbulentas, y el método de Galerkin para las ecuaciones de Reynolds. Nuevamente se utilizó un parámetro de relajación  $\beta = 0.5$  para las variables turbulentas. Se tomaron las constantes estándar del modelo (Tabla 5.2).

En las Figura 5.7 se presentan los resultados de velocidad media, presión media,  $k$ ,  $\omega$  y viscosidad turbulenta total. Estos son similares a los obtenidos con el modelo  $k - \varepsilon$ . El radio de expansión es de aproximadamente 0.106, el cual concuerda bien con los resultados numéricos y



**Figura 5.8.** Turbulencia en una capa de mezcla. Modelo  $k - k\tau$ . Método SUPG+ASC. (a): Contornos de velocidad. (b): Contornos de presión. Picos (-0.0012,-0.0747). (c): Contornos de  $k$ . Picos (0.0424,0.00145). (d): Contornos de  $k\tau$ . Picos (0.0124,0.00581). (e): Contornos de viscosidad cinemática total. Picos (0.00123,0.000596).

experimentales de [Wil93].

Finalmente se resolvió el mismo problema pero con el modelo  $k - k\tau$ . Nuevamente se resuelve el problema estacionario directamente al igual que en el caso del modelo  $k - \varepsilon$ . Se empleó el método SUPG+ASC para solucionar las ecuaciones de las variables turbulentas, y el método de Galerkin para las ecuaciones de Reynolds. Se utilizó un parámetro de relajación  $\beta = 0.5$  para las variables turbulentas. Se tomaron las constantes estándar del modelo (Tabla 5.3).

En las Figura 5.8 se presentan los resultados de velocidad media, presión media,  $k$ ,  $k\tau$  y viscosidad turbulenta total. Estos difieren de los obtenidos con los modelos  $k - \varepsilon$  y  $k - \omega$ . El radio de expansión da de 0.047, valor que está lejos de los resultados presentados en [Wil93]. Básicamente el modelo  $k - k\tau$  añade menos viscosidad turbulenta al flujo, por lo que los resultados de las velocidades medias y presiones medias no son cercanos a los obtenidos con los dos modelos anteriores, ni a los resultados experimentales.

Cabe remarcar que los tiempos de CPU necesarios para lograr la convergencia del ejemplo son pequeños (cerca de los 60 segundos), y que se soluciona alrededor de 20 veces la ecuación de Reynolds (20 iteraciones del segundo bucle en el Cuadro 5.1).

### -Flujo entre placas paralelas

El segundo ejemplo analizado es el flujo desarrollándose entre dos placas paralelas separadas una distancia  $h = 6$ . Se supone un canal infinitamente ancho (flujo bidimensional) y un estado estacionario.

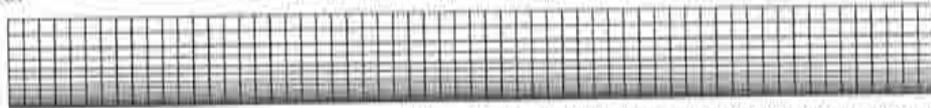


Figura 5.9. Flujo entre placas paralelas. Malla de 840 elementos  $Q1/P0$  y 915 nodos.

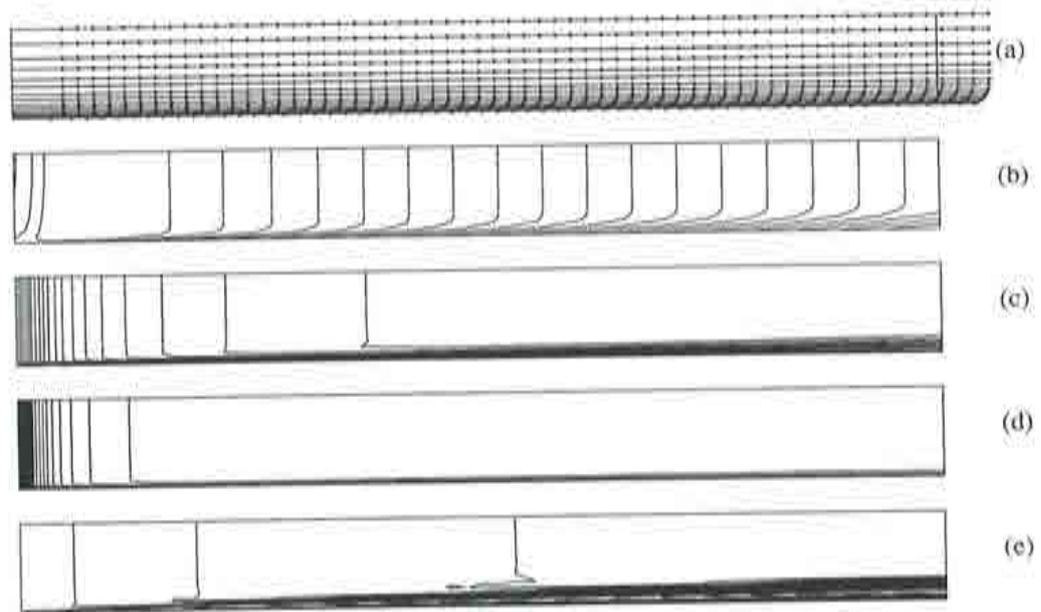
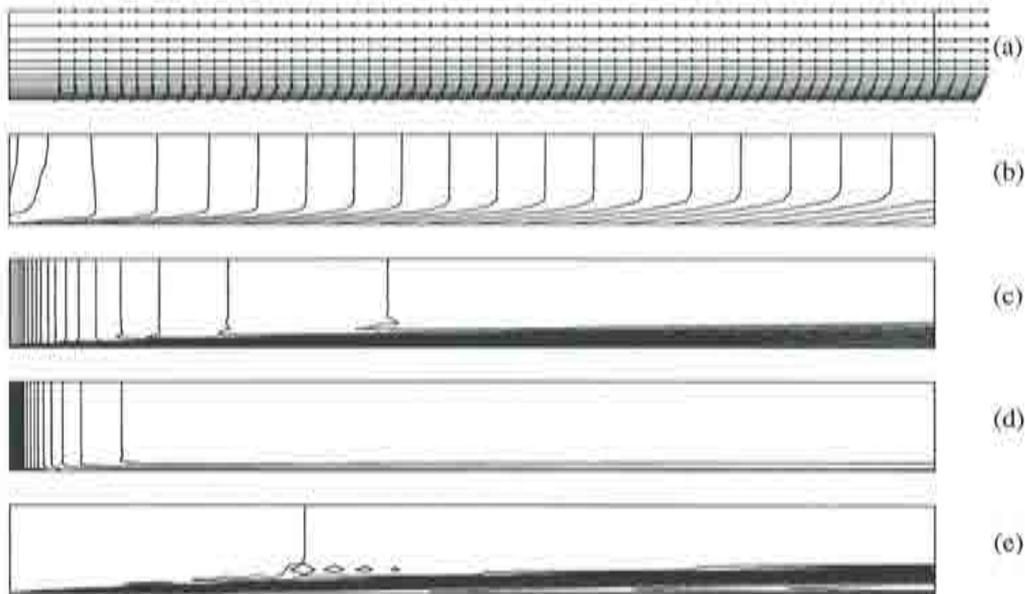


Figura 5.10. Flujo entre placas paralelas. Modelo  $k - \epsilon$ .  $\Delta = 0.05$ . (a): Campo de velocidades. (b): Contornos de presión. Picos (0.0148,-0.00292). (c): Contornos de  $k$ . Picos (0.01,0.000258). (d): Contornos de  $\epsilon$ . Picos (0.01,0.00000895). (e): Contornos de viscosidad cinemática total. Picos (0.00207,0.000757).

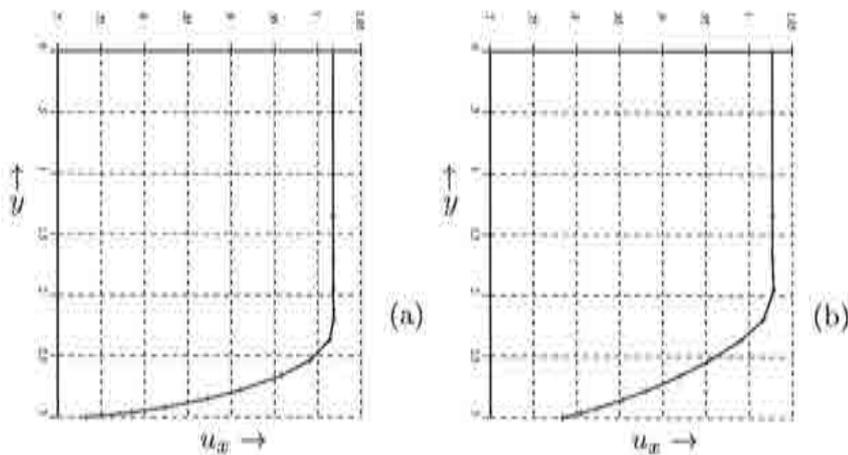
El dominio de flujo es el rectángulo  $[0, 30] \times [30, 3]$  (se discretiza sólo la mitad por simetría). En la Figura 5.9 se presenta la malla de 840 elementos  $Q1/P0$  y 915 nodos. A la entrada (recta  $x = 0$ ) se prescribe la velocidad a  $\mathbf{u} = (1, 0)$ . A la salida ( $x = 30$ ) se deja la velocidad horizontal  $u_x$  libre y se prescribe la velocidad vertical  $u_y$  a cero. En la recta horizontal  $y = 3$  se prescriben condiciones de simetría ( $\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u} = \mathbf{0}$  y  $u_y = 0$ ). En la base ( $y = 0$ ) se prescribe la velocidad vertical  $u_y$  a cero y se impone en la dirección horizontal la ley de pared explicada en el apartado 5.7.1. Dicha ley depende de la distancia perpendicular a la pared  $y = \Delta$  a la cual se encuentre el primer nodo de la malla (ver (5.65)). El principal objetivo de este ejemplo es mostrar la influencia en los resultados que tiene este parámetro ( $\Delta$ ).

Se escogió el modelo de turbulencia  $k - \epsilon$ . Tanto para resolver las ecuaciones de Reynolds como para las de las variables turbulentas sólo fue necesario utilizar el método de Galerkin, pero relajando las variables turbulentas con  $\beta = 0.5$  (ver Cuadro 5.1). Tanto  $k$  como  $\epsilon$  se prescribieron a 0.01 en la entrada, a la salida y en la recta superior  $y = 3$  se dejaron libres ( $\nabla k \cdot \mathbf{n} = \nabla \epsilon \cdot \mathbf{n} = 0$ ). En la base se prescribió la ley de pared.

En la Figura 5.10 se presentan algunos resultados utilizando  $\Delta = 0.05$ , con lo cual se obtiene  $y^+ \approx 20$ . En la Figura 5.11 se muestran los mismos resultados para  $\Delta = 0.20$  ( $y^+ \approx 100$ ). Los resultados son parecidos. Como era de esperarse, para  $\Delta$  menor la fuerza viscosa que ejerce la



**Figura 5.11.** Flujo entre placas paralelas. Modelo  $k - \varepsilon$ .  $\Delta = 0.20$ . (a): Campo de velocidades. (b): Contornos de presión, Picos (0.0247,-0.00459). (c): Contornos de  $k$ . Picos (0.0101,0.0002). (d): Contornos de  $\varepsilon$ . Picos (0.01,0.0000605). (e): Contornos de viscosidad cinemática total. Picos (0.0049,0.00065).



**Figura 5.12.** Flujo entre placas paralelas. Modelo  $k - \varepsilon$ . Perfil de velocidades a la salida  $x = 30$ . (a):  $\Delta = 0.05$ . (b):  $\Delta = 0.20$ .

pared sobre el fluido es mayor. Para el caso  $\Delta = 0.05$  ésta fue de  $0.4166111 \times 10^{-2}$ , y para  $\Delta = 0.20$  de  $0.1670573 \times 10^{-2}$ . Lo anterior se refleja en los perfiles de velocidades a la salida, los cuales pueden ser observados en la Figura 5.12. El primer nodo tiene una velocidad horizontal de 0.733 para el primer caso y de 0.784 para  $\Delta = 0.20$ .

### -Flujo turbulento sobre un escalón

Este ejemplo es uno de las pruebas estándar para modelos de turbulencia. El dominio de flujo es el rectángulo  $[0, 0] \times [22, 1.5]$  quitándole el rectángulo  $[0, 0] \times [3, 0.5]$  (escalón de longitud 3 y altura 0.5 en la esquina inferior izquierda). La relación escalón-ancho de la entrada es de

1:2). Para resolver las ecuaciones de Reynolds Se utilizó el método SUPG con elementos tipo  $Q1/P0$  (bilineal en velocidades y constante a trozos en presiones, ver Figura 5.13). En  $x = 0$  se prescribió un perfil de velocidades constante con valor  $\mathbf{u} = (1, 0)$ . A la salida  $x = 22$  se dejó libre la velocidad horizontal ( $\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{n} = 0$ ) y se prescribió la velocidad vertical a cero. En el resto del contorno se prescribió la velocidad normal a cero y en la dirección tangente se aplicó la ley de pared (ver apartado 5.7.1). El número de Reynolds del ejemplo es de 70000, calculado con la velocidad de entrada y la altura del escalón.

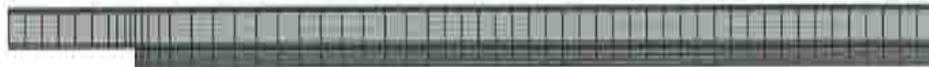


Figura 5.13. Flujo turbulento sobre un escalón. Malla de 1632 elementos  $Q1/P0$  y 1721 nodos.

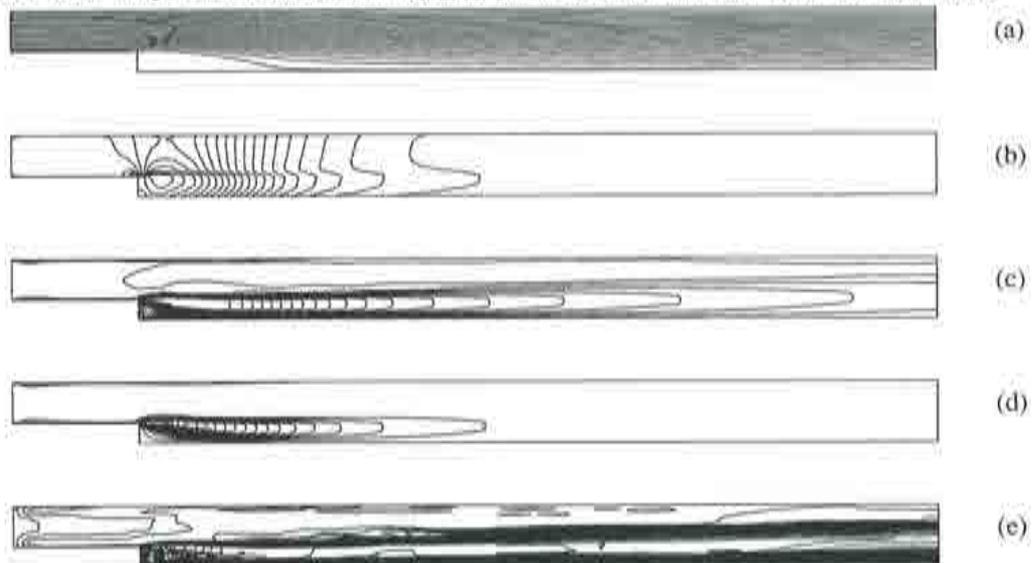
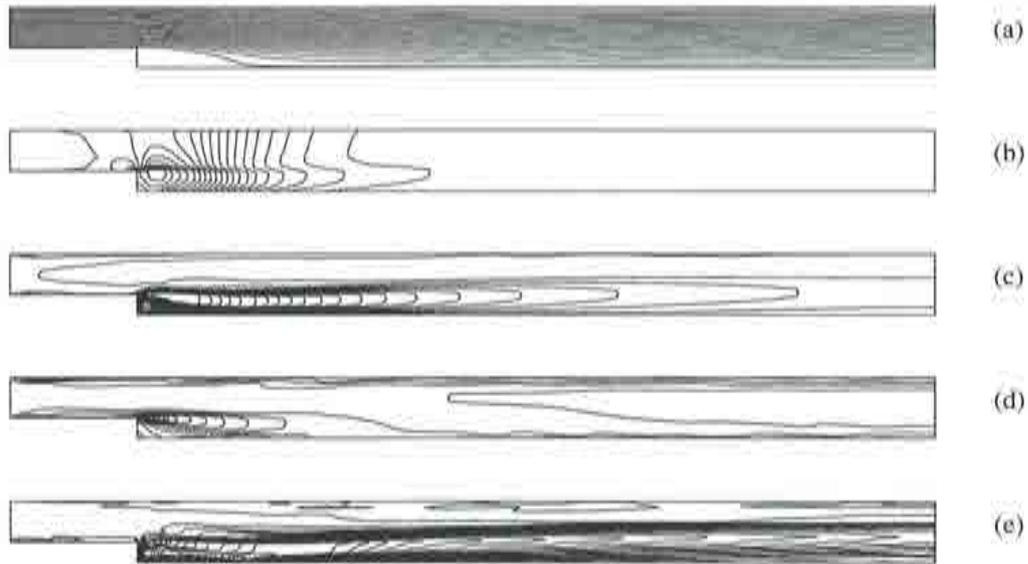


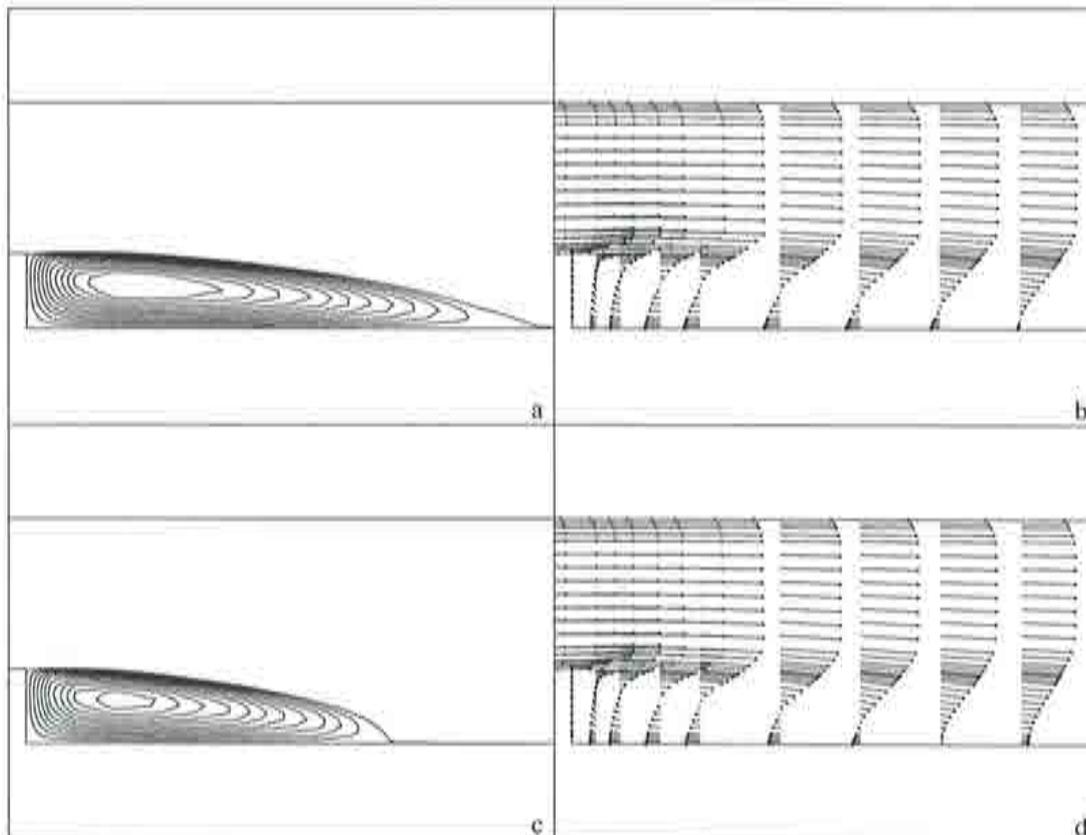
Figura 5.14. Flujo turbulento sobre un escalón. Modelo  $k - \epsilon$ . (a): Líneas de corriente. Picos (1.01, -0.562). (b): Contornos de presión. Picos (0.000402, -0.282). (c): Contornos de  $k$ . Picos (0.0422,  $0.5 \times 10^{-5}$ ). (d): Contornos de  $\epsilon$ . Picos (0.0451,  $0.895 \times 10^{-7}$ ). (e): Contornos de viscosidad cinemática total. Picos (0.00739,  $0.322 \times 10^{-4}$ ).

El problema se resolvió utilizando los modelos  $k - \epsilon$  y  $k - \omega$ . A la entrada  $x = 0.0$  se prescribió la energía cinética turbulenta a 0.003 y  $L = 0.03$  (datos tomados de [Soh86]). Con dichos valores de  $L$  y  $k$  se calculó la prescripción a la entrada para la segunda variable turbulenta ( $\epsilon = 4.93 \times 10^{-4}$  y  $\omega = 1.83$ ). A la salida se tomó  $\nabla k \cdot \mathbf{n} = \nabla \epsilon \cdot \mathbf{n} = \nabla \omega \cdot \mathbf{n} = 0$ , y en el resto del contorno se utilizó la función de pared. Los nodos de la malla más cercanos a la pared se supusieron a una distancia  $\Delta = 0.05$  (tomado de [Soh86]). Para la solución de las ecuaciones diferenciales de las variables turbulentas fue necesario utilizar el método SUPG+ASC con  $\alpha_a$  dado por (2.18) y  $C = 0.7$  (parámetros para elementos lineales). Además, se utilizó un parámetro de relajación para las variables turbulentas de  $\beta = 0.5$  (ver Cuadro 5.1).

En la Figura 5.13 se presenta la malla de 1632 elementos  $Q1/P0$  y 1721 nodos. En la Figura 5.14 se presentan algunos resultados para el modelo  $k - \epsilon$  y en la Figura 5.15 para el modelo  $k - \omega$ . En la Figura 5.16 se presenta el detalle de las líneas de corriente y del campo de velocidades en el vórtice delante del escalón. Se puede observar de los resultados que el modelo  $k - \omega$  añade más viscosidad al flujo que el modelo  $k - \epsilon$ , por lo cual la longitud del vórtice principal es más pequeña.



**Figura 5.15.** Flujo turbulento sobre un escalón. Modelo  $k - \omega$ . (a): Líneas de corriente. Picos (1.01,-0.0531). (b): Contornos de presión. Picos (0.00245,-0.29). (c): Contornos de  $k$ . Picos  $(0.059, 0.651 \times 10^{-5})$ . (d): Contornos de  $\omega$ . Picos (23.0,0.227). (e): Contornos de viscosidad cinemática total. Picos  $(0.0114, 0.358 \times 10^{-4})$ .



**Figura 5.16.** Flujo turbulento sobre un escalón. (a): Detalle de las líneas de corriente, modelo  $k - \epsilon$ . (b): Detalle del campo de velocidades, modelo  $k - \epsilon$ . (c): Detalle de las líneas de corriente, modelo  $k - \omega$ . (d): Detalle del campo de velocidades, modelo  $k - \omega$ .

Para este problema se tienen datos experimentales y numéricos en las referencias [sta82, KKJ80, Soh86]. El principal resultado a comparar con los experimentos es la longitud del vórtice que se forma en frente del escalón. Los resultados experimentales dan un valor de  $7.0 \pm 1.0 h$  [KKJ80]. Los resultados numéricos reportados en [sta82] van de  $5.2 h$  a  $5.8 h$ . En este trabajo se obtuvo un valor de  $6.57 h$  con el modelo  $k-\varepsilon$  y de  $4.8 h$  para el modelo  $k-\omega$ . En general los resultados obtenidos para el modelo  $k-\varepsilon$  (el cual es el más usado en la práctica) son similares a los obtenidos por otros autores [Soh86, sta82], aunque la longitud del vórtice obtenida en este trabajo se acerca mejor a los resultados experimentales. Se observó que dicha longitud varía en  $\pm 0.2 h$  dependiendo de las condiciones de contorno que se tomen para  $k$  y  $\varepsilon$  en la entrada (por ejemplo, para  $k = 0.003$  y  $L = 0.015$  se obtiene una longitud de  $6.8 h$ ).

Cabe remarcar que para mallas mucho más finas que la presentada en el ejemplo, se obtuvieron soluciones similares del flujo medio. Además se observó durante la etapa de experimentación numérica que el algoritmo es muy robusto a cambios en las condiciones de contorno tipo Dirichlet de las variables turbulentas. Es decir, si se varían dichas condiciones el algoritmo converge y lo hace a soluciones parecidas del flujo medio (se entiende como condiciones tipo Dirichlet las que se fijan en los contornos de velocidad impuesta, no incluyendo los contornos con función de pared).

#### -Perfil de ala entre dos superficies planas

Este ejemplo trata del flujo turbulento en la intersección entre un perfil de ala cilíndrica y una superficie plana. En [FSCD93] se presentan resultados experimentales, los cuales sirvieron de validación para los diferentes resultados numéricos presentados en [BBR96]. El flujo está dominado por un vórtice en el pegue entre el ala y la superficie plana. En la Figura 5.17 se presenta el dominio computacional (1/4 de geometría por la simetría del flujo). En la Figura 5.18 se presenta el patrón de flujo experimental en el plano de simetría  $z = 0$ .

El ala cilíndrica tiene un ancho máximo de  $T = 71.7$  mm y una longitud de cuerda de 305 mm. Está situado a una distancia de  $18.24 \times T$  corriente abajo de la entrada y la cuerda está alineada con el eje  $x$ . Su sección transversal se compone de una nariz elíptica de relación eje mayor-eje menor 3 : 2 (eje mayor alineado con la cuerda) y un perfil NACA 0020 pegado al punto de máxima anchura.

Debido al gradiente de presiones inverso en el plano de simetría, la capa límite se separa en un punto cercano al ala. Corriente arriba de la separación y en la vecindad del punto de separación, la velocidad media y el tensor de Reynolds son similares a los que se tienen en la separación (debido a un gradiente adverso de presión) de una capa límite bidimensional. El vórtice presenta una zona de recirculación intensa de forma elíptica en el plano de simetría ( $z = 0$ ). Esta zona es una región de alta producción de turbulencia debido a la oscilación de las escalas grandes del flujo. Estas oscilaciones se caracterizan por una función de probabilidad para la velocidad de tipo bimodal. Dicha característica hace que los modelos de turbulencia que supongan una función de densidad de probabilidad Gaussiana para velocidad se comporten pobremente en esta región.

El flujo se simuló utilizando el modelo  $k-\varepsilon$ . A la entrada se prescribió la componente  $x$  de la velocidad a los valores experimentales dados en [FSCD93] ( $v_y = v_z = 0$ ). En el plano de simetría se prescribió la velocidad normal a cero,  $\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{g}_1 = \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{g}_2 = 0$  y  $\nabla k \cdot \mathbf{n} = \nabla \varepsilon \cdot \mathbf{n} = 0$ . A la salida se dejaron libres todas las componentes de la velocidad y las variables turbulentas. En las paredes sólidas se prescribió la componente normal de la velocidad a cero y se utilizó la ley de pared en la dirección tangencial. La viscosidad cinemática del fluido (aire) es de  $16.60802 \text{ mm}^2/\text{s}$ , la velocidad de referencia a la entrada de  $26990 \text{ mm/s}$ , lo cual da

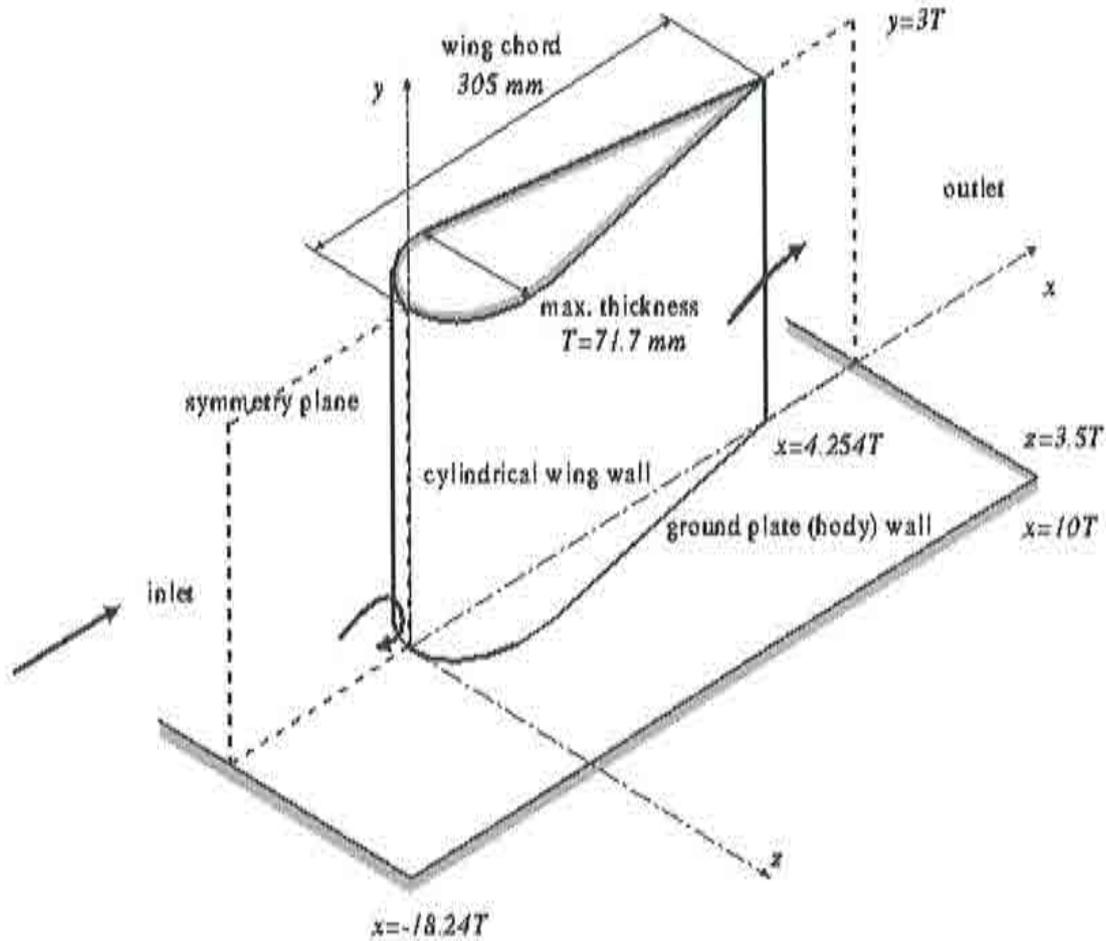


Figura 5.17. Perfil de ala entre dos superficies planas. Geometría del dominio computacional. (tomada de [ERC96])

Symmetry plane ( $z=0$ )

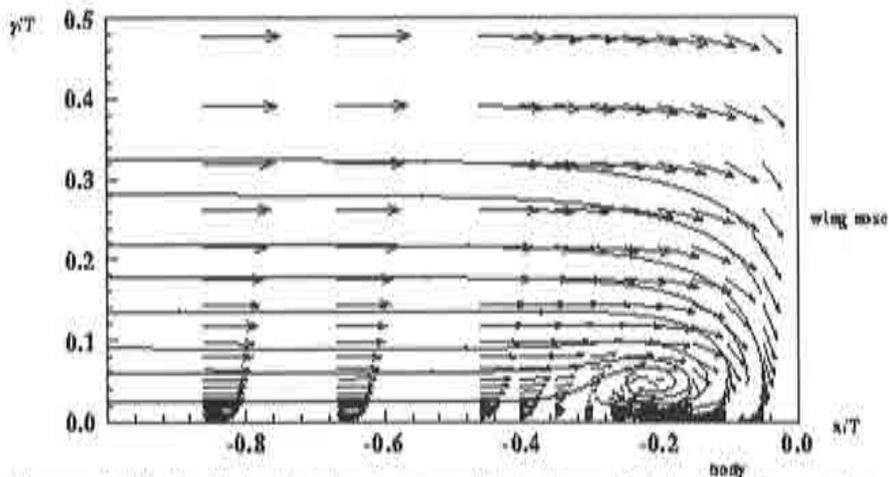
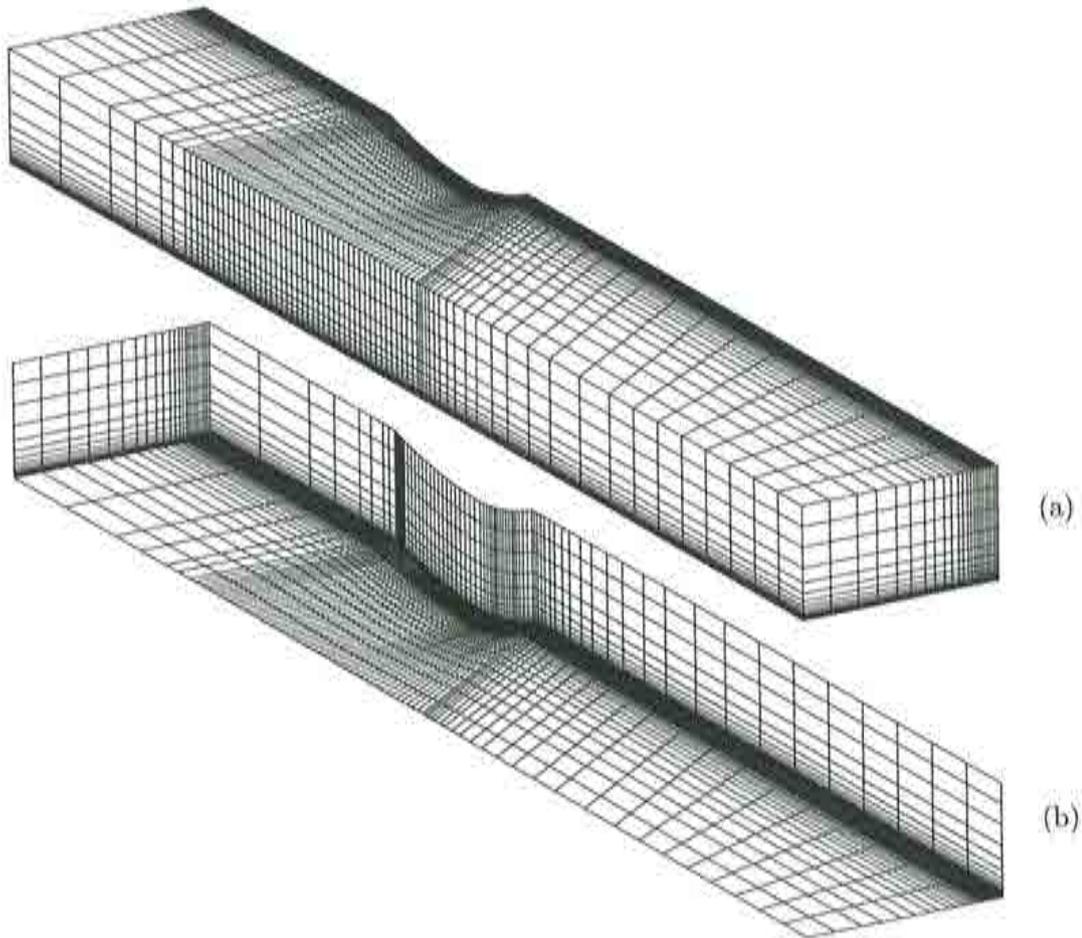


Figura 5.18. Perfil de ala entre dos superficies planas. Patrón de flujo experimental en el plano de simetría  $z=0$ . (tomada de [ERC96])

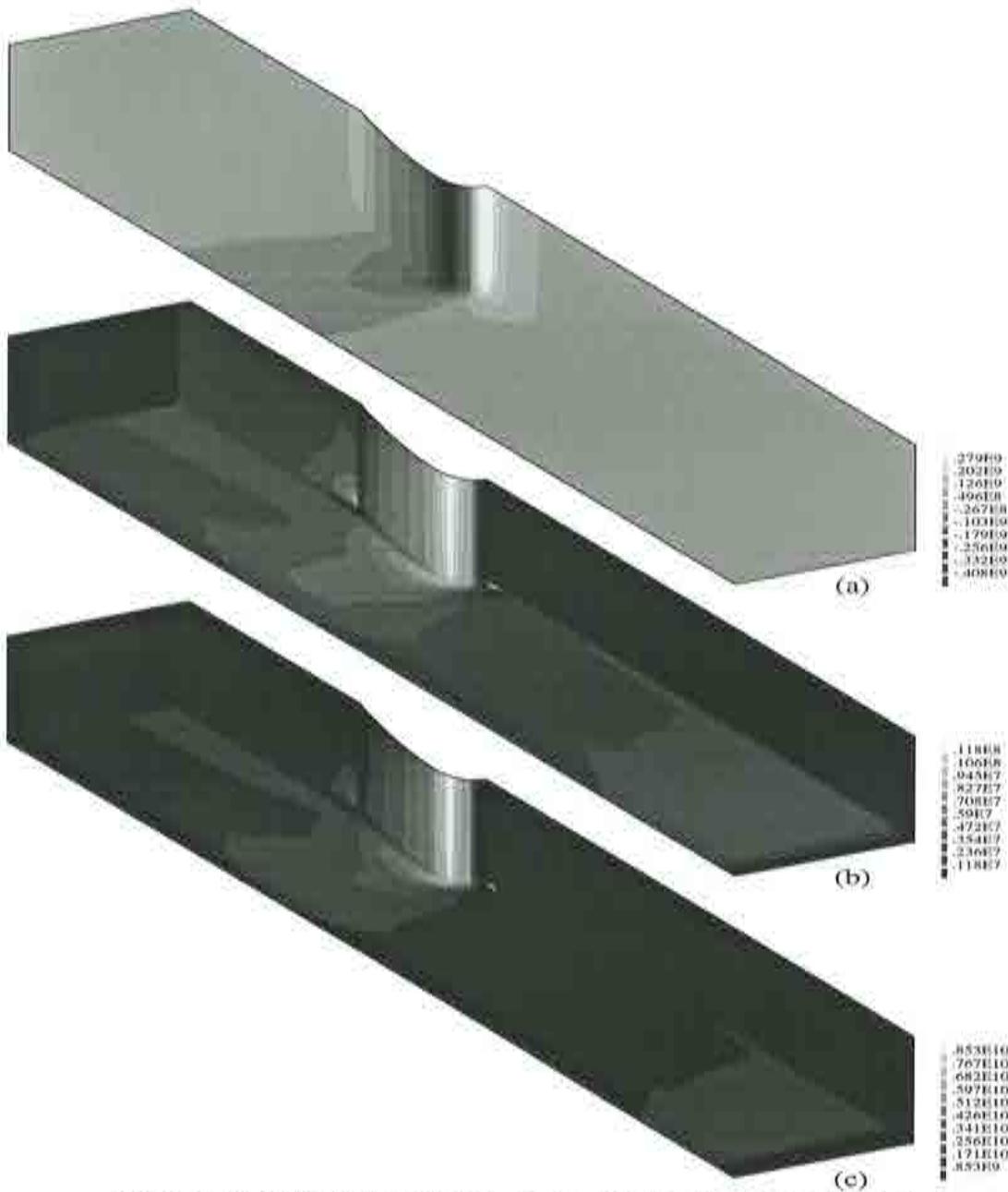


**Figura 5.19.** Perfil de ala entre dos superficies planas. (a): Malla de 37296 elementos  $Q1/P0$  y 41250 nodos. (b): Detalle del refinamiento de la malla cerca a las superficies sólidas.

un número de Reynolds (calculado con  $T = 71.7$  mm) de 116521.

En la Figura 5.19 se presenta la malla de 37296 elementos  $Q1/P0$  y 41250 nodos. Para resolver las ecuaciones de Reynolds se utilizó el método SUPG y un esquema de penalización iterativa con parámetro de penalización de  $6.021 \times 10^{-9}$ . Las ecuaciones del modelo  $k - \varepsilon$  se aproximaron utilizando el método SUPG+ASC y un parámetro de relajación  $\beta = 0.5$ . Todos los parámetros de los métodos SUPG y ASC fueron los estándar para elementos lineales.

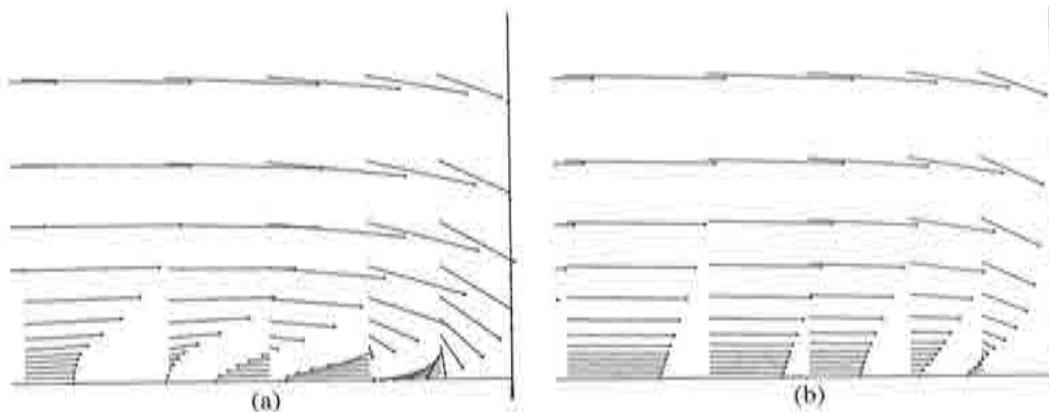
En la Figura 5.20 se presentan algunos resultados utilizando un espesor de la capa límite para la ley de pared de  $\Delta = 2$  mm. Estos tienen un aspecto bastante realista. En la Figura 5.21 se presenta un detalle del campo de velocidades en el lugar donde se forma el vórtice enfrente del ala para un  $\Delta = 2$  mm ( $y^+$  entre 30 y 100 aproximadamente), y  $\Delta = 7$  mm ( $y^+$  mayor que 100). Se observa que el vórtice para el primer valor es más grande y el despegue de la capa límite se produce en  $x = -27.965$  ( $x/T = 0.39$ ), valor que se aproxima bastante bien al dato experimental (ver Figura 5.18). Por el contrario para un valor  $\Delta = 7$  mm el vórtice es muy pequeño y el despegue se produce a  $x = -9.321$  mm ( $x/T = 0.13$ ), el cual se aleja bastante del experimento. También se obtuvieron resultados numéricos utilizando un  $\Delta = 0.1$  mm ( $y^+$  menor que 30). En este caso el despegue se produce a  $x = -21.772$  mm ( $x/T = 0.30$ ), y los resultados son en general buenos. Sin embargo, se produce otro vórtice más pequeño en el eje de salida del ala, el cual no se observa en los resultados experimentales.



**Figura 5.20.** Perfil de ala entre dos superficies planas. Resultados sobre el ala, la superficie de simetría ( $z = 0$ ), la pared inferior ( $y = 0$ ) y la salida ( $x = 10 T$ ). (a): Contornos de presión. Picos ( $3.55 \times 10^9$ ,  $-4.85 \times 10^9$ ). (b): Contornos de  $k$ . Picos ( $1.3 \times 10^7$ , 0.01). (c): Contornos de  $\epsilon$ . Picos ( $9.38 \times 10^9$ , 0.009).

En conclusión, los resultados numéricos concuerdan bastante bien con los obtenidos experimentalmente si se toma un valor para  $\Delta$  tal que  $y^+$  esté entre 30 y 100 (valores para los cuales se sabe que la ley de pared es válida). Si  $\Delta$  es muy grande la fuerza de rozamiento que actúa sobre el flujo es muy pequeña, por lo cual el vórtice enfrente del ala tiende a desaparecer. Si  $\Delta$  es muy pequeño la fuerza de rozamiento es muy grande, por lo que tiende a aparecer un vórtice en el eje de salida del ala el cual no se tiene en la experimentación.

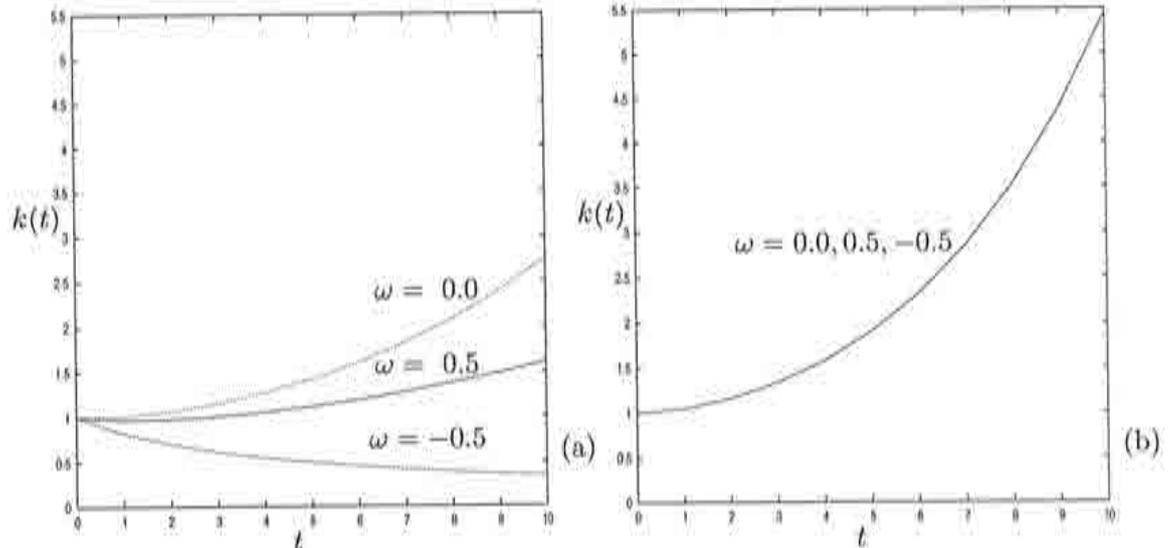
Finalmente cabe resaltar que, para aproximar bien la ley de pared, fue necesario colocar una



**Figura 5.21.** Perfil de ala entre dos superficies planas. Detalle del vórtice enfrente de la intersección entre el ala y la superficie inferior. (a): Distancia del primer nodo a la pared  $\Delta = 2$  mm. (b): Distancia del primer nodo a la pared  $\Delta = 7$  mm.

capa de elementos muy fina en la superficie donde se apoya el ala. Si esto no se hace no se logra converger a la solución del problema (el espesor de dicha capa fue mil veces más pequeño que el espesor de la capa inmediatamente superior).

#### -Flujo de corte homogéneo en ejes rotatorios



**Figura 5.22.** Flujo de corte homogéneo en ejes rotatorios. (a) Modelo ASM. (b): Modelo  $k - \epsilon$ .

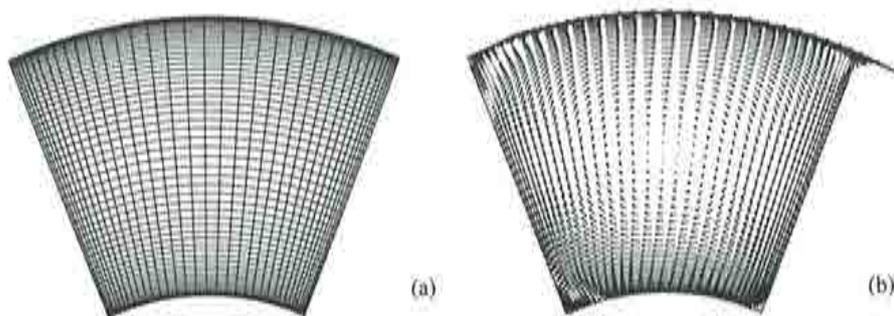
Este es el primer ejemplo usando el modelo de tensiones algebraicas regularizado (ASM) presentado en [GS93] (ver ecuación (5.51)). El ejemplo es muy sencillo: El dominio de flujo es  $\mathbb{R}^2$ , la velocidad media del flujo se prescribe de tal forma que  $\partial_j u_i = 1$  para  $j = 2$  e  $i = 1$ , y  $\partial_j u_i = 0$  para los demás casos (ya que la velocidad es prescrita en todo el dominio, se utilizó una malla de un sólo elemento  $Q1$ ). Se da como condición inicial (a  $t = 0$ ) para las variables turbulentas de  $k^0 = 1$  y  $\epsilon^0 = 0.296$ . Se da una velocidad de rotación al sistema de ejes de  $\omega/2 = (0, 0, \omega)$ . El valor de  $\omega$  se varía con el fin de ver la influencia de la rotación en la evolución temporal de  $k$ . También se observa lo que sucede si se resuelve el problema utilizando el modelo estándar  $k - \epsilon$ , el cual no tiene en cuenta los efectos de la rotación del sistema en la turbulencia. El problema se aproximó utilizando el método de Galerkin para las variables

turbulentas (debido a la sencillez del ejemplo). Las constantes del modelo  $k-\varepsilon$  utilizadas fueron las presentadas en la Tabla 5.1.

En la Figura 5.22a se muestra la evolución de la energía cinética turbulenta utilizando el modelo ASM explícito de Gatski y Speziale para los casos  $\omega = 0.5, \omega = 0.0$  y  $\omega = -0.5$ . En la Figura 5.22b se muestra el mismo resultado pero utilizando el modelo  $k-\varepsilon$  estándar. Los resultados son muy parecidos a los resultados experimentales presentados en [GS93], y a los resultados numéricos de la misma referencia utilizando el mismo modelo, utilizando modelos LES (“Large Eddy Simulation”), y modelos SSG (“Second order closure”).

Es importante remarcar que el modelo ASM es muy superior al modelo  $k-\varepsilon$ , respondiendo a los cambios de velocidad de rotación del sistema de ejes. Se puede observar que el modelo ASM captura los efectos de la rotación en un flujo de corte homogéneo como el del ejemplo. En contraste a estos resultados, el modelo  $k-\varepsilon$  estándar da los mismos resultados para todas las velocidades de rotación. Esta deficiencia está ligada a la hipótesis de Boussinesq (5.13).

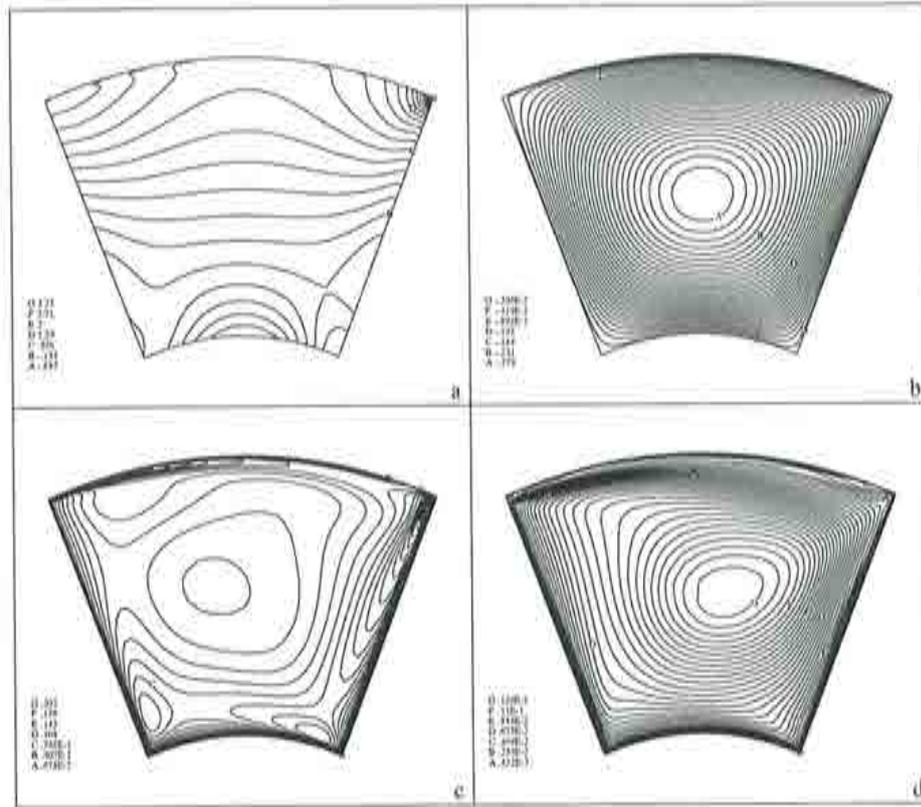
### -Flujo en una cavidad polar



**Figura 5.23.** Flujo en una cavidad polar. (a) Malla de 1944 elementos  $Q1$  y 2035 nodos. (b): Campo de velocidades utilizando el modelo ASM regularizado.

El dominio es el sector circular comprendido entre las circunferencias de radio uno y de radio dos con centro en el origen, y entre las rectas  $y = 0$  e  $y = x$ . La malla consta de 1944 elementos bilineales (2035 nodos) y es más fina en las cercanías de las paredes del dominio (ver Figura 5.23a). La velocidad se ha prescrito en la circunferencia exterior a  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  y  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{t} = 2$  ( $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{t}$  son los vectores normal y tangente a la circunferencia exterior respectivamente). En el mismo contorno se prescribieron las variables turbulentas  $k$  y  $\varepsilon$  a 0.003 y 0.0004295 ( $L = 0.03$ ), respectivamente. En el resto del contorno se aplicó la ley de pared (ver (5.66) a (5.68)). La distancia del primer nodo a la pared se tomó como  $\Delta = 0.05$ . La viscosidad cinemática del fluido fue de  $\nu = 5 \times 10^{-8}$ , siendo entonces el número de Reynolds aproximadamente igual a  $Re \approx 4 \times 10^8$ . La velocidad angular de rotación fue de  $\omega = (0, 0, 1)$ .

En primera instancia se obtuvieron resultados utilizando el modelo  $k-\varepsilon$  el cual no tiene en cuenta los efectos de la rotación. Las ecuaciones de Reynolds se resolvieron usando el método GLS utilizando los parámetros óptimos. Estos son los calibrados en el capítulo 3 para el problema de Stokes y elementos bilineales, y los tiempos intrínsecos diseñados en el capítulo 4 para el problema de Navier-Stokes con rotación (ver de (4.74) a (4.77)). Las ecuaciones de las variables turbulentas se resolvieron utilizando el método SUPG+ASC y tomando un parámetro de relajación de  $\beta = 0.5$ . También se obtuvieron resultados utilizando el modelo de tensiones algebraicas regularizado mostrado en el apartado 5.6.1 y tomado de [GS93] (ver ecuación (5.51)),



**Figura 5.24.** Flujo en una cavidad polar. Modelo  $k - \epsilon$ . (a): Contornos de presión. Picos (3.42, -0.985). (b): Líneas de corriente. Picos (0.00551, -0.288). (c): Contornos de  $k$ . Picos (0.21,  $0.557 \times 10^{-7}$ ). (d): Contornos de viscosidad total  $\nu + \nu_t$ . Picos (0.0131,  $0.11 \times 10^{-6}$ ).

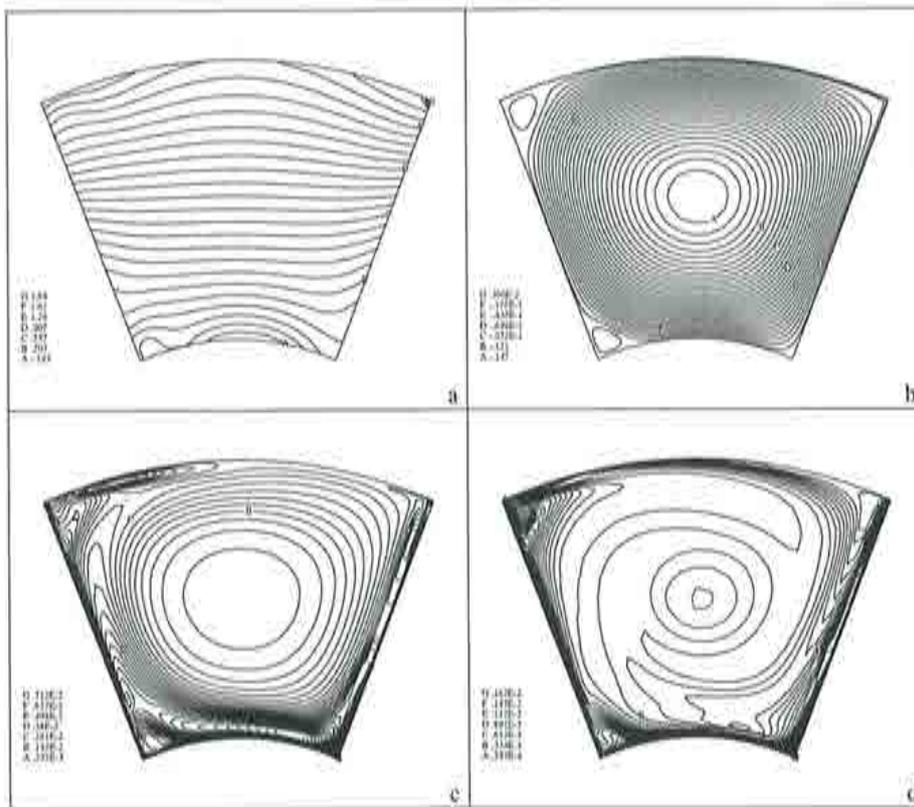
con las constantes dadas en (5.58).

En la Figura 5.23b se pueden observar el campo de velocidades obtenido con el modelo ASM regularizado (obsérvese los vórtices en las esquinas superior e inferior izquierda). En la Figura 5.24 se presentan los contornos de presión, líneas de corriente, contornos de  $k$  y contornos de viscosidad total ( $\nu + \nu_t$ ) obtenidos utilizando el modelo  $k - \epsilon$ . En la Figura 5.25 se muestran los mismos resultados pero utilizando el modelo regularizado de tensiones algebraicas. Cabe anotar que para obtener convergencia con este último fue necesario preconditionar las ecuaciones de Reynolds con la hipótesis de Boussinesq (ver ecuación (5.170)).

Los resultados tanto en presiones como en líneas de corriente, y por consiguiente en velocidades, para el modelo  $k - \epsilon$  son muy diferentes que para el modelo ASM regularizado. Lo anterior se debe a que el primero no tiene en cuenta el efecto de la rotación sobre la turbulencia como se mostró en el ejemplo inmediatamente anterior.

Los resultados con el modelo ASM muestran la formación de dos pequeños vórtices en las esquinas superior e inferior izquierda, los cuales no se presentan en el caso de utilizar el modelo  $k - \epsilon$ . Adicionalmente la distribución de energía cinética turbulenta y de viscosidad total ( $\nu + \nu_t$ ) son diferentes (lógicamente esto genera diferentes patrones de flujo medio).

Finalmente se simuló el ejemplo con el modelo  $k - \epsilon$ , pero sin fuerzas de rotación ( $\omega = 0$ ). El patrón de flujo resultante fue prácticamente igual al encontrado en el caso de incluir dichas



**Figura 5.25.** Flujo en una cavidad polar. Modelo ASM regularizado. (a): Contornos de presión. Picos (1.96,  $-0.213$ ). (b): Líneas de corriente. Picos (0.00824,  $-0.152$ ). (c): Contornos de  $k$ . Picos (0.00736,  $0.3 \times 10^{-7}$ ). (d): Contornos de viscosidad total  $\nu + \nu_t$ . Picos (0.00173,  $0.668 \times 10^{-7}$ ).

fuerzas. Lo anterior confirma una vez más, la incapacidad del modelo  $k - \varepsilon$  para reproducir los efectos sobre el flujo, generados por la rotación del sistema.

## 5.10 Comentarios y conclusiones

En la primera parte del capítulo se expusieron las ecuaciones de Reynolds incompresibles, las cuales se supone que rigen el flujo medio turbulento, y se mostraron varios modelos de turbulencia para obtener un sistema cerrado de ecuaciones. Estos se dividieron en dos grupos principales según supusieran o no la hipótesis de Boussinesq. Entre los primeros se presentaron modelos de cero, una o dos ecuaciones según el número de ecuaciones diferenciales que deben resolverse para obtener la distribución de las variables turbulentas. De los últimos se presentaron dos modelos de tensiones algebraicas (ASM) los cuales calculan el tensor de Reynolds sin utilizar la suposición de Boussinesq. Estos últimos básicamente escriben el tensor de Reynolds como función del gradiente de velocidades y de la distribución de la energía cinética turbulenta y de la disipación turbulenta ( $k$  y  $\varepsilon$ ). Finalmente se mostraron las condiciones de contorno que se implementaron para completar las ecuaciones diferenciales que describen la distribución de las variables turbulentas y el flujo medio.

Una vez planteadas las diferentes ecuaciones y condiciones de contorno que se trataron en

el presente trabajo para la simulación del flujo turbulento, se procedió al planteamiento de la solución numérica por elementos finitos de éste. Las ecuaciones de Reynolds son matemáticamente iguales a las de Navier-Stokes, por lo cual los esquemas adoptados para su solución por elementos finitos son los mismos que se expusieron en el capítulo 4 para el flujo laminar. Para la distribución de las escalas turbulentas, léase energía cinética y longitud turbulenta, los casos interesantes desde el punto de vista numérico se presentan cuando hay que resolver alguna ecuación diferencial para obtener una o ambas escalas. Éste no es el caso de los modelos de cero ecuaciones, en los que basta añadir a la viscosidad real del fluido la viscosidad turbulenta obtenida de alguna ecuación empírica y proceder a la solución de las ecuaciones de Reynolds.

Las ecuaciones diferenciales que transportan las escalas turbulentas son del tipo convección-difusión-reacción, por lo que se utilizó el método SUPG+ASC, planteado en el capítulo 2 del presente trabajo, para su solución por elementos finitos. Dichas ecuaciones presentan términos no lineales que pueden generar términos de reacción negativos en el proceso iterativo de solución, los cuales pueden impedir la convergencia del esquema. Este fenómeno se presenta al tratar de utilizar principalmente modelos de dos ecuaciones (y por consiguiente modelos de tensiones algebraicas). Uno de los principales aportes del presente trabajo es precisamente el algoritmo presentado para la solución del flujo turbulento utilizando modelos de dos ecuaciones. Los principales ingredientes de dicho algoritmo, y por lo tanto los principales aportes de este capítulo, son (ver Cuadro 5.1): Método SUPG+ASC para la solución por elementos finitos de las ecuaciones para la energía cinética turbulenta y de la segunda variable turbulenta ( $\varepsilon$ ,  $\omega$  o  $k\tau$ ); congelación de los términos de producción ( $P_k$  y  $P_\psi$ ) de la turbulencia dentro del bucle iterativo para obtener convergencia en las variables turbulentas (estos términos permanecen constantes dentro del bucle para converger en  $L$ ); relajación de las variables turbulentas y de la escala de longitud  $L$ ; y linealización de las ecuaciones de las escalas turbulentas  $k$  y  $\psi$  tomando  $\nu_t$  constante ( $\nu_t$  se actualiza luego de converger en  $k$  y  $\psi$ ). El algoritmo presentado demostró ser muy robusto. Éste converge a soluciones similares independientemente de la malla y de las condiciones de contorno tipo Dirichlet sobre las variables turbulentas.

En cuanto a los modelos de tensiones algebraicas (ASM) el principal aporte (aparte del algoritmo de solución del modelo de dos ecuaciones necesario para la obtención del tensor de Reynolds) radica en el preconditionamiento que se realiza utilizando la hipótesis de Boussinesq (ver (5.170)). Es decir, la divergencia del tensor de Reynolds calculado con el modelo ASM se añade como un término de fuerzas conocido al lado izquierdo de la ecuación de momento, y adicionalmente se suma a ambos lados de la ecuación la divergencia del tensor de Reynolds utilizando la hipótesis de Boussinesq (al lado izquierdo se evalúa en la iteración actual y al lado derecho en la iteración anterior). En el caso de no utilizar este tipo de preconditionamiento con la hipótesis de Boussinesq el esquema iterativo presentado en el Cuadro 5.1 no logró converger para el caso del flujo en una cavidad polar.



## Capítulo 6

# Superficie Libre y Temperatura

### 6.1 Introducción y objetivos

Hasta el momento se propuso un esquema numérico para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes tanto en régimen laminar como turbulento. En el presente capítulo se expone una metodología para el cálculo de problemas con superficie libre. El cálculo de la posición de la superficie del fluido es una tarea muy importante para la aplicación de las técnicas numéricas expuestas hasta el momento a problemas industriales, tales como el llenado de moldes para la fabricación de piezas metálicas, para la simulación de procesos de inyección de plásticos, para el cálculo de la superficie libre en reactores químicos, etc. Adicionalmente, en dichos procesos es importante el cálculo del campo de temperaturas tanto en el fluido como en el recipiente (molde, reactor, etc.) que lo contiene. Por tal motivo también se expone en el presente capítulo una metodología para la solución por elementos finitos de la ecuación de la energía expresada en términos de la temperatura.

El modelo que se expondrá para el transporte de la superficie del fluido está basado en el método de la pseudo-concentración, el cual emplea una malla fija. El fluido va llenando los elementos de la malla a medida que se va moviendo. Un elemento puede estar vacío, parcialmente lleno o totalmente lleno de fluido. La técnica que se emplea en el presente trabajo fue introducida por Thompson [Tho86b, Tho86a, TS88], aunque también se ha empleado con otros nombres como VOF (volume of fluid method) [HN81] o método de saturación [SW88]. La idea básica del método es introducir una función escalar que se transporta por el campo de velocidades obtenido a partir de la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes (o de Reynolds en el caso turbulento). Dicha función se define sobre todo el dominio computacional y un cierto iso-contorno define la posición del frente del fluido real. La parte del dominio aún vacía se supone ocupada por un fluido ficticio con propiedades tales que no afecten la dinámica del fluido real (se supone por lo general que dicho fluido ficticio es el aire).

Una descripción del método que se expondrá a continuación para casos bidimensionales puede consultarse en [Cod92, CSO94, CSO<sup>+</sup>92]. Como se verá a lo largo del capítulo, la principal diferencia de la técnica que se presenta en este trabajo radica en aspectos computacionales, tales como el suavizado del frente del material tanto en dos como en tres dimensiones [CS94a], y el tratamiento de los "agujeros" que se dejan en los moldes con el fin de dejar salir el fluido ficticio (aire) a medida que éste va llenándose.

La técnica de la pseudo-concentración ha sido utilizada por diversos autores para seguir la superficie libre de flujos viscoplásticos, en el contexto de procesos de conformado de metales tales como la extrusión, forja y laminado [SOC93b, SOC93a, AI94, AID94, DGC90, TS88]. La

aplicación del método al llenado de moldes puede consultarse en [DGC90, WS88, LUC91, Cod92].

Otros métodos populares para el seguimiento de la superficie libre tales como el lagrangiano actualizado [Zie84, LDD90, ZJO78, ZOH81], y el ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian method) [Hue84, SFDO91], tienen desventajas como la excesiva distorsión de la malla en el caso que la superficie varíe demasiado (por ejemplo en el llenado de moldes), o que se requiera un conocimiento a priori del movimiento del fluido. Un método mixto en el cual se utiliza una malla fija para la solución del flujo, y una malla móvil para el cálculo de la posición del fluido real puede consultarse en [SOC93b]. Este método se presentó en el contexto del laminado de metales, y es conveniente sólo para flujos no recirculantes o muy viscosos.

Finalmente, la ecuación de temperatura (energía) es del tipo convección-difusión, por lo cual su solución numérica se realiza mediante el método SUPG expuesto en el capítulo 2 de este trabajo. Debido a la diferencia de propiedades térmicas que pueden presentarse entre el fluido real, el fluido ficticio y el molde donde se realiza el llenado, pueden ocurrir capas con altos gradientes de temperatura, con lo cual es necesario el empleo de técnicas de captura de discontinuidades para evitar la presencia de oscilaciones localizadas (ver capítulo 2). Otro aspecto importante que se muestra en el presente capítulo es el cálculo de la temperatura en el molde a medida que se va produciendo el llenado del mismo. Para resolver dicho problema, se presentará una técnica en la cual se utilizan dos mallas diferentes. La primera abarca la cavidad que se está llenando, y resuelve el problema de flujo y de superficie libre dentro de la misma. La segunda malla abarca tanto la cavidad que se está llenando como todo el material que la rodea (cavidad más material del molde), y sobre ésta se calcula el campo de temperaturas. Para realizar este proceso, se debe pasar la información tanto de la posición del fluido real como del campo de velocidades dentro de la cavidad (malla 1) a la malla de la cavidad más el molde (malla 2). Las dos mallas por lo general son de diferente tipo de elementos y además, aunque el dominio computacional de la primera malla esté contenido en la segunda, los nodos no tienen que ser coincidentes. Debido a ello se debe interpolar tanto las velocidades como la posición del frente del fluido de los nodos de la malla 1 a la malla 2, con el fin de resolver sobre la segunda el problema térmico integrado (calcular el campo de temperatura dentro de la cavidad y del material del molde). Esta técnica puede ser consultada en [CCD<sup>+</sup>94].

## 6.2 Método de la pseudo-concentración

Como se mencionó anteriormente, la idea básica del método de la pseudo-concentración es definir una función escalar  $\psi(\mathbf{x})$  sobre el dominio computacional  $\Omega$  de tal forma que su valor en cierto punto  $\mathbf{x} \in \Omega$  indique la presencia o no de fluido. Esta función puede considerarse como una propiedad ficticia del fluido. Por ejemplo, se puede asignar el valor de 1 a la región donde el fluido ya ha entrado y de 0 donde se tiene aire (fluido ficticio). La posición del frente del fluido se define por el iso-contorno  $\psi(\mathbf{x}) = \psi_c$ , donde  $\psi_c \in [0, 1]$  es un valor crítico definido a priori. Usualmente se toma  $\psi_c = 0.5$ . Dicho valor no tiene importancia en el caso de que  $\psi$  sea una función escalón, sin embargo es necesario para la discretización por elementos finitos y para el suavizado que se describirá más adelante.

La conservación de la pseudo-concentración (suponiendo que  $\psi(\mathbf{x})$  sea lo suficientemente suave) en cualquier volumen de control  $V_t \subset \Omega$ , el cual se mueve con un campo de velocidades solenoidal  $\mathbf{u}$ , se escribe como:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \psi = 0 \quad \text{en } \Omega \times (0, T) \quad (6.1)$$

donde  $(0, T)$  es el intervalo de tiempo. Debido al carácter hiperbólico de la ecuación anterior,

se deben especificar condiciones de contorno para  $\psi$  en la parte de la frontera de  $\Omega$  donde la velocidad esté entrando al dominio. Esto es, en

$$\Gamma_{\text{inf}} := \{\mathbf{x} \in \partial\Omega \mid \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} < 0\} \quad (6.2)$$

donde  $\mathbf{n}$  es la normal exterior a  $\partial\Omega$ . Las propiedades del fluido se especificarán dependiendo de la posición del frente. Sea  $\pi$  alguna propiedad del fluido (densidad  $\rho$ , viscosidad  $\mu$ , calor específico  $c_p$  o coeficiente de conducción térmica  $k$ ), se tendrá que

$$\pi = \begin{cases} \pi_{\text{fluido}}(\mathbf{x}, t) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_t \\ \pi_{\text{aire}} & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega \setminus \Omega_t \end{cases} \quad (6.3)$$

donde

$$\Omega_t := \{\mathbf{x} \in \Omega \mid \psi(\mathbf{x}, t) \geq \psi_c\} \quad (6.4)$$

y la función de pseudo-concentración es la solución del siguiente problema:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \psi = 0 \quad \text{en } \Omega \times (0, T) \quad (6.5)$$

$$\psi = \psi_g \quad \text{en } \Gamma_{\text{inf}} \times (0, T) \quad (6.6)$$

$$\psi(\mathbf{x}, 0) = \psi_0(\mathbf{x}) \quad \text{en } \Omega \times \{0\} \quad (6.7)$$

La condición inicial  $\psi_0$  se escoge de tal forma que defina la posición inicial del fluido real. La condición de contorno  $\psi_g$  define si el fluido entra o no a través de un cierto punto de  $\partial\Omega$ . Si el fluido real está entrando  $\psi_g \geq \psi_c$ , sino  $\psi_g < \psi_c$ . Más adelante se retomará este punto.

Obsérvese que debido a que las propiedades físicas serán discontinuas en la dirección perpendicular al frente del fluido, las ecuaciones de Navier-Stokes (1.1)-(1.2) no describen exactamente la conservación del momento y de la masa, ya que el salto de las propiedades del fluido es ignorado. También puede observarse que el fluido en consideración y el aire son resueltos a la vez, por lo cual no se necesitan condiciones de contorno en la interface. Por ejemplo, capas límites térmicas, usualmente tratadas imponiendo un flujo de calor proporcional al salto de temperaturas, se aproximarán dependiendo del tamaño de la malla y de la capacidad del método numérico utilizado para capturar altos gradientes. Condiciones de radiación no lineal y otros efectos físicos como la tensión superficial en el frente del fluido, se desprecian al utilizar la técnica de la pseudo-concentración.

### 6.2.1 Aproximación por elementos finitos

La ecuación de pseudo-concentración (6.5) es del tipo convección pura, por lo cual el número de Péclet es infinito ( $\gamma \rightarrow \infty$ ). Debido a ello se utiliza el método SUPG expuesto en el capítulo 2 del presente trabajo para su discretización espacial. La discretización temporal se realiza utilizando nuevamente la regla trapezoidal. El problema discreto queda entonces como: Dada una partición de elementos finitos  $\{\Omega^e\}$ ,  $e = 1, \dots, n_{\text{el}}$ , del dominio  $\Omega$ , dado el campo de velocidades  $\mathbf{u}_h^{n+1}$  aproximación a  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t^{n+1})$ , dada una partición uniforme del intervalo de tiempo  $[0, T]$  de tamaño  $\Delta t$ , y dado  $\psi^0(\mathbf{x}) = \psi_0(\mathbf{x})$ , encontrar  $\psi_h^{n+1}(\mathbf{x})$  aproximación de  $\psi(\mathbf{x}, t^{n+1})$  para  $n = 0, 1, \dots, N-1$  tal que,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \phi_h \psi_h^{n+1} \, d\Omega + \theta \Delta t \int_{\Omega} \phi_h (\mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla) \psi_h^{n+1} \, d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \mathcal{S}_I^{n+1,e}(\mathbf{u}_h, \psi_h; \phi_h) \\ = \int_{\Omega} \phi_h \psi_h^n \, d\Omega - (1 - \theta) \Delta t \int_{\Omega} \phi_h (\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla) \psi_h^n \, d\Omega \end{aligned} \quad (6.8)$$

donde tanto las funciones de prueba  $\phi_h$  como las funciones de interpolación  $\psi_h$  pertenecen a  $H^1(\Omega)$ , las primeras deben hacerse cero sobre  $\Gamma_{\text{inf}}$  y las segundas satisfacer la condición de contorno tipo Dirichlet dada en (6.6). El término residual del SUPG en (6.8) viene dado por:

$$\begin{aligned} S_f^{n+1,e}(\mathbf{u}_h, \psi_h; \phi_h) &:= \int_{\Omega^e} \tau_f^e(\mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla) \phi_h \left[ \psi_h^{n+1} - \psi_h^n \right. \\ &\quad \left. + \theta \Delta t (\mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla) \psi_h^{n+1} + (1 - \theta) \Delta t (\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla) \psi_h^n \right] d\Omega \end{aligned} \quad (6.9)$$

El tiempo intrínscico  $\tau_f^e$  se calcula como se expuso en el capítulo 2, utilizando un número de Péclet  $\gamma = \infty$  (ver (2.42)) para calcular la función de "upwind".

Como observaciones finales cabe remarcar que el parámetro  $\theta$  de la regla trapezoidal puede escogerse diferente al empleado en la ecuación de Navier-Stokes o de temperatura (la cual será expuesta más adelante). Si  $\psi$  es una función escalón o con muy alto gradiente en el frente del fluido, el esquema de Euler hacia atrás ( $\theta = 1$ ) no es apropiado debido a su alta disipación, aunque éste puede ser usado para las ecuaciones de temperatura y de Navier-Stokes. En este caso, el esquema de Crank-Nicolson ( $\theta = 1/2$ ) debe emplearse. Sin embargo, este problema no surge si  $\psi$  es una función suave, ya que la posición del frente  $\psi_c$  será transportada correctamente, ya que el error del método de Euler hacia atrás es de amplitud y no de fase. Finalmente, en el presente trabajo se escoge para la pseudo-concentración  $\psi$  la misma interpolación de elementos finitos que para las componentes del campo de velocidades y la temperatura.

### 6.2.2 Suavizado de la pseudo-concentración

El método de la pseudo-concentración provee una técnica básica para el transporte de las superficies libres de flujos viscosos e incompresibles, aunque aparecen varios problemas al ser implementado en un código de ordenador. Uno de ellos es la escogencia de la función  $\psi$ . Si se toma una función escalón, se pueden encontrar pequeñas oscilaciones en las vecindades de los altos gradientes que no son eliminadas utilizando el método SUPG (ver capítulo 2). Estas oscilaciones pueden propagarse y distorsionar las formas del frente, especialmente en las esquinas. Debido a que la idea básica del método no depende de la escogencia de la función  $\psi$ , es preferible utilizar una función suave en vez de una con cambios abruptos. La técnica de suavizado implementada se discutirá más adelante. Éste permite eliminar los picos que se presentan al utilizar una función escalón en cada paso de tiempo, obteniéndose una método preciso para transportar el frente del material usando el método SUPG.

La técnica de suavizado empleada consiste en redefinir la pseudo-concentración para cada nodo de la malla de elementos finitos de acuerdo a la siguiente expresión:

$$\psi = \psi_c + \text{sgn}(\psi_0 - \psi_c) \sigma d \quad (6.10)$$

donde  $\psi_0$  es el valor calculado de  $\psi$ ,  $\sigma$  una constante dada,  $d$  la distancia del nodo en consideración hasta el frente del fluido y  $\text{sgn}(\cdot)$  es el signo del valor entre paréntesis. La ecuación (6.10) indica que la pseudo-concentración suavizada se obtiene añadiendo o substrayendo al valor crítico una cantidad proporcional a la distancia al frente, de acuerdo al material que ocupe el punto (el fluido analizado o el aire).

El punto crucial es como calcular la distancia  $d$  desde el punto en consideración al frente. El algoritmo implementado tiene como primer paso subdividir el tipo de elementos utilizado en triángulos lineales (en 2D) o tetraedros (en 3D). El número de subelementos que se obtiene con este procedimiento por cada elemento de la malla es:

Elemento	Caso 2D	Caso 3D
$P_1$ (lineal)	1	1
$P_1^+$ (lineal + burbuja)	3	4
$Q_1$ (multilineal)	2	5
$P_2$ (cuadrático)	4	8
$P_2^+$ (cuadrático+burbuja)	6	20
$Q_2$ (multicuadrático)	8	40

Con el fin de calcular la distancia  $d$ , la función de pseudo-concentración se considera interpolada utilizando los subelementos lineales. Esto introduce una nueva aproximación en la representación de dicha función.

Una vez conocidos los valores de la pseudo-concentración en todos los nodos, es posible calcular las posiciones de los puntos del frente que intersectan los lados de los elementos. Esto se realiza revisando si el signo de  $\psi - \psi_c$  cambia de un nodo al nodo adyacente del elemento. La intersección del frente con el lado del subelemento se calcula usando una interpolación lineal entre los valores de  $\psi$  de los dos nodos identificados. Ya que los subelementos son lineales, el frente puede cruzar un lado sólo una vez. Por consiguiente, sólo dos puntos del frente en 2D y tres en 3D pueden cruzar los lados del subelemento. Los tres puntos que intersectan el subelemento en 3D forman un plano (el caso 2D es análogo, por lo cual se explicará sólo el caso tridimensional). Luego se calcula la intersección de este plano con la línea normal a él que pase por cada uno de los nodos de la malla. Si dicha intersección queda dentro del triángulo comprendido por los tres puntos de los lados del subelemento, la distancia buscada será la distancia entre la intersección y el nodo de la malla. Sino, se toma la mínima distancia entre el nodo y los tres puntos del triángulo.

Con el procedimiento descrito anteriormente, se tiene la distancia desde un nodo de la malla a todos los triángulos que aproximan el frente. La distancia final de cada nodo al frente del fluido es la mínima de todas estas distancias.

El algoritmo que implementa esta idea se presenta a continuación:

- Bucle sobre los elementos
  - Revise si el elemento es cruzado. Sino vaya al siguiente elemento
- Bucle sobre los subelementos
  - Calcule la intersección del subelemento con la superficie libre
    - Calcule las coordenadas de los puntos de intersección
    - Calcule el vector normal al segmento (2D) o al plano (3D) definido por los puntos de intersección
  - Si se encuentra una intersección (un segmento o un plano), bucle sobre los nodos de la malla
    - Calcule la distancia del nodo al plano (o segmento)  $d_0$
    - Revise si la intersección está contenida en el plano (o segmento). Si lo está  $d_1 \leftarrow d_0$ , si no tome  $d_1$  como el mínimo de las distancias a los vértices que forman el plano (triángulo o segmento de recta).
    - Para cada punto  $d \leftarrow \min(d_1, d)$

La precisión de este método depende de la suavidad del frente (no de la pseudo-concentración). Se ha encontrado que éste funciona bien en la práctica, como se observará en los ejemplos numéricos presentados al final del capítulo.

### 6.2.3 Evacuación del aire - Introducción de agujeros

En problemas prácticos de llenado de moldes, a medida que el fluido va entrando al molde el aire puede escaparse a través de las paredes porosas del mismo. Los modelos numéricos deben incorporar facilidades para evacuar el aire con el fin de prevenir la formación de burbujas, especialmente cerca a las esquinas.

La idea básica del método que se describe a continuación es colocar algunos agujeros en las paredes del molde y bloquearlos cuando el fluido real alcance dichos agujeros. De esta manera se le permite al aire salir del molde, mas no al fluido analizado.

Para explicar el inconveniente básico de este método, se presenta como se implementó en el código de ordenador las condiciones de contorno. Si un nodo de contorno tiene una prescripción tipo Neumann, su velocidad es una de las incógnitas del problema. Pero si la prescripción es tipo Dirichlet, el vector de velocidad es conocido. Las filas y columnas correspondientes al nodo bajo consideración de la matriz ensamblada final no se necesitan. El producto de las columnas por las componentes de la velocidad se pasa al lado derecho. La matriz del sistema resultante,  $A$ , será más pequeña que si estas columnas y filas no son eliminadas. Debido a que el código de ordenador trabaja con memoria dinámica, la dimensión de la matriz  $A$  debe ser calculada antes de empezar el análisis. Por consiguiente, el cambio de la condición de contorno de un nodo tipo Neumann a tipo Dirichlet no es tan simple como a primera vista puede parecer.

Con el fin de evitar el cambio del tamaño del problema, se dejan los nodos con agujeros siempre libres. Cuando el fluido llegue a ellos, la velocidad (o sólo la componente normal a la pared) se prescribe a cero mediante el siguiente procedimiento: Considérese el sistema lineal de ecuaciones genérico de la forma

$$Ax = b \quad (6.11)$$

donde  $x$  es el vector de  $n$  incógnitas. Suponga que la componente  $i$  de  $x$  se prescribe al valor  $\bar{x}$ , esto es  $x_i = \bar{x}$ . De la ecuación (6.11) se tendrá que

$$a_{ii}x_i = b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}x_j \quad (6.12)$$

Suponga que la componente  $a_{ii}$  de  $A$  no es cero y reemplace

$$\begin{aligned} a_{ii} &\leftarrow 1 \\ a_{ij} &\leftarrow 0 \quad , \quad j = 1, \dots, n \quad j \neq i \\ b_i &\leftarrow \bar{x} \end{aligned} \quad (6.13)$$

Esto puede realizarse a nivel elemental, ya que el operador ensamblaje es lineal. La incógnita quedará prescrita exactamente al valor requerido.

La manera de bloquear los agujeros entonces es clara. Para un cierto paso de tiempo, se calcula el valor de la pseudo-concentración en el nodo de interés. Si el valor de  $\psi$  es menor que  $\psi_c$ , no se hace nada sobre el sistema análogo a (6.11) proveniente de la discretización por elementos finitos de las ecuaciones de Navier-Stokes, es decir, la redefinición (6.13) no se ejecuta. En caso contrario, la estrategia presentada para prescribir valores se realiza, tomando  $\bar{x} = 0$  en (6.13).

Considérese ahora la ecuación de transporte de la pseudo-concentración. Si para un cierto paso de tiempo la velocidad de un nodo con agujero está libre, ésta puede quedar entrando al molde debido a efectos de succión. En esta situación, el agujero debe ser considerado como parte

del contorno de entrada  $\Gamma_{inf}$  y por consiguiente la función  $\psi$  debe ser prescrita en dicho nodo. Si esto no se hace, puede ocurrir que valores de  $\psi$  mayores a  $\psi_c$  sean transportados dentro del molde, introduciéndose fluido espúreo. La situación es similar a lo que ocurre para un problema hiperbólico unidimensional:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + u \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad 0 < x < 1 \quad (6.14)$$

Si  $u > 0$  y el valor de  $\psi$  en  $x = 0$  no se prescribe, la solución es simplemente  $\psi(x, t) = \psi_0(x - ut)$ , donde  $\psi_0(x)$  es la condición inicial extendida periódicamente a toda la recta real  $\mathbb{R}$ .

Hay otra forma de ver que si  $\psi$  no se prescribe en los nodos donde la velocidad entra al molde entonces se introduce material espúreo. Sea  $V_t$  algún volumen de control rodeando el nodo. Multiplicando la ecuación (6.5) por  $\psi$ , integrando sobre  $V_t$  y usando el hecho de que  $\mathbf{u}$  es de divergencia nula se llega a

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \psi^2 d\Omega = -\frac{1}{2} \int_{\partial V_t} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \psi^2 d\Gamma \quad (6.15)$$

Si  $\psi$  no se prescribe donde  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} < 0$ , la integral de  $\psi^2$  sobre  $V_t$  se incrementa a medida que pasa el tiempo, y esto ocurre para cualquier volumen de control  $V_t$ , haciendo que fluido espúreo pueda aparecer alrededor del nodo.

Teniendo lo anterior en mente es claro que  $\psi$  debe prescribirse en los nodos temporalmente libres (agujeros) donde  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} < 0$ . Para un cierto paso de tiempo, el valor de la prescripción debe ser igual al obtenido en el paso de tiempo inmediatamente anterior. La forma de implementar esto es igual a la utilizada para las velocidades en las ecuaciones de Navier-Stokes. Sea  $\psi_b^n$  el valor de la pseudo-concentración para el paso de tiempo  $n$ . Considere que el sistema a resolver para encontrar  $\psi_b^{n+1}$  es (6.11), se realiza entonces la redefinición (6.13) con  $\bar{x} = \psi_b^n$ .

La forma de revisar los nodos temporalmente libres (agujeros) se resume en la Cuadro 6.1. Se entiende que todas las variables (pseudo-concentración y velocidad) se refieren a un cierto nodo y que la condición de contorno se prescribe exactamente como se explicó anteriormente.

#### Cuadro 6.1 Revisión de los nodos temporalmente libres (agujeros)

- IF  $\psi_b^n < \psi_c$  THEN
  - IF  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} < 0$  THEN
    - Prescriba  $\psi_b^{n+1}$  a  $\psi_b^n$
  - ELSE
    - Deje  $\psi_b^{n+1}$  libre
  - END IF
    - Deje  $\mathbf{u}$  libre (condición tipo Neumann)
- ELSE
  - Prescriba  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$
  - Deje  $\psi_b$  libre
- END IF
- END

### 6.3 Ecuación de la temperatura

La ecuación de la energía puede escribirse en términos de la temperatura  $\vartheta$  como sigue:

$$\rho c_p \left[ \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \vartheta \right] - \nabla \cdot (\mathbf{k} \cdot \nabla \vartheta) = Q \quad \text{en } \Omega \times (0, T) \quad (6.16)$$

donde  $\rho$  es la densidad del fluido,  $c_p$  el calor específico a presión constante,  $\mathbf{k}$  el tensor de difusión térmica,  $Q$  el término de fuente de calor (donde puede o no ser incluido el efecto Joule, o efecto de generación de calor por trabajo interno  $2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ ),  $\mathbf{u}$  el campo de velocidades dado (o calculado al resolver las ecuaciones de Navier-Stokes) y  $(0, T)$  el intervalo de solución. Las condiciones de contorno e iniciales para la temperatura que se considerarán son las siguientes:

$$\vartheta = \vartheta_g \quad \text{en } \Gamma_{dt} \times (0, T) \quad (6.17)$$

$$-\mathbf{k} \cdot \nabla \vartheta \cdot \mathbf{n} = \varphi_g \quad \text{en } \Gamma_{nt} \times (0, T) \quad (6.18)$$

$$\vartheta(\mathbf{x}, 0) = \vartheta_0(\mathbf{x}) \quad \text{en } \Omega \times \{0\} \quad (6.19)$$

donde  $\Gamma = \overline{\Gamma_{dt} \cup \Gamma_{nt}}$  y  $\Gamma_{dt} \cap \Gamma_{nt} = \emptyset$  ( $\Gamma := \partial\Omega$ ).

La ecuación de temperatura es la típica ecuación de convección-difusión, por lo cual su aproximación por elementos finitos se realiza utilizando el método SUPG para estabilizar los efectos convectivos, y el método de captura de discontinuidades anisotrópico para evitar oscilaciones localizadas en las capas con altos gradientes (ver apartado 2.3.3). La discretización temporal se realiza mediante la regla trapezoidal (método  $\theta$ ).

El problema discreto queda entonces como: Dada una partición de elementos finitos  $\{\Omega^e\}$ ,  $e = 1, \dots, n_{el}$ , del dominio  $\Omega$ , dado el campo de velocidades  $\mathbf{u}_h^{n+1}$  aproximación a  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t^{n+1})$ , dada una partición uniforme del intervalo de tiempo  $[0, T]$  de tamaño  $\Delta t$ , y dado  $\vartheta^0(\mathbf{x}) = \vartheta_0(\mathbf{x})$ , encontrar  $\vartheta_h^{n+1}(\mathbf{x})$  aproximación de  $\vartheta(\mathbf{x}, t^{n+1})$  para  $n = 0, 1, \dots, N - 1$  tal que,

$$\begin{aligned} & \left( \int_{\Omega} \rho^{n+1} c_p^{n+1} \phi_h \vartheta_h^{n+1} \, d\Omega + \theta \Delta t \int_{\Omega} \rho^{n+1} c_p^{n+1} \phi_h (\mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla) \vartheta_h^{n+1} \, d\Omega \right) \\ & + \theta \Delta t \int_{\Omega} \nabla \phi_h \cdot \mathbf{k}^{n+1} \cdot \nabla \vartheta_h^{n+1} \, d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{el}} \mathfrak{S}_s^{n+1,e}(\mathbf{u}_h, \vartheta_h; \phi_h) + \sum_{e=1}^{n_{el}} \mathfrak{S}_a^{n+1,e}(\mathbf{u}_h, \vartheta_h; \phi_h) \\ & = \int_{\Omega} \rho^{n+1} c_p^{n+1} \phi_h \vartheta_h^n \, d\Omega - (1 - \theta) \Delta t \int_{\Omega} \rho^{n+1} c_p^{n+1} \phi_h (\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla) \vartheta_h^n \, d\Omega \\ & - (1 - \theta) \Delta t \int_{\Omega} \frac{\rho^{n+1} c_p^{n+1}}{\rho^n c_p^n} \nabla \phi_h \cdot \mathbf{k}^n \cdot \nabla \vartheta_h^n \, d\Omega + \Delta t \int_{\Omega} \phi_h Q^{n+\theta} \, d\Omega + \Delta t \int_{\Gamma_{nt}} \phi_h \varphi_g \, d\Gamma \end{aligned} \quad (6.20)$$

donde tanto las funciones de prueba  $\phi_h$  como las funciones de interpolación  $\vartheta_h$  pertenecen a  $H^1(\Omega)$ , las primeras deben hacerse cero sobre  $\Gamma_{dt}$  y las segundas satisfacer la condición de contorno tipo Dirichlet dada en (6.17).  $Q^{n+\theta}$  se define como:

$$Q^{n+\theta} = \theta Q^{n+1} + (1 - \theta) \frac{\rho^{n+1} c_p^{n+1}}{\rho^n c_p^n} Q^n \quad (6.21)$$

El superíndice en las propiedades físicas y en el término de fuente ( $\rho$ ,  $c_p$ ,  $\mathbf{k}$  y  $Q$ ) indican su valor en un determinado paso de tiempo. Debido al movimiento del frente del fluido, las propiedades físicas de un determinado punto  $\mathbf{x} \in \Omega$  pueden variar de un paso de tiempo a otro. El valor de la propiedad en un determinado paso de tiempo se calcula como se explicó anteriormente en (6.3)-(6.4).

Los términos residuales  $\mathfrak{S}_s$  y  $\mathfrak{S}_a$  corresponden al método SUPG y al método anisotrópico de captura de discontinuidades respectivamente (ver apartado 2.3.3). Suponiendo que el tensor de difusión térmica sea isótropo, es decir, que pueda expresarse como  $\mathbf{k} = k\mathbf{I}$  con  $k$  escalar e  $\mathbf{I}$  el tensor identidad, el término debido a la contribución del SUPG viene dado por:

$$\mathfrak{S}_s^{n+1,e}(\mathbf{u}_h, \vartheta_h; \phi_h) := \int_{\Omega^e} \tau_s^e(\mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla) \phi_h \left[ \rho^{n+1} c_p^{n+1} (\vartheta_h^{n+1} - \vartheta_h^n \right.$$

$$\begin{aligned}
& +\theta\Delta t(\mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla)\vartheta_h^{n+1} + (1-\theta)\Delta t(\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla)\vartheta_h^n \\
& -\theta\Delta t k^{n+1}\Delta\vartheta - (1-\theta)\Delta t \frac{\rho^{n+1}c_p^{n+1}}{\rho^n c_p^n} k^n \Delta\vartheta \\
& -\Delta t Q^{n+\theta} \Big] d\Omega \tag{6.22}
\end{aligned}$$

El tiempo intrínscico  $\tau_s^e$  se calcula como se expuso en el capítulo 2, definiendo el número de Péclet elemental para calcular la función de “upwind” como (ver (2.42)):

$$\gamma^e = \frac{\|\mathbf{u}\|^e h^e \rho^e c_p^e}{2k^e} \tag{6.23}$$

El superíndice  $e$  se refiere a los valores dentro de cada elemento.

El término debido a la contribución del método anisotrópico de captura de discontinuidades se define como:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_a^{n+1,e}(\mathbf{u}_h, \vartheta_h; \phi_h) & := \int_{\Omega^e} \left[ \xi_{\text{iso}} \nabla \phi_h \cdot \nabla \vartheta_h^{n+1} \right. \\
& \left. + (\langle \xi_{\text{iso}} - \xi_{\text{supg}} \rangle - \xi_{\text{iso}}) \nabla \phi_h \cdot \left( \frac{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2} \right) \cdot \nabla \vartheta_h^{n+1} \right] d\Omega \tag{6.24}
\end{aligned}$$

donde  $\langle \cdot \rangle$  es la función definida en (2.77),  $\xi_{\text{supg}}$  la difusión debida al método SUPG (ver (2.15)):

$$\xi_{\text{supg}} = \frac{1}{2} \alpha_a^e h^e |\mathbf{u}|^e \tag{6.25}$$

y  $\xi_{\text{iso}}$  la difusión a añadir en sentido perpendicular a las líneas de corriente (ver (2.75)):

$$\xi_{\text{iso}} = \frac{1}{2} \alpha_c^e h^e \frac{|\mathcal{R}(\vartheta_h^n)|}{|\nabla \vartheta_h^n|} \text{ si } |\nabla \vartheta_h^n| \neq 0 \text{ y } \xi_{\text{iso}} = 0 \text{ de lo contrario,} \tag{6.26}$$

donde  $\alpha_c^e$  viene dado por (ver (2.79)):

$$\alpha_c^e = \max\left(0, C - \frac{2k^n}{\rho^n c_p^n |\mathbf{u}_{||}|^e h^e}\right) \tag{6.27}$$

$C$  es una constante que depende del tipo de elemento (0.7 para lineales y 0.35 para cuadráticos),  $\mathbf{u}_{||}$  viene dado por (ver (2.80)):

$$\mathbf{u}_{||} = \frac{\mathcal{R}(\vartheta_h^n)}{|\nabla \vartheta_h^n|^2} \nabla \vartheta_h^n \tag{6.28}$$

y  $\mathcal{R}$  es el residuo elemental definido como:

$$\mathcal{R}(\vartheta_h^n) = \rho^n c_p^n \left( \frac{\vartheta_h^n - \vartheta_h^{n-1}}{\Delta t} + (\mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla) \vartheta_h^n \right) - k^n \Delta \vartheta_h^n - Q^n \tag{6.29}$$

Todos los términos del residuo elemental están evaluados en el paso de tiempo anterior por facilidad en la implementación. Es fácil verificar la consistencia del método, en el sentido que la solución del problema continuo (6.16)-(6.19), satisface el problema discreto (6.20).

## 6.4 Flujo incompresible con una superficie libre

En el capítulo 1 se planteó el problema que gobierna el flujo incompresible en régimen laminar (1.1) a (1.6). En el apartado 4.5 se expusieron varios esquemas de solución aplicando el método de los elementos finitos a dicho problema, y se presentó un algoritmo numérico general para su tratamiento (ver Cuadro 4.1). El caso de flujo turbulento se expuso en el capítulo 5 del presente trabajo, y en el Cuadro 5.1 se presentó una estrategia numérica para aproximar su solución usando el método de los elementos finitos.

La simulación del flujo incompresible en el caso de que exista una superficie libre se realiza de igual manera que para un solo fluido. Esto es, resolviendo las ecuaciones de Navier-Stokes (o de Reynolds para el caso de flujo turbulento) teniendo en cuenta la posición de la superficie libre para determinar las propiedades del fluido en los puntos de Gauss elementales (ver (6.3)-(6.4)). Un algoritmo general para la solución del flujo incompresible en el caso de que existan dos fluidos, y por lo tanto una superficie libre que los separe, se presenta en el Cuadro 6.2. En éste se considera que las propiedades de ambos fluidos son independientes de la temperatura.

### Cuadro 6.2 Algoritmo para la solución del flujo incompresible con superficie libre

- Lea condiciones iniciales y de contorno para  $\mathbf{u}_h$ ,  $\vartheta_h$ ,  $\psi_h$  y haga  $p_h^0 = 0$ ,
- $n \leftarrow -1$
- WHILE  $n < N$  y (no-estacionario) DO
  - $n \leftarrow n + 1$
  - IF  $n < n_{cu}$  THEN  $\theta \leftarrow 1$
  - ELSE seleccione  $\theta$  requerido con  $\theta \geq 1/2$
  - $i \leftarrow 0$
  - $\mathbf{u}^{n+\theta,i} \leftarrow \mathbf{u}^n$ ;  $p^{n+\theta,i} \leftarrow p^n$
  - WHILE (no convergido)
    - $i \leftarrow i + 1$
    - IF  $i < i_{pi}$  THEN  $\beta \leftarrow 0$
    - ELSE seleccione  $\beta$  según linealización
    - Resuelva las ecuaciones de Navier-Stokes (o de Reynolds en el caso de flujo turbulento)
    - IF  $\|\mathbf{u}_h^{n+\theta,i} - \mathbf{u}_h^{n+\theta,i-1}\|_{L^2} \leq TOL \|\mathbf{u}_h^{n+\theta,i}\|_{L^2}$  THEN (convergido)
  - END WHILE (no convergido)
  - IF  $\theta = 1/2$  THEN obtenga  $\mathbf{u}_h^{n+1}$  y  $p_h^{n+1}$
  - Revise el signo de  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}$  para los nodos temporalmente libres y ajuste la condición de contorno para  $\psi_h$
  - Resuelva la ecuación de la pseudo-concentración (6.8)
  - Suavice la pseudo-concentración (6.10)
  - Recalcule las propiedades físicas según (6.3)
  - Revise si  $\psi_h \geq \psi_c$  o  $\psi_h < \psi_c$  para los nodos temporalmente libres y ajuste las condiciones de contorno para  $\mathbf{u}_h$  (ver Cuadro 6.1)
    - Revise si se ha alcanzado el estado estacionario
- END WHILE  $n < N$  y (no-estacionario)
- END

## 6.5 Modelo numérico para la transmisión de calor durante el llenado de moldes

Uno de los intereses primordiales del llenado de moldes es la posibilidad de obtener el campo de velocidades y la posición del frente del material durante el llenado. Estas variables pueden ser utilizadas para resolver la ecuación del calor tanto en el molde como en el fluido, permitiendo predecir el campo de temperaturas en cada paso de tiempo.

El objetivo ahora es desarrollar una estrategia numérica para calcular el campo de temperaturas en el molde y en el fluido, a partir de las velocidades y de la posición del frente del material obtenidos utilizando el algoritmo presentado en el Cuadro 6.2. A continuación se presentará la definición del problema y se discutirán las posibles condiciones de contorno entre el fluido real y el aire, el fluido real y las paredes sólidas del molde, y el aire y el molde. En este trabajo se adoptó la condición de contorno más simple, esto es, contacto térmico perfecto entre todas las interfaces. Aunque esta aproximación no es realista y lleva a errores en la vecindad de las interfaces, una escogencia más complicada requeriría un estudio experimental profundo para determinar los parámetros físicos a emplear. Sin embargo, se observará que la estrategia numérica utilizada es capaz de capturar altos gradientes de temperatura.

### 6.5.1 Descripción del problema

Para describir el problema, se considera el dominio computacional  $\Omega$  ocupado por el molde y la cavidad a ser llenada, dividido en dos componentes como sigue

$$\Omega = \Omega_s \cup \Omega_f, \quad (6.30)$$

donde  $\Omega_s$  es la parte del dominio ocupada por el molde sólido y  $\Omega_f$  por el fluido. A su vez esta última parte se divide como

$$\Omega_f = \Omega_m \cup \Omega_a, \quad (6.31)$$

siendo  $\Omega_m$  la región llena por el líquido y  $\Omega_a$  la región vacía (llena de aire). Estos subdominios variarán a medida que el proceso de llenado se lleve a cabo.

El contorno  $\Gamma = \partial\Omega_f \cup \partial\Omega_s$  se descompone como

$$\Gamma = \Gamma_{sm} \cup \Gamma_{sa} \cup \Gamma_{ma}, \quad (6.32)$$

donde los subíndices  $s$ ,  $m$  y  $a$  se refieren al molde sólido, al líquido y al aire respectivamente. La situación se presenta esquemáticamente en la Figura 6.1.

El problema de condiciones iniciales y de contorno para la temperatura que se tiene que resolver se planteó en el apartado 6.3 (6.16), tomando  $Q = 0$  y un conjunto de condiciones de contorno sobre  $\partial\Omega$ ,  $\Gamma_{ma}$ ,  $\Gamma_{sm}$  y  $\Gamma_{sa}$ .

Antes de proseguir, se deja claro que la imposición de condiciones de contorno en la interface  $\Gamma_{ma}$  no es posible usando el método de la pseudo-concentración. La principal suposición de este método es precisamente que los flujos de las variables debido al cambio de propiedades en la interface son despreciables. En particular se supone un flujo de calor de cero y una temperatura continua en dicha interface.

La escogencia de las condiciones de contorno para  $\Gamma_{sm}$  y  $\Gamma_{sa}$  se describirá más adelante.

La velocidad utilizada en la ecuación (6.16) es

$$\mathbf{u} = \begin{cases} \mathbf{u}_h & \text{Calculada en } \Omega_f \\ \mathbf{0} & \text{en } \Omega_s \end{cases} \quad (6.33)$$

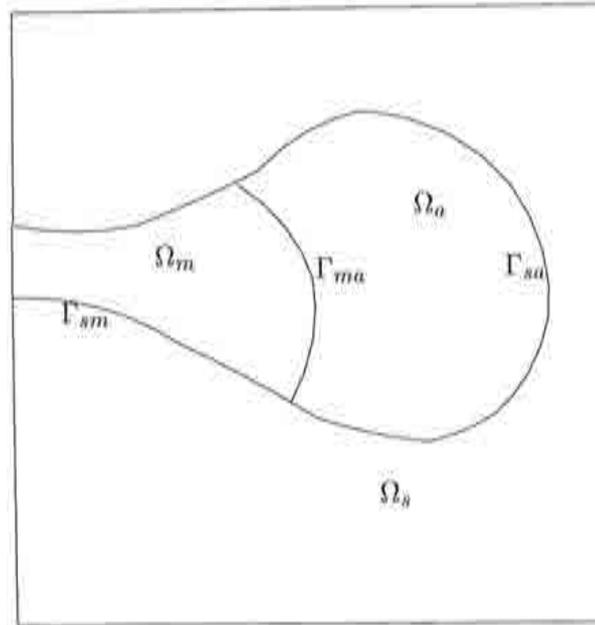


Figura 6.1. Definición del problema

Uno de los principales problemas es como leer las velocidades calculadas en  $\Omega_f$  utilizando las herramientas numéricas desarrolladas para el llenado de moldes. Esto se describirá más adelante.

Acercas de las propiedades físicas, si se denota por  $\pi$  a cualquiera de ellas, deben tomarse teniendo en cuenta la región donde se este resolviendo la ecuación (6.16), esto es,

$$\pi = \begin{cases} \pi_m & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_m \\ \pi_a & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_a \\ \pi_s & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_s \end{cases} \quad (6.34)$$

siendo  $\mathbf{x}$  el punto espacial.

### 6.5.2 Condiciones de contorno

En lo que sigue se seguirán utilizando los subíndices  $m$ ,  $a$  y  $s$  para identificar el líquido, el aire y el molde sólido respectivamente. También se denotará por  $\mathbf{n}$  la normal unitaria exterior a el contorno.

En la interface entre el líquido y el aire ( $\Gamma_{ma}$ ), se considera contacto térmico perfecto debido a la utilización del método de la pseudo-concentración para el seguimiento de la superficie libre. Las condiciones de contorno en dicha interface son entonces:

$$\vartheta_m = \vartheta_a \quad \text{y} \quad k_m \frac{\partial \vartheta_m}{\partial n} = -k_a \frac{\partial \vartheta_a}{\partial n} \quad (6.35)$$

Por consiguiente, esto implica que no se necesita interface alguna. La ecuación del calor puede resolverse en todo el dominio  $\Omega_f$  teniendo sólo en cuenta las propiedades físicas a usarse en un cierto punto cuando se evalúen las integrales resultantes de la discretización de elementos finitos (6.20). Las propiedades de un determinado punto espacial  $\mathbf{x} \in \Omega_f$  vienen dadas por (6.34).

Para las condiciones de contorno a imponer entre el fluido (líquido o aire) y el molde sólido (arena por ejemplo), existen varias posibilidades. El caso más sencillo, el cual se adoptó en el presente trabajo, es nuevamente el contacto térmico perfecto. En este caso se tiene:

$$\vartheta_f = \vartheta_s \quad \text{y} \quad k_f \frac{\partial \vartheta_f}{\partial n} = -k_s \frac{\partial \vartheta_s}{\partial n} \quad (6.36)$$

Nuevamente no se necesita ninguna condición de contorno en la interface, no teniéndose por consiguiente que realizar ningún esfuerzo adicional en la implementación. Sin embargo, se presentan algunos efectos físicos, tales como capas límites térmicas o convección superficial, que hacen este procedimiento poco realista. Éste será válido entonces sólo en el caso de mallas muy finas en la interface.

La condición de contorno más general que puede imponerse es del tipo Robin, considerando un flujo no lineal de calor en la interface. Este tipo de condición de contorno se escribiría como:

$$k_f \frac{\partial \vartheta_f}{\partial n} = \alpha(\vartheta_f^r - \vartheta_s^r) + q_f \quad (6.37)$$

$$k_s \frac{\partial \vartheta_s}{\partial n} = \alpha(\vartheta_s^r - \vartheta_f^r) + q_s \quad (6.38)$$

donde el exponente  $r$  tiene en cuenta formas no lineales de la transmisión de calor en la interface, y  $q_f$  y  $q_s$  son flujos de calor dados.

En resumen, obtenidos el campo de velocidades y la posición del frente del fluido en un determinado paso de tiempo, la ecuación del calor se resuelve para todo el dominio  $\Omega = \Omega_f \cup \Omega_s$ . En las aplicaciones prácticas hay una diferencia importante entre las propiedades del líquido, el aire y el material del molde. Además, el calor se transporta principalmente por convección, presentándose capas con gradientes de temperatura muy altas. Lo anterior hace necesario el uso del método SUPG y del método de captura de discontinuidades para la discretización espacial de la ecuación del calor. La integración temporal se realiza utilizando la regla trapezoidal. Por consiguiente, el problema discreto para obtener la temperatura es el que se presentó en la ecuación (6.20), tomando como  $\Omega$  todo el dominio (líquido, aire y molde sólido).

Finalmente, si se usa el método de la pseudo-concentración para transportar la superficie libre del líquido, el valor de las propiedades físicas tiene que ser guardado para cada punto de integración de cada elemento. Como se hizo anteriormente, se denota por  $\pi$  cualquier propiedad física, y por  $\pi_k^e$  su valor en el punto de integración  $k$  del elemento  $e$ . Para determinar como calcular  $\pi_k^e$ , se debe primero calcular el valor de la pseudo-concentración en dicho punto,  $\psi^e(\xi_k)$ , el cual se calcula a partir de los valores nodales de  $\psi$  para el elemento en cuestión. Estos valores se conocen de la simulación del flujo, la cual se supone hecha previamente. A los nodos del molde (la simulación del flujo con superficie libre se realiza sólo sobre  $\Omega_f$ ) se le asigna un valor  $\psi_s$  menor a los valores de  $\psi$  posibles para el líquido y el aire. Entonces,

$$\pi_k^e = \begin{cases} \pi_{\text{fluido}}(\xi_k) & \text{si } \psi^e(\xi_k) \geq \psi_c \\ \pi_{\text{aire}} & \text{si } \psi_s < \psi^e(\xi_k) < \psi_c \\ \pi_{\text{molde}} & \text{si } \psi^e(\xi_k) < \psi_s \end{cases} \quad (6.39)$$

Los valores de las propiedades para el líquido, el aire y el molde se presentan en los ejemplos numéricos al final del capítulo.

Finalmente cabe hacer una última observación para cuando se resuelve la ecuación del calor y se utiliza el método de la pseudo-concentración para transportar la superficie libre. Ésta se relaciona con la condición de contacto térmico perfecto entre el líquido y el aire. Considérese un

elemento atravesado por el frente. Para algunos de los puntos de integración se utilizarán las propiedades del fluido y para los otros las propiedades del aire. Claramente la exactitud de la regla de integración será pobre en dichos elementos, aunque ello no afecte de forma significativa la exactitud global. También se presentará un salto en los flujos de temperatura que se debe considerar. Esto es, si se denota por  $\Gamma_f^e$  la parte del frente del material que cruza un elemento  $e$ , y se considera la ecuación de la temperatura, este salto (debido a la aplicación del teorema de la divergencia) será

$$\int_{\Gamma_f^e} \phi [k_{\text{fluido}} \mathbf{n} \cdot (\nabla \vartheta)_{\text{fluido}} - k_{\text{aire}} \mathbf{n} \cdot (\nabla \vartheta)_{\text{aire}}] d\Gamma \quad (6.40)$$

donde  $\phi$  es la función de prueba para la temperatura. Debido a la discretización de elementos finitos, las derivadas de  $\vartheta$  dentro de cada elemento serán continuas, esto es,  $(\nabla \vartheta)_{\text{fluido}} = (\nabla \vartheta)_{\text{aire}}$ , y por consiguiente esta integral no es cero si los coeficientes de difusión son diferentes. La continuidad de los flujos de calor para el problema continuo implica que los términos entre corchetes deben ser cero.

### 6.5.3 Estrategia de solución

Para el caso de contacto térmico perfecto, la estrategia de solución es simple. Una vez conocido el campo de velocidad y de pseudo-concentración en la malla de elementos finitos sobre el dominio de flujo  $\Omega_f$ , estos son interpolados a la malla de elementos finitos que cubre el dominio total  $\Omega = \Omega_f \cup \Omega_s$  y se resuelve la ecuación discretizada de temperatura (6.20) sobre todo  $\Omega$  (líquido, aire y molde sólido). Este procedimiento se repite para cada paso de tiempo.

Los datos que se necesitan para resolver la ecuación de temperatura (velocidades y pseudo-concentraciones nodales) se leen desde el código de flujo por un programa de interface, el cual interpola los valores de la malla de flujo (malla sobre  $\Omega_f$ ) a la malla donde se resuelve el problema térmico (malla sobre  $\Omega_f \cup \Omega_s$ ). El programa que resuelve la ecuación de temperatura lee los datos interpolados por el programa de interface y resuelve la temperatura sobre todo el dominio  $\Omega$ . Obsérvese que los pasos de tiempo en ambos cálculos deben ser iguales para que los resultados tengan sentido.

El tipo de elemento usado para resolver el problema de flujo y superficie libre sobre  $\Omega_f$ , puede ser diferente al utilizado para resolver el problema térmico. Adicionalmente, los nodos de la malla sobre  $\Omega_f$  no tienen por qué coincidir con nodos de la malla sobre  $\Omega$  (aunque lógicamente  $\Omega_f \subset \Omega$ ). El procedimiento para interpolar cualquier variable de la malla sobre el dominio de flujo  $\Omega_f$  a la malla sobre el dominio donde se resuelve el problema térmico es estándar y se describe en el Cuadro 6.3.

Mediante procedimiento del Cuadro 6.3 se encuentra para cada nodo  $j$  del problema térmico que está dentro de  $\Omega_f$ , el elemento  $e$  de la malla del problema de flujo que lo contiene, y sus respectivas funciones de forma  $N_i^e$  evaluadas en las coordenadas naturales  $\xi_j$  ( $\xi_j$  son las coordenadas naturales correspondientes a la posición espacial  $\mathbf{x}_j$  del nodo térmico  $j$ ).

Obtenido lo anterior cualquier variable nodal del problema de flujo  $\varrho$ , se interpola al nodo  $j$  de la malla del problema térmico contenido en el elemento  $e$  de  $\Omega_f$  como:

$$\varrho_j = \sum_{i=1}^{n_n} N_i^e(\xi_j) \varrho_i^e \quad (6.41)$$

Para los nodos de la malla del problema térmico no contenidos en  $\Omega_f$ , se asigna un valor de cero en el caso de que la variable interpolada sea una de las componentes de la velocidad, o de  $\psi_s$  (ver (6.39)) en el caso de la pseudo-concentración.

**Cuadro 6.3 Algoritmo de interpolación de la malla de flujo  $\Omega_f$  a la malla de temperatura  $\Omega$**

- FOR  $j = 1, n_{pt}$  ( $j \in \Omega$  es un nodo de la malla térmica y  $n_{pt}$  su número de nodos)
  - Escoja un elemento  $e \in \Omega_f$  (malla problema de flujo) cercano a  $x_j$  ( $x_j$  son las coordenada espaciales del nodo  $j \in \Omega$ )
  - WHILE no encuentre el elemento  $e \in \Omega_f$  donde está  $j$ , y  $e \leq n_{el}$  ( $n_{el}$ : Número de elementos cercanos a  $x_j$ )
    - Para el elemento  $e \in \Omega_f$  (malla problema de flujo) encuentre las coordenadas en el dominio natural  $\xi_j$  de  $x_j$  resolviendo mediante el método de Newton-Raphson la siguiente ecuación:

$$x_j = \sum_{i=1}^{n_n} N_i^e(\xi_j) x_i^e$$

donde  $e$  se refiere al elemento en cuestión,  $n_n$  es el número de nodos de cada elemento del problema de flujo,  $N_i^e$  sus respectivas funciones de forma y  $x_i^e$  las posiciones espaciales de los nodos del elemento  $e$

- Si  $\xi_j$  se encuentra dentro del dominio natural del elemento guarde  $e$  y  $N_i^e(\xi_j)$ . El elemento  $e$  se encontró (salga del bucle WHILE)
- Si  $\xi_j$  no se encuentra dentro del dominio natural del elemento y no se han escogido todos los elementos cercanos a  $x_j$  escoja un nuevo elemento  $e$
- END WHILE
- END FOR
- END

## 6.6 Ejemplos numéricos

A continuación se presentan una serie de ejemplos numéricos de flujo con superficie libre, con el fin de mostrar la efectividad de los métodos y algoritmos presentados en el capítulo, y comparar algunos resultados con los presentados en otras referencias tanto experimentales como numéricas.

### -Llenado bidimensional

A continuación se describe un problema bidimensional que incluye la simulación del llenado de una cavidad encerrada por un molde de arena, y la transferencia de calor entre el fluido, el aire de la cavidad y la mencionada arena del molde.

La geometría y la malla de elementos finitos para el problema de llenado se muestran en la Figura 6.2a. Ésta consta de 532 elementos triangulares  $P2^+/P1$  y 1683 nodos. La malla para el problema de transmisión de calor se muestra en la Figura 6.2b. Ésta consta de 948 elementos  $P1$  y 507 nodos. Puede observarse que esta segunda malla contiene la cavidad a ser llenada.

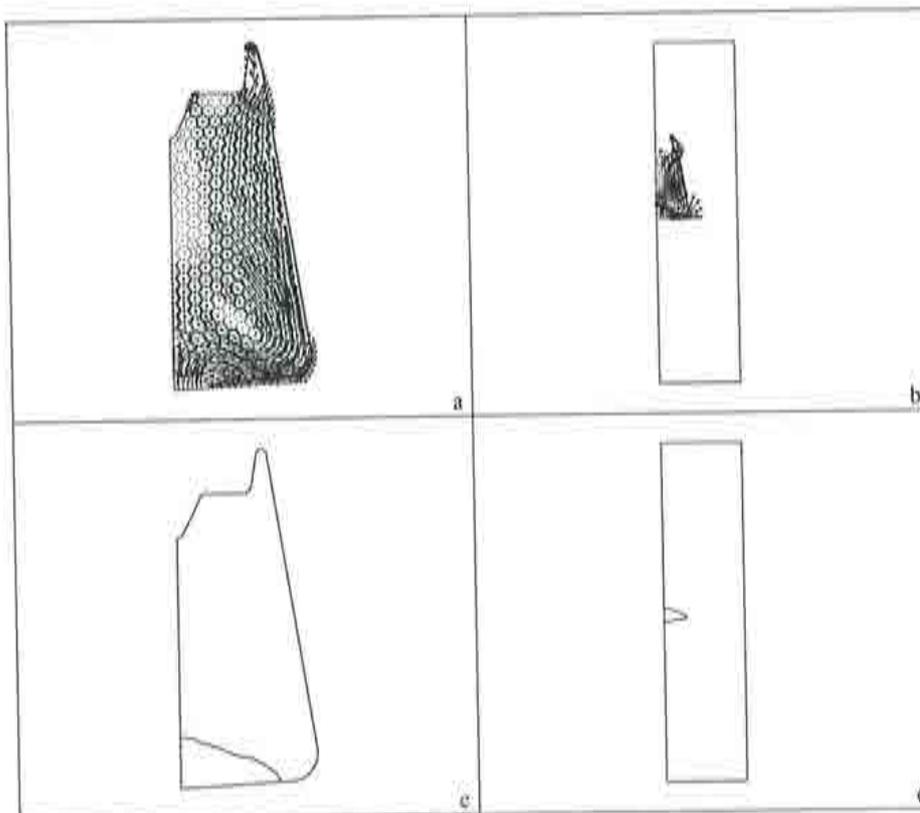
Las propiedades físicas que se emplearon (en sistema SI) son para el fluido:  $\rho = 6700$ ,  $\mu = 9$ ,  $k = 30$  y  $c_p = 840$ ; para el aire:  $\rho = 1.2$ ,  $\mu = 0.018$ ,  $k = 0.0256$  y  $c_p = 1005$ ; y para la arena:  $\rho = 1550$ ,  $k = 0.7$  y  $c_p = 1214$ .

El fluido entra al molde a través de un agujero en la base de 10 mm de longitud con una velocidad de 141.7 mm/s. Con el fin de que el aire pueda salir, se dejaron algunos agujeros en las paredes de la cavidad encerrada por el molde.

La temperatura del fluido que entra al molde es de  $T = 1350$  grados Celsius y la arena está inicialmente a 20 grados. La componente normal de la velocidad se prescribió a cero en las



**Figura 6.2.** Llenado bidimensional. (a): Malla para el problema de llenado. 532 elementos  $P2^+/P1$  y 1638 nodos. (Cada elemento se encuentra dividido en 4 cuadriláteros para visualizar todos los nodos). (b): Malla para el problema de calor. 948 elementos  $P1$  y 507 nodos.



**Figura 6.3.** Llenado bidimensional.  $t = 0.5$  s. (a): Campo de velocidades sobre la malla del llenado. (b): Campo de velocidades interpolado sobre la malla del problema térmico. (c): Superficie del fluido sobre la malla del llenado. (d): Superficie del fluido sobre la malla del problema térmico.

paredes de la cavidad, y la tangente se dejó libre (condición deslizante). La temperatura se prescribió en la entrada del canal. Las paredes exteriores del molde de arena se consideraron

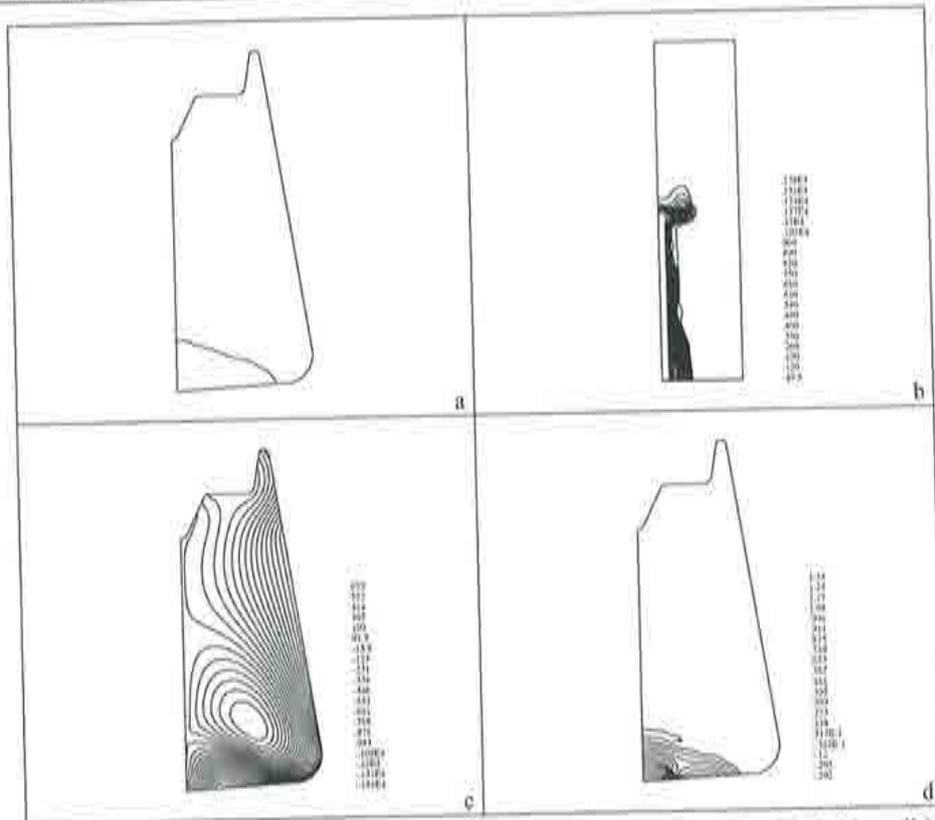


Figura 6.4. Llenado bidimensional.  $t = 0.5$  s. (a): Superficie del fluido. (b): Contornos de temperatura. (c): Líneas de corriente. (d): Presiones.

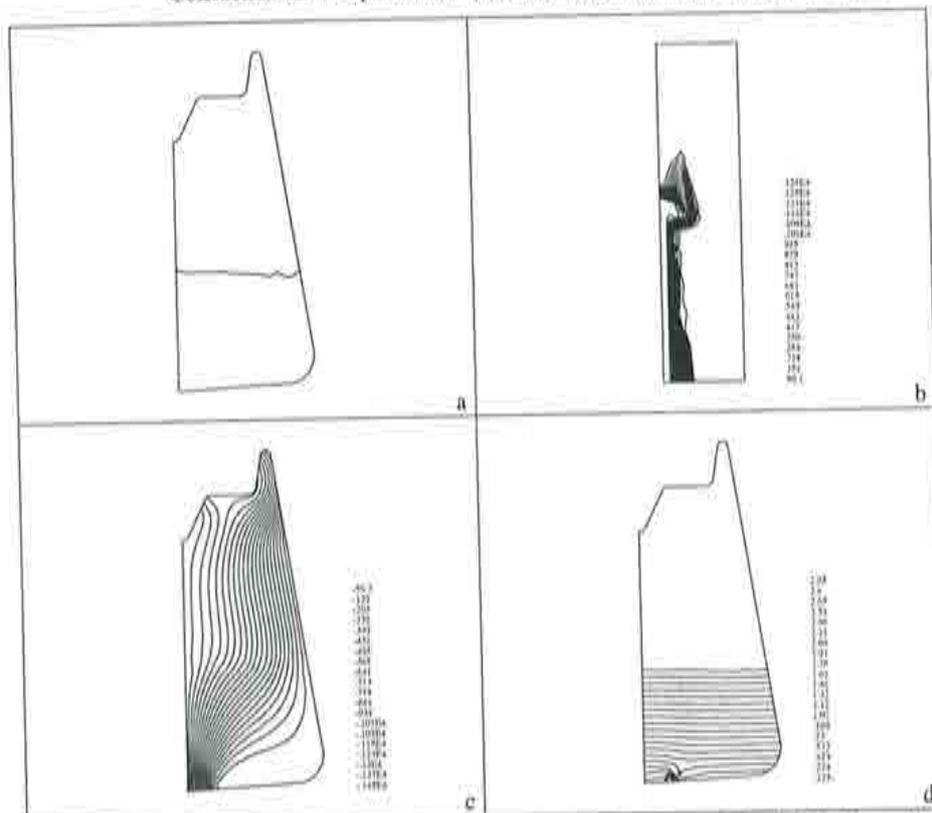
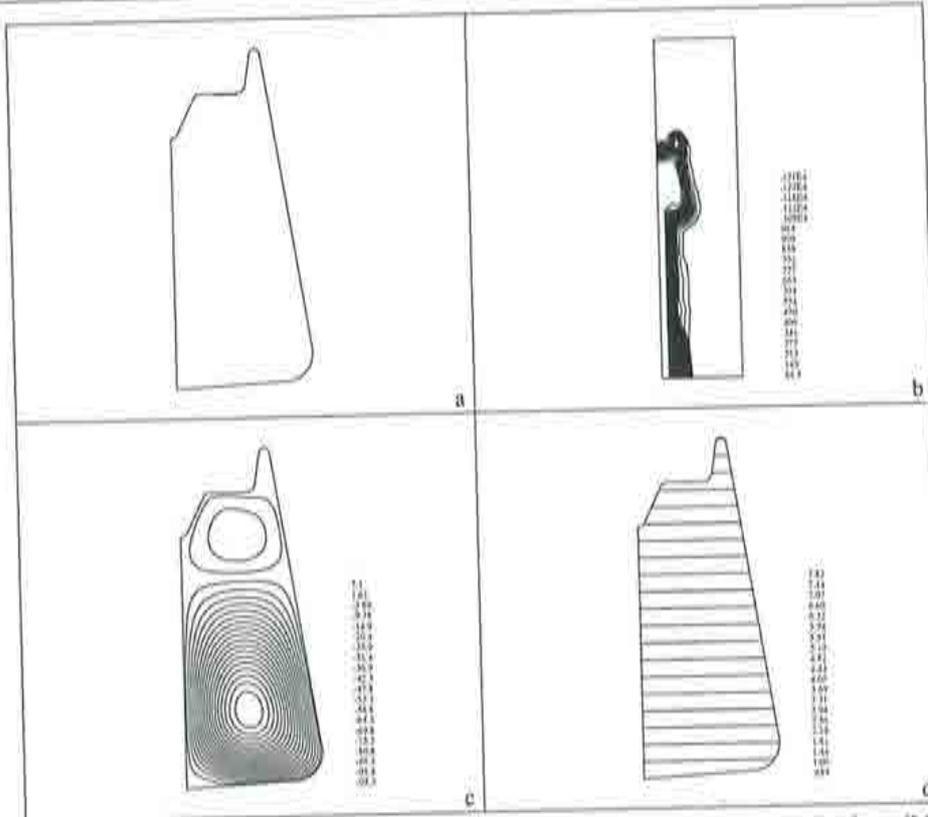


Figura 6.5. Llenado bidimensional.  $t = 1.5$  s. (a): Superficie del fluido. (b): Contornos de temperatura. (c): Líneas de corriente. (d): Presiones.



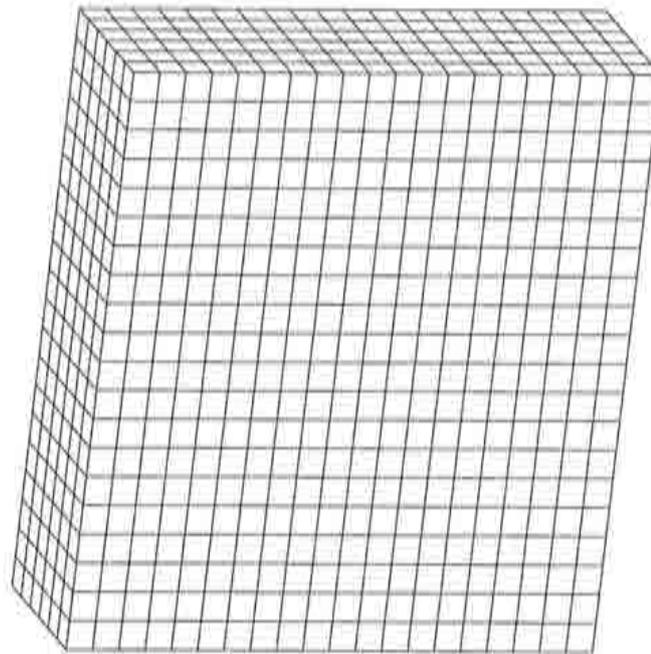
**Figura 6.6.** Llenado bidimensional.  $t = 3.5$  s. (a): Superficie del fluido. (b): Contornos de temperatura. (c): Líneas de corriente. (d): Contornos de presión.

adiabáticas, mientras que se consideró contacto térmico perfecto en la interface entre el fluido y el molde, y el aire y el molde.

La ecuación de Navier-Stokes se discretizó utilizando el método SUPG, y la presión se eliminó elementalmente por medio de un esquema de penalización iterativa. La ecuación de la pseudo-concentración también se discretizó con el método SUPG. La ecuación de la temperatura se discretizó utilizando el método SUPG+ASC. Los parámetros tanto para las contribuciones del SUPG como del ASC fueron los estándar (ecuaciones (2.19) y (2.18) para definir la función de "upwind", y  $C = 0.7$  en (2.79) para el ASC). Todas las ecuaciones se discretizaron en el tiempo utilizando el método Euler hacia atrás ( $\theta = 1$ ) con un paso de tiempo de  $\Delta t = 0.1$ s. La pseudo-concentración fue alisada en cada paso de tiempo utilizando una pendiente de  $\sigma = 0.02$ .

En las Figuras 6.3 puede observarse que la interpolación de las velocidades y de la pseudo-concentración de la malla de flujo (malla de la cavidad) a la malla donde se lleva a cabo el cálculo de la temperatura (malla del molde más cavidad) se realiza de forma adecuada. En las Figuras 6.4, 6.5 y 6.6 se muestra la evolución del llenado en la cavidad; la evolución del campo de temperaturas en el fluido, en el aire y en el molde de arena; las líneas de corriente y la distribución de presiones para varios pasos de tiempo. Los resultados son bastante lógicos en general. En el caso de no utilizar el método anisotrópico de captura de discontinuidades, se producen oscilaciones localizadas de temperatura en las interfaces (entre la cavidad y el molde de arena, y el fluido y el aire) debido a los altos gradientes de dicha variable en esas zonas.

En cuanto a las presiones se puede observar que predomina el efecto gravitatorio. Para  $t = 3.5$  s (Figura 6.6) el molde está prácticamente lleno y, a pesar que se deja de inyectar fluido, éste sigue circulando dentro del molde debido a efectos inerciales.

**-Llenado tridimensional**

**Figura 6.7.** Llenado tridimensional. Malla de 2400 elementos  $Q1/P0$  y 3087 nodos.

El ejemplo consiste en el llenado de una caja hexahédrica de  $2.5 \times 2.5 \times 0.75$  m a través de una entrada rectangular. El dominio computacional es el hexahédro  $[0, 2.5] \times [0, 2.5] \times [0, 0.75]$ . El agujero de entrada se encuentra contenido en el plano  $y-z$  y es el rectángulo  $\{0\} \times [0, 0.625] \times [0, 0.5]$ . La velocidad se prescribió a la entrada con una variación lineal de  $\mathbf{u} = (20, 0, 0)$  para  $z = 0$  a  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  para  $z = 0.5$ . El resto de los contornos se tomaron de tipo deslizante, dejando algunos agujeros para evacuar el aire. La malla consta de 2400 elementos  $Q1/P0$  y 3087 nodos (ver Figura 6.7). El valor de las propiedades físicas para el líquido son:  $\mu = 9.0 \times 10^{-4}$ ,  $\rho = 6.7 \times 10^{-6}$ ,  $c_p = 8.4 \times 10^8$  y  $k = 3.0 \times 10^4$ ; y para el aire son:  $\mu = 1.8 \times 10^{-6}$ ,  $\rho = 1.2 \times 10^{-9}$ ,  $c_p = 1.005 \times 10^9$  y  $k = 25.6$ .

La ecuación de Navier-Stokes se discretizó utilizando el método SUPG, y la presión se eliminó elementalmente por medio de un esquema de penalización iterativa.

Las ecuaciones de la pseudo-concentración y de la temperatura también se discretizaron con el mismo método. Los parámetros para la contribución del SUPG fueron los estándar (ecuación (2.19) para definir la función de "upwind"). Todas las ecuaciones se discretizaron en el tiempo utilizando el método Euler hacia atrás ( $\theta = 1$ ) con un paso de tiempo de  $\Delta t = 0.1$ . La pseudo-concentración se suavizó en cada paso de tiempo utilizando una pendiente de 0.66.

En las Figuras 6.8 y 6.9 puede observarse la evolución de la superficie del material a través del tiempo. Obsérvese que la superficie del material es suave (esto es gracias al suavizado del frente). En la Figura 6.9c se presenta un corte por el plano  $z = 0.375$  del campo de velocidades remanente una vez que se ha dejado de inyectar líquido al molde (el molde no se llenó del todo al quedar una burbuja de aire que no se evacuó debido a la posición de los agujeros). La 6.9d presenta el esquema de presiones final sobre el corte  $z = 0.375$  (prácticamente hidrostático).

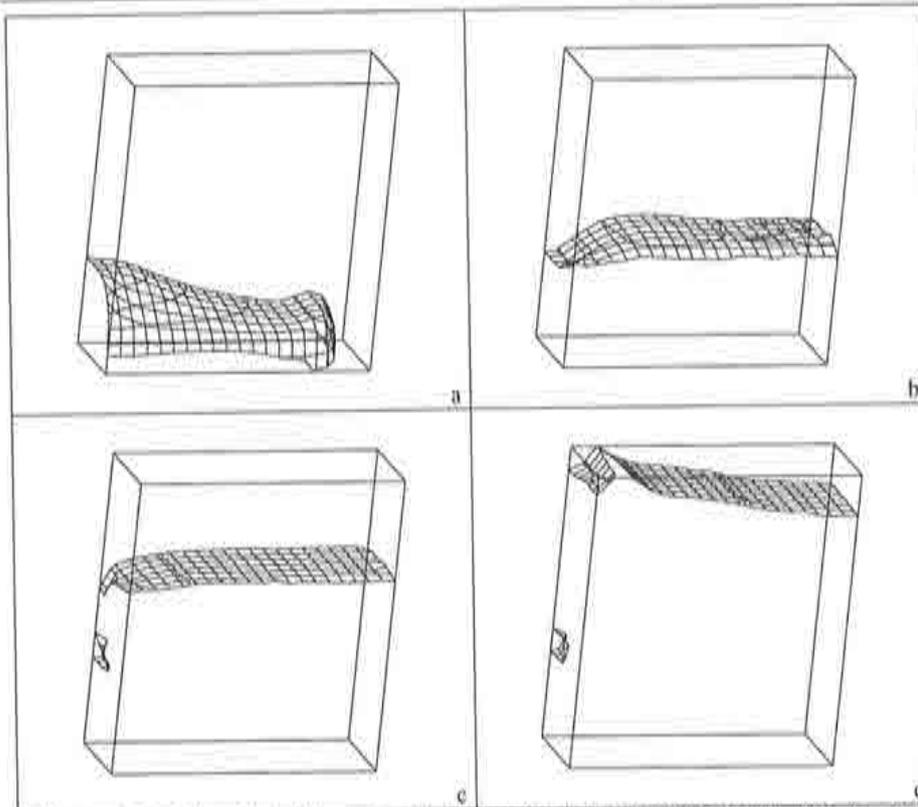


Figura 6.8. Llenado tridimensional. Evolución de la superficie libre. (a):  $t = 0.5$ . (b):  $t = 1.0$ . (c):  $t = 1.5$ . (d):  $t = 2.0$ .

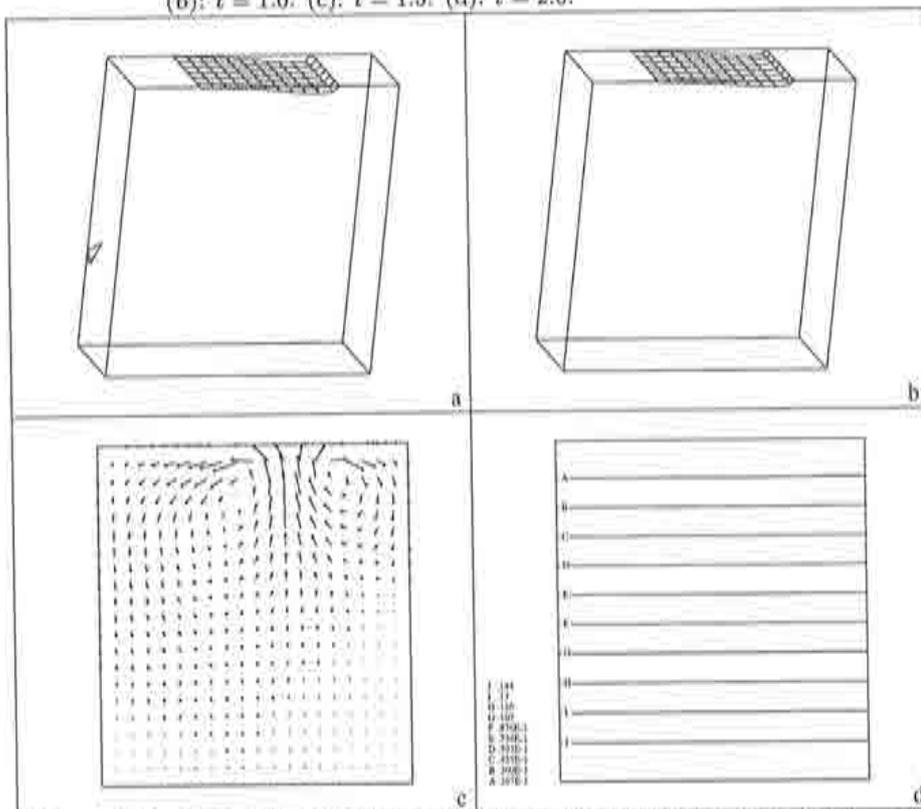


Figura 6.9. Llenado tridimensional. Evolución de la superficie libre. (a)  $t = 2.5$ . (b):  $t = 3.0$ . (c): Velocidades culminada la inyección. Plano  $z = 0.375$ ,  $t = 3.0$ . (d): Presiones culminada la inyección. Plano  $z = 0.375$ ,  $t = 3.0$ .

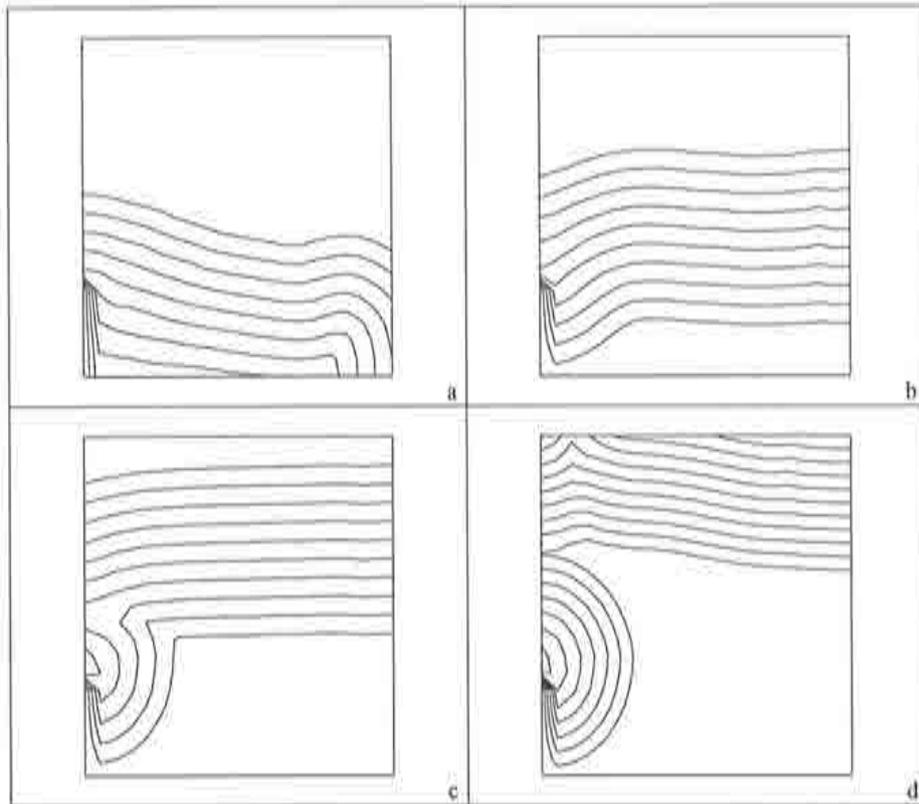


Figura 6.10. Llenado tridimensional. Pseudo-concentración suavizada corte plano  $z = 0.375$ . (a):  $t = 0.5$ . (b):  $t = 1.0$ . (c):  $t = 1.5$ . (d):  $t = 2.0$ .

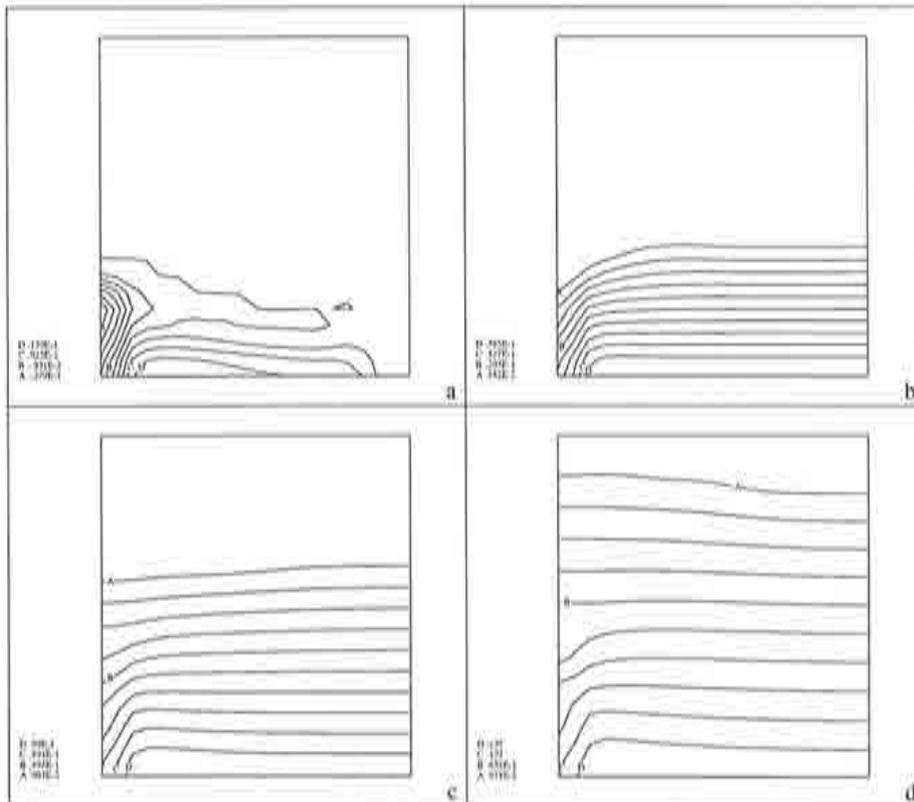


Figura 6.11. Llenado tridimensional. Evolución del campo de presión plano  $z = 0.375$ . (a):  $t = 0.5$ . (b):  $t = 1.0$ . (c):  $t = 1.5$ . (d):  $t = 2.0$ .

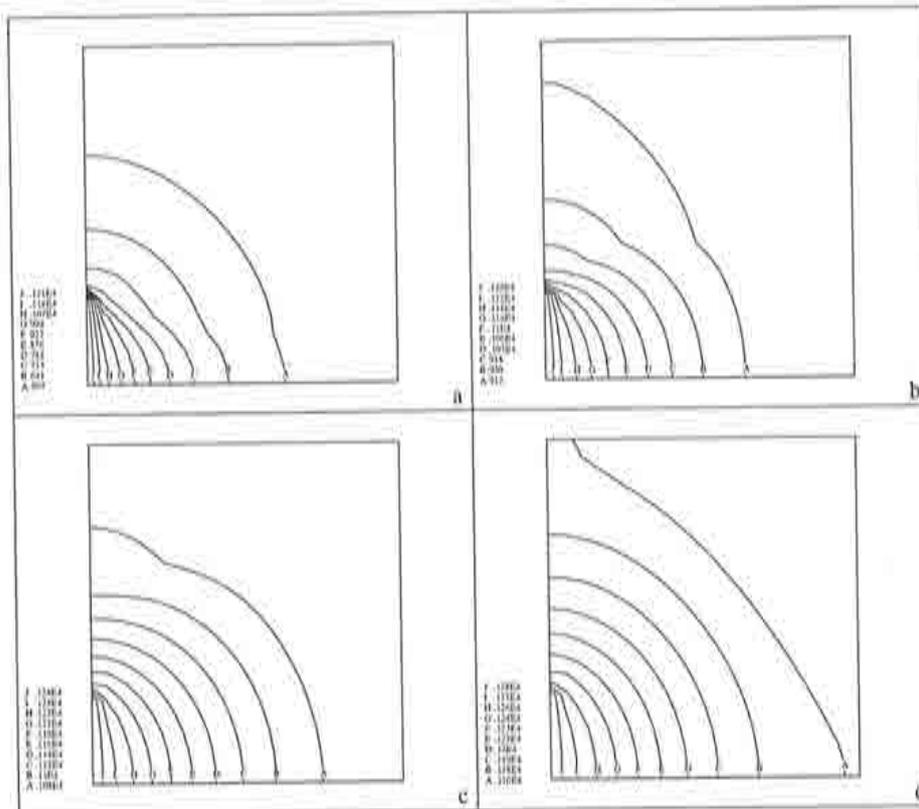


Figura 6.12. Llenado tridimensional. Evolución del campo de temperatura plano  $z = 0.375$ . (a):  $t = 0.5$ . (b):  $t = 1.0$ . (c):  $t = 1.5$ . (d):  $t = 2.0$ .

En las Figuras 6.10, 6.11 y 6.12 se presenta la evolución del campo de pseudo-concentración, de presiones y de temperaturas sobre el corte mencionado, respectivamente. Sobre la Figura 6.10 se corrobora el buen funcionamiento del método para suavizar el frente del material.

### -Perfil NACA sumergido

El siguiente ejemplo tiene como principal objetivo mostrar la capacidad del método de la pseudo-concentración para reproducir ondas superficiales (olas). Existen resultados experimentales y numéricos para el ejemplo en las referencias [HMJ96, LYO196].

El ejemplo consiste en calcular el flujo y la superficie libre que produce un perfil NACA0012 sumergido en agua viajando a una velocidad de 1.776 m/s y con un ángulo de ataque de cinco grados. Las propiedades del agua en sistema internacional (SI) a 20 grados centígrados son: Viscosidad dinámica  $\mu = 0.001$ , y densidad  $\rho = 1000$ ; las del aire son:  $\mu = 0.000018$ , y  $\rho = 1.2$ . El número de Reynolds del ejemplo calculado con las propiedades del agua es de  $Re = 1.776 \times 10^6$ , y el número de Froude de  $Fr = 0.5673$  ( $Fr = U/\sqrt{gL}$  donde  $U$  es una velocidad característica del flujo,  $g$  la gravedad y  $L$  una longitud típica del flujo).

El dominio computacional es el rectángulo  $[-6.0, 11.0] \times [-4.4, 3.0]$  menos el perfil NACA0012 (ver Figura 6.13). La malla de 16650 elementos  $P1/P1$  y 8440 nodos pueden observarse en la Figura 6.13. Ésta se refina cerca a la posición donde originalmente se encuentra la superficie libre ( $y = 0.9904$ ). Las condiciones de contorno para las ecuaciones de Navier Stokes son (unidades SI):  $\mathbf{u} = (1.776, 0.0)$  en la recta  $x = -6.0$  (entrada),  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$  en las rectas  $y = 3.0$  (contorno superior) y en el segmento de recta comprendido entre las coordenadas (11.0, 0.9904) y (11.0, 3.0) (contorno de salida donde hay aire inicialmente), en el segmento de recta entre (11.0, -4.4) y

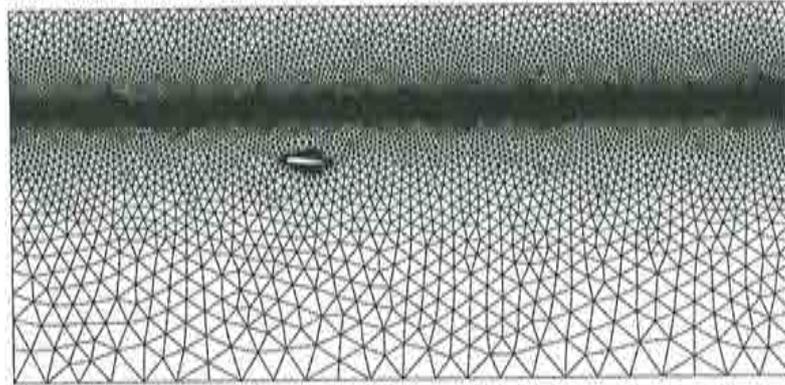


Figura 6.13. NACA sumergido. Malla de 16650 elementos  $P1/P1$  y 8440 nodos.

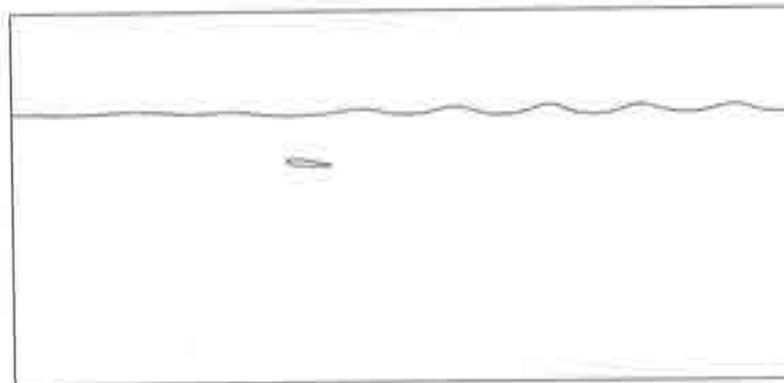


Figura 6.14. NACA sumergido. Superficie libre para  $t = 20s$ .

(11.0, 0.9904) (resto del contorno de salida) se prescribió tensión hidrostática:

$$(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{n} = -(\rho_{\text{agua}} - \rho_{\text{aire}})g(0.9904 - y) \quad (6.42)$$

$$(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{t} = 0 \quad (6.43)$$

Finalmente en el contorno inferior ( $y = -4.4$ ) y sobre el perfil se impuso  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0$  y  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{t} = 0$ . En toda la malla, excepto en los nodos sobre el perfil, se da una condición inicial para la velocidad de  $\mathbf{u} = (1.776, 0.0)$  (sobre el perfil se da  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ).

Para la pseudo-concentración se da una condición inicial suavizada  $\psi_0(\mathbf{x})$  en toda la malla dada por:

$$\psi_* = -2.4y + 2.87696, \text{ donde } \psi_0(\mathbf{x}) = \begin{cases} \psi_* & \text{si } 0 \leq \psi_* \leq 1 \\ 0 & \text{si } \psi_* < 0 \\ 1 & \text{si } \psi_* > 1 \end{cases} \quad (6.44)$$

En el contorno de entrada  $x = -6.0$  esta se prescribe al valor dado por (6.44), y sobre el perfil se deja libre. En el resto de los contornos se prescribe o no al valor del paso de tiempo anterior según la velocidad esté entrando o no al dominio de flujo.

Al intentar utilizar el método de la pseudo-concentración, tal como se expuso en el presente capítulo, para predecir las ondas de superficie (olas) se llegó a soluciones totalmente erróneas. Esto se pudo explicar por lo siguiente: Sean  $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{t}$  los vectores unitarios normal y tangente a la

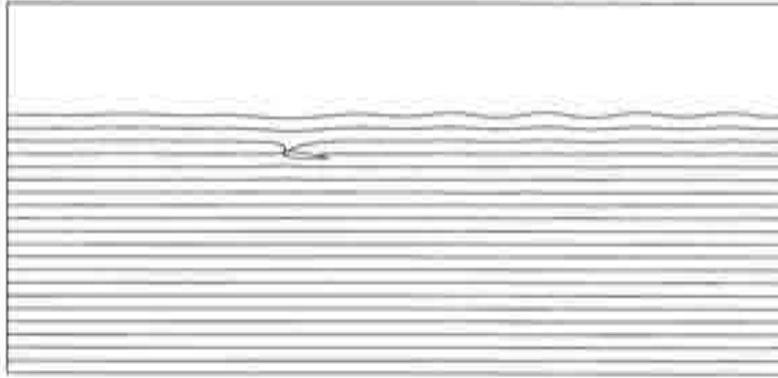


Figura 6.15. NACA sumergido. Contornos de presión  $t = 20s$ . Picos (52850, -462).

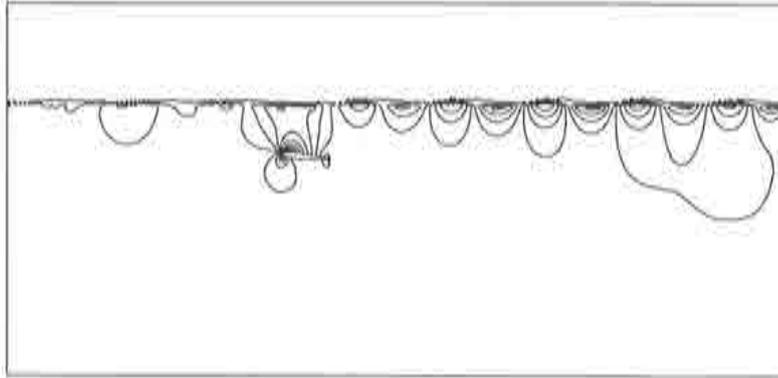


Figura 6.16. NACA sumergido. Contornos de presión quitando la contribución de la gravedad  $t = 20s$ . Picos (1190, -2940).

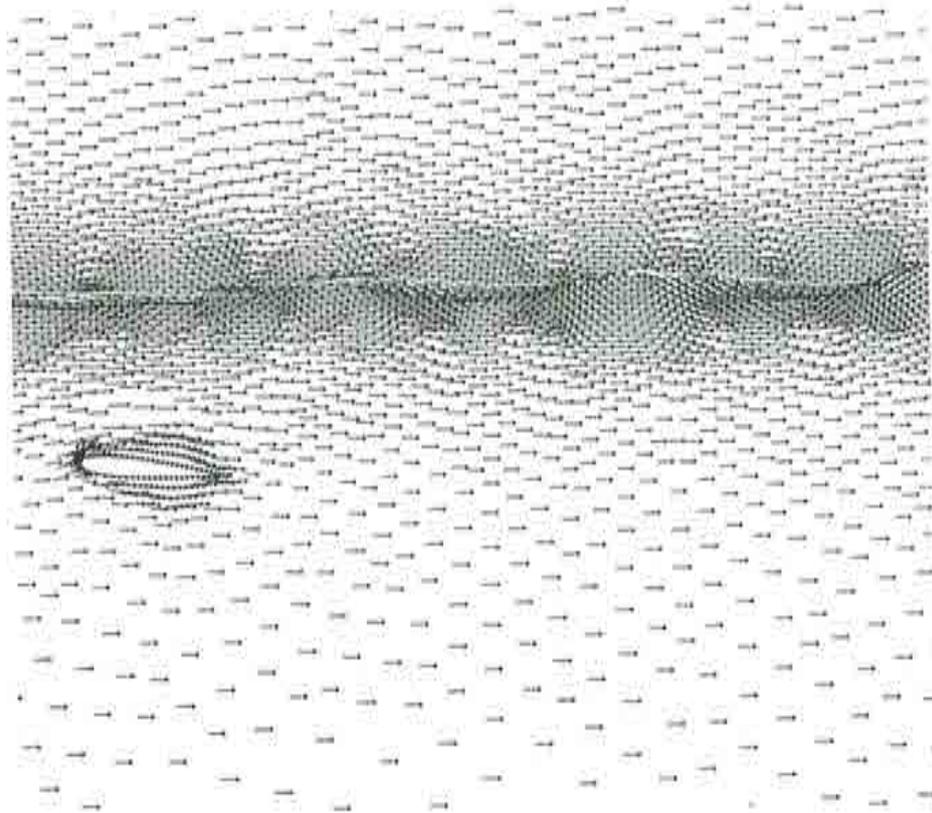
interfase. Sean  $u_n$  y  $u_t$  las componentes normal y tangente de la velocidad en la interfase. Tanto  $\mathbf{t} \cdot \nabla u_t$ , como  $\mathbf{n} \cdot \nabla u_n$ , y como la presión son continuas en la interfase (esto es inherente al método de la pseudo-concentración). Por lo tanto  $\mathbf{n}_{\text{aire}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\text{aire}} \neq -\mathbf{n}_{\text{agua}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\text{agua}}$  ya que  $\mu_{\text{aire}} \neq \mu_{\text{agua}}$ , lo cual es físicamente incorrecto.

El anterior problema se produce en toda la franja de elementos que corta la superficie libre. La corrección al mismo se realizó no ensamblando las contribuciones del aire a la matriz ni al lado derecho elemental en dicha franja (si el elemento es cruzado por el frente, las contribuciones de los puntos de integración que queden en el aire se hacen cero). Esto convierte la superficie del material en un contorno tipo Neumann donde se prescribe

$$\mathbf{n}_{\text{agua}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\text{agua}} = \mathbf{0} \quad (6.45)$$

mas no se exige nada sobre  $\mathbf{t}_{\text{agua}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\text{agua}}$ . En el caso que  $p = 0$  se tiene de (6.45)  $\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  lo cual exige que el campo de velocidades sea tangente a la superficie libre (condición típica para la superficie libre). Aunque la condición  $p = 0$  no se exige en forma explícita, en el ejemplo numérico se observa que esto se cumple bastante bien.

Para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes se utilizó el método GLS con los parámetros estándar para elementos lineales. La ecuación de la pseudo-concentración se discretizó utilizando el método SUPG. Ésta se suavizó en cada paso de tiempo utilizando una pendiente de 2.4 (la misma que se da inicialmente (6.44)). La integración temporal se realizó utilizando el método de Euler hacia atrás con un paso de tiempo de  $\Delta t = 0.04s$ .



**Figura 6.17.** NACA sumergido. Campo de velocidades alrededor del perfil  $t = 20s$ .

En la Figura 6.14 pueden observarse las olas sobre la superficie libre para  $t = 20s$ . La amplitud de onda es de aproximadamente 0.1m y la longitud de la misma de 2.0m. Estos resultados concuerdan bastante bien con los presentados en [HMJ96, LYOI96]. En la Figura 6.15 se presenta el campo de presiones para el mismo paso de tiempo. Ésta es casi hidrostática excepto en los alrededores del perfil y en las olas. En el aire la presión es prácticamente cero. En la Figura 6.16 se observa el mismo resultado pero quitando la contribución de la gravedad (se tomó como datum la posición inicial de la superficie libre  $y = 0.9904$ ). En la Figura 6.17 se presenta el campo de velocidades en las cercanías del perfil. Finalmente en la Figura 6.18 se presenta la distribución del coeficiente de presión  $C_p = p/(0.5\rho|\mathbf{u}_\infty|^2)$  alrededor del perfil ( $|\mathbf{u}_\infty| = 1.776$  m/s).

## 6.7 Comentarios y conclusiones

En el presente capítulo se expuso la técnica de la pseudo-concentración para el seguimiento del frente del fluido en problemas con superficie libre. Ésta, como es conocido, no es original del presente trabajo siendo el aporte fundamental del mismo un aspecto enteramente algorítmico: El suavizado del frente del material para dos y tres dimensiones.

En el capítulo también se planteó la solución numérica de la ecuación de la temperatura utilizando la técnica anisotrópica de captura de discontinuidades (ASC) con el fin de eliminar las oscilaciones localizadas que pueden presentarse en capas con altos gradientes. Dichas capas

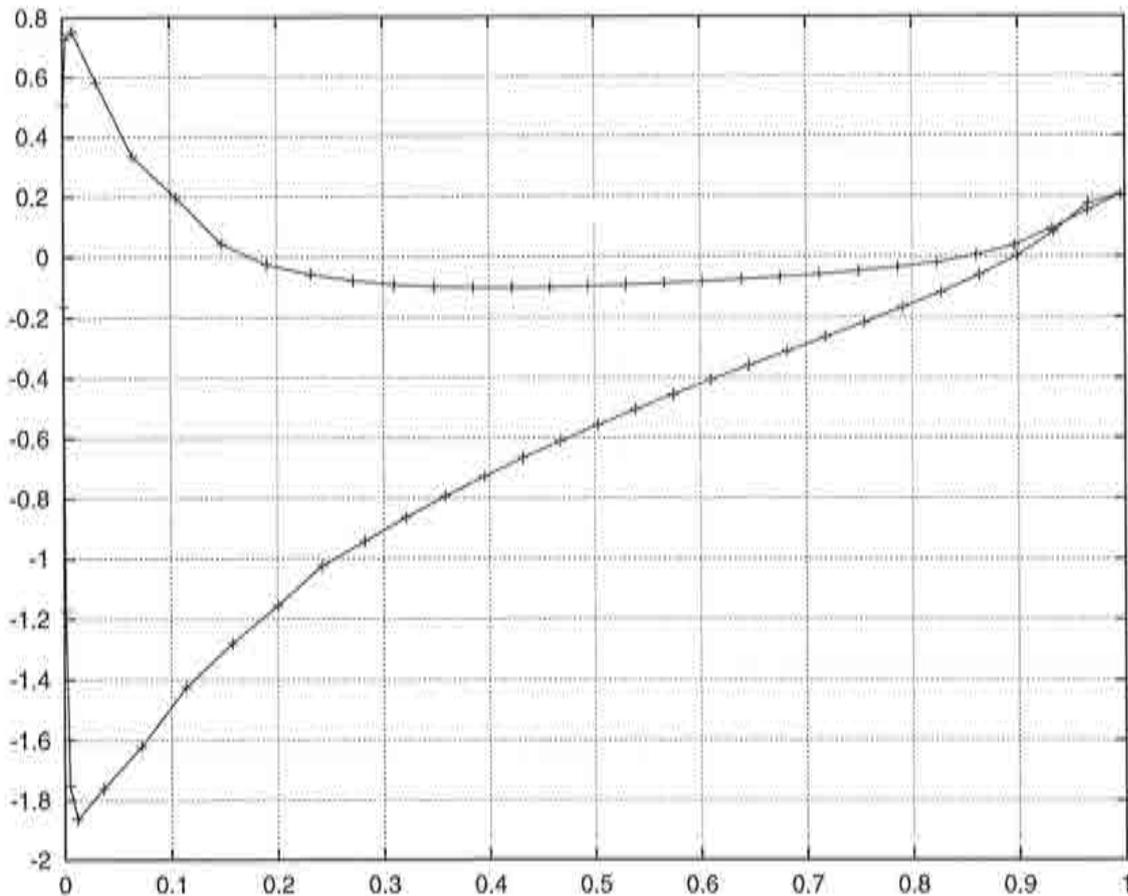


Figura 6.18. NACA sumergido. Coeficiente de presión alrededor del perfil  $t = 20s$ .

son muy comunes en la solución de problemas industriales, en los cuales se tienen interfaces entre varios tipos de materiales con diferentes propiedades térmicas. Uno de los problemas tratados fue el llenado de moldes, en los que se tiene interfaces entre el fluido que llena la cavidad, el aire y el molde. Adicionalmente, para dicho problema se desarrolló una técnica con el fin de interpolar el campo de velocidad y de pseudo-concentración de la mallas donde se calcula el flujo a la malla donde se resuelve el problema térmico.

En los ejemplos numéricos se comprobó el buen funcionamiento de las técnicas desarrolladas para el problema de llenado en dos y tres dimensiones, así como la efectividad del método anisotrópico de captura de discontinuidades (ASC) para eliminar las oscilaciones localizadas en las capas con altos gradientes de temperatura.

Finalmente se afinó el método de la pseudo-concentración con el fin de poder simular ondas de superficie (olas). Debido a que en el método original se tiene continuidad a través de la superficie libre de los gradientes de velocidad y de las presiones, el método impone una condición de contorno sobre la superficie libre errónea tanto física como matemáticamente. Un aporte importante del presente capítulo fue el tratamiento de los elementos cortados por el frente del material con el fin de imponer la condición real de superficie libre en el caso del problema de ondas superficiales. Esta metodología se validó con un ejemplo numérico donde se tienen resultados experimentales y numéricos de diversos autores. Los resultados presentaron buena concordancia con los que se encuentran en la bibliografía mencionada.

## Capítulo 7

# Aplicaciones

### 7.1 Introducción y objetivos

A lo largo de la monografía se propuso una metodología para resolver problemas de flujo incompresible tanto en régimen laminar como turbulento. También se expuso el método de la pseudo-concentración con algunas modificaciones propias del presente trabajo para tratar con problemas que involucren superficies libres, y se expuso la solución numérica de la ecuación de temperatura involucrando técnicas para estabilizar la convección y las zonas con altos gradientes. En cada capítulo se aportaron ejemplos numéricos con el fin de validar las diferentes metodologías, obteniéndose resultados satisfactorios.

A continuación se expondrán algunos problemas prácticos en los cuales deben emplearse los métodos expuestos para su solución. La mayoría de ellos involucran técnicas presentadas en diferentes capítulos, por ejemplo, esquemas de solución de la turbulencia con técnicas de tratamiento de la superficie libre, o flujos turbulentos con alta rotación, o rotación y convección importantes, etc. Las ecuaciones de Navier-Stokes (o de Reynolds dado el caso) se linealizaron utilizando el método de Picard (a menos que se especifique lo contrario), ya que los ejemplos a continuación presentan altos números de Reynolds.

### 7.2 Llenado de molde turbulento bi-dimensional

Este ejemplo trata del llenado de un molde bidimensional con metal fundido. La geometría y la malla de elementos finitos puede observarse en la Figura 7.1. La malla consiste de 2460 elementos  $Q1/P0$  y 2688 nodos. Las propiedades físicas del metal son (unidades SI):  $\rho = 6700$ ,  $\mu = 9 \times 10^{-3}$ ,  $k = 30$  y  $c_p = 840$ ; para el aire:  $\rho = 1.2$ ,  $\mu = 1.8 \times 10^{-5}$ ,  $k = 0.0256$  y  $c_p = 1005$ .

El metal entra al molde por un agujero de 8 mm de ancho en el centro del cono con una velocidad de 1 m/s. Debido a la pobre discretización del cono, éste se supone lleno inicialmente. El metal entra al cono con una temperatura de  $T = 1330$  grados centígrados. Respecto a las condiciones de contorno, para la velocidad se consideraron paredes deslizantes (componente normal prescrita a cero y tangente libre). Tanto la velocidad como la temperatura se prescriben a la entrada del cono y las paredes del molde se consideran adiabáticas. La velocidad de entrada es de 1000 mm/s.

Con el fin de estudiar la influencia de la posición de los agujeros en el molde, se realizaron dos simulaciones. En la primera de ellas se consideraron todos los nodos de contorno temporalmente libres (agujeros). En la otra sólo se deja un nodo temporalmente libre situado en todo el centro de la parte superior del molde (parte que se llena de último). Debido al carácter turbulento

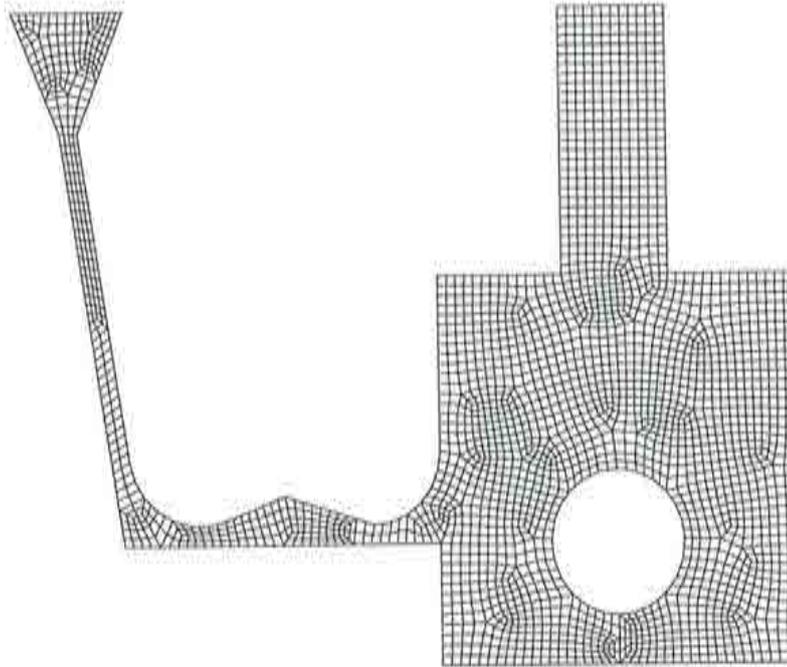


Figura 7.1. Llenado de molde turbulento bi-dimensional. Malla de 2460 elementos  $Q1/P0$  y 2688 nodos.

del flujo se utilizó el modelo de Smagorinsky para la simulación del mismo. La constante  $C$  del modelo se tomó como 0.1.

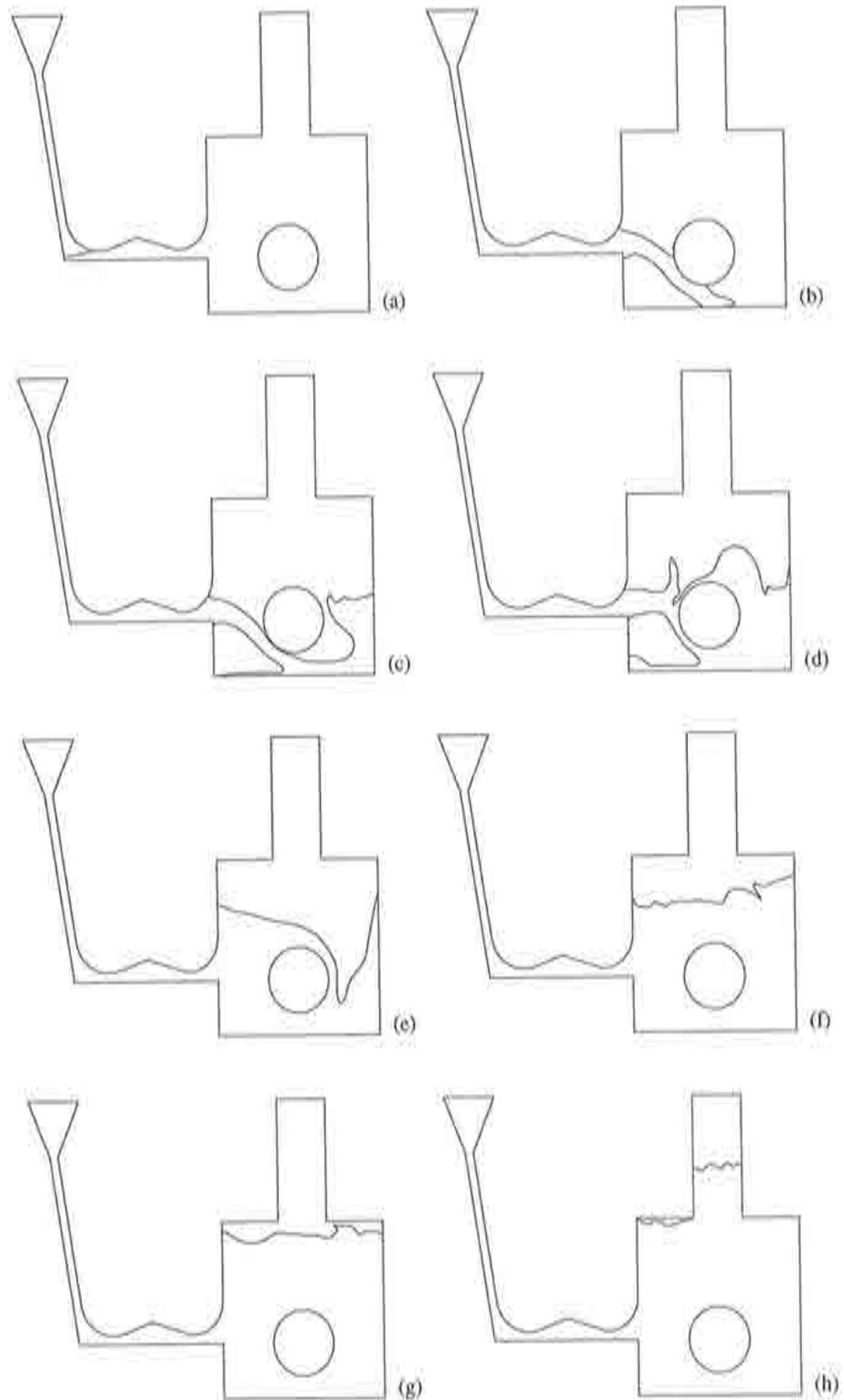
Las ecuaciones de Reynolds se discretizaron utilizando el método SUPG con los parámetros estándar (ver (2.18)), y utilizando un esquema de penalización iterativa con un parámetro de  $\epsilon = 10^0$ . Tanto la ecuación de la temperatura como la de la superficie libre también fueron discretizadas usando el mismo método con los parámetros estándar. Además se utilizó el método anisotrópico de captura de discontinuidades (ASC) para la ecuación del calor. En el caso de no utilizarse dicho método se presentaban temperaturas negativas en la interface entre el metal y el aire. La integración temporal se realizó con el esquema de Euler hacia atrás y se utilizó un paso de tiempo de  $\Delta t = 0.04s$ .

En la Figura 7.2 se presenta la evolución temporal de la superficie libre para el caso en que sólo se deja un agujero. En la Figura 7.3 se presenta el mismo resultado para el caso de tomar todos los nodos de contorno como agujeros. Como puede observarse los resultados son totalmente diferentes, siendo más físicos los del primer caso.

Adicionalmente se puede observar que en el caso de tener solo un agujero en el molde se pierde mucho menos material. Esto se corrobora en las Figuras 7.4a y 7.4b, donde se presenta la evolución de la cantidad de material que llena el molde a través del tiempo.

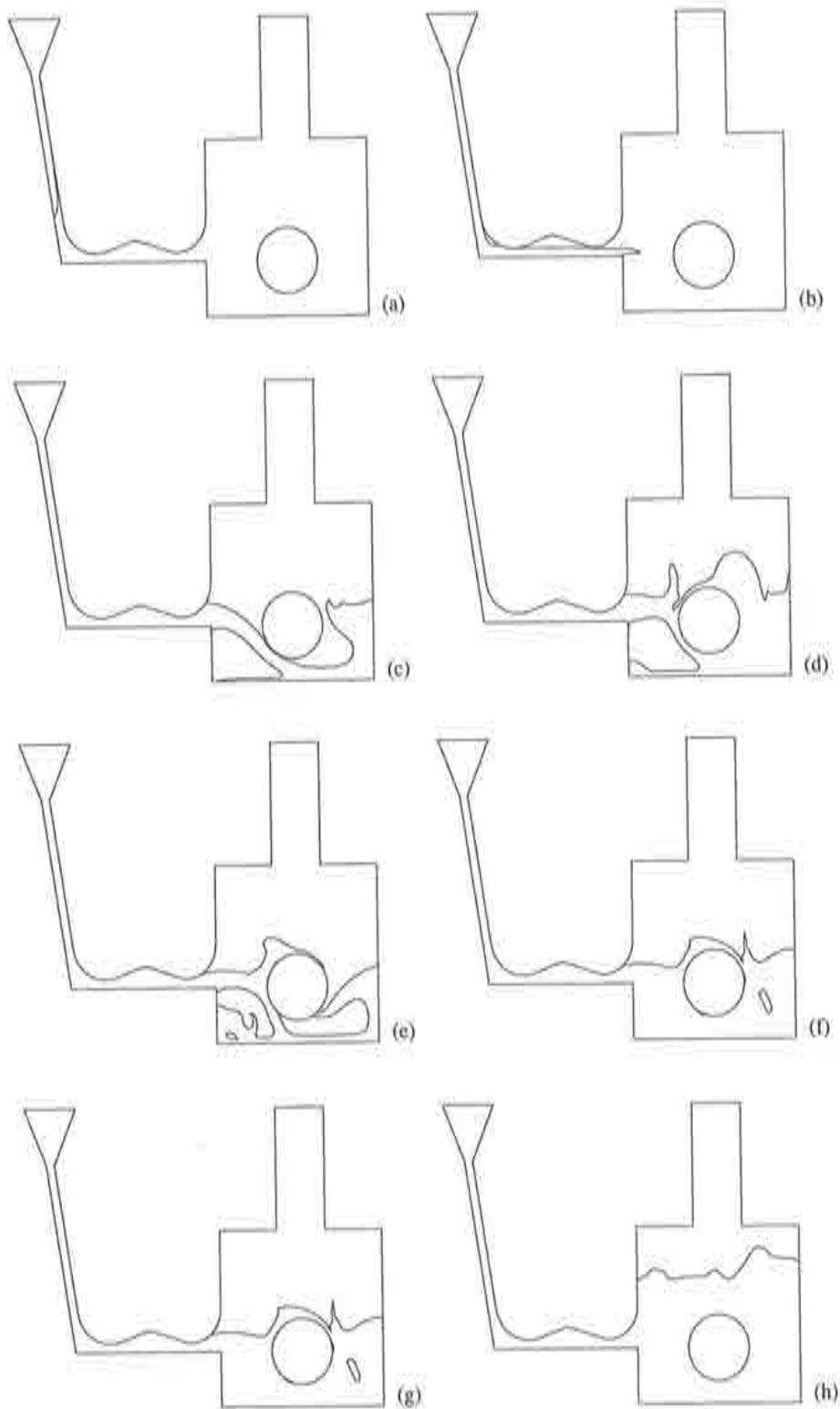
La pérdida de material por los nodos temporalmente libres se debe a que, si en un determinado paso de tiempo el metal está a una distancia cercana al agujero y el campo de velocidades es tal que la superficie libre se mueve una distancia mayor, saldrá una cierta cantidad de metal por dicho nodo en ese paso de tiempo (para los pasos siguiente la velocidad normal en el nodo ya estará prescrita a cero).

En la Figura 7.5 se presenta el campo de temperaturas en algunos pasos de tiempo para el



**Figura 7.2.** Llenado de molde turbulento bi-dimensional. Evolución del llenado con un solo agujero. (a):  $t = 0.2s$ . (b):  $t = 0.6s$ . (c):  $t = 1.0s$ . (d):  $t = 1.4s$ . (e):  $t = 1.8s$ . (f):  $t = 2.2s$ . (g):  $t = 2.6s$ . (h):  $t = 3.0s$ .

caso de un solo agujero, en la Figura 7.6 se da el mismo resultado para la presión y en la Figura 7.7 para las líneas de corriente. Una vez lleno el molde se dejó de inyectar metal aunque éste



**Figura 7.3.** Llenado de molde turbulento bi-dimensional. Evolución del llenado con agujeros en todo el contorno. (a):  $t = 0.2s$ . (b):  $t = 0.6s$ . (c):  $t = 1.0s$ . (d):  $t = 1.4s$ . (e):  $t = 1.8s$ . (f):  $t = 2.2s$ . (g):  $t = 2.6s$ . (h):  $t = 3.0s$ .

sigue en movimiento debido a las fuerzas de inercia. El campo de presiones para esta situación es casi hidrostático (debido a la gravedad) como era de esperarse (ver Figura 7.6d).

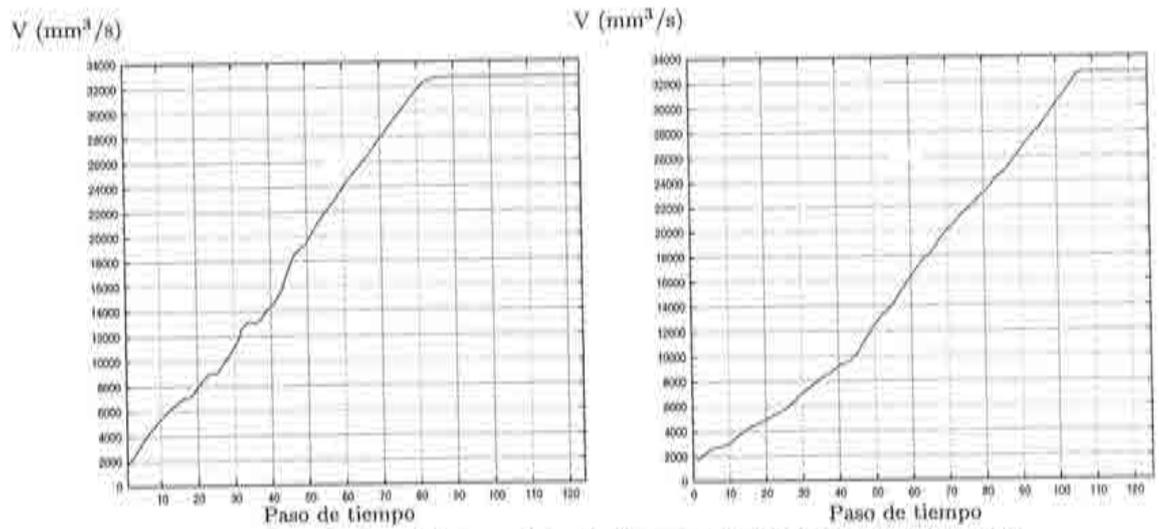


Figura 7.4. Llenado de molde turbulento bi-dimensional. Evolución del volumen de molde lleno. (a): Un solo agujero. (b): Agujeros en todo el contorno.

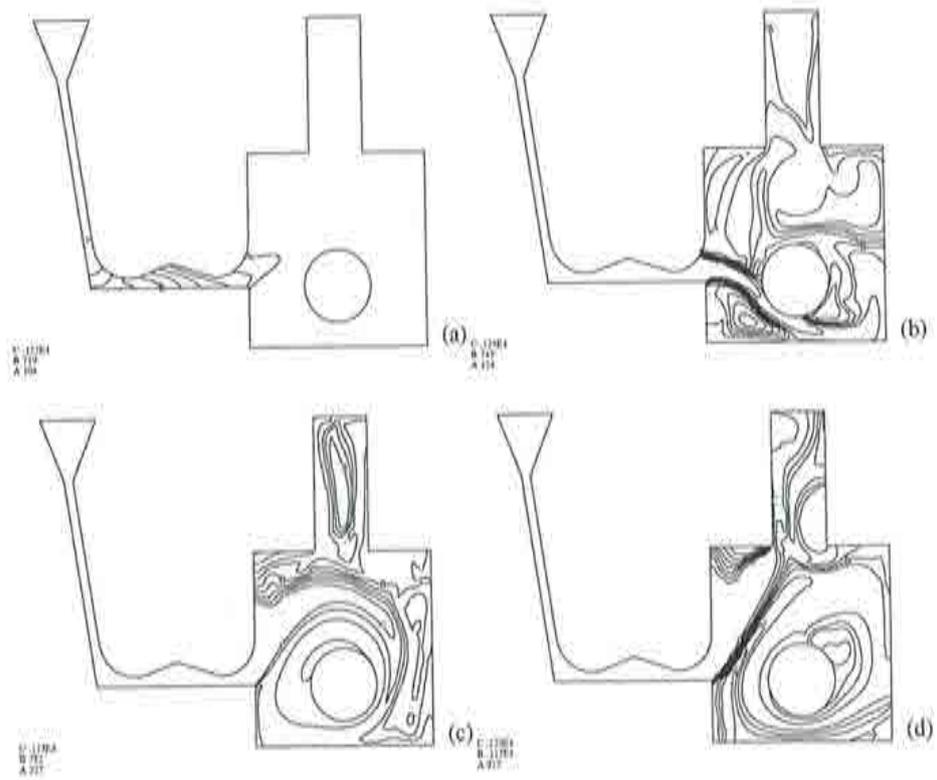
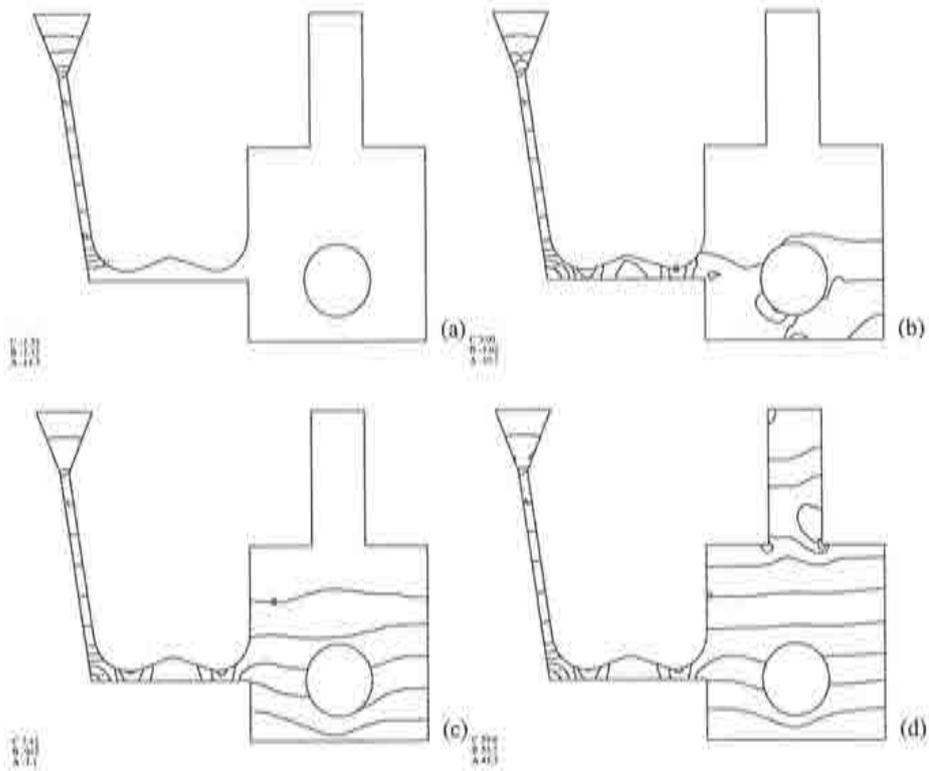
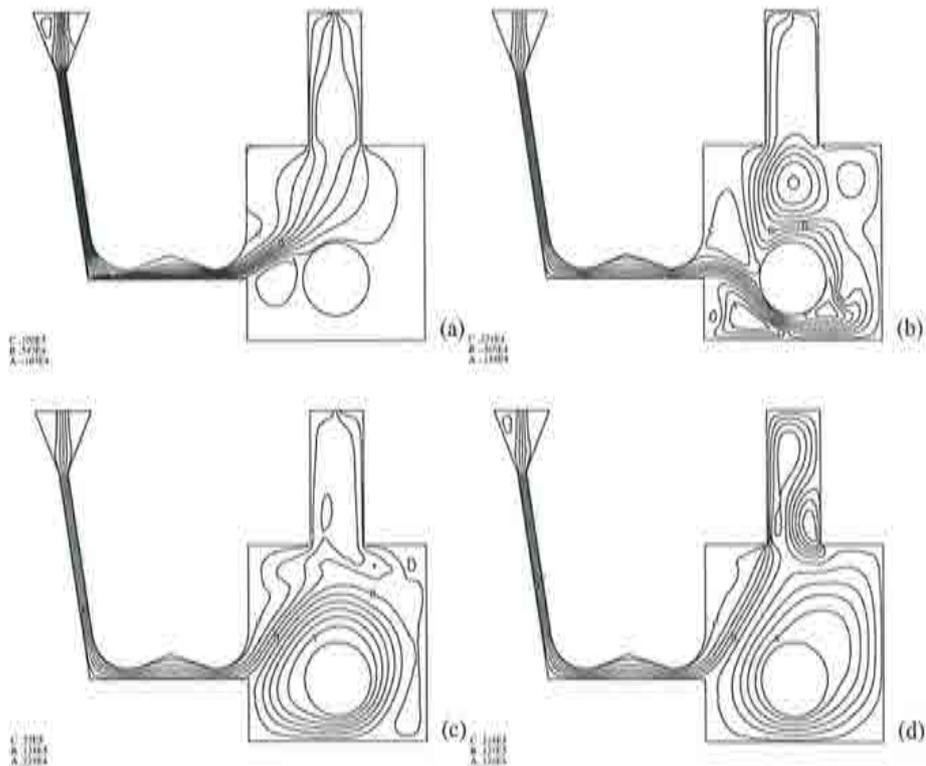


Figura 7.5. Llenado de molde turbulento bi-dimensional. Evolución de la temperatura. (a):  $t = 0.2s$ . (b):  $t = 1.2s$ . (c):  $t = 2.4s$ . (d):  $t = 3.0s$ .



**Figura 7.6.** Llenado de molde turbulento bi-dimensional. Evolución de la presión. (a):  $t = 0.2s$ . (b):  $t = 1.2s$ . (c):  $t = 2.4s$ . (d):  $t = 3.0s$ .



**Figura 7.7.** Llenado de molde turbulento bi-dimensional. Evolución líneas de corriente. (a):  $t = 0.2s$ . (b):  $t = 1.2s$ . (c):  $t = 2.4s$ . (d):  $t = 3.0s$ .

### 7.3 Llenado de molde tri-dimensional

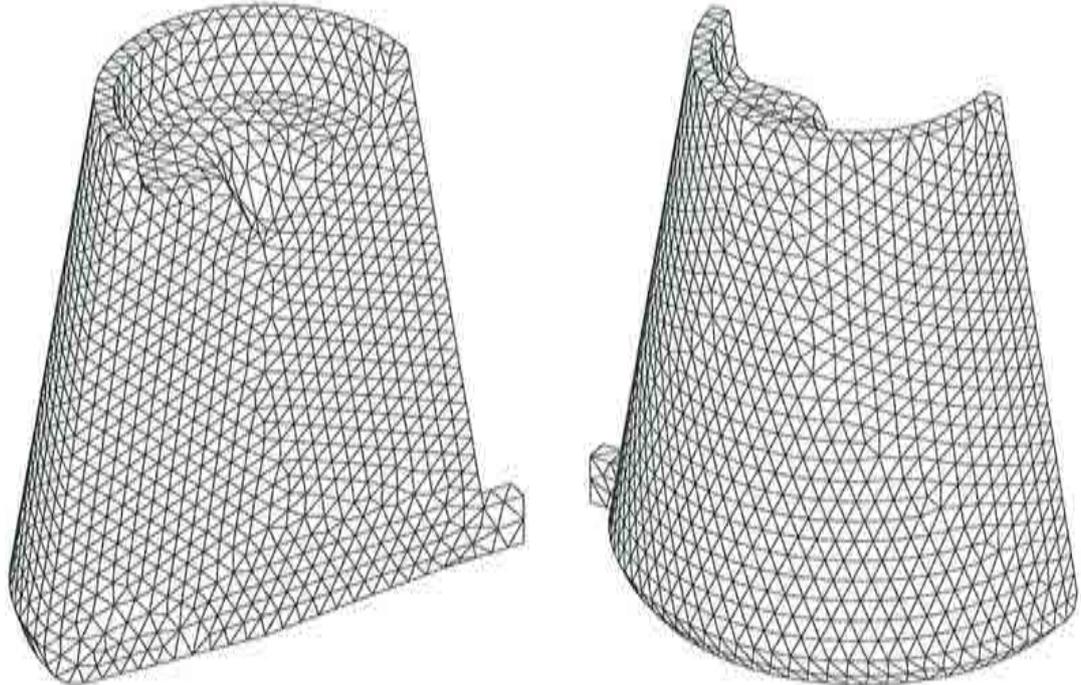


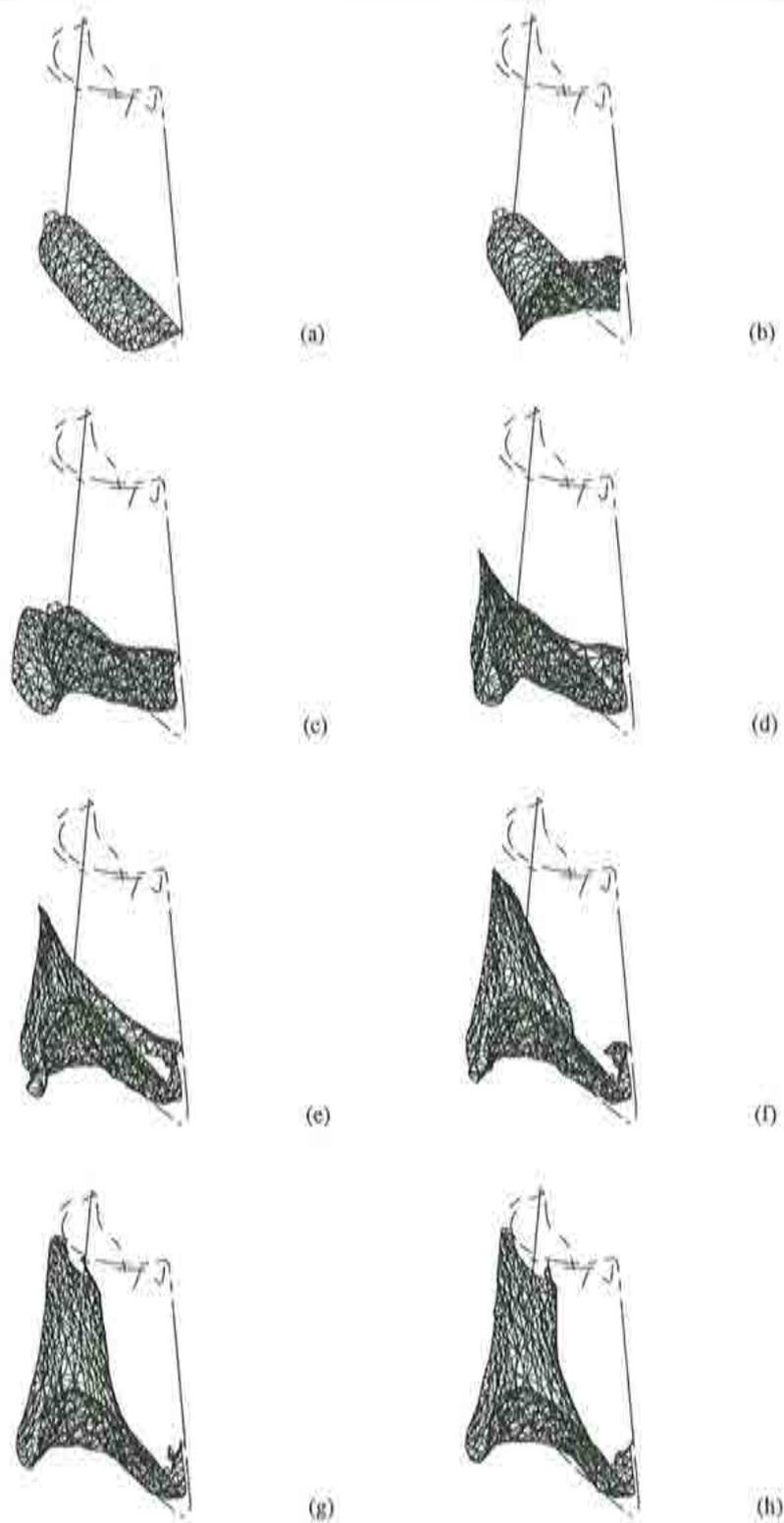
Figura 7.8. Llenado de molde tri-dimensional. Malla de 13865 elementos  $P1/P1$  y 3408 nodos.

En el presente ejemplo se presenta el llenado de un recipiente tridimensional. Por razones de simetría, se simuló sólo la mitad del molde. La geometría y la malla de elementos finitos se muestran en la Figura 7.8. La altura total del molde es de aproximadamente 113 mm y tiene un diámetro medio de 86 mm.

El fluido entra al molde por un conducto de sección rectangular de  $5 \times 10 \text{ mm}^2$  situado en la parte inferior (ver Figura 7.8). La velocidad de entrada es de 1470 mm/s. Todas las paredes se consideran deslizantes (velocidad normal prescrita a cero y velocidad tangente libre). Se han dejado todos los nodos superiores (a partir de los 20 mm de altura) temporalmente libres (agujeros). Las propiedades físicas para el metal entrante son (en unidades SI):  $\mu = 90.0$ ,  $\rho = 6700$ ; y para el fluido ficticio (aire):  $\mu = 0.18$ ,  $\rho = 1.2$ .

Las ecuaciones de Navier-Stokes se resolvieron utilizando el método GLS con los parámetros estándar ( $\tau_1$  según (4.74) con  $\beta = 1/3$ , y  $\tau_2$  según (4.76) con  $\lambda = 1.0$ ). El transporte de la superficie libre se realizó utilizando el método de la pseudo-concentración. Esta ecuación se discretizó utilizando el método SUPG (con los parámetros estándar). En cada paso de tiempo el frente del material se suavizó con una pendiente de 1/30. Se utilizó el método de Euler hacia atrás para la discretización temporal tanto de las ecuaciones de Navier-Stokes como la de la pseudo-concentración. El paso de tiempo se tomó como  $\Delta t = 0.03 \text{ s}$ .

En las Figuras 7.9 y 7.10 se presenta la evolución de la superficie libre. En la Figura 7.11 se muestra la cantidad de material que llena el molde en cada paso de tiempo.



**Figura 7.9.** Llenado de molde tri-dimensional. Evolución del llenado. (a):  $t = 0.3s$ . (b):  $t = 0.6s$ . (c):  $t = 0.9s$ . (d):  $t = 1.2s$ . (e):  $t = 1.5s$ . (f):  $t = 1.8s$ . (g):  $t = 2.1s$ . (h):  $t = 2.4s$ .

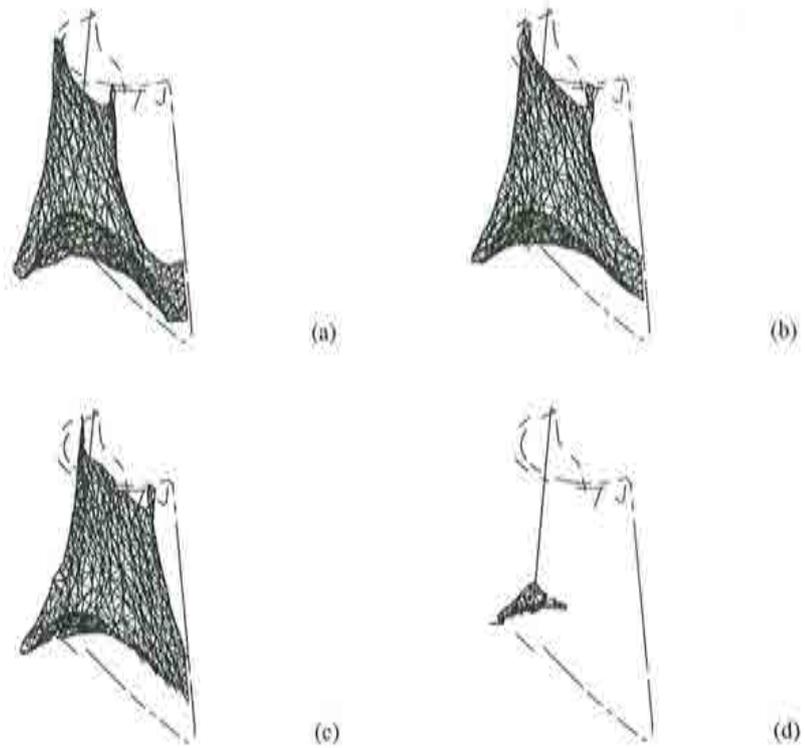


Figura 7.10. Llenado de molde tri-dimensional. Evolución del llenado. (a):  $t = 3.0s$ . (b):  $t = 4.5s$ . (c):  $t = 6.0s$ . (d):  $t = 7.5s$ .

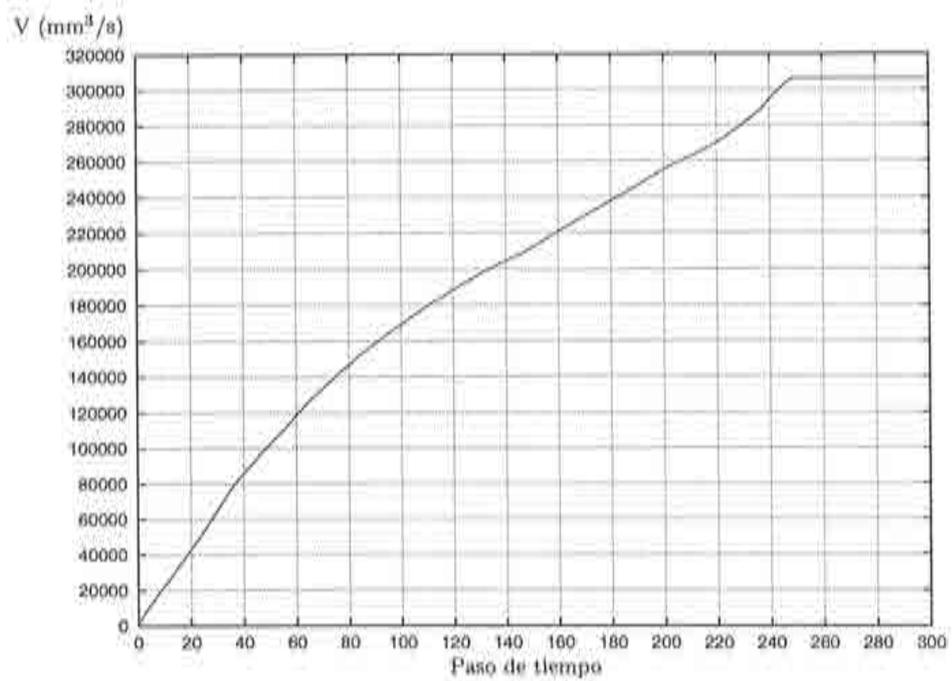
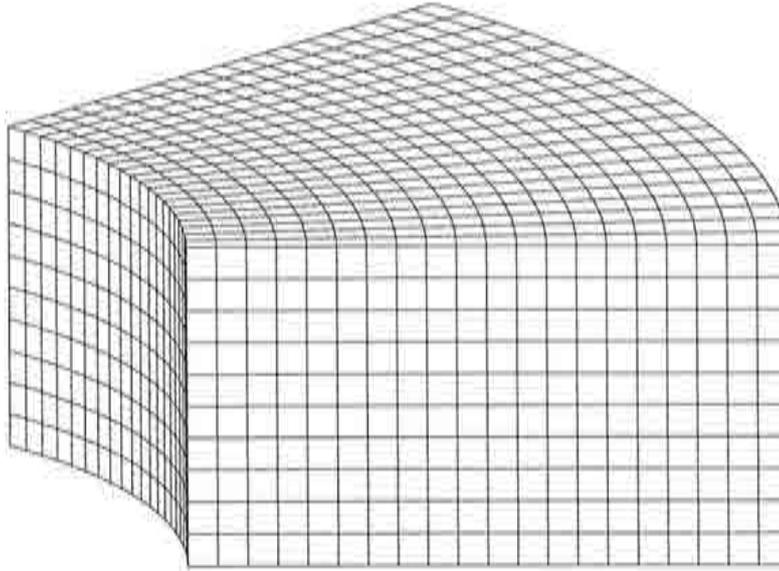


Figura 7.11. Llenado de molde tri-dimensional. Evolución del volumen de molde lleno.

## 7.4 Tanques concéntricos rotando a velocidad angular constante



**Figura 7.12.** Tanques concéntricos rotando a velocidad angular constante. Malla de 4000 elementos  $Q1/P0$  y 4851 nodos.

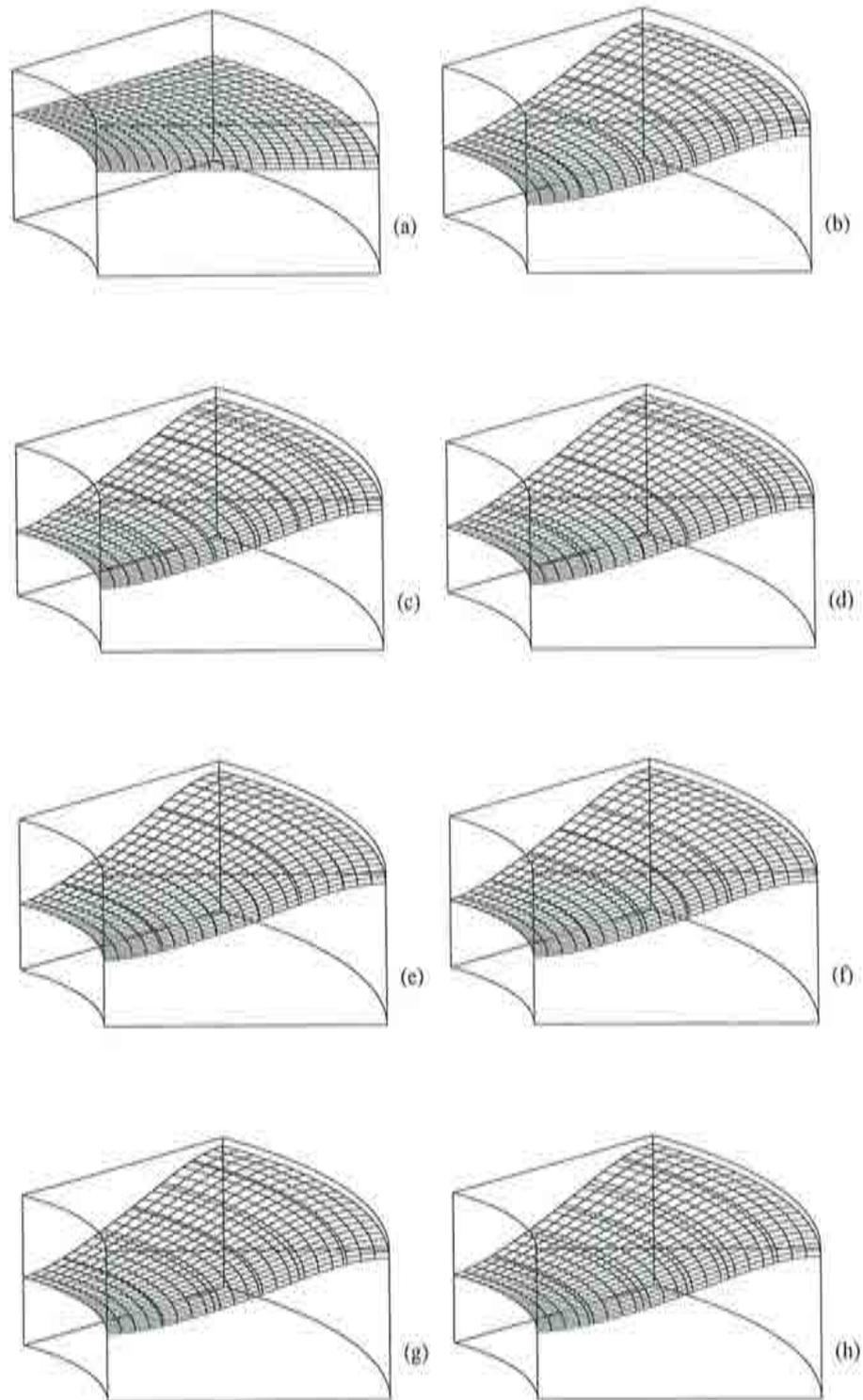
En el siguiente ejemplo se simula la superficie libre entre dos tanques concéntricos que rotan a una velocidad angular de  $\omega = (0, 0, 1.5)$  rad/s. El radio del tanque interior es de 1.0 m, el del tanque exterior de 2.0 m y la altura de ambos es de 0.5 m. El fluido en reposo llena el espacio entre los dos tanques hasta una altura de 0.35 m.

En la Figura 7.12 se muestra la malla de 4000 elementos  $Q1/P0$  y 4851 nodos. Se simuló sólo un sector del tanque (de 45 grados) debido a la simetría del flujo. En la parte inferior del tanque se prescribió la velocidad a  $\mathbf{u} = \omega \times \mathbf{r}$  ( $\mathbf{r}$  es el vector de posición espacial del nodo). En las paredes verticales se prescribieron las componentes horizontales al mismo valor, pero se dejó libre la velocidad vertical con el fin de que la superficie libre pudiera avanzar. En los planos de simetría se impusieron condiciones de simetría, valga la redundancia, tanto para la velocidad como para la pseudo-concentración. En la parte superior del tanque se impusieron las tensiones a cero (condición de Neumann).

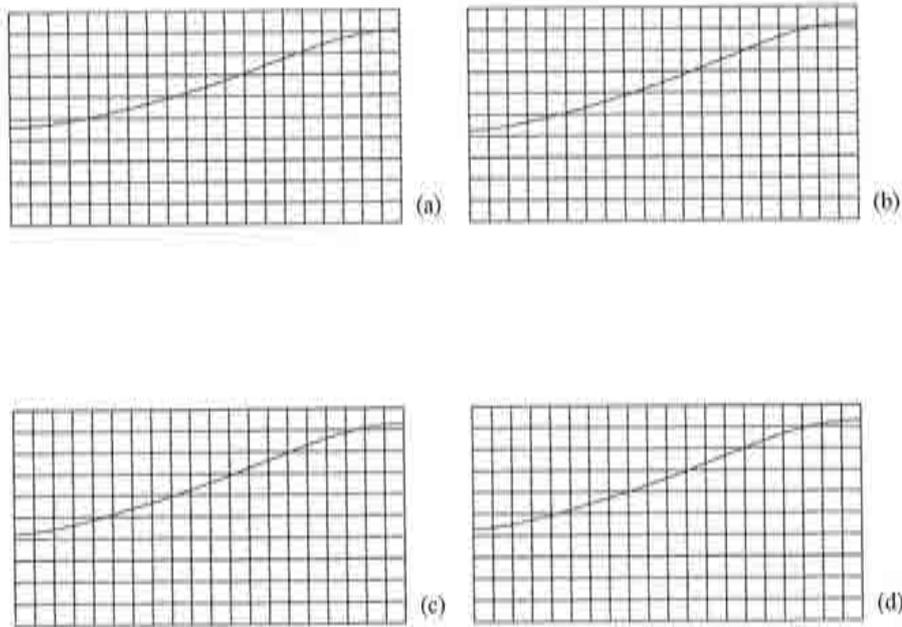
Para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes se utilizó el método SUPG con los parámetros estándar para elementos lineales, y se eliminó la presión a nivel elemental mediante un esquema de penalización iterativa. La ecuación de la pseudo-concentración fue resuelta con el mismo método (SUPG), y se suavizó a cada paso de tiempo con una pendiente de 1/3. La integración temporal se realizó mediante el método de Euler hacia atrás, con un paso de tiempo de  $\Delta t = 500$  s.

En la Figura 7.13 puede observarse la evolución de la superficie libre a través del tiempo. En la Figura 7.14 se presenta el mismo resultado en un plano vertical por la mitad del sector circular. Puede observarse que la superficie libre es suave, y que prácticamente no se pierde material. El cambio en la curvatura de la misma al acercarse a la pared exterior se cree debido a la condición  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$  ( $\mathbf{n}$  es la normal exterior a la superficie libre y  $\boldsymbol{\sigma}$  el tensor de tensiones). La condición real para que la superficie libre no presente dicho cambio es presión cero ( $p = 0$ ) sobre dicha superficie.

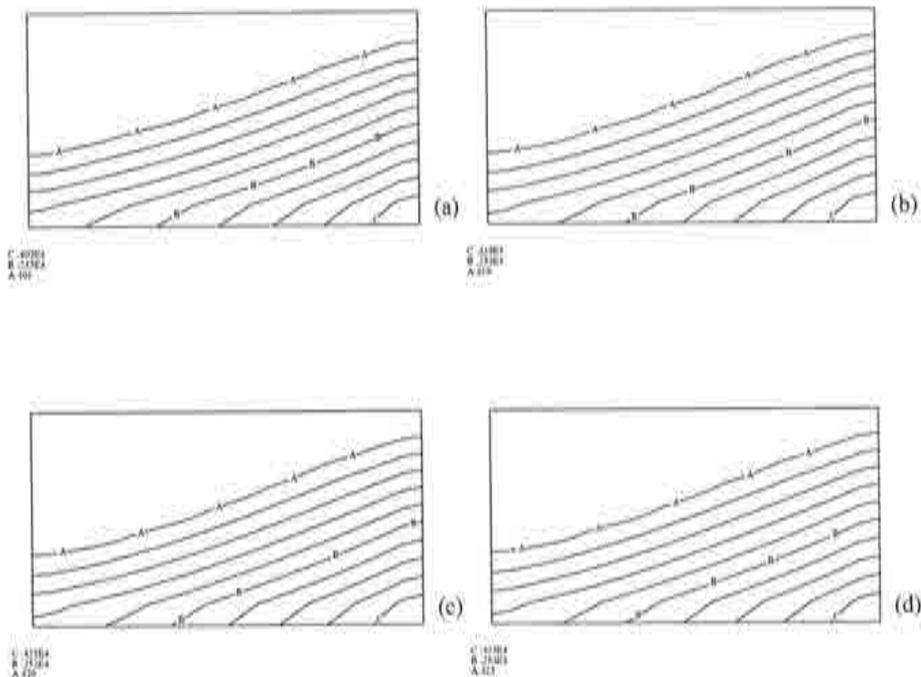
En la Figura 7.15 se presenta la evolución del campo de presiones a través del tiempo. Éste



**Figura 7.13.** Tanques concéntricos rotando a velocidad angular constante. Evolución de la superficie libre: (a):  $t = 5000s$ . (b):  $t = 10000s$ . (c):  $t = 15000s$ . (d):  $t = 20000s$ . (e):  $t = 25000s$ . (f):  $t = 30000s$ . (g):  $t = 35000s$ . (h):  $t = 40000s$ .



**Figura 7.14.** Tanques concéntricos rotando a velocidad angular constante. Evolución de la superficie libre en el plano vertical medio. (a):  $t = 5000\text{s}$ . (b):  $t = 10000\text{s}$ . (c):  $t = 15000\text{s}$ . (d):  $t = 20000\text{s}$ .



**Figura 7.15.** Tanques concéntricos rotando a velocidad angular constante. Evolución de la presión en el plano vertical medio. (a):  $t = 5000\text{s}$ . (b):  $t = 10000\text{s}$ . (c):  $t = 15000\text{s}$ . (d):  $t = 20000\text{s}$ .

es, como era de esperarse, una combinación entre la presión debida a la gravedad y la generada por la fuerza centrífuga. El campo de velocidades es prácticamente  $\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$  (las velocidades

verticales son cuatro ordenes de magnitud menores).

## 7.5 Velero Rioja de España



Figura 7.16. Velero Rioja de España. Geometría del casco y apéndices. Vista lateral y vista frontal.

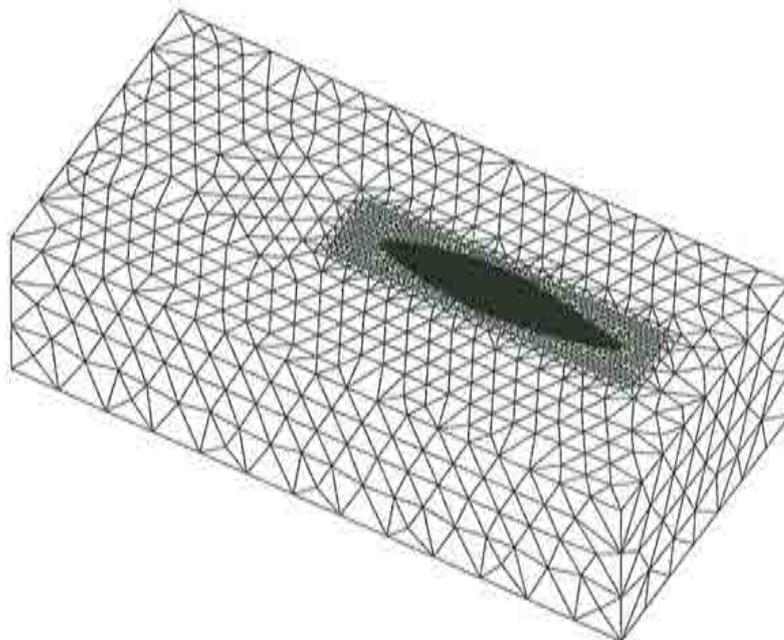


Figura 7.17. Velero Rioja de España. Malla de 124234 elementos  $P1/P1$  y 10229 nodos.

A continuación se presenta la simulación numérica del velero Rioja de España a escala 1 : 3.5. Las dimensiones principales del casco son 5.22 m de eslora (longitud) y 1.05 m de manga (ancho). El velero se simuló para un ángulo de escora (ángulo de giro respecto al eje longitudinal del barco)



Figura 7.18. Velero Rioja de España. Contornos de presión sobre el casco y apéndices.



Figura 7.19. Velero Rioja de España. Contornos de velocidad sobre el casco y apéndices.

de 25 grados, una deriva (ángulo de ataque del flujo) de 2 grados, y un trimado (distancia que se levanta la proa respecto a la posición en reposo) de 0.186 m. La velocidad del barco fue de 2.7496 m/s (10 nudos). Las propiedades del agua (en sistema SI) son:  $\mu = 1.0 \times 10^{-3}$  y  $\rho = 1.0 \times 10^3$ .

En la Figura 7.16 se puede observar la geometría del casco, así como la de los apéndices (quilla, bulbo y timón). En la Figura 7.17 puede observarse la malla de contorno sobre el dominio computacional. Éste es una caja de  $50 \times 24 \times 12 \text{ m}^3$  menos el volumen ocupado por el casco y

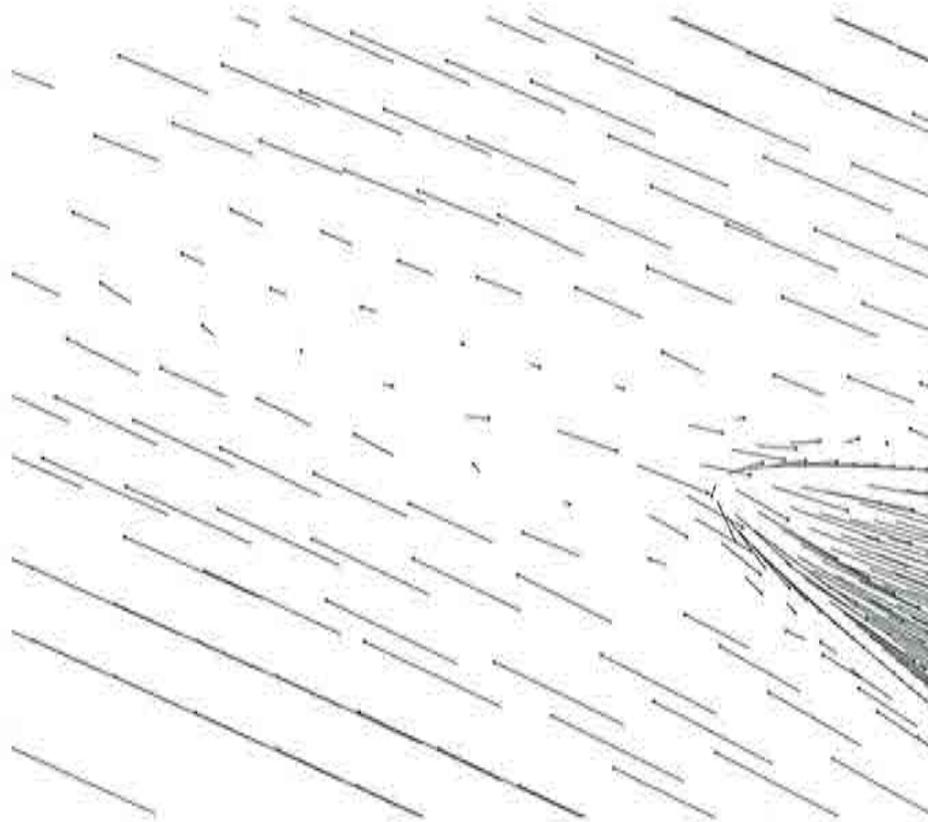


Figura 7.20. Velero Rioja de España. Zona de recirculación en la popa.

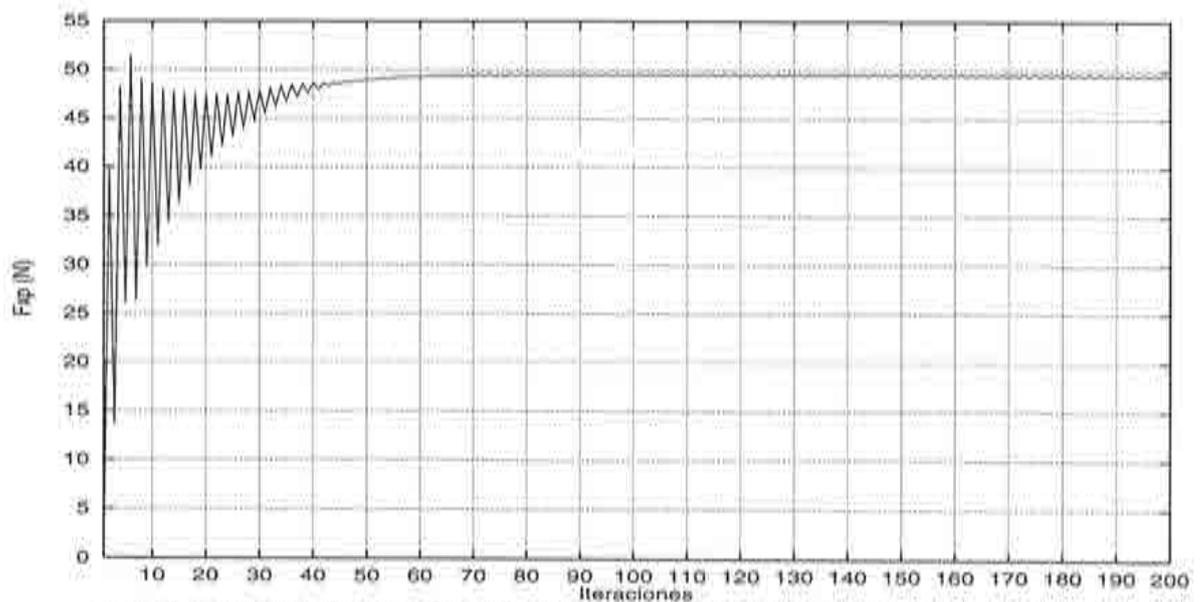


Figura 7.21. Velero Rioja de España. Convergencia de la fuerza de presión en la dirección  $x$ .

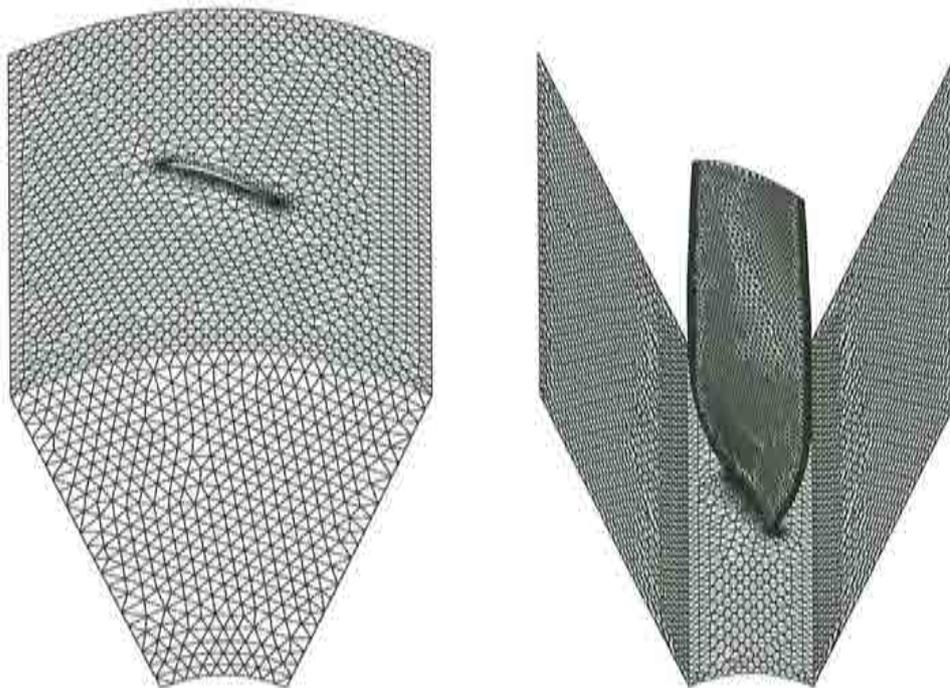
sus apéndices. La malla consta de 124234 elementos  $P1/P1$  y 10229 nodos. El flujo se supuso turbulento, por lo que se utilizó el modelo de Smagorinsky para la simulación, con una constante

$C = 0.1$ . En todas las superficies sólidas se prescribió la ley de pared, suponiendo una distancia perpendicular del primer nodo a la pared de  $2.0 \times 10^{-5}$  m (ver (5.65)). En las demás caras de la caja se prescribió la velocidad normal a cero y se dejaron libres las tangentes, excepto en la cara de salida, donde se tomó la velocidad normal libre y las tangentes prescritas a cero.

Se utilizó el método GLS para la simulación de las ecuaciones de Reynolds estacionarias, utilizando los parámetros estándar para elementos lineales. Como criterio de convergencia se tomó la fuerza ejercida por el flujo sobre el velero, ya que es éste el resultado más importante para fines de diseño. Cabe anotar que se simuló el flujo para varias velocidades, correlacionando bien las fuerzas encontradas numéricamente con los resultados experimentales. Estos datos son confidenciales, por lo cual no se presentan en la monografía.

En la Figura 7.18 se puede observar los contornos de presión sobre las superficies sólidas. En la Figura 7.19 los de velocidad, y en la Figura 7.20 un detalle de la recirculación en la popa del velero. En general los resultados son cualitativamente correctos y presentan un comportamiento suave. Finalmente, la curva de convergencia de la fuerza de presión en dirección  $x$  sobre el velero se presenta en la Figura 7.21.

## 7.6 Flujo a través de un ventilador axial



**Figura 7.22.** Flujo a través de un ventilador axial. Malla de 171530 elementos  $P1/P1$  y 34842 nodos. (a): Malla de contorno sobre el dominio computacional. (b): Malla de contorno sobre el álabe, el cilindro interior, y las caras periódicas.

En este ejemplo se simula el flujo a través de un ventilador axial con el fin de determinar su curva característica numéricamente, y compararla con los resultados experimentales suministrados por la división de aerotécnica de Soler y Palau S.A. El ventilador tiene un radio exterior de 300 mm y un radio interior de 90 mm. Tanto la geometría como las condiciones del ensayo fueron

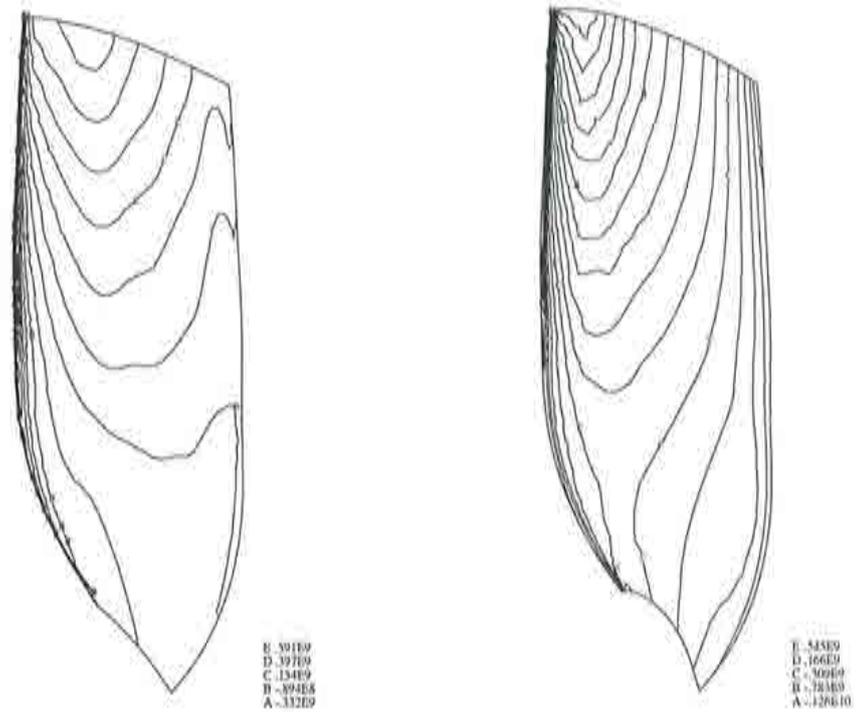


Figura 7.23. Flujo a través de un ventilador axial. Contornos de presión sobre el álabe. (a): Cara de presión. (b): Cara de succión.

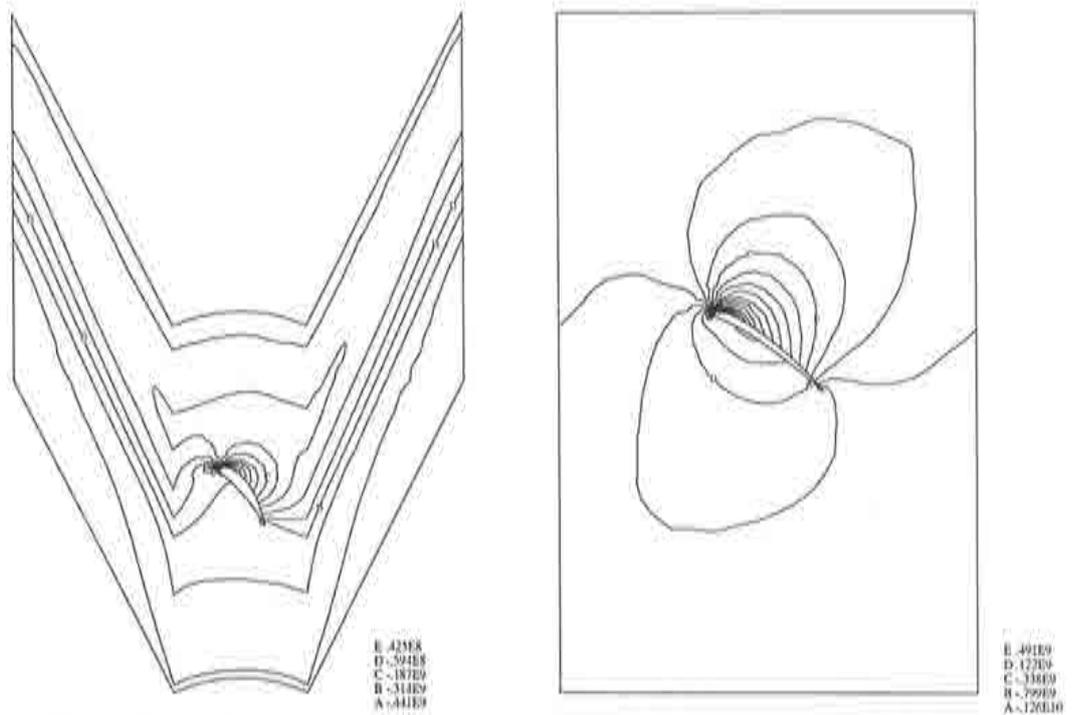
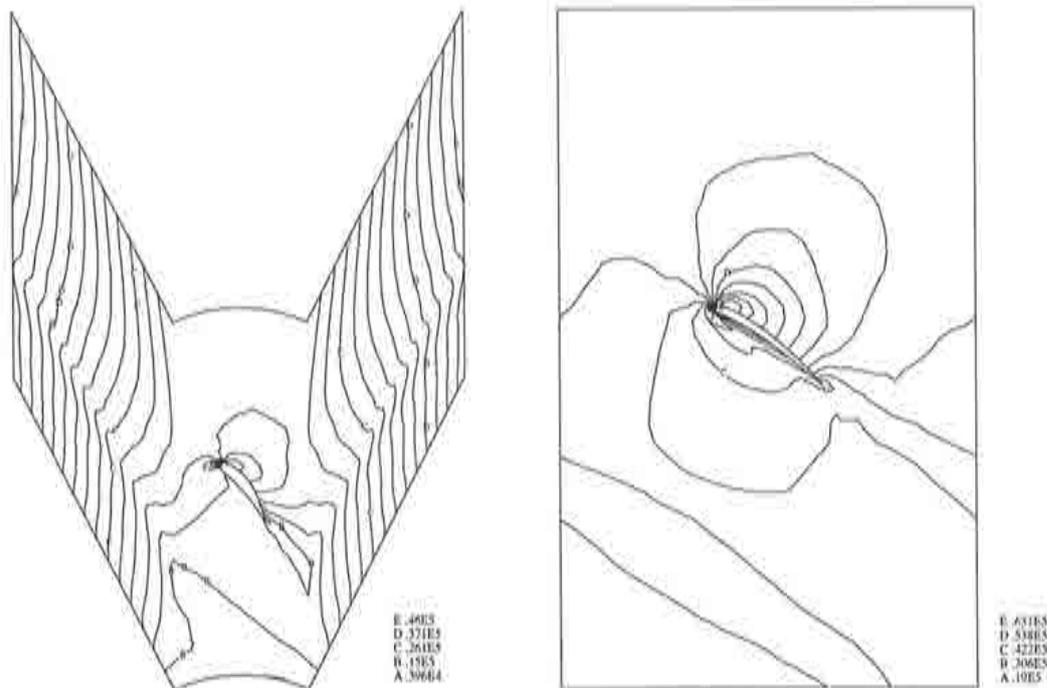


Figura 7.24. Flujo a través de un ventilador axial. Contornos de presión. (a): Cilindro interior y caras periódicas. (b): Cilindro exterior.



**Figura 7.25.** Flujo a través de un ventilador axial. Contornos de velocidad. (a): Cilindro interior y caras periódicas. (b): Cilindro exterior.

suministrados por S & P (Soler y Palau S.A.).

El ventilador se simuló dentro de dos cilindros concéntricos. El cilindro exterior se supuso unido a la parte superior de los álabes, y el interior unido a su parte inferior. Por condiciones de simetría, el dominio computacional abarca sólo un álabe (el ventilador consta de 7 álabes). En la Figura 7.22 se presenta la malla de 171530 elementos  $P1/P1$  y 34842 nodos. Al aire se le dio densidad 1.0, tomándose entonces para la viscosidad su valor cinemático ( $18.0 \text{ mm}^2/\text{s}$ ). La simulación se realizó en ejes no inerciales, los cuales rotan a una velocidad angular de  $\omega = (0, 0, 1400)$  r.p.m. Sobre todas las superficies sólidas (álabe y cilindros) se prescribió la velocidad normal a cero y la tangente se dejó libre. En el plano de entrada se prescribió la velocidad a  $\mathbf{u} = -\omega \times \mathbf{r} + (0, 0, u_z)$ , variándose el valor de  $u_z$  según el caudal a simular. En el plano de salida se dejaron libres todas las componentes de la velocidad. En las caras laterales se impusieron condiciones de periodicidad.

Las ecuaciones de Navier-Stokes estacionarias se discretizaron mediante el método GLS con los parámetros estándar para elementos lineales y problemas con rotación. Es decir,  $\tau_1$  se calculó según (4.75) con  $\tau_1^* = C_{1\beta}/(4\omega)$  con  $C_{1\beta} = 4$ ; y  $\tau_2$  según (4.77) con  $\tau_2^* = \rho C_{1\gamma} \omega h^2$  con  $C_{1\gamma} = 10$ . Adicionalmente se empleó un esquema de penalización iterativa (parámetro  $\epsilon = 5.5 \times 10^{-5}$ ) sólo con el fin de lograr la convergencia del método iterativo para solucionar el sistema de ecuaciones lineales resultante (se empleó el método GMRES). Si no se utiliza este esquema no se logra convergencia de método GMRES.

En la Figura 7.23 se presentan los contornos de presión sobre ambas caras del álabe para un caudal de  $14000 \text{ m}^3/\text{hr}$ . El campo de presiones sobre el álabe es uno de los resultados más importantes de la simulación desde el punto de vista tecnológico, ya que a partir de él se obtiene la fuerza sobre los álabes y el incremento de presión producido por el ventilador. En la Figura 7.24a se presenta el campo de presiones sobre el cilindro interior y las caras periódicas. En ésta

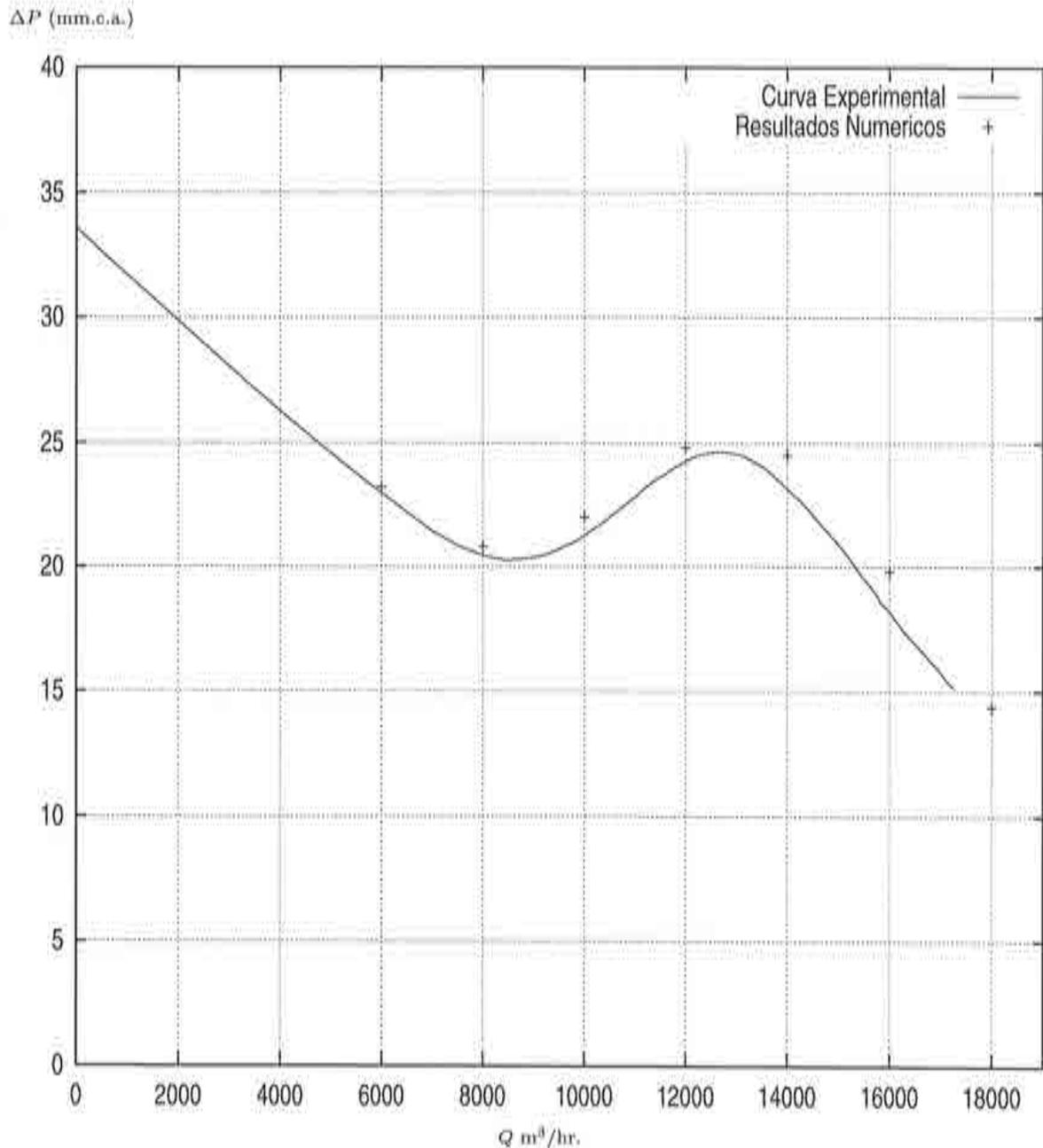
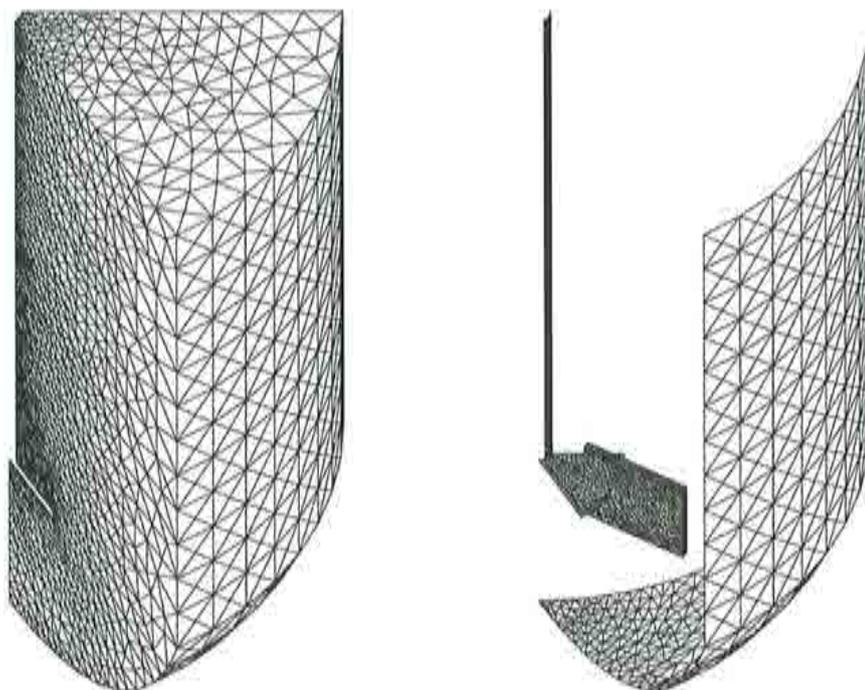


Figura 7.26. Flujo a través de un ventilador axial. Curva característica caudal ( $Q$ ) presión ( $\Delta P$ ).

se puede comprobar el buen cumplimiento de la periodicidad en presiones la cual se exige sólo de forma débil. En la Figura 7.24b se presenta el campo de presiones sobre el cilindro exterior. En las Figuras 7.25a y 7.25b se presentan los mismos resultados pero para el campo de velocidades. Nuevamente puede comprobarse la periodicidad del mismo. En la Figura 7.26 se presenta la curva característica del ventilador obtenida de forma experimental, superponiendo los puntos numéricos que se obtuvieron en el presente trabajo. Como puede observarse, los resultados numéricos se aproximan bastante bien a los experimentales.

## 7.7 Flujo en un reactor químico

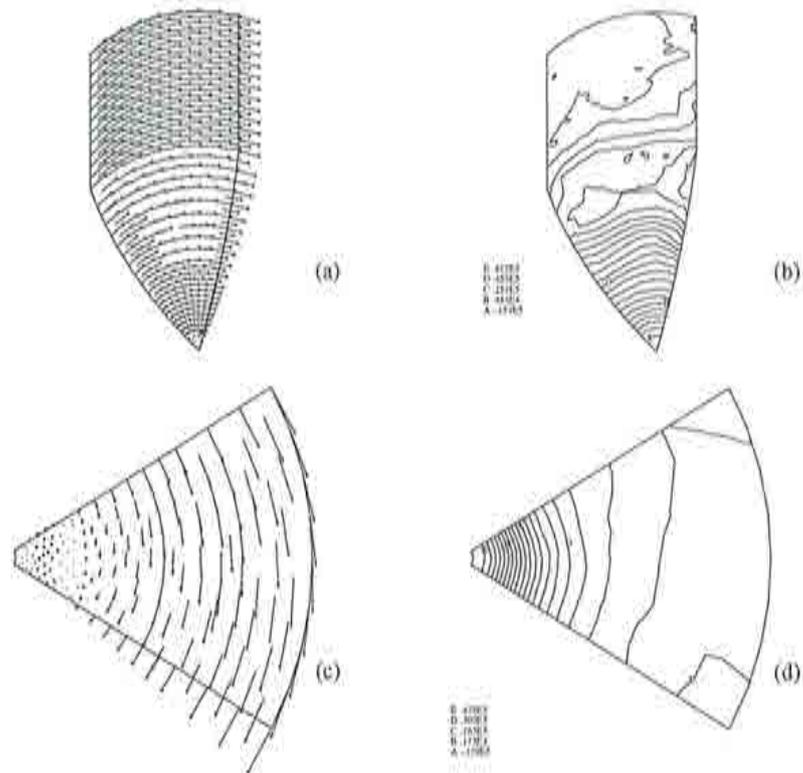


**Figura 7.27.** Flujo en un reactor químico. Malla de 19468 nodos y 97320 elementos  $P1/P1$ . (a): Malla de contorno sobre el dominio computacional. (b): Malla de contorno sobre la paleta y la carcasa exterior.

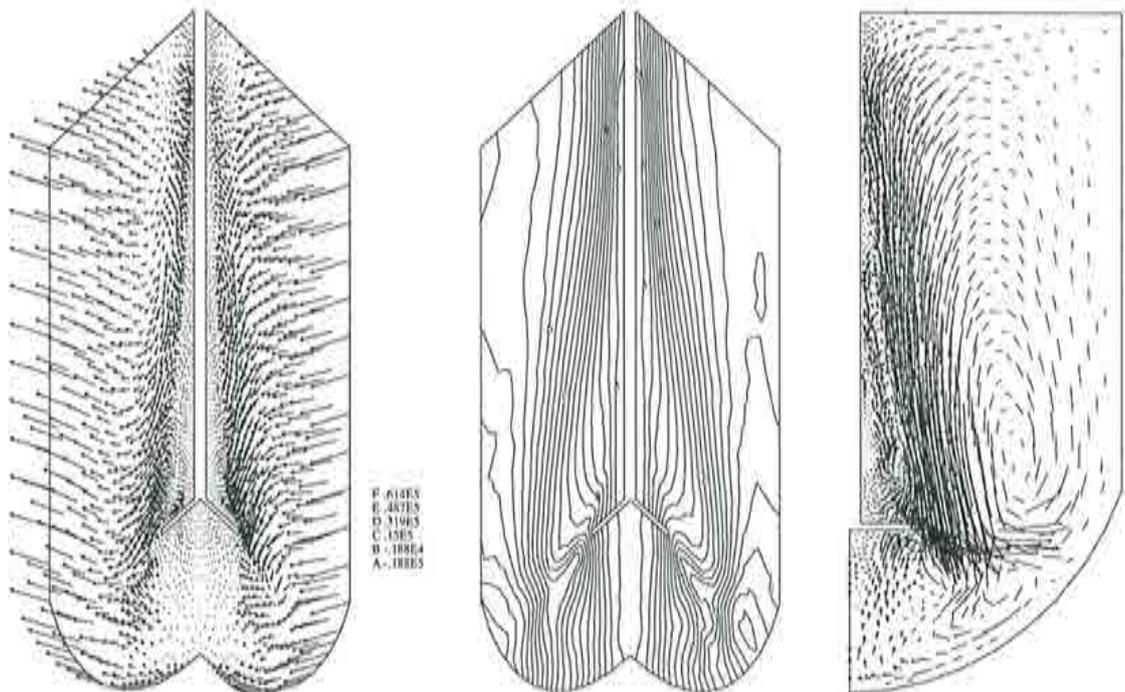
En este ejemplo se simuló el flujo en un reactor químico lleno de agua. El reactor es de 6 paletas planas de  $22 \text{ mm} \times 22 \text{ mm}$  y de  $2 \text{ mm}$  de espesor (ver Figura 7.27). La carcasa exterior tiene  $200 \text{ mm}$  de alto total, y es esférica en su parte inferior con un radio de  $50 \text{ mm}$  (ver Figura 7.27). El diámetro del eje de la turbina es de  $7 \text{ mm}$ . Debido a la periodicidad del flujo, se simuló sólo  $1/6$  del reactor, estando los planos periódicos en la mitad de dos paletas seguidas. La viscosidad cinemática del agua se tomó como  $1 \text{ mm}^2/\text{s}$  y la velocidad angular de rotación de  $10.5 \text{ rad/s}$ .

El problema se simuló en ejes no inerciales, tomándose la condición de no deslizamiento sobre las superficies sólidas. Por lo tanto, sobre el conjunto de eje y paleta del reactor la velocidad se prescribió a  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  y sobre la carcasa exterior a  $\mathbf{u} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ . En las caras verticales se impuso la condición de periodicidad y en la tapa superior se dejó la velocidad tangente libre y se prescribió la velocidad normal a cero. En la Figura 7.27 se presenta la malla de 19468 nodos y 97320 elementos  $P1/P1$ .

Las ecuaciones de Navier-Stokes estacionarias se discretizaron mediante el método GLS con los parámetros calibrados para elementos lineales y problemas con rotación. Es decir,  $\tau_1$  se calculó según (4.75) con  $\tau_1^r = C_{1\beta}/(4\omega)$  con  $C_{1\beta} = 4$ ; y  $\tau_2$  según (4.77) con  $\tau_2^r = \rho C_{1\gamma} \omega h^2$  con  $C_{1\gamma} = 10$ . El sistema de ecuaciones resultante fue resuelto iterativamente utilizando el método GMRES. En este caso no fue necesario utilizar un esquema de penalización iterativa para lograr la convergencia de éste.



**Figura 7.28.** Flujo en un reactor químico. (a): Campo de velocidades sobre la carcasa exterior. (b): Campo de presiones sobre la carcasa exterior. (c): Campo de velocidades sobre la tapa superior. (d): Campo de presiones sobre la tapa superior.



**Figura 7.29.** Flujo en un reactor químico. (a): Campo de velocidades sobre las caras periódicas. (b): Campo de presiones sobre las caras periódicas. (c): Campo de velocidades en un plano vertical entre paleta y paleta.

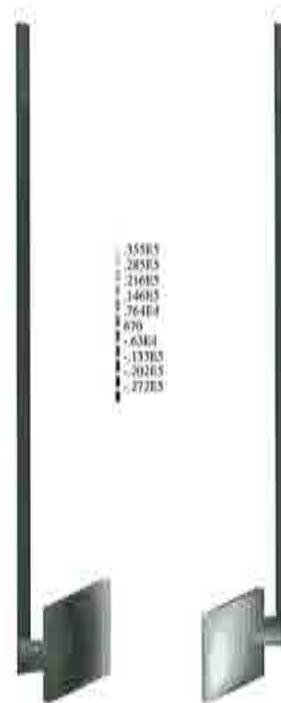


Figura 7.30. Flujo en un reactor químico. Contornos de presión sobre el conjunto paleta y eje de la turbina.

En la Figura 7.28 se presentan los resultados en velocidad y presión sobre la carcasa exterior y la tapa. En la Figura 7.29 se presentan los mismos resultados sobre las caras periódicas (puede corroborarse la periodicidad en presiones y velocidades).

Finalmente en la Figura 7.30 se presentan los contornos de presión sobre el conjunto de la paleta y eje de la turbina. En general los resultados son físicamente lógicos, y la convergencia del ejemplo fue muy buena (la norma  $L_2$  en velocidades final fue de 0.05% y la de presión de 0.08% en 44 iteraciones y 20000 segundos de CPU).

## 7.8 Comentarios y conclusiones

El principal objetivo del capítulo era el de demostrar la factibilidad de los algoritmos expuestos a lo largo de la monografía para la solución de problemas de reales. En general se ha demostrado la capacidad de los esquemas numéricos desarrollados y/o adoptados para ser utilizados en dichos problemas. Se hicieron comparaciones con datos experimentales con resultados bastante buenos y se observó la capacidad de utilizar esquemas iterativos para solucionar los sistemas de ecuaciones lineales resultantes.

Este último punto es muy importante debido al tamaño de las mallas necesarias para solucionar problemas ingenieriles, lo cual hace inviable la utilización de solucionadores directos. Cabe finalmente anotar que se utilizó el método de penalización iterativa ya no con el fin de eliminar la presión a nivel elemental, sino con el fin de preconditionar el sistema de ecuaciones resultante de la discretización para mejorar la convergencia del solucionador iterativo de ecuaciones (GMRES).





## CONCLUSIONES Y FUTURAS LINEAS DE INVESTIGACION

En la monografía se plantearon varias estrategias numéricas para solucionar por el método de elementos finitos las ecuaciones que rigen el flujo incompresible tanto en régimen laminar como turbulento. Algunos de dichos esquemas, tales como el DRS (Divergence of the Residual Stabilization), son originales del presente trabajo, y su principal motivación radicó en permitir el uso de elementos div-estables para estabilizar problemas con fuerzas de rotación importantes. Otros esquemas como el GLS (Galerkin Least Square), se extendieron y calibraron para el caso de flujos con fuerzas de rotación dominantes, siendo éste el aporte principal en dicho caso ya que el método es original de otros autores.

En cuanto al tratamiento de la turbulencia, se introdujo un esquema de solución para el caso de utilizar modelos de dos ecuaciones original del presente trabajo. Dicho esquema combina métodos estudiados para la ecuación de convección-difusión-reacción (tales como el SUPG y ASC), con aspectos algorítmicos (tales como la congelación de los términos de producción dentro del esquema iterativo para converger en las variables turbulentas, la relajación de las variables y la linealización de las ecuaciones diferenciales suponiendo la viscosidad turbulenta constante), dando como resultado una estrategia numérica bastante robusta para atacar problemas turbulentos con modelos de dos ecuaciones. Adicionalmente se introdujeron modelos turbulentos que no involucran la hipótesis de Boussinesq (Algebraic Stress Models ASM), los cuales añaden nuevos problemas numéricos debido al tratamiento explícito que se le debe dar al tensor de Reynolds. Para este tipo de modelos se diseñó una estrategia numérica que tuvo como base un preconditionamiento del problema con la hipótesis de Boussinesq, siendo esto original del presente trabajo. Sin dicho tipo de preconditionamiento resultaba muy difícil converger a la solución del problema incluso en casos sencillos.

Un último aspecto a resaltar en cuanto a la solución del flujo para problemas de gran tamaño (mallas con muchos elementos), es la utilización de solucionadores iterativos para resolver los sistemas finales de ecuaciones que resultan de la discretización de las ecuaciones por elementos finitos. La parte novedosa del trabajo radica en la utilización de la penalización iterativa para preconditionar el sistema de ecuaciones y obtener la convergencia del esquema de solución iterativa (GMRES). Esto puede verse como la inclusión de una derivada temporal de la presión en la ecuación de continuidad, la cual mejora el condicionamiento de la matriz del sistema. Es sabido que dicha condición (la condición de incompresibilidad del flujo) genera fuertes mal condicionamientos en la matriz final del sistema de ecuaciones.

En cuanto a la solución numérica de la ecuación de la temperatura, el esquema numérico presentado tiene como principal novedad el uso de la estrategia de captura anisótropa de discontinuidades para evitar las oscilaciones espúreas en los lugares donde se presentan altos gradientes. Se demostró mediante los ejemplos numéricos que la no utilización de dicho esquemas producen "overshoots" y "undershoots" importantes, deformando la solución desde el punto de vista físico.

Para el transporte de la superficie libre se utilizó el método de la pseudo-concentración. Los principales aportes del trabajo fueron la estrategia para suavizar el frente del material y el tratamiento de ondas de superficie. En cuanto a este último punto, cabe anotar que el método de la pseudo-concentración no se ha utilizado por otros autores para simular ondas superficiales. En esta monografía se intentó dar una explicación razonable al porque del fallo de este método en esta clase de problemas, y se planteó un esquema para solucionarlo. Aunque aún faltan más ejemplos de validación para corroborar el buen funcionamiento del algoritmo adoptado, se cree que puede dar buenos resultados.

Adicionalmente se introdujeron en el trabajo una serie de aspectos computacionales. Entre estos se encuentran la forma de extrapolar variables del elemento a la frontera con el fin de evaluar las integrales de contorno, y la forma de calcular los diferentes parámetros de los métodos numéricos presentados (GLS, SUPG, DRS y ASC).

Finalmente cabe anotar que los métodos presentados en el capítulo primero de la monografía en el marco de la ecuación de Stokes para corregir el error en el contorno inducido por la formulación GLS, y el método para cortar el dominio computacional sin que esto influya en la solución del problema no han presentado buenos resultados para el caso de las ecuaciones completas de Navier-Stokes hasta el momento de la escritura del presente trabajo. Éste será una de las líneas futuras de investigación que se han generado a partir del presente trabajo.

Entre otros aspectos que se vislumbran como desarrollos futuros se presenta el tratamiento de los agujeros para problemas de llenado de moldes. Como pudo observarse en algunos de los ejemplos presentados, la posición donde se tomen los nodos temporalmente libres influye de forma drástica en la solución final del problema. Se cree que introduciendo algún tipo de flujo poroso en el contorno del molde (basado en la ley de Darcy), se obtendrán simulaciones más acordes con la realidad. Adicionalmente se estudiará la posibilidad de ir solidificando el material a medida que el molde va llenándose. La solidificación es un fenómeno claramente dependiente de la temperatura del material por lo que los esquemas desarrollados para la captura de discontinuidades en el problema térmico serán de gran importancia.

Finalmente uno de los aspectos menos desarrollados en el presente trabajo es la optimización de los tiempos de cálculo que aún se necesitan para solucionar problemas reales. En general para este tipo de problemas el mayor tiempo de cálculo (alrededor del 95 %) se debe a la solución del sistema lineal de ecuaciones. En cuanto a este punto se estudiarán dos posibilidades de cálculo paralelo: La primera de ellas, la cual ya se encuentra en desarrollo, es atacar el problema mediante métodos de descomposición de dominios. Se cree que esta alternativa es muy prometedora ya que el problema dividido puede resolverse utilizando solucionadores directos, lo cual obvia los problemas de mal condicionamiento propios del flujo incompresible y que no permiten el uso extendido de métodos iterativos. La segunda de ellas se concentra sólo en el método iterativo de resolver el sistema final de ecuaciones. Por un lado se tratará de paralelizar los esquemas iterativos de solución ya existentes, y por otro de buscar preconditionadores que permitan converger de forma mejor los métodos iterativos utilizados para solucionar el sistema final de ecuaciones.

# Bibliografía

- [ADPS83] B.F. Armaly, F. Durst, J.C.F. Pereira, and B. Schonung. Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow. *J. Fluid Mech.*, 127:473–476, 1983.
- [AI94] H.J. Antúnez and S.R. Idelsohn. Using of the pseudo-concentrations in the analysis of transient forming processes. *Engineering Computations (to appear)*, , 1994.
- [AID94] H.J. Antúnez, S.R. Idelsohn, and E.N. Dvorkin. Metal forming analysis by Fourier series expansion and further uses of pseudo-concentrations. *Computer and Structures (to appear)*, , 1994.
- [BA94] A. Bakker and H.E.A. Van Den Akker. Single-phase flow in stirred reactors. *Trans IChem E, Part A*, 72:583–593, 1994.
- [Bab71] I. Babuška. Error bounds for finite element method. *Numer. Math.*, 16:322–333, 1971.
- [Bab73] I. Babuška. The finite element method with lagrangian multipliers. *Numer. Math.*, 20:179–192, 1973.
- [Bat67] G.K. Batchelor. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 1967.
- [BB90] F. Brezzi and K.J. Bathe. A discourse on the stability condition for mixed finite element formulations. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 82:27–57, 1990.
- [BBR96] J.Ch. Bonin, T. Buchal, and W. Rodi. Data bases and testing of calculation methods for turbulent flows. *ERCRAFTAC bulletin*, 28:48–54, 1996.
- [BD88] F. Brezzi and J. Douglas. Stabilized mixed methods for the stoke problem. *Numer. Math.*, 53:225–135, 1988.
- [BF91] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and hybrid finite element methods*. Springer-Verlag, 1991.
- [BFR83] J. Bardina, J.H. Ferziger, and W.C. Reynolds. *Improved subgrid-scale models based on large-eddy simulation of homogeneous incompressible turbulent flows*. Stanford University Rep. TF-19, 1983.
- [BH82] A.N. Brooks and T.J.R. Hughes. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equation. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 32:199–259, 1982.

- [BR81] S. Biringen and W.C. Reynolds. Large-eddy simulation of the shear-free turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.*, 103:53–63, 1981.
- [Bre74] F. Brezzi. On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems arising from lagrange multipliers. *RAIRO Anal. Numer.*, 8:129–151, 1974.
- [BT94] M. Behr and T.E. Tezduyar. Finite element solution strategies for large-scale flow simulations. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 112:3–24, 1994.
- [CB95] R. Codina and J. Blasco. A finite element formulation for the Stokes problem allowing equal order velocity-pressure interpolation. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Accepted for publication, 1995.
- [CCD<sup>+</sup>94] Diego Celentano, Ramon Codina, Patricia Dardati, Sergio Oller, Eugenio Oñate, Ramon Ribo, and Orlando Soto. *CastPack software package for the finite element simulation of casting processes*. Technical Report IT-119, CIMNE, 1994.
- [CCO93] R. Codina, M. Cervera, and E. Oñate. A penalty finite element method for non-Newtonian creeping flows. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 36:1395–1412, 1993.
- [CF89] P. Constantin and C. Foias. *Navier-Stokes equations*. Chicago Press, 1989.
- [CH62] R. Courant and D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics, Vol. 2*. Wiley/Interscience, New York, 1962.
- [Cho67] A.J. Chorin. A numerical method for solving incompressible viscous problems. *Journ. Comp. Phys.*, 2:12–26, 1967.
- [Cho75] A.J. Chorin. *Lectures on turbulence theory*. Publish or Perish, Inc., Boston MA., 1975.
- [COC92] R. Codina, E. Oñate, and M. Cervera. The intrinsic time for the supg formulation using quadratic elements. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 94:239–262, 1992.
- [Cod89] R. Codina. *Dues formulacions numèriques per al problema de flux incompressible*. PhD thesis, Universitat Politècnica de Catalunya (tesis de Grado), Barcelona, 1989.
- [Cod92] R. Codina. *A Finite Element Model for Incompressible Flow Problems*. PhD thesis, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, 1992.
- [Cod93a] R. Codina. A discontinuity-capturing crosswind-dissipation for the finite element solution of the convection-diffusion equation. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 110:325–342, 1993.
- [Cod93b] R. Codina. *A Finite Element Formulation for Viscous Incompressible Flows*. PhD thesis, Monografia CIMNE No.16, 1993.
- [Cod93c] R. Codina. A shock-capturing anisotropic diffusion for the finite element solution of the diffusion-convection-reaction equation. In *Proc. VIII International Conference on Finite Elements in Fluids*, volume Part I, pages 67–75, Barcelona, Spain, September 1993. Ed. CIMNE/Pineridge Press.
- [CR73] P.G. Ciarlet and P.A. Raviart. Maximum principle and uniform convergence for the finite element method. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 2:17–31, 1973.

- [CS94a] R. Codina and O. Soto. *3D extension of the mould filling model*. Technical Report IT-158, CIMNE, 1994.
- [CS94b] R. Codina and O. Soto. Finite element solution of the Stokes problem with Coriolis force. In *Proc. of the Second European Computational Fluid Dynamics Conference*, volume Part II, pages 113–120, Stuttgart, Germany, September 1994. Ed. Wiley.
- [CS95] R. Codina and O. Soto. Finite element methods for the numerical simulation of rotating flows. In *Proc. 9th International Conference on Finite Elements in Fluids, Venice, Italy*, volume Part 1, pages 255–264. Dip. di Matematica Pura ed Applicata, Università di Padova, 1995.
- [CS96] R. Codina and O. Soto. A finite element implementation of the  $k - \varepsilon$  model and an algebraic stress model for turbulent steady incompressible flows. In *Eccomas'96*, Paris, France, September 1996.
- [CS97] R. Codina and O. Soto. Finite element solution of the Stokes problem with dominating Coriolis force. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 142:215–234, 1997.
- [CSO<sup>+</sup>92] R. Codina, U. Schäfer, E. Oñate, M. Cervera, and O. Soto. A finite element model to track free surfaces of viscous incompressible flows. In *International Conference on Numerical Methods in Engineering and Applied Sciences*, Concepción, Chile, November 1992.
- [CSO94] R. Codina, U. Schäfer, and E. Oñate. Mould filling simulation using finite elements. *Int. J. Numer. Meth. Heat Fluid Flow*, 4:291–310, 1994.
- [CSvS86] C. Cuvelier, A. Segal, and A.A. van Steenhoven. *Finite Element Methods and Navier-Stokes Equations*. D. Reidel Publishing Company, 1986.
- [Dea73] J.W. Deardorff. The use of subgrid transport equations in a three-dimensional model of atmospheric turbulence. *ASME J. of Fluid Engrg.*, 95:429–438, 1973.
- [DGC90] G. Dhatt, D.M. Gao, and A. Ben Cheikh. A finite element simulation of metal flow in moulds. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 30:821–831, 1990.
- [DH94] J.J. Droux and T.J.R. Hughes. A boundary integral modification of the Galerkin least squares formulation for the Stokes problem. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 113:173–182, 1994.
- [Don84] J. Donea. A Taylor-galerkin method for convective transport problems. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 20:101–119, 1984.
- [DR82] J. Douglas and T. Russel. Numerical methods for convection dominated problems based on combining the method of characteristics with finite elements or finite difference procedures. *SIAM J. Numer. Anal.*, 19:871–885, 1982.
- [DW89] J. Douglas and J. Wang. An absolute stabilized finite element method for the Stokes problem. *Math. Compu.*, 52:495–508, 1989.
- [EJ90] M.S. Engelman and M.A. Jamnia. Transient flow past a circular cylinder: A benchmark solution. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 11:985–1000, 1990.

- [ERC96] ERCOFTAC. *ERCOFTAC Database*. <http://fluindigo.mech.surrey.ac.uk/>. University of Surrey UK, 1996.
- [FdC89] L.P. Franca and E.G. Dutra do Carmo. The Galerkin Gradient Least-Squares method. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 74:41–54, 1989.
- [FF92] L.P. Franca and S.L. Frey. Stabilized finite element methods: II. The incompressible Navier-Stokes equations. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 99:209–133, 1992.
- [FH88] L.P. Franca and T.J.R. Hughes. Two classes of mixed finite element methods. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 69:89–129, 1988.
- [FHLM88] L.P. Franca, T.J.R. Hughes, A.F.D. Loula, and I. Miranda. A new family of stable elements for nearly incompressible elasticity based on a mixed Petrov-Galerkin finite element method. *Numer. Math.*, 53:123–141, 1988.
- [For77] M. Fortin. Analysis of the convergence of mixed finite element methods. *RAIRO Anal. Numer.*, 11:341–354, 1977.
- [FS91] L. Franca and R. Stenberg. Error analysis of some Galerkin least-squares methods for the elasticity equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 28:1680–1697, 1991.
- [FSCD93] J.L. Fleming, R.L. Simpson, J.E. Cowling, and W.J. Devenport. An experimental study of a turbulent wingbody junction and wake flow. *Exp. in Fluids*, 14:336, 1993.
- [Gar90] D.K. Gartling. A test problem for outflow boundary conditions - Flow over a backward-facing step. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 11:953–967, 1990.
- [GCLU84] P.M. Gresho, S.T. Chan, R.L. Lee, and C.D. Upton. A modified finite element method for solving the time-dependent, incompressible Navier-Stokes equations. *Int. Jour. Num. Meth. Fluids.*, 4:619–640, 1984.
- [GdC88] A.C. Galeão and E.G. Dutra do Carmo. A consistent approximate upwind Petrov-Galerkin method for convection dominated problems. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 68:83–95, 1988.
- [GR86] V. Girault and P.A. Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations*. Springer-Verlag, 1986.
- [GRC93] M. B. Goldschmit, R. A. Radovitzky, and M. A. Cavaliere. *Estudio de modelos de turbulencia y su implementación en el código de elementos finitos FANTOM*. Informe CINI I - 636/93, 1993.
- [GS93] T.B. Gatski and C.G. Speziale. On explicit algebraic stress models for complex turbulent flows. *J. Fluid Mech.*, 254:59–78, 1993.
- [Gun89] M. Gunzburger. *Finite element methods for viscous incompressible flows*. Academic Press, 1989.
- [HB79] T.J.R. Hughes and A.N. Brooks. A multi-dimensional upwind scheme with no cross-wind diffusion. In *FEM for convection dominated flows*. T.J.R. Hughes (ed.) ASME, New York, 1979.

- [HB82] T.J.R. Hughes and A.N. Brooks. A theoretical framework for Petrov-Galerkin methods with discontinuous weighting functions: applications to the streamline upwind procedure. In *Finite Elements in Fluids*, volume IV, pages 46–65. R.H. Gallagher, D.M. Norrie, J.T. Oden and O.C. Zienkiewicz (eds.), (Wiley, London), 1982.
- [HF87] T.J.R. Hughes and L.P. Franca. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VII. the Stokes problem with various well-posed boundary conditions: symmetric formulation that converge for all velocity/pressure spaces. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 65:85–96, 1987.
- [HFB86] T.J.R. Hughes, L.P. Franca, and M. Balestra. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. circunventing the babuška brezzi condition: a stable Petrov-Galerkin formulation for the Stokes problem accomodating equal-order interpolations. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 59:85–99, 1986.
- [HFH89] T.J.R. Hughes, L.P. Franca, and G.M. Hulbert. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VIII. the Galerkin least-squares method for advective-diffusive equations. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 73:173–189, 1989.
- [HHZ77] J.C. Heinrich, P.S. Huyakorn, and O.C. Zienkiewicz. An ‘upwind’ finite element scheme for two-dimensional convective transport equation. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 11:131–143, 1977.
- [HMJ96] T. Hino, L. Martinelli, and A. Jameson. A finite-volume method with unstructured grid for free surface flow. *Ship Research Institute, Princeton University*, :173–193, 1996.
- [HMM86] T.J.R. Hughes, M. Mallet, and A. Mizukami. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: II. Beyond SUPG. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 54:341–355, 1986.
- [HN81] C.W. Hirt and B.D. Nichols. Volumen of fluid (vof) method for the dynamics of free boundaries. *J. Comput. Phys.*, 39:201–225, 1981.
- [HR82] J.G. Heywood and R. Rannacher. Finite element approximation of the non-stationary Navier-Stokes problem: I. regularity of solutions and second order error estimates for spatial discretization. *SIAM J. Numer. Anal.*, 19:275–311, 1982.
- [HR86] J.G. Heywood and R. Rannacher. Finite element approximation of the non-stationary Navier-Stokes problem: II. stability of solutions and error estimates uniform in time. *SIAM J. Numer. Anal.*, 23:750–777, 1986.
- [HR88] J.G. Heywood and R. Rannacher. Finite element approximation of the non-stationary Navier-Stokes problem: III. smoothing property and higher order estimates for spatial discretization. *SIAM J. Numer. Anal.*, 25:489–512, 1988.
- [HR90] J.G. Heywood and R. Rannacher. Finite element approximation of the non-stationary Navier-Stokes problem: III. error analysis of second order time discretization. *SIAM J. Numer. Anal.*, 27:353–384, 1990.
- [HRS84] L.P. Hackman, G.D. Raithby, and A.B. Strong. Numerical prediction of flows over backward-facing steps. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 4:711–724, 1984.

- [Hue84] J. Huentink. Analysis of metal forming processes based on a combined Eulerian-Lagrangian finite element formulation. In *Numerical analysis of forming processes*. J.F.T. Pittman, O.C. Zienkiewicz, R.D. Wood and J.M. Alexander (eds.) Wiley, 1984.
- [Hug78] T.J.R. Hughes. A simple scheme to developing 'upwind' finite elements. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 12:1359-1365, 1978.
- [Hug87] T.J.R. Hughes. *The Finite Element Method*. Prentice-Hall, 1987.
- [Hug95] T.J.R. Hughes. Multiscale phenomena: Green's function, the dirichlet to newmann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized formulations. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 127:387-401, 1995.
- [Ike83] T. Ikeda. *Maximum principle in finite element models for convection-diffusion phenomena*. North-Holland/Kinokuniya, 1983.
- [JNP84] C. Johnson, U. Nävert, and J. Pitkaranta. Finite element methods for linear hiperbolic equations. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 45:285-312, 1984.
- [Joh87] C. Johnson. *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*. Cambridge University Press, 1987.
- [JSH87] C. Johnson, A. Szepessy, and P. Hansbo. *On the convergence of shock-capturing streamline finite element methods for hyperbolic conservation laws*. Technical report 1987-21, Mathematics Department, Chalmers University of Technology, Göteborg, 1987.
- [Kik77] F. Kikuchi. *Discrete maximum principle and artificial viscosity in finite elements approximations of convective diffusion equations*. ISAS Report No. 550 (42, No.5), Tokio, 1977.
- [Kim87] S.W. Kim. *A finite element computational method for high Reynolds number laminar flows*. NASA CR-179135, 1987.
- [KKJ80] J. Kim, S.J. Kline, and J.P. Johnston. Investigation of a reattaching turbulent shear layer: Flow over a backward-facing step. *J. Fluid Eng. ASME Tran.*, 102:302-308, 1980.
- [KM85] J. Kim and P. Moin. Application of a fractional-step method to incompressible Navier-Stokes equations. *J. Comput. Phys.*, 59:308-323, 1985.
- [KNZH80] D.W. Kelly, S. Nakazawa, O.C. Zienkiewicz, and J.C. Heinrich. A note of upwinding and anisotropic balancing dissipation in finite element approximations to convective diffusion problems. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 15:1705-1711, 1980.
- [Kol68] A.N. Kolmogorov. *Equation of turbulent motion of an incompressible fluid*. English translation: Imperial College, Mech. Eng. Dept. Rept. ON/6, 1968.
- [Lad63] O. Ladyzhenskaya. *The mathematical theory of viscous incompressible flows*. Gordon-Breach, 1963.
- [LDD90] Y.S. Lee, P.R. Dawson, and T.B. Dewhurst. Bulge predictions in steady state bar rolling processes. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 30:1403-1413, 1990.

- [LeV90] R.J. LeVeque. *Numerical Methods for Conservation Laws*. Birkhauser, Boston, 1990.
- [Lio68] J.L. Lions. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non lineaires*. Dunod, 1968.
- [LMC92] M.T. Landahl and E. Mollo-Christensen. *Turbulence and random processes in fluid mechanics*. Cambridge University Press, New York, 1992.
- [LMZ84] R. Löehner, K. Morgan, and O.C. Zienkiewicz. The solution of non-linear hyperbolic equations system by the finite element method. *Int. Jour. Num. Meth. Fluids.*, 4:1043–1063, 1984.
- [LR74] P. Lesaint and P.A. Raviart. 'On a finite element method for solving the neutron transport equation' in: C. de Boor (ed.), *Mathematical aspects of the finite element method*. Academic Press, 1974.
- [LS74] B.E. Launder and D.B. Spalding. The numerical computation of turbulent flows. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 3:269–289, 1974.
- [LUC91] R.W. Lewis, A.S. Usmani, and T.J. Cross. Finite element modelling of mould filling. In *Finite elements in the 90's*. E. Oñate, J. Periaux, A. Samuelson (eds.) (Spring-Verlag/ CIMNE), 1991.
- [LYOI96] R. Löehner, Ch. Yang, E. Oñate, and S. Idelsohn. An unstructured grid-based, parallel free surface solver. *GMU/CSI - CIMNE*, :1–23, 1996.
- [Mar86] N.C. Markatos. The mathematical modelling of turbulent flows. *Appl. Math. Modelling*, 10:190–220, 1986.
- [MP94] B. Mohanmadi and O. Pironneau. *Analysis of the K-Epsilon turbulence model*. John Wiley & Sons, 1994.
- [Näv82] U. Nävert. *A finite element method for convection-diffusion problems*. PhD thesis, Chalmers University of Technology, Göteborg Sweden, 1982.
- [Nit75] J.A. Nitsche.  $L^\infty$ -convergence for finite element approximations. 2, Conference on Finite Elements, Rennes, France, 1975.
- [Pir82] O. Pironneau. On the transport-diffusion algorithm and its application to the Navier-Stokes equations. *Numer. Math.*, 38:309–332, 1982.
- [PME92] T.C. Papanastasiou, N. Malamataris, and K. Ellwood. A new outflow boundary condition. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 14:587–608, 1992.
- [Pra25] L. Prandtl. *Über die ausgebildete turbulenz*. ZAMM, 5, 1925.
- [Pra45] L. Prandtl. *Über ein neues formelsystem für die ausgebildete turbulenz*. Nachr. Akad. Wiss., Göttingen, Math-Phis. Klasse p.6, 1945.
- [Red93] J.M. Redondo. *Turbulencia y mezcla - con aplicaciones geofísicas*. Departamento de Física Aplicada, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona - España, 1993.
- [Rod80] W. Rodi. *Turbulence models and their application in hydraulics - a state of the art review*. Institut für Hydromechanik and Sonderforschungsbereich 80, University of Karlsruhe, Germany, 1980.

- [Sch69] H. Schlichting. *Boundary layer theory*. McGraw Hill, New York, 1969.
- [SCO95] O. Soto, R. Codina, and E. Oñate. Métodos de estabilización para la solución por elementos finitos de la ecuación de Navier-Stokes incompresible. In *Proc. del Segundo Encuentro Nacional de Elementos Finitos*, volume Part I, Popayán, Colombia, Mayo 1995.
- [SFDO91] A. Soulaïmani, M. Fortin, G. Dhatt, and Y. Ouellet. Finite element simulation of two- and three-dimensional free surface flows. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 86:265–296, 1991.
- [SH91] F. Shakib and T.J.R. Hughes. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: IX. Fourier Analysis of space-time Galerkin/least-squares algorithms. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 87:35–58, 1991.
- [Sha88] F. Shakib. *Finite element analysis of the compressible Euler and Navier-Stokes equations*. PhD thesis, Stanford University, 1988.
- [Sma63] J.S. Smagorinsky. General circulation model of the atmosphere. *Mon. Weather Rev.*, 91:99–164, 1963.
- [SOC93a] O. Soto, E. Oñate, and R. Codina. *Finite element analysis of hot rolling processes*. Publicación CIMNE No. 40, 1993.
- [SOC93b] O. Soto, E. Oñate, and R. Codina. Una formulación Euleriana-Lagrangiana para el análisis por elementos finitos de procesos de laminación en caliente. In *Métodos Numéricos en Ingeniería*, volume II, pages 1461–1472. F. Navarrina, M. Casteleiro. SEMNL. Artes Gráficas Torres, S.A., 1993.
- [Soh86] J.L. Sohn. *Evaluation of Fidap on some classical laminar and turbulent benchmarks*. Universities Space Research Association. Fluid Dynamics Branch. Nasa/Marshall Space Flight Center. Huntsville, AL 35812, 1986.
- [Spe85] C.G. Speziale. Galilean invariance of subgrid-scale stress models in the large-eddy simulation of turbulence. *J. Fluid Mech.*, 156:52–62, 1985.
- [Spe91] C.G. Speziale. Analytical methods for the development of Reynolds-stress closures in turbulence. *Annu. Rev. Fluid. Mech.*, 23:107–157, 1991.
- [sta82] *Proc. 1980-81 AFOSR-HTTM-Stanford Conference on Complex Turbulent Flows: Comparison of Computation and Experiment. Vol I and II*. 1982.
- [Ste84] R. Stenberg. Analysis of the mixed finite element methods for the Stokes problem: a unified approach. *Math. Compu.*, 42:9–23, 1984.
- [SW88] T.J. Smith and D.B. Welbourn. The integration of geometric modelling with finite element analysis for the computed-aided design of castings. *Applied Scientific Research*, 44:139–160, 1988.
- [Tem84] R. Temam. *Navier-Stokes equations*. North-Holland, 1984.
- [TGL88] T.E. Tezduyar, R. Glowinski, and J. Liou. Petrov-Galerkin method on multiply connected domains for the vorticity-stream function formulation of the incompressible Navier-Stokes equations. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 8:1269–1290, 1988.

- [Tho86a] E. Thompson. Transient analysis of metal forming operations using pseudo-concentrations. In *Numiform 86. Proceedings of the second international conference on Numerical Methods for Industrial Forming Processes*. Göteborg, Sweden. A. Balkema, 1986.
- [Tho86b] E. Thompson. Use of the pseudo-concentration to follow creeping viscous during transient analysis. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 6:749–761, 1986.
- [TL83] H. Tennekes and J.L. Lumley. *A first course in turbulence*. MIT Press, Cambridge, MA., 1983.
- [TL90] T.E. Tezduyar and J. Liou. Computation of spatially periodic flows based on the vorticity-stream function formulation. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 83:121–142, 1990.
- [TMRS92] T.E. Tezduyar, S. Mittal, S.E. Ray, and R. Shin. Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 95:221–242, 1992.
- [TMS91] T.E. Tezduyar, S. Mittal, and R. Shin. Time accurate incompressible flow computations with quadrilateral velocity-pressure elements. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 87:363–384, 1991.
- [TP86] T.E. Tezduyar and Y.J. Park. Discontinuity-capturing finite element formulations for nonlinear convection-diffusion-reaction equations. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 59:307–325, 1986.
- [Tri77] D.J. Tritton. *Physical fluid dynamics*. Van Nostrand Reinhold, 1977.
- [TS88] E. Thompson and R.E. Smelser. Transient analysis of forging operations by the pseudo-concentration method. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 25:177–189, 1988.
- [VC83] P.R. Voke and M.W. Collins. Large-eddy simulation: retrospect and prospect. *PhysicoChem. Hydrodyn.*, 4:119–161, 1983.
- [Ver87] R. Verfürth. Finite element approximation for incompressible Navier-Stokes equations with slip boundary conditions. *Numer. Math.*, 50:697–721, 1987.
- [Wah78] L.B. Wahlbin. Maximum norm error estimates in the finite element method with isoparametric elements and numerical analysis. *RAIRO Anal. Numer.*, 12:173–262, 1978.
- [Wil88] D.C. Wilcox. Reassessment of the scale determining equation for advanced turbulence models. *AIAA J. No.11*, 26:1299–1310, 1988.
- [Wil93] D.C. Wilcox. *Turbulence modeling for CFD*. DCW Industries, Inc. La Cañada, California, 1993.
- [WS88] W.S. Wang and R.S. Stoehr. Molten metal flow prediction for complete solidification analysis of near net shape casting. *Material Science Technology*, 4:240–250, 1988.
- [ZC95] O.C. Zienkiewicz and R. Codina. A general algorithm for compressible and incompressible flow - part i. the split, characteristic-based scheme. *Int. Jour. Num. Meth. Fluids.*, 20:869–885, 1995.

- [Zie84] O.C. Zienkiewicz. Flow formulation for the numerical solution of forming processes. In *Numerical analysis of forming processes*. J.F.T. Pittman, O.C. Zienkiewicz, R.D. Wood and J.M. Alexander (eds.) Wiley, 1984.
- [ZJO78] O.C. Zienkiewicz, P.C. Jain, and E. Oñate. Flow of solids during forming and extrusion: some aspects of numerical solution. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 14:15–38, 1978.
- [ZOH81] O.C. Zienkiewicz, E. Oñate, and J.C. Heinrich. A general formulation for coupled thermal flow of metals using finite elements. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 17:1497–1514, 1981.
- [ZQTN86] O.C. Zienkiewicz, S. Qu, R.L. Taylor, and S. Nakazawa. The patch test for mixed formulations. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 23:1873–1883, 1986.
- [ZW86] S. Zeierman and M. Wolfshtein. Turbulent time scale for turbulent-flow calculations. *AIAA J. No.10*, 24:1606–1610, 1986.