# Clases de grafos y problemas de optimización combinatoria

Flavia Bonomo

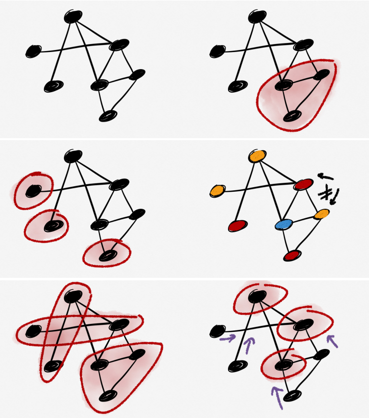
DC, FCEyN, Universidad de Buenos Aires, Argentina

UMA 2016, Bahía Blanca

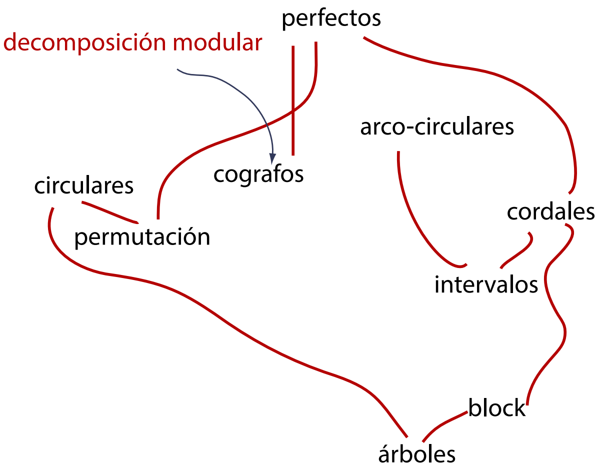
# Esquema del curso: problemas algorítmicos

- Clique máxima
- Conjunto independiente máximo
- Coloreo
- Cubrimiento por cliques mínimo
- Conjunto dominante mínimo

(Todos NP-completos en general.)

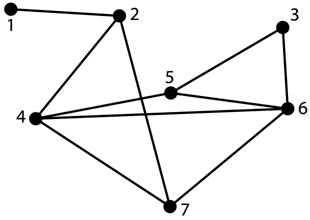


# Esquema del curso: clases de grafos y conceptos



# Definiciones básicas

- Un grafo $G$ está formado por un par $(V(G), E(G))$:
  - $V(G)$ es un conjunto finito, el conjunto de vértices de $G$, y
  - $E(G)$ es un conjunto de pares no ordenados de vértices distintos de $G$, llamados aristas, que se notan por $ij$ o $(i, j)$.
- Notación:
  - $n = n_G = |V(G)|$ y $m = m_G = |E(G)|$;
  - $V_G = V(G)$, $E_G = E(G)$.
- Un grafo se dice trivial si tiene un solo vértice.



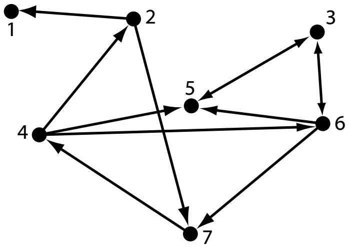

$V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$E(G) = \{(1, 2), (2, 4), (2, 7), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (4, 7), (5, 6), (6, 7)\}$

$n = 7; m = 10.$

# Definiciones básicas

- Decimos que $G$ es un digrafo, o un grafo dirigido, si las aristas están dadas por un conjunto de pares ordenados de vértices.



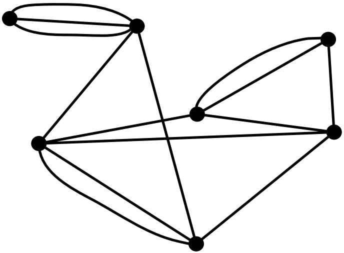

$V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

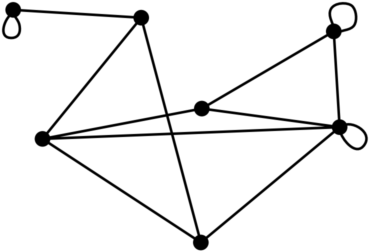
$E(G) = \{(2,1), (4,2), (2,7), (3,5), (5,3), (3,6), (6,3), (4,5), (4,6), (7,4), (6,5), (6,7)\}$

$n = 7; m = 12.$

# Definiciones básicas

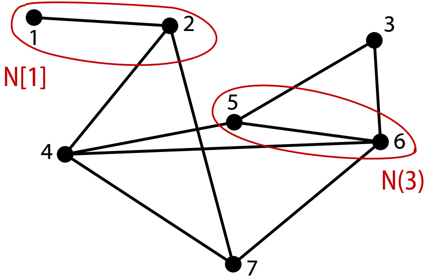
- Decimos que $G$ es un multigrafo si se permite que entre un mismo par de vértices se trace más de una arista, y un pseudografo si se permiten aristas de tipo $(v, v)$ (loops).





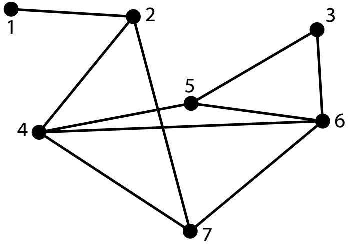
# Vecindarios

- Un vértice $v$ es adyacente a otro vértice $w$ en $G$ si $(v, w) \in E(G)$. Decimos que $v$ y $w$ son los extremos de la arista.
- El vecindario de un vértice $v$ en un grafo $G$ es el conjunto $N_G(v)$ que consiste de todos los vértices adyacentes a $v$. El vecindario cerrado de $v$ es $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$.
- Notación: si queda claro por contexto, se usa $N(v)$ y $N[v]$.



# Grado

- El grado de un vértice $v$ en $G$ es la cardinalidad del conjunto $N_G(v)$ y se nota $d_G(v)$. Si no hay ambigüedad, se usa $d(v)$.
- Dado un grafo $G$, notamos $\delta(G)$ al grado mínimo y $\Delta(G)$ al grado máximo entre los vértices de $G$.



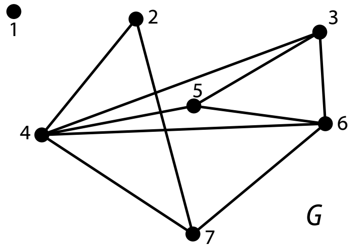

$d(2) = 3$

$\delta(G) = 1$

$\Delta(G) = 4$

# Grado

- Un vértice $v$ es aislado cuando $N(v) = \emptyset$, o equivalentemente $d(v) = 0$.
- Un vértice $v$ es universal cuando $N(v) = V(G) - \{v\}$, o equivalentemente $d(v) = n - 1$.




El vértice 1 es aislado en $G$.

El vértice 4 es universal en $G - \{1\}$.

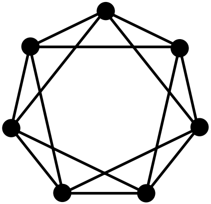
Si $G$ es no trivial y tiene un vértice aislado no puede tener también uno universal.

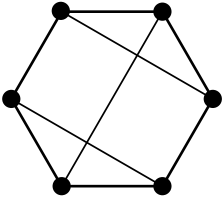
# Grado

**Ejercicio:** Probar que en todo grupo de dos o más personas hay por lo menos dos de ellas que tienen la misma cantidad de amigos en el grupo.

# Grado

- Un grafo se dice regular si todos sus vértices tienen el mismo grado.
- Un grafo se dice cúbico si todos sus vértices tienen grado tres.





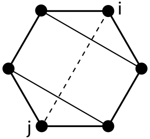
# Grado

## Teorema

$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m$.

Demo: Por inducción en $m_G$. Si $m_G = 0$, entonces $d_G(v) = 0$ para todo $v \in V(G)$, y por lo tanto $0 = \sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m$. Supongamos $m_G > 0$, y consideremos $G'$ obtenido a partir de $G$ sacando una arista cualquiera $(i, j)$. Entonces:

- $m_{G'} = m_G - 1$
- $d_{G'}(i) = d_G(i) - 1$ y $d_{G'}(j) = d_G(j) - 1$
- $d_{G'}(v) = d_G(v)$ si $v \neq i, j$




Por hipótesis inductiva, $\sum_{v \in V(G')} d_{G'}(v) = 2m_{G'}$. Luego $d_{G'}(i) + d_{G'}(j) + \sum_{v \in V(G'), v \neq i,j} d_{G'}(v) = 2m_{G'}$. Reemplazando, $d_G(i) - 1 + d_G(j) - 1 + \sum_{v \in V(G), v \neq i,j} d_G(v) = 2(m_G - 1)$. Es decir, $(\sum_{v \in V(G)} d(v)) - 2 = 2m_G - 2$ y por lo tanto $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m_G$. $\square$

# Grado

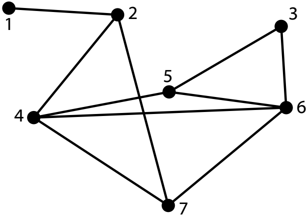
**Corolario**

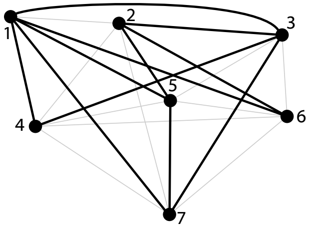
Todo grafo cúbico tiene un número par de vértices.

Demo: $2m = \sum_{v \in V(G)} d(v) = 3n$. Luego $2 \mid n$. $\square$

# Complemento

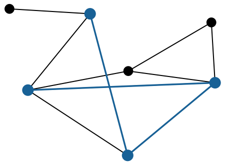
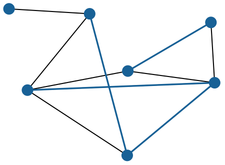
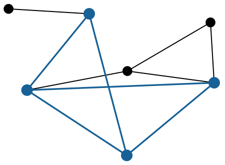
- El complemento de un grafo $G$, denotado por $\overline{G}$, es el grafo que tiene el mismo conjunto de vértices de $G$ y tal que dos vértices distintos son adyacentes en $\overline{G}$ si y sólo si no son adyacentes en $G$.



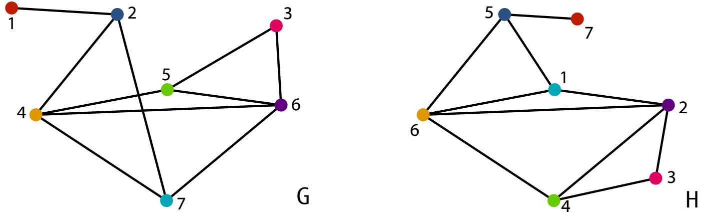
# Subgrafos

- Un grafo $H$ es un subgrafo de un grafo $G$ si $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$.
- Si $V(H) = V(G)$, decimos que $H$ es un subgrafo generador de $G$.
- Dado un conjunto de vértices $X \subseteq V(G)$, el subgrafo de $G$ inducido por $X$ es el subgrafo $H$ de $G$ tal que $V(H) = X$ y $E(H)$ es el conjunto de aristas de $G$ que tiene ambos extremos en $X$.
- Notación: Si $v \in V(G)$, $G - v$ denota el subgrafo de $G$ inducido por $V(G) - \{v\}$.

# Isomorfismo

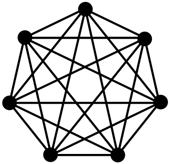
- Dos grafos $G$ y $H$ son isomorfos si existe una biyección entre $V(G)$ y $V(H)$ que conserva las adyacencias. En este caso, notamos $G = H$.
- Más formalmente, $G$ y $H$ son isomorfos si existe $f : V(G) \to V(H)$ biyectiva tal que $(v, w) \in E(G)$ si y sólo si $(f(v), f(w)) \in E(H)$.
- El isomorfismo es una relación de equivalencia.




$f(1) = 7$
$f(2) = 5$
$f(3) = 3$
$f(4) = 6$
$f(5) = 4$
$f(6) = 2$
$f(7) = 1$

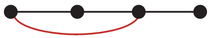
# Grafos completos

- Un grafo $G$ es completo si cualquier par de vértices distintos de $G$ son adyacentes. Llamamos $K_n$ al grafo completo con $n$ vértices.
- $K_3$ se llama también triángulo.
- ¿Cuánto valen $m_{K_n}$, $\delta(K_n)$ y $\Delta(K_n)$?



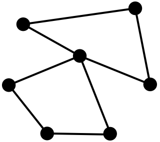
# Caminos

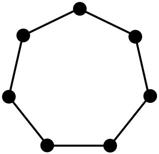
- Un camino en un grafo $G$ es una secuencia de vértices distintos $P = v_1, v_2, \dots, v_k$, donde $(v_i, v_{i+1}) \in E(G)$, $i = 1, \dots, k-1$.
- Una cuerda en $P$ es una arista que une dos vértices no consecutivos de $P$.
- Un camino inducido es un camino sin cuerdas. Denotamos por $P_k$ al camino inducido de $k$ vértices.
- ¿Cuánto valen $m_{P_k}$, $\delta(P_k)$ y $\Delta(P_k)$?

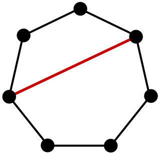


# Circuitos y ciclos

- Un circuito en un grafo $G$ es una secuencia de vértices $C = v_1, v_2, \ldots, v_k$, no necesariamente distintos, donde $v_1 = v_k$ y $(v_i, v_{i+1}) \in E(G)$, $i = 1, \ldots, k-1$.
- Si $k \geq 3$ y $v_1, \ldots, v_{k-1}$ son distintos, $C$ se llama ciclo.
- Una cuerda en $C$ es cualquier cuerda del camino $v_1, v_2, \ldots, v_k$ excepto $(v_1, v_k)$.
- Un ciclo es un ciclo inducido si no posee cuerdas. Llamamos $C_k$ al ciclo inducido de $k$ vértices.
- ¿Cuánto valen $m_{C_k}$, $\delta(C_k)$ y $\Delta(C_k)$?

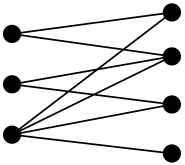


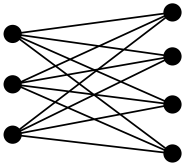




# Grafos bipartitos completos

- Un grafo $G$ es bipartito si $V(G) = V_1 \cup V_2$, con $V_1$ y $V_2$ disjuntos, y toda arista tiene un extremo en $V_1$ y otro en $V_2$.
- Un grafo $G$ es bipartito completo si además todo vértice de $V_1$ es adyacente a todo vértice de $V_2$. Llamamos $K_{r,s}$ al grafo bipartito completo tal que $|V_1| = r$ y $|V_2| = s$.
- ¿Cuánto valen $n_{K_{r,s}}$, $m_{K_{r,s}}$, $\delta(K_{r,s})$ y $\Delta(K_{r,s})$?

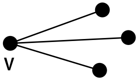




## Teorema

Si un grafo tiene 6 o más vértices, entonces el grafo o su complemento tienen un triángulo.

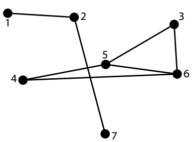
Demo: Sea $v \in V(G)$. Como $d_G(v) + d_{\bar{G}}(v) = n - 1 \geq 5$, podemos asumir s.p.g. que $d_G(v) \geq 3$.

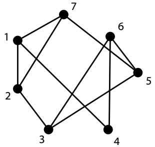


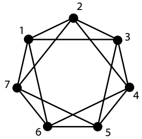

Si hay dos vértices adyacentes $w$ y $z$ en $N_G(v)$, entonces $v, w, z$ forman un triángulo. Si no hay dos vértices adyacentes en $N_G(v)$, entonces $N_G(v)$ induce un subgrafo completo en $\bar{G}$, y como $|N_G(v)| \geq 3$, $\bar{G}$ contiene un triángulo. □

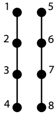
# Conexión

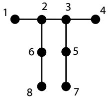
- Un grafo $G$ es conexo si para todo par de vértices distintos $v$ y $w$ de $G$ existe un camino de $v$ a $w$.
- ¿Cuáles de los siguientes grafos son conexos?



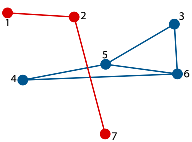



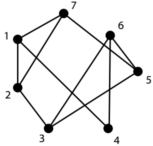



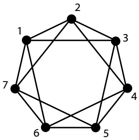



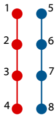
# Conexión

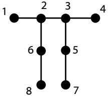
- Un conjunto $S$ es maximal (minimal) en relación a una determinada propiedad $P$ si $S$ satisface $P$, y todo conjunto $S'$ que contiene propiamente a $S$ (que está contenido propiamente en $S$) no satisface $P$.
- Una componente conexa de un grafo es un subgrafo conexo maximal.
- ¿Cuáles son las componentes conexas de estos grafos?









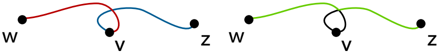


# Conexión

## Observaciones

1. Todo vértice de un grafo pertenece a alguna componente conexa.
2. Un grafo es conexo si y sólo si tiene una sola componente conexa.
3. Dos componentes conexas distintas de un grafo son disjuntas.

Demo de 3.: Supongamos que $v \in G_1 \cap G_2$. Entonces para todo par de vértices $w, z$ de $G_1 \cup G_2$ existe un camino de $w$ a $v$ y un camino de $v$ a $z$ (de longitud cero si alguno es $v$).



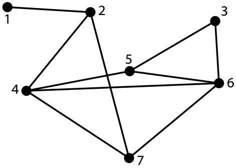

De la union de esos dos caminos se puede extraer un camino simple de $w$ a $z$. Por lo tanto $G_1 \cup G_2$ es un subgrafo conexo, pero como $G_1$ y $G_2$ eran maximales, resulta $G_1 = G_2 = G_1 \cup G_2$. □

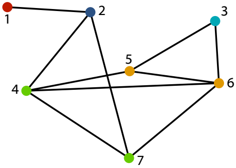
# Distancia

- La longitud de un camino se mide por la cantidad de aristas que lo componen.
- La distancia entre dos vértices $v$ y $w$ en $G$ es la longitud del camino más corto entre $v$ y $w$ y se nota $d_G(v, w)$. Si el contexto no es ambiguo, se abrevia $d(v, w)$.

  ¿Cuál es la distancia entre 1 y 5?
- El disco $D_k(v)$ de centro $v$ y radio $k$ ($k \geq 0$) es el conjunto de vértices de $G$ que están a distancia menor o igual que $k$ de $v$.

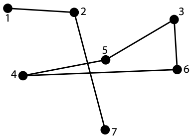
  ¿Cuáles son los discos con centro 1 en este grafo?

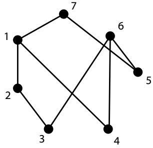


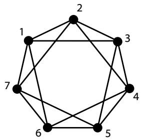



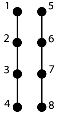
# Grafos bipartitos

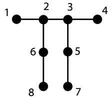
- Un grafo $G$ es bipartito si $V(G) = V_1 \cup V_2$, con $V_1$ y $V_2$ disjuntos, y toda arista tiene un extremo en $V_1$ y otro en $V_2$.
- ¿Cuáles de los siguientes grafos son bipartitos?



## Teorema

Un grafo $G$ es bipartito $\Leftrightarrow$ todos sus circuitos son pares.

Demo:

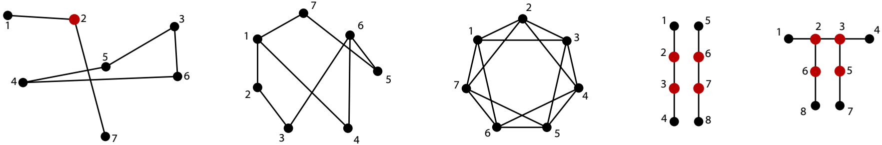
$\Rightarrow$) Sabemos que $V(G) = V_1 \cup V_2$ y toda arista va de $V_1$ a $V_2$. Sea $v_1, v_2, \ldots, v_n$ un circuito en $G$. Si $v_1 \in V_1$ entonces los vértices de subíndice par tienen que pertenecer a $V_2$ y los de subíndice impar a $V_1$. Como $v_n$ es adyacente a $v_1$, $n$ tiene que ser par.

$\Leftarrow$) Sea $v$ en $V(G)$. Definimos $V_1$ y $V_2$ como los vértices que están a distancia impar o par de $v$, respectivamente. Supongamos que no es una bipartición, o sea, existen $z$ y $w$ que están a ambos a distancia par o impar de $v$ y son adyacentes. Como la diferencia entre las distancias es a lo sumo 1, entonces están a la misma distancia. Sea $v'$ el primer vértice en común entre los caminos mínimos de $w$ a $v$ y de $z$ a $v$. La longitud de los sub-caminos de $w$ a $v'$ y de $z$ a $v'$ tiene que ser la misma. Entonces esos sub-caminos y la arista $wz$ forman un ciclo impar. $\square$

# Conexión

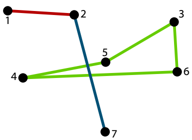
- Un punto de corte de un grafo $G$ es un vértice $v$ tal que $G - v$ tiene más componentes conexas que $G$.
- ¿Qué vértices son puntos de corte en estos grafos?

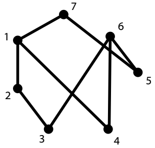
- Un grafo es biconexo si es conexo y sin puntos de corte.
- ¿Cuáles de estos grafos son biconexos?

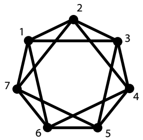


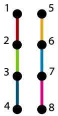
# Conexión

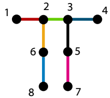
- Un bloque o componente biconexa de un grafo es un subgrafo biconexo maximal.
- ¿Cuáles son los bloques en estos grafos?



# Conexión

## Observaciones

1. Un grafo es biconexo si y sólo si tiene un solo bloque.
2. Dos bloques de un grafo comparten a lo sumo un vértice. En particular, cada arista pertenece a un único bloque.

## Teorema

Sea $G$ conexo y sea $v$ un vértice de $G$. Son equivalentes:

1. El vértice $v$ es un punto de corte de $G$.
2. Existen vértices $u$ y $w$ distintos de $v$ tales que $v$ está en todo camino entre $u$ y $w$.
3. Existe una partición de $V - v$ en $U$ y $W$ tal que para todo $u$ en $U$ y para todo $w$ en $W$, el punto $v$ está en todo camino entre $u$ y $w$.

Demo: $1 \Rightarrow 3$) Si $v$ es punto de corte $\Rightarrow G - v$ es disconexo. Sea $U$ una componente conexa de $G - v$ y $W$ los vértices restantes. Sean $u \in U$ y $w \in W$; como están en componentes conexas distintas de $G - v$, todo camino en $G$ entre ellos contiene a $v$.

$3 \Rightarrow 2$) Tomamos $u$ en $U$ y $w$ en $W$.

$2 \Rightarrow 1$) Si $v$ está en todo camino de $u$ a $w$, entonces no existe un camino entre $u$ y $w$ en $G - v$. Por lo tanto $G - v$ no es conexo, y $v$ es punto de corte de $G$. $\square$

# Conexión

- Un puente de un grafo $G$ es una arista $e$ tal que $G - e$ tiene más componentes conexas que $G$.
- Sea $G$ conexo, $v$ un punto de corte y $e$ un puente. ¿Puede ser que $G - v$ tenga más de dos componentes conexas? ¿Y $G - e$?
- ¿Existe algún grafo biconexo que tenga un puente?

  Rta: Sólo el grafo formado por una única arista. Si $e = vw$ es un puente en $G$, entonces las componentes conexas de $G - e$ son $G_1$ y $G_2$, donde $v \in G_1$ y $w \in G_2$. Notemos que $v$ es punto de corte en $G$ salvo que $G_1 = \{v\}$ y $w$ es punto de corte en $G$ salvo que $G_2 = \{w\}$. Entonces, si $G$ es biconexo, $V(G) = \{v, w\}$ y $E(G) = \{e\}$. $\square$

**Teorema**

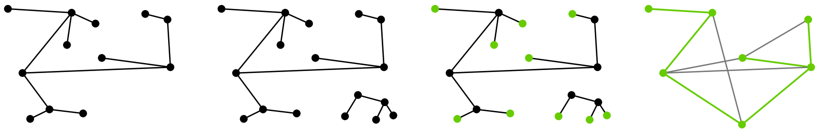
Sea $G$ conexo y sea $e = ij$ una arista de $G$. Son equivalentes:

1. La arista $e$ es un puente de $G$.
2. La arista $e$ no está en ningún ciclo de $G$.
3. Existen vértices $u$ y $v$ tales que $e$ está en todo camino entre $u$ y $v$.

Demo: $1 \Rightarrow 2$) Si $e$ está en un ciclo $C$, entonces $C - e$ es un camino $P$ entre $i$ y $j$. En cualquier camino entre dos vértices $u$ y $v$, la arista $e$ podría ser reemplazada por el camino $P$. Luego $e$ no es puente.
$2 \Rightarrow 3$) Sean $i$ y $j$ los extremos de $e$. Si para todo par de vértices $u, v$ existe un camino que los une y no pasa por $e$, en particular existe un camino $P$ entre $i$ y $j$ que no usa $e$. Pero entonces $P \cup e$ es un ciclo.
$3 \Rightarrow 1$) Si $e$ está en todo camino de $u$ a $v$, entonces no existe un camino entre $u$ y $v$ en $G - e$. Por lo tanto $G - e$ no es conexo, y $e$ es un puente de $G$. $\square$

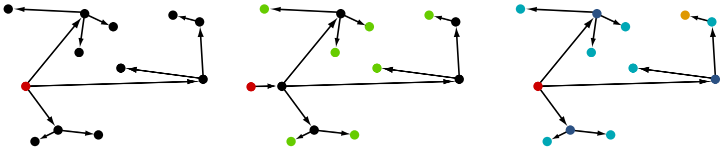
# Árboles

- Un árbol es un grafo conexo y acíclico (sin ciclos).
- Un bosque es un grafo acíclico, o sea, una unión disjunta de árboles.
- Una hoja en un grafo es un vértice de grado 1.
- Un árbol generador de un grafo $G$ es un subgrafo generador de $G$ que es un árbol.



# Árboles dirigidos

- Un árbol dirigido es un árbol con un vértice distinguido como raíz y tal que cada arista apunta del vértice más cercano a la raíz al más lejano.
- Si en un árbol dirigido existe la arista $ij$, se dice que $i$ es el padre de $j$, o que $j$ es un hijo de $i$.
- Obs: Todo vértice tiene un solo padre, salvo la raíz que no tiene. Se llaman hojas los vértices sin hijos.
- Se define el nivel de un vértice como su distancia a la raíz.



**Lema 1**

Si $m > n - 1$ entonces $G$ tiene un ciclo.

Demo: Por inducción. Si $n = 1$ o 2, no puede pasar. Si $n = 3$, entonces $G$ es un triángulo y tiene un ciclo.
Sea $G$ con $n_G > 3$ y $m_G > n_G - 1$. Si todo vértice de $G$ tiene grado al menos 2, entonces $G$ tiene un ciclo (ej. práctica).
Si no, saco un vértice $v$ con $d(v) \leq 1$. Ahora $G' = G - v$ cumple

$$m_{G'} \geq m_G - 1 > n_G - 2 = n_{G'} - 1$$

Por hipótesis inductiva $G'$ contiene un ciclo, y como $G'$ es un subgrafo de $G$, es también un ciclo en $G$. □

**Lema 2**

Si $G$ es conexo, entonces $m \geq n - 1$.

Demo: Por inducción. Si $n = 1$ o 2, se verifica.
Sea $G$ conexo, $n_G \geq 3$. Si todo vértice de $G$ tiene grado al menos 2, entonces $2m_G \geq 2n_G$, luego $m \geq n - 1$.
Si no, sea $v$ de grado 1 (no puede haber vértices de grado cero por ser $G$ conexo no trivial). Como $v$ no puede ser punto de corte, $G' = G - v$ es conexo.
Por hipótesis inductiva $m_{G'} \geq n_{G'} - 1$. Entonces

$$m_G = m_{G'} + 1 \geq n_{G'} = n_G - 1$$

□

**Teorema**

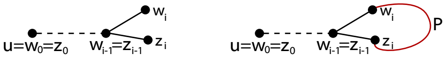
Son equivalentes:

1. $G$ es un árbol.
2. Todo par de vértices de $G$ está unido por un único camino.
3. $G$ es conexo y $m = n - 1$.
4. $G$ es acíclico y $m = n - 1$.

## $G$ es un árbol $\Leftrightarrow$ todo par de vértices de $G$ está unido por un único camino

Demo: $\Leftarrow$) Si todo par de vértices de $G$ está unido por un único camino, claramente $G$ es conexo. Además, si hubiera un ciclo, cualquier par de vértices del ciclo estaría unido por al menos dos caminos distintos. Luego $G$ es un árbol.

$\Rightarrow$) Si $G$ es un árbol, es conexo, luego todo par de vértices está unido por al menos un camino. Supongamos que $u$ y $v$ están unidos por al menos dos caminos distintos, $P_1 : u = w_0, w_1, \ldots, w_k = v$ y $P_2 : u = z_0, z_1, \ldots, z_r = v$. Sea $i$ el primer índice tal que $w_i \neq z_i$. Entonces $i > 0$, y $w_{i-1} = z_{i-1}$.




Además, $w_i, \ldots, w_k = v = z_r, \ldots, z_i$ inducen en $G$ un subgrafo conexo. Sea $P$ un camino mínimo entre $w_i$ y $z_i$ en ese subgrafo inducido. Entonces $w_{i-1}Pw_{i-1}$ es un ciclo en $G$, absurdo. □

$G$ es un árbol $\Leftrightarrow$ $G$ es conexo y $m = n - 1$

Demo: $\Rightarrow$) Si $G$ es un árbol entonces es conexo y por Lema 2, $n \geq m - 1$. Además, como es acíclico, por Lema 1, $n \leq m - 1$. Luego $n = m - 1$.

$\Leftarrow$) $G$ es conexo, probemos por inducción que es un árbol. Si $n = 1$, vale. Supongamos $n > 1$. Por propiedad de la suma de grados, $G$ tiene al menos un vértice $v$ de grado menor o igual que uno. Como es conexo, $v$ tiene grado 1, y entonces no es punto de corte. Luego $G' = G - v$ es conexo y

$$n_{G'} - 1 = n_G - 2 = m_G - 1 = m_{G'}.$$

Por hipótesis inductiva $G'$ es un árbol, y entonces $G$ era un árbol también ($v$ tiene grado 1, no puede pertenecer a un ciclo). $\square$

$G$ es un árbol $\Leftrightarrow$ $G$ es acíclico y $m = n - 1$

Demo: $\Rightarrow$) Si $G$ es un árbol entonces es acíclico y por Lema 1, $m \leq n - 1$. Además, como es conexo, por Lema 2, $m \geq n - 1$. Luego $m = n - 1$.

$\Leftarrow$) $G$ es acíclico. Supongamos que tiene $t$ componentes conexas $G_1, \dots, G_t$. Cada una de ellas es un árbol, y por la equivalencia anterior, $m_{G_i} = n_{G_i} - 1$. Pero entonces

$$m_G = \sum_{i=1}^{t} m_{G_i} = \sum_{i=1}^{t} (n_{G_i} - 1) = \sum_{i=1}^{t} n_{G_i} - t = n_G - t.$$

Luego $t = 1$, por lo tanto $G$ es conexo. $\square$

**Teorema**

Todo árbol no trivial tiene al menos dos hojas.

Demo: Si $T$ es un árbol no trivial, por ser conexo tiene una arista $v_0w_0$. O $v_0$ es una hoja, o puedo elegir un vecino $v_1$ de $v_0$, tal que $v_1 \neq w_0$. En cada paso, o $v_i$ es una hoja o tiene un vecino distinto de $v_{i-1}$ y también distinto del resto de los vértices del camino, porque $T$ es acíclico. Como los vértices son finitos, hay algún $v_k$ que es una hoja. Con el mismo argumento a partir de $w_0$, hay algún $w_t$ que es una hoja, y es distinto de todos los $v_i$. $\square$

**Teorema**

1. Toda arista de un árbol es un puente.
2. Un vértice de un árbol no trivial es un punto de corte sii no es una hoja.

Demo: 1. Sea $T$ un árbol y $vw$ una arista de $T$. Como en $T$ hay un único camino entre $v$ y $w$ (es v-e-w), no existe camino que una $v$ y $w$ en $T - e$.
2. En cualquier grafo, una hoja nunca puede ser punto de corte. Sea $T$ un árbol no trivial y $v$ vértice de $T$ que no es hoja. Entonces tiene al menos dos vecinos, $z$ y $w$. Como en $T$ existe un único camino que une a $z$ y $w$ (es $zvw$), no existe camino entre $z$ y $w$ en $T - v$. $\square$

**Teorema**

Un grafo es conexo sii admite un árbol generador.

Idea de demo: $\Leftarrow$) Sea $T$ un a.g. de $G$. Sean $v, w$ vértices de $G$. En $T$ existe un camino de $v$ a $w$. Como $T$ es subgrafo de $G$, en particular es un camino en $G$ de $v$ a $w$. Por lo tanto $G$ es conexo.

$\Leftarrow$) Por inducción. Si $G$ es trivial, $G$ es un a.g. de si mismo. Si no, sea $v$ un vértice de $G$. Por hipótesis inductiva, cada componente conexa $G_i$ de $G - v$ tiene un a.g. $T_i$. Como $G$ era conexo, $v$ tiene un vecino $v_i$ en cada $G_i$. Sea $T$ el grafo obtenido agregando a la unión de los $T_i$ el vértice $v$ y las aristas $v_i v$. $T$ es un a.g. de $G$: es fácil ver que es conexo y que $m_T = n_T - 1$, sabiendo que los $T_i$ son conexos y $m_{T_i} = n_{T_i} - 1$. □

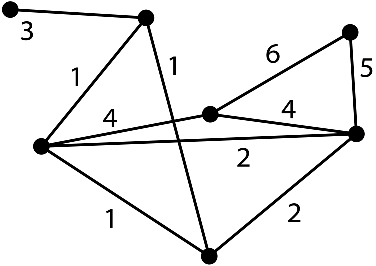
**Corolario**

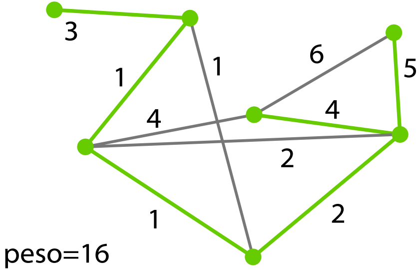
Todo grafo conexo no trivial tiene al menos dos vértices tales que al sacar alguno de ellos, sigue siendo conexo.

Idea de demo: Si $G$ es conexo, tiene un árbol generador $T$. Como $G$ es no trivial, $T$ también, y por lo tanto tiene al menos dos hojas $v$, $w$. Como $T - v$ y $T - w$ siguen siendo árboles, son árboles generadores de $G - v$ y $G - w$, respectivamente. Luego $G - v$ y $G - w$ son conexos. $\square$

# Árbol generador mínimo

- Un grafo pesado es un grafo tal que sus aristas tienen asociado un peso.
- El peso de un subgrafo es la suma de los pesos de sus aristas.
- Un árbol generador mínimo en un grafo pesado es un árbol generador de peso mínimo.



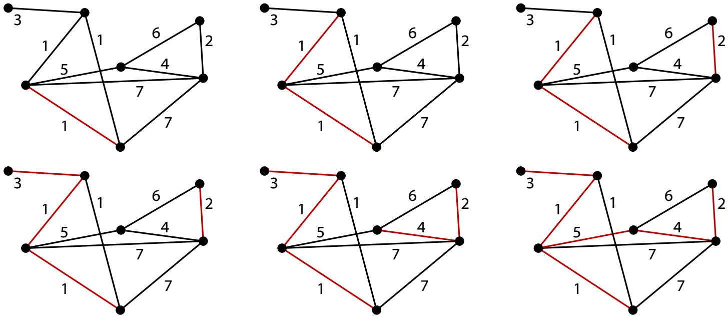
# Ejemplo de aplicación

Tengo que construir caminos entre ciertos pares de ciudades, de modo que todo el país me quede conectado. ¿Cómo puedo hacerlo minimizando la longitud total de camino construido?

# Algoritmo de Kruskal para AGM

Partir de un subgrafo generador cuyo conjunto de aristas es vacío, y en cada paso agregar una arista de peso mínimo que no forme ciclos con las demás aristas del conjunto, hasta haber agregado $n-1$ aristas.

Ej:



# Demostración de que Kruskal construye un AGM

Para ver que el algoritmo construye un árbol generador, como en cada paso el subgrafo $B$ elegido hasta el momento es generador y acíclico, basta ver que el algoritmo termina con $m_B = n_G - 1$. Si $m_B < n_G - 1$, $B$ es no conexo. Sea $B_1$ una componente conexa de $B$. Como $G$ es conexo, va a existir alguna arista con un extremo en $B_1$ y el otro en $V(G) - B_1$, que por lo tanto no forma ciclo con las demás aristas de $B$. Entonces, si $m_B < n_G - 1$, el algoritmo puede realizar un paso más.

Sea $G$ un grafo, $T_K$ el árbol generado por el algoritmo de Kruskal y $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\}$ la secuencia de aristas de $T_K$ en el orden en que fueron elegidas por el algoritmo de Kruskal. Para cada árbol generador $T$ de $G$ definimos $p(T)$ como el máximo $k \leq n$ tal que $\forall j < k$, $e_j \in T$.

# Demostración de que Kruskal construye un AGM

Ahora, sea $T$ un AGM que maximiza $p$. Si $p(T) = n$, entonces $T$ coincide con $T_K$, con lo cual $T_K$ resulta ser mínimo. Si $T_K$ no es mínimo, entonces $p(T) < n$ y $e_{p(T)} \notin T$. Como $T$ es conexo, en $T$ hay un camino $C$ que une los extremos de $e_{p(T)}$.

Como $T_K$ es acíclico, hay alguna arista $e$ en $C$ tal que $e \notin T_K$. Como $e_1, \ldots, e_{p(T)-1} \in T$ y $T$ es acíclico, $e$ no forma ciclos con $e_1, \ldots, e_{p(T)-1}$. Por la forma en que fue elegida $e_{p(T)}$ por el algoritmo de Kruskal, $peso(e_{p(T)}) \leq peso(e)$.

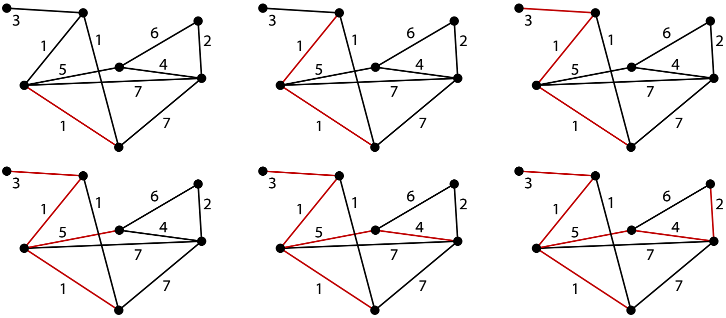
Pero entonces $T' = T - e \cup \{e_{p(T)}\}$ es un árbol generador de $G$ de peso menor o igual a $T$ y $p(T') > p(T)$, absurdo.

Luego $T_K$ es un árbol generador mínimo. $\square$

# Algoritmo de Prim para AGM

Partir de un conjunto de aristas $A = \{e\}$ y un conjunto de vértices $W = \{v, w\}$, donde $e$ es una arista de peso mínimo en $G$ y $v$ y $w$ son sus extremos. En cada paso, agregar a $A$ una arista $f$ de peso mínimo con un extremo en $W$ y el otro en $V(G) - W$. Agregar a $W$ el extremo de $f$ que no estaba en $W$, hasta que $W = V(G)$.

Ej:



# Demostración de que Prim construye un AGM

Para ver que construye un árbol generador, se puede ver que en cada paso del algoritmo, el subgrafo elegido hasta el momento es conexo y con $m = n - 1$. Finalmente, como el grafo es conexo, mientras $W \neq V(G)$ va a existir alguna arista de $W$ a $V(G) - W$ con lo cual el algoritmo termina construyendo un árbol generador del grafo.

Sea $G$ un grafo, $P$ el árbol generado por el algoritmo de Prim y $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\}$ la secuencia de aristas de $P$ en el orden en que fueron elegidas por el algoritmo de Prim. Para cada árbol generador $T$ de $G$ definimos $p(T)$ como el máximo $k \leq n$ tal que $\forall j \leq k$, $e_j \in T$.

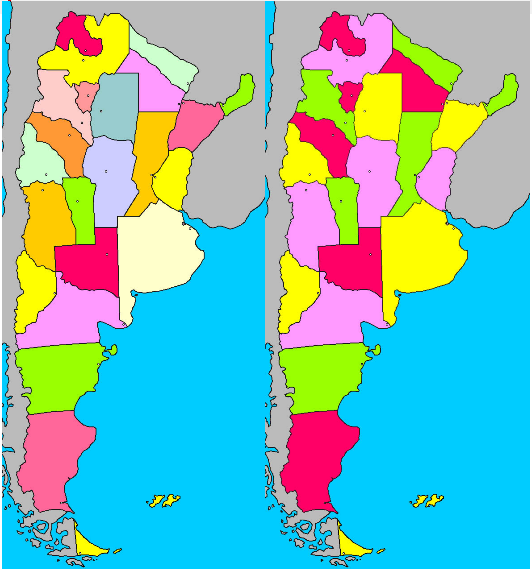
Ahora, sea $T$ un AGM que maximiza $p$. Si $p(T) = n$, entonces $T$ coincide con $P$, con lo cual $P$ resulta ser mínimo. Si $P$ no es mínimo, entonces $p(T) < n$ y $e_{p(T)} \notin T$. Como $T$ es conexo, en $T$ hay un camino $C$ que une los extremos de $e_{p(T)}$.

# Demostración de que Prim construye un AGM

- Si $p(T) = 1$, como $e_1$ es de peso mínimo, $peso(e_1) \leq peso(e)\ \forall e \in C$. Luego $T' = T - e \cup \{e_{p(T)}\}$ es un árbol generador de $G$ de peso menor o igual a $T$ y $p(T') > p(T)$, absurdo.
- Si $p(T) > 1$, sea $V_1$ el conjunto de extremos de las aristas $e_1, \ldots, e_{p(T)-1}$ y $V_2 = V - V_1$. Por la forma de elegir las aristas en Prim, $e_{p(T)}$ es de peso mínimo entre las que tienen un extremo en $V_1$ y otro en $V_2$. El camino $C$ va de un vértice de $V_1$ a un vértice de $V_2$, con lo cual, existe $e \in C$ con un extremo en $V_1$ y otro en $V_2$ (sus vértices se pueden partir entre los de $V_1$ y los de $V_2$, ambos conjuntos son no vacíos y $C$ es conexo). Entonces $peso(e_{p(T)}) \leq peso(e)$ y $T - e \cup \{e_{p(T)}\}$ es un árbol generador de peso menor o igual a $T$ y $p$ mayor a $p(T)$ ($e$ no es ninguna de las $e_i$ con $i < p(T)$ porque esas tienen ambos extremos en $V_1$, por definición de $V_1$), absurdo.

Luego $P$ es un árbol generador mínimo. $\square$

# Pintando mapas...



# La Conjetura de los Cuatro Colores

La Conjetura de los Cuatro Colores fue enunciada en el siglo XIX:

**Todo mapa puede ser coloreado usando a lo sumo cuatro colores de manera tal que regiones limítrofes (i.e. que comparten una frontera de dimensión uno, no sólo un punto) reciban colores diferentes.**

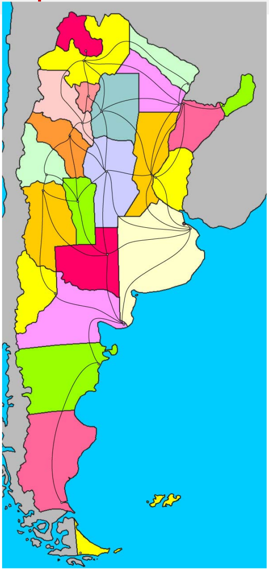
# En términos de grafos...

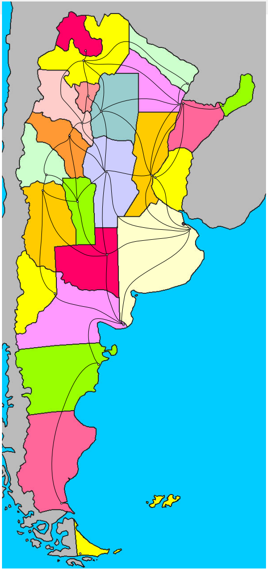
A partir de cualquier mapa podemos construir un grafo donde las regiones se representan por vértices y dos vértices son adyacentes si y sólo si las regiones correspondientes son limítrofes.

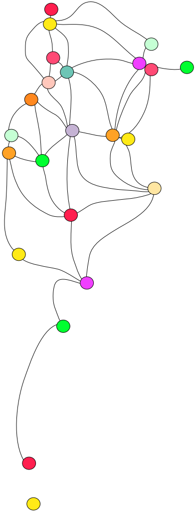
El grafo resultante es planar, es decir, se puede dibujar en el plano sin aristas que se crucen.

Entonces, la Conjetura de los Cuatro Colores dice que los vértices de un grafo planar pueden ser coloreados usando a lo sumo 4 colores y de manera tal que no haya dos vértices adyacentes que reciban el mismo color.

# Ejemplo...







# Historia

Aparentemente, la Conjetura de los Cuatro Colores fue formulada por primera vez por Francis Guthrie. Él era un estudiante del University College de Londres y fue alumno de Augusts De Morgan.

Guthrie

Después de graduarse en Londres estudió derecho, pero algunos años después su hermano Frederick Guthrie comenzó a estudiar con De Morgan. Francis le mostró a su hermano algunos resultados que había estado intentando probar sobre coloreo de mapas y le pidió que le pregunte a De Morgan sobre ese problema.

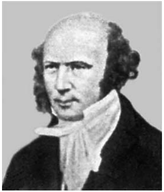
De Morgan

De Morgan no pudo darle una respuesta pero ese mismo día (el 23 de octubre de 1852) le escribió una carta a Sir William Hamilton en Dublin:

A student of mine asked me today to give him a reason for a fact which I did not know was a fact - and do not yet. He says that if a figure be anyhow divided and the compartments differently colored so that figures with any portion of common boundary line are differently colored - *four colors may be wanted, but not more* - the following is the case in which four colors are wanted. Query cannot a necessity for five or more be invented. ... If you retort with some very simple case which makes me out a stupid animal, I think I must do as the Sphynx did...

Hamilton le respondió el 26 de octubre de 1852 (mostrando tanto su eficiencia como la del correo):

*I am not likely to attempt your quaternion of colors very soon.*



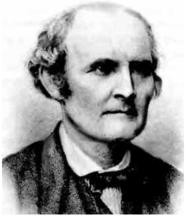
Hamilton

La primera referencia publicada se encuentra en el paper de Arthur Cayley, *On the colorings of maps*, Proc. Royal Geographical Society 1, 259–261, 1879.

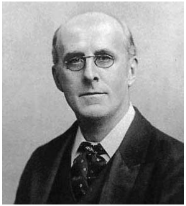
El 17 de julio de 1879 Alfred Bray Kempe anunció en Nature que tenía una demostración de la Conjetura de los Cuatro Colores.

Kempe era un abogado de Londres que había estudiado matemática con Cayley en Cambridge y dedicado algo de su tiempo a la matemática durante su vida.

Por sugerencia de Cayley, Kempe envió su Teorema al American Journal of Mathematics donde fue publicado a fines de 1879.



Cayley



Kempe

# Idea de la demostración de Kempe

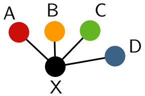
Kempe usó un argumento inductivo-constructivo:

Si tenemos un mapa en el cual cada región es coloreada con rojo, verde, azul o amarillo excepto una, digamos X. Si X no está rodeada por regiones de todos los colores, me queda un color para asignarle a X. Supongamos entonces que X tiene regiones limítrofes de los 4 colores.

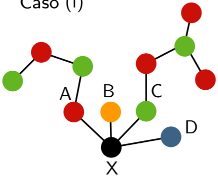
Si X está rodeada por regiones A, B, C, D en orden, coloreadas rojo, amarillo, verde y azul entonces hay dos casos a considerar.

(i) No existe una cadena de regiones adyacentes uniendo A y C, coloreadas alternadamente de rojo y verde.

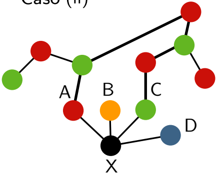
(ii) Existe una cadena de regiones adyacentes uniendo A y C, coloreadas alternadamente de rojo y verde.




Caso (i)




Caso (ii)



**Casos:**

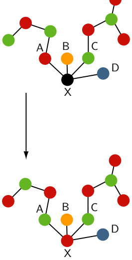
(i) No existe una cadena roja/verde uniendo A y C.

(ii) Existe una cadena roja/verde uniendo A y C.

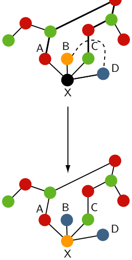
Si vale (i), entonces cambiamos A a verde, y luego intercambiamos los colores rojo/verde en la componente bicromática rojo/verde que contiene a A. Como C no está en la componente, permanece verde y ahora no hay más regiones rojas adyacentes a X. Coloreamos X con rojo.

Si vale (ii), entonces no puede haber una cadena amarilla/azul de regiones adyacentes uniendo B y D. [No podría cruzar la cadena verde/roja.] Entonces la propiedad (i) vale para B y D y cambiamos los colores como antes.

Caso (i)




Caso (ii)



El Teorema de los Cuatro Colores volvió a ser Conjetura de los Cuatro Colores en 1890.

Percy John Heawood, un docente en Durham England, publicó un paper llamado *Map coloring theorem*. Ahi decía que su objetivo era "*...más destructivo que constructivo, ya que voy a mostrar un defecto en la aparentemente reconocida prueba...*".

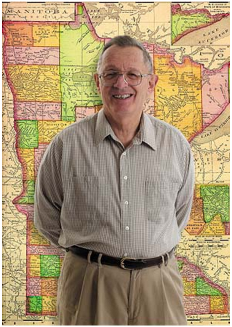
Aunque Heawood mostró que la prueba de Kempe era errónea, él probó en ese paper que todo mapa puede ser coloreado usando a lo sumo 5 colores.

Heawood

# Primera prueba

Finalmente, en 1976 (si, 100 años después...) la Conjetura de los Cuatro Colores fue probada por Kenneth Appel y Wolfgang Haken en la Universidad de Illinois. John Koch colaboró con partes del algoritmo.

- K. Appel and W. Haken, *Every planar map is four colorable. Part I. Discharging*, Illinois J. Math. 21 (1977), 429–490.
- K. Appel, W. Haken and J. Koch, *Every planar map is four colorable. Part II. Reducibility*, Illinois J. Math. 21 (1977), 491–567.



Appel

# Idea de la demostración

Para demostrar la inexistencia de un contraejemplo (y en particular de un contraejemplo minimal), Appel y Haken redujeron mediante argumentos teóricos el problema de los infinitos mapas posibles a 1,936 configuraciones que debieron ser chequeadas una a una por computadora, con un algoritmo que corrió cientos de horas.

La parte teórica a su vez incluye 500 páginas de contra-contra-ejemplos escritos a mano (esos coloreos fueron verificados por el hijo de Haken!).

Pero muchos científicos cuestionaron la demostración de Appel-Haken por dos motivos:

- Parte de la prueba usaba una computadora, y no podía ser verificada a mano.
- Aún la parte supuestamente chequeable a mano es extremadamente engorrosa, y nadie la verificó por completo.

# Segunda prueba

Hace veinte años apareció otra prueba:

- N. Robertson, D. P. Sanders, P. D. Seymour and R. Thomas, *The four color theorem*, J. Combin. Theory Ser. B. 70 (1997), 2–44.
- N. Robertson, D. P. Sanders, P. D. Seymour and R. Thomas, *A new proof of the four color theorem*, Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. 2 (1996), 17–25 (electronic).

Robertson

Sanders

Seymour

Thomas

# Esquema de la demostración

La idea básica de la prueba es la misma que la de Appel y Haken. Los autores exhibieron un conjunto de 633 configuraciones reducibles, es decir, configuraciones que no pueden aparecer en un contraejemplo minimal. Usaron también un resultado conocido desde 1913 sobre la estructura que debería tener un tal contraejemplo.

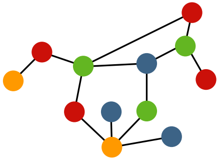
En la segunda parte de la demostración, probaron que todo grafo con dicha estructura contiene alguna de las 633 configuraciones reducibles, y por lo tanto no existe tal contraejemplo.
La primera parte de la prueba requiere de una computadora, pero la segunda puede ser chequeada a mano en pocos meses o, usando una computadora, en unos 20 minutos.

En diciembre de 2004 en una reunión científica en Francia, un grupo de gente de Microsoft Research en Inglaterra e INRIA en Francia anunciaron la verificación de la demostración de Robertson et al. formulando el problema en el lenguaje Coq y confirmando la validez de cada uno de sus pasos (Devlin 2005, Knight 2005).

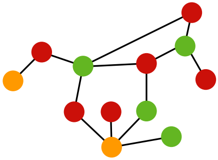
De todas formas, no se conoce hasta el momento una demostración del Teorema de los Cuatro Colores al estilo tradicional (completamente verificable por humanos con lápiz y papel).

# Coloreo de grafos

- Un $k$-coloreo de un grafo $G$ es una asignación de colores a sus vértices de manera que no se usan más de $k$ colores y no hay dos vértices adyacentes que reciban el mismo color.
- Un grafo se dice $k$-coloreable si admite un $k$-coloreo.



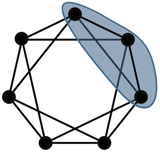
4-coloreo



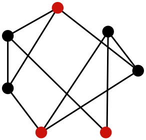
3-coloreo

# Número cromático

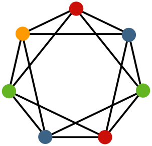
- Una clique en un grafo es un subgrafo completo maximal. Se denota por $\omega(G)$ el tamaño de una clique máxima.
- Un conjunto independiente es un conjunto de vértices no adyacentes dos a dos. Se denota por $\alpha(G)$ el tamaño de un conjunto independiente máximo.
- El número cromático de un grafo $G$ es el menor número $k$ tal que $G$ es $k$-coloreable, y se denota por $\chi(G)$.



$\omega = 3$



$\alpha = 3$



$\chi = 4$

# Aplicaciones

El problema de coloreo de grafos y sus variantes tienen muchas aplicaciones, entre ellas problemas de scheduling, asignación de frecuencias en radios y teléfonos celulares, etc.

**Ejemplo: Planificación de exámenes**

Cada alumno tiene que rendir un examen en cada una de las materias que está cursando. Sea $X$ el conjunto de materias e $Y$ el conjunto de estudiantes. Como el examen es escrito, es conveniente que todos los alumnos lo rindan a la vez. Por resolución del CD, los alumnos tienen derecho a no rendir dos exámenes el mismo día. ¿Cuál es la mínima cantidad de días de examen necesarios?

# Ejemplo: Planificación de exámenes

Modelemos este problema como un problema de coloreo de grafos.

- Vértices: materias.
- Colores: días.
- Aristas: Dos vértices son adyacentes si sus correspondientes materias tienen alumnos en común.
- Correspondencia con el modelo: Dos materias [vértices] no pueden tomar examen el mismo día [usar el mismo color] si hay alumnos que cursan ambas [son adyacentes].

# Algunas propiedades de $\chi(G)$, $\omega(G)$ y $\alpha(G)$

## Lema

Sea $G$ un grafo de $n$ vértices y $\overline{G}$ su complemento. Entonces:

1. $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$
2. $\chi(G) \geq \omega(G)$
3. $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$
4. $\chi(G)\alpha(G) \geq n$
5. $\chi(G) + \alpha(G) \leq n + 1$
6. $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$

# Demostraciones:

1. $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$

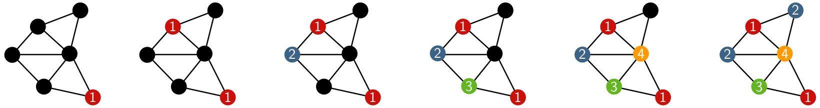
   Por definición, ya que los conjuntos independientes maximales de $G$ son cliques de $\overline{G}$. □

2. $\chi(G) \geq \omega(G)$

   Los vértices de una clique tienen que usar colores distintos, ya que son adyacentes dos a dos. □

3. $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

   Pintando secuencialmente los vértices con el mínimo color no utilizado por un vecino ya pintado, obtenemos un coloreo válido (no siempre óptimo) con a lo sumo $\Delta(G) + 1$ colores. □



Ej: El coloreo obtenido usa 4 colores, $\Delta(G) + 1 = 6$ y $\chi(G) = 3$.

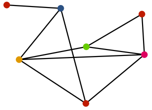
# Demostraciones:

4. $\chi(G)\alpha(G) \geq n$

   Tomemos un coloreo óptimo de $G$, y llamemos $V_i$ al conjunto de vértices coloreados con $i$, para $i = 1, \ldots, \chi(G)$. Como cada $V_i$ es un conjunto independiente, $|V_i| \leq \alpha(G)$.
   Entonces $n = \sum_{i=1}^{\chi(G)} |V_i| \leq \chi(G)\alpha(G)$. $\square$

5. $\chi(G) + \alpha(G) \leq n + 1$

   Sea $W$ un conjunto independiente máximo de $G$. Si pintamos los vértices de $W$ de un color y los de $V - W$ de otros colores diferentes entre si, obtenemos un coloreo válido de $G$ con $1 + n - \alpha(G)$ colores. Luego $\chi(G) \leq n + 1 - \alpha(G)$. $\square$



Ej: $\alpha(G) = 3$, el coloreo obtenido usa $n + 1 - \alpha(G) = 5$ colores, y $\chi(G) = 3$.

# Demostraciones:

6. $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$

Por inducción. Si $G$ es trivial, $\chi(G) + \chi(\overline{G}) = 1 + 1 = n + 1$.
Si $n \geq 2$, sea $v \in V(G)$. Tenemos dos casos para $G - v$:

(1) $\chi(G - v) = \chi(G)$
(2) $\chi(G - v) = \chi(G) - 1$.

Y dos casos para $\overline{G - v} = \overline{G} - v$:

(a) $\chi(\overline{G - v}) = \chi(\overline{G})$
(b) $\chi(\overline{G - v}) = \chi(\overline{G}) - 1$.

Por hipótesis inductiva, $\chi(G - v) + \chi(\overline{G - v}) \leq (n - 1) + 1$, luego la propiedad para $G$ vale en los casos 1a, 1b y 2a. Supongamos que se da el caso 2b. Si $d_G(v) < \chi(G - v)$ entonces $\chi(G) = \chi(G - v)$. Luego $d_G(v) \geq \chi(G - v) = \chi(G) - 1$. Análogamente, $d_{\overline{G}}(v) \geq \chi(\overline{G}) - 1$.
Por lo tanto, $n - 1 = d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) \geq \chi(G) - 1 + \chi(\overline{G}) - 1$, entonces $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$. $\square$

# Teorema de Brooks

## Teorema de Brooks (1941)

Sea $G$ un grafo conexo. Entonces $G$ es $\Delta(G)$-coloreable, salvo que:

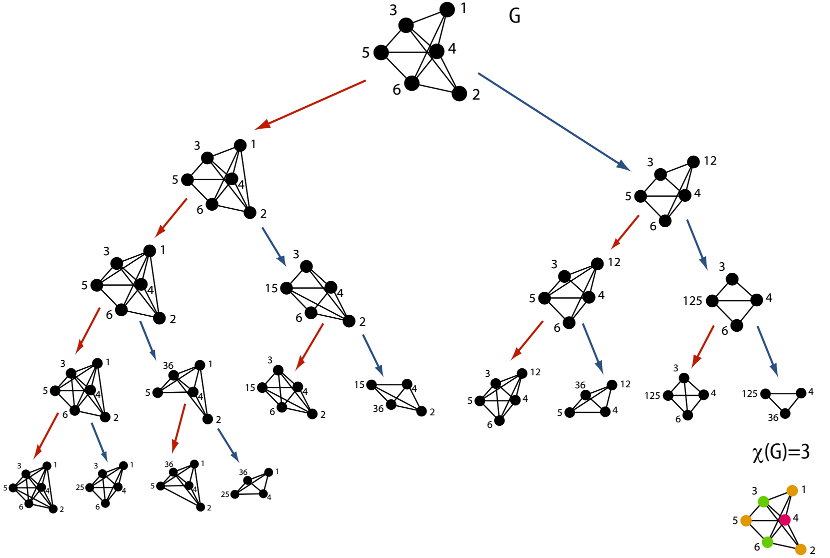
1. $\Delta(G) \neq 2$, y $G$ es un completo de tamaño $\Delta(G) + 1$, or
2. $\Delta(G) = 2$, y $G$ es un ciclo impar.

# Algoritmo para coloreo de grafos

No se conoce un algoritmo polinomial para encontrar $\chi(G)$. Veamos el siguiente algoritmo (conexión-contracción):

- Consideremos un grafo $G$ con dos vértices no adyacentes $a$ y $b$. La conexión $G_1$ se obtiene agregando la arista $ab$. La contracción $G_2$ se obtiene contrayendo $\{a, b\}$ en un solo vértice $c(a, b)$ que es vecino de $N(a) \cup N(b)$.
- Un coloreo de $G$ en el cual $a$ y $b$ usan distintos colores es un coloreo de $G_1$, y viceversa. Un coloreo de $G$ en el cual $a$ y $b$ usan el mismo color da lugar a un coloreo de $G_2$, y viceversa.
- Entonces, $\chi(G) = \text{mín}\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$.
- Si repetimos las operaciones en cada grafo generado hasta que los grafos resultantes sean completos, $\chi(G)$ es el tamaño del menor completo obtenido.

# Ejemplo



# Polinomio cromático

El polinomio cromático de un grafo $G$ es una función $P_G(k)$ que para cada entero $k$ da el número posible de $k$-coloreos de $G$.

- ¿Por qué esa función es un polinomio?
- **Ejemplo 1:** Si $G$ es un árbol de $n$ vértices, entonces:

$$P_G(k) = k(k-1)^{n-1}$$

- **Ejemplo 2:** Si $G$ es $K_n$, entonces:

$$P_G(k) = k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)$$

# Polinomio cromático

## Propiedad

$P_G(k) = P_{G_1}(k) + P_{G_2}(k)$, donde $G_1$ y $G_2$ son los grafos definidos en el algoritmo de conexión-contracción.

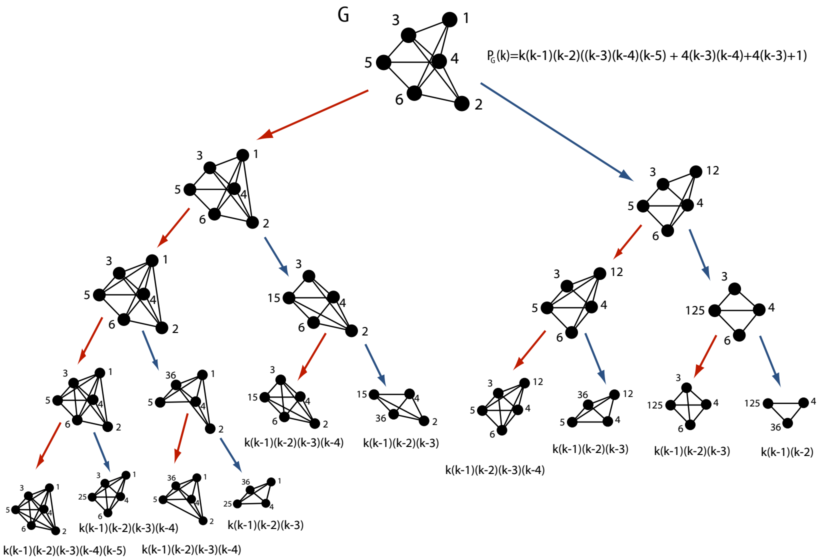
## Corolario

$P_G(k)$ es un polinomio.

**Ejercicio:** Probar que el polinomio cromático de un ciclo $C_n$ es

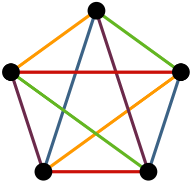
$$P_{C_n}(k) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$$

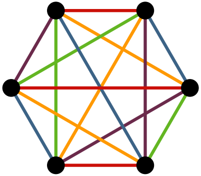
# Ejemplo


G
$P_G(k)=k(k-1)(k-2)((k-3)(k-4)(k-5) + 4(k-3)(k-4)+4(k-3)+1)$
k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)(k-5)
k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)
k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)
k(k-1)(k-2)(k-3)
k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)
k(k-1)(k-2)(k-3)
k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)
k(k-1)(k-2)(k-3)
k(k-1)(k-2)(k-3)
k(k-1)(k-2)

# Indice cromático

- El índice cromático $\chi'(G)$ de un grafo $G$ es el menos número de colores necesarios para pintar las aristas de $G$ de manera tal que dos aristas incidentes no tengan el mismo color.
- Claramente, $\chi'(G) \geq \Delta(G)$.





# Indice cromático

**Propiedad**

- $\chi'(K_n) = n - 1 = \Delta(K_n)$, si $n$ es par
- $\chi'(K_n) = n = \Delta(K_n) + 1$, si $n$ es impar

Demo: A lo sumo $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ aristas pueden usar el mismo color, por lo tanto $\chi'(G)\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \geq m$. Como $m_{K_n} = \frac{n(n-1)}{2}$, para $n$ impar $\chi'(K_n) \geq n$ y para $n$ par $\chi'(K_n) \geq n - 1$.

Vamos a construir coloreos con esa cantidad de colores respectivamente. Para $n$ impar, dibujamos los vértices formando un polígono regular, pintamos un lado de cada color y cada diagonal del color de su lado paralelo. Para $n$ par, sacamos un vértice $v$ y pintamos el grafo $K_{n-1}$. En el coloreo resultante, cada vértice $w$ es incidente a aristas de todos los colores salvo el color de su lado opuesto, y ese color se asigna a la arista $vw$ (en el dibujo anterior, $v$ es el vértice superior derecho). $\square$

# Indice cromático

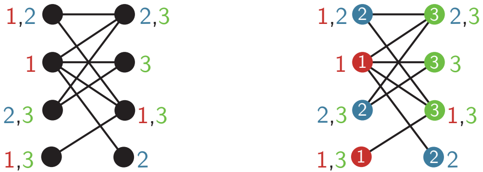
**Teorema de Vizing (1964)**

Sea $G$ un grafo, entonces

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

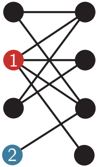
# Coloreo por listas

- En lugar de haber un conjunto de colores $1, \ldots, k$ disponibles para todos los vertices, cada vértice tiene su propia lista finita de colores admisibles.

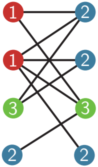


# Precoloring Extension

- Consiste en extender un $k$-coloreo parcial a un $k$-coloreo total del grafo.




k=3




k=3

# $\mu$-coloreo

- En lugar de una cota $k$ general, cada vértice tiene una cota propia y debe usar un color menor o igual a su cota.

# $(\gamma, \mu)$-coloreo

- Ahora cada vértice tiene tanto una cota superior como inferior.

# Jerarquía de problemas de coloreo

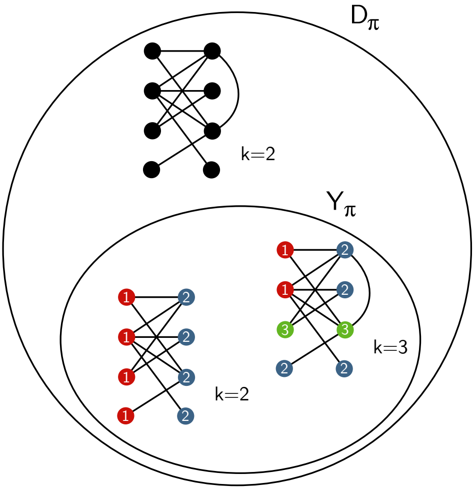
$$
\begin{tikzcd}
& \text{coloreo por listas} \arrow[d, dash, "<"] & \\
& (\gamma,\mu)\text{-coloreo} \arrow[dl, dash, "<"'] \arrow[dr, dash, "\leq"] & \\
\text{PrExt} \arrow[dr, dash, "<"'] & & \mu\text{-coloreo} \arrow[dl, dash, "<"] \\
& k\text{-coloreo} &
\end{tikzcd}
$$

# La teoría de NP-completitud

- Se aplica a problemas de decisión, o sea problemas que toman ciertos parámetros y tienen como respuesta SI o NO (aunque es sencillo ver que sus implicancias pueden extenderse a problemas de optimización).
- En el caso del problema de coloreo óptimo de un grafo, la variante de decisión se podría formular como: "Dado un grafo $G$ y un número $k$, ¿existe un coloreo de $G$ que utilice a lo sumo $k$ colores?"
- Una instancia de un problema es una especificación de sus parámetros. Un problema de decisión $\pi$ tiene asociado un conjunto $D_\pi$ de instancias y un subconjunto $Y_\pi \subseteq D_\pi$ de instancias cuya respuesta es SI.

# Ejemplo: coloreo

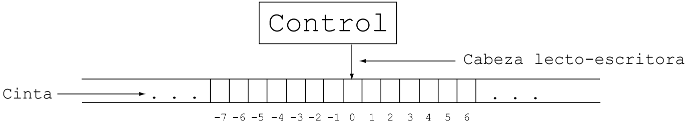
Dado un grafo $G$ y un número $k$, ¿existe un coloreo de $G$ que utilice a lo sumo $k$ colores?



# Modelos de Computadoras: DTM

Recordemos la noción de Máquina de Turing Determinística (DTM)

- Consiste de un control finito, una cabeza lecto-escritora y una cinta con el siguiente esquema.




  - $\Sigma$ finito, el alfabeto; $\Gamma = \Sigma \cup \{*\}$;
  - $Q$ finito, el conjunto de estados;
  - $q_0 \in Q$, estado inicial; $Q_f \subseteq Q$, estados finales ($q_{si}$ y $q_{no}$ para problemas de decisión)

# Modelos de Computadoras: DTM

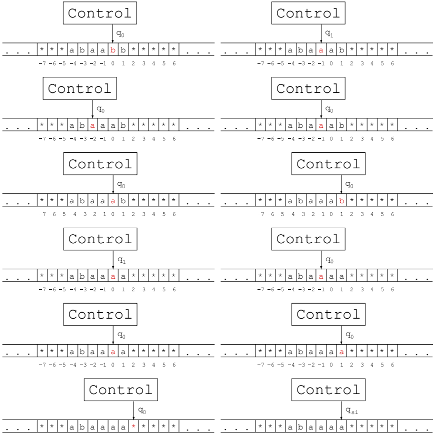
- Sobre la cinta tengo escrito el input que es un string de símbolos de $\Sigma$ a partir de la celda 1, y el resto de las celdas tiene $*$ (blancos).
- Definimos un programa $S$ como un conjunto de quíntuplas $S \subseteq Q \times \Gamma \times Q \times \Gamma \times M$, donde $M = \{+1, -1\}$ son los movimientos de la cabeza a derecha o izquierda.
- **Para todo par $(q_i, s_j)$, existe exactamente una quíntupla que comienza con ese par (máquina determinística).**

# Modelos de Computadoras: DTM

¿Qué significa la quíntupla $(q_i, s_h, q_j, s_k, +1)$? Significa que si estando en el estado $q_i$ la cabeza lee $s_h$, entonces escribe $s_k$, se mueve a la derecha y pasa al estado $q_j$.

Ej:

- $\Sigma = \{a, b\}$; $\Gamma = \Sigma \cup \{*\}$;
- $Q = \{q_0, q_1, q_{si}, q_{no}\}$; $Q_f = \{q_{si}, q_{no}\}$
- $S = (q_0, a, q_0, a, +1)$, $(q_0, b, q_1, a, -1)$, $(q_0, *, q_{si}, *, -1)$, $(q_1, a, q_0, a, -1)$, $(q_1, b, q_{no}, a, -1)$, $(q_1, *, q_0, b, +1)$



# Modelos de Computadoras: DTM

- Una máquina $M$ resuelve el problema $\pi$ si para toda instancia empieza, termina y contesta bien (o sea, termina en el estado final correcto).
- La complejidad de una DTM está dada por la cantidad de movimientos de la cabeza, desde el estado inicial hasta alcanzar un estado final, en función del tamaño de la entrada.

  $T_M(n) = \text{máx}\{m \text{ tq } \exists x \in D_\pi, |x| = n \text{ y } M \text{ con input } x \text{ tarda } m\}$

# La clase P

- **Un problema está en P si existe una DTM de complejidad polinomial que lo resuelve.**

  P $= \{\pi$ tq $\exists M$ DTM tq $M$ resuelve $\pi$ y $T_M(n) \in O(p(n))$ para algún polinomio $p\}$

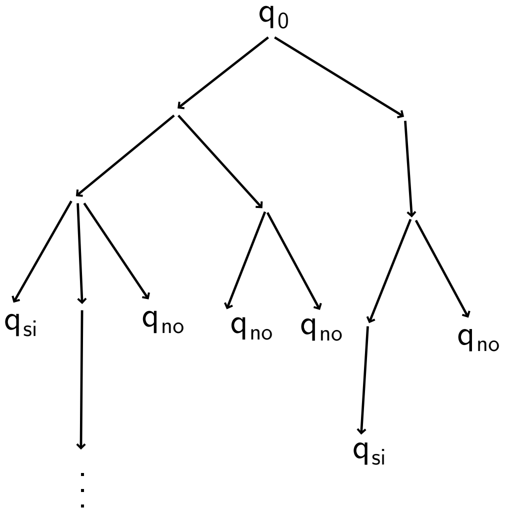
- Existen otros modelos de computadoras determinísticas (máquina de Turing con varias cintas, Random Access Machines, etc.) pero puede probarse que son equivalentes en términos de la polinomialidad de los problemas a la DTM.

# Modelos de Computadoras: NDTM

Máquinas de Turing No Determinísticas (NDTM)

- **No se pide unicidad de la quíntupla que comienza con cualquier par $(q_i, s_j)$.**
- En caso de que hubiera más de una quíntupla, la máquina se replica continuando cada una por una rama distinta.
- Decimos que una NDTM resuelve el problema $\pi$ si para toda instancia de $Y_\pi$ existe una rama que llega a un estado final $q_{si}$ y para toda instancia en $D_\pi \setminus Y_\pi$ ninguna rama llega a un estado final $q_{si}$.

# Modelos de Computadoras: NDTM



# Modelos de Computadoras: NDTM

- Una NDTM es **polinomial** para $\pi$ cuando existe una función polinomial $T(n)$ de manera que para toda instancia de $Y_\pi$ de tamaño $n$, alguna de las ramas termina en estado $q_{si}$ en a lo sumo $T(n)$ pasos.
- **Un problema $\pi \in$ NP si existe una NDTM polinomial que resuelve $\pi$.**
- Claramente, P $\subseteq$ NP.
- **Conjetura: P $\neq$ NP.**

  Todavía no se demostró que exista un problema en NP $\setminus$ P. Mientras tanto, se estudian clases de complejidad "relativa", es decir, que establecen orden de dificultad entre problemas.

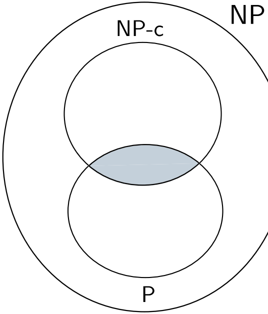
# NP-completitud

- **Reducción polinomial:** Sean $\pi$ y $\pi'$ dos problemas de decisión. Decimos que $f : D_{\pi'} \to D_{\pi}$ es una reducción polinomial de $\pi'$ en $\pi$ si $f$ se computa en tiempo polinomial y para todo $d \in D_{\pi'}$, $d \in Y_{\pi'} \Leftrightarrow f(d) \in Y_{\pi}$. Notación: $\pi' \preccurlyeq \pi$.
- Notemos que si $\pi'' \preccurlyeq \pi'$ y $\pi' \preccurlyeq \pi$ entonces $\pi'' \preccurlyeq \pi$, ya que la composición de dos reducciones polinomiales es una reducción polinomial.
- Un problema $\pi$ es **NP-completo** si:
  1. $\pi \in$ NP.
  2. Para todo $\pi' \in$ NP, $\pi' \preccurlyeq \pi$.
- Si un problema $\pi$ verifica la condición 2., $\pi$ es NP-Hard (es al menos tan "difícil" como todos los problemas de NP).

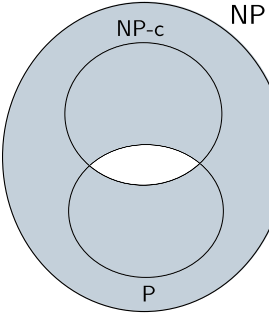
# ¿P $\neq$ NP? La pregunta del millón...

- **Si existe un problema en NP-c $\cap$ P, entonces P=NP.**
  - Si $\pi \in$ NP-c $\cap$ P, existe un algoritmo polinomial que resuelve $\pi$, por estar $\pi$ en P. Por otro lado, como $\pi$ es NP-completo, para todo $\pi' \in$ NP, $\pi' \preccurlyeq \pi$.
  - Sea $\pi' \in$ NP. Apliquemos la reducción polinomial que transforma instancias de $\pi'$ en instancias de $\pi$ y luego el algoritmo polinomial que resuelve $\pi$. Por definición de reducción polinomial, es fácil ver que lo que se obtiene es un algoritmo polinomial que resuelve $\pi'$.
- Hasta el momento no se conoce ningún problema en NP-c $\cap$ P, así como tampoco se ha demostrado que un problema esté en NP $\setminus$ P. En ese caso, obviamente, se probaría que P $\neq$ NP.

# Esquema de clases




si P=NP...




si P$\neq$NP...

# ¿Cómo se prueba que un problema es NP-completo?

El problema SAT consiste en decidir si, dada una fórmula lógica $\varphi$ expresada como conjunción de disyunciones (ej: $\varphi = x_1 \wedge (x_2 \vee \neg x_1) \wedge (x_3 \vee \neg x_4 \vee x_1)$), existe una valuación de sus variables que haga verdadera $\varphi$.

**Teorema de Cook (1971): SAT es NP-completo.**

La demostración de Cook es directa: considera un problema genérico $\pi \in$ NP y una instancia genérica $d \in D_\pi$. A partir de la hipotética NDTM que resuelve $\pi$, genera en tiempo polinomial una fórmula lógica $\varphi_{\pi,d}$ en forma normal (conjunción de disyunciones) tal que $d \in Y_\pi$ si y sólo si $\varphi_{\pi,d}$ es satisfactible.

# ¿Cómo se prueba que un problema es NP-completo?

A partir del Teorema de Cook, la técnica standard para probar que un problema $\pi$ es NP-completo aprovecha la transitividad de $\preccurlyeq$, y consiste en lo siguiente:

1. Mostrar que $\pi$ está en NP.
2. Elegir un problema $\pi'$ apropiado que se sepa que es NP-completo.
3. Construir una reducción polinomial $f$ de $\pi'$ en $\pi$.

La segunda condición en la definición de problema NP-completo sale usando la transitividad: sea $\pi''$ un problema cualquiera de NP. Como $\pi'$ es NP-completo, $\pi'' \preccurlyeq \pi'$. Como probamos que $\pi' \preccurlyeq \pi$, resulta $\pi'' \preccurlyeq \pi$.

# Coloreo es NP-completo

A partir de un algoritmo de backtracking para coloreo es fácil construir una NDTM para el problema de coloreo, por lo tanto está en NP.

**Para probar que coloreo es NP-completo, vamos entonces a reducir SAT a coloreo.**

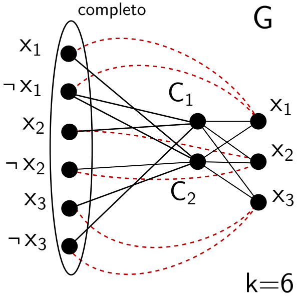
Tomemos una instancia genérica de SAT $\varphi = C_1 \wedge \cdots \wedge C_m$. Vamos a construir un grafo $G$ y determinar un número $k$ de manera que $\varphi$ sea satisfactible si y sólo si $G$ se puede colorear con $k$-colores.

# Reducción de SAT a coloreo

$G$ tiene:

- $V_1$: un vértice por cada variable negada y afirmada, todos adyacentes entre si.
- $V_2$: un vértice por cada cláusula, adyacente a los literales de $V_1$ que no aparecen en la cláusula.
- $V_3$: otro vértice por cada variable, adyacente a todo $V_2$ y a los literales de $V_1$ correspondientes a otras variables.

$\varphi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \neg x_3)$

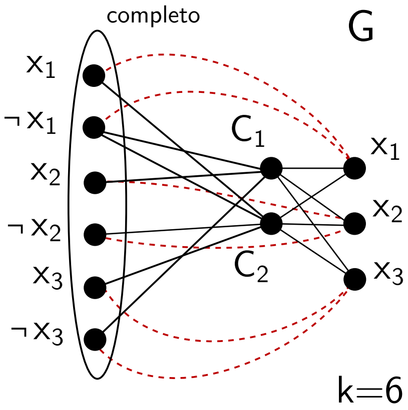



k = dos veces la cantidad de variables.

Queda como ejercicio escribir formalmente la reducción y demostrar que es una reducción polinomial de SAT a coloreo.

# Reducción de SAT a coloreo

$$\varphi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \neg x_3)$$



# Reducción de SAT a 3-SAT

El problema 3-SAT es una variante del problema SAT, en el cual cada cláusula tiene exactamente tres literales. Como es una restricción del dominio de SAT, está en NP, y en principio es “no más difícil” que SAT.

Para probar que 3-SAT es NP-completo, vamos entonces a reducir SAT a 3-SAT.

Tomemos una instancia genérica de SAT $\varphi = C_1 \wedge \cdots \wedge C_m$. Vamos a reemplazar cada $C_i$ por una conjunción de disyunciones $\varphi'_i$, donde cada disyunción tenga tres literales, y de manera que $\varphi$ sea satisfactible si y sólo si $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_m$ lo es.

# Reducción de SAT a 3-SAT

- Si $C_i$ tiene tres literales, queda como está.
- $C_i$ tiene menos de tres literales, agregamos nuevas variables como en el ejemplo:

$$(x_1 \vee \neg x_2) \rightarrow (x_1 \vee \neg x_2 \vee y) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg y)$$

- Si $C_i$ tiene cuatro o más literales, agregamos nuevas variables como en el ejemplo:

$$(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \neg x_5) \rightarrow$$

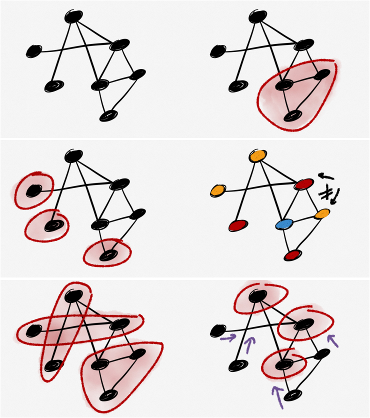
$$(x_1 \vee \neg x_2 \vee y_1) \wedge (\neg y_1 \vee x_3 \vee y_2) \wedge (\neg y_2 \vee x_4 \vee \neg x_5)$$

Queda como ejercicio escribir formalmente la reducción y demostrar que es una reducción polinomial de SAT a 3-SAT.

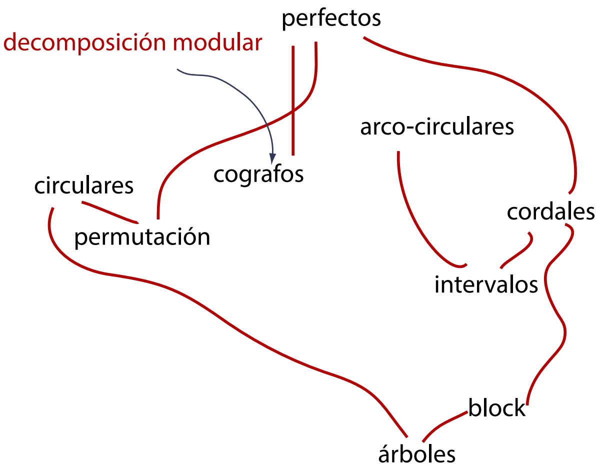
# Esquema del curso: problemas algorítmicos

- Clique máxima
- Conjunto independiente máximo
- Coloreo
- Cubrimiento por cliques mínimo
- Conjunto dominante mínimo

(Todos NP-completos en general.)

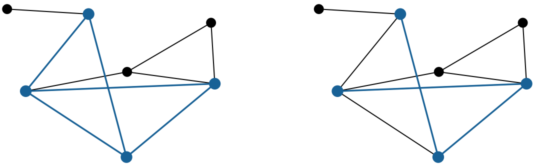


# Esquema del curso: clases de grafos y conceptos



# Propiedades deseables para una clase de grafos $\mathcal{C}$

- Hereditaria: $G \in \mathcal{C}$ y $H$ subgrafo inducido de $G$ entonces $H \in \mathcal{C}$ $\leftrightsquigarrow$ Existe una caracterización por subgrafos prohibidos inducidos minimales (tal vez una familia infinita).
- Hereditaria por subgrafos: $G \in \mathcal{C}$ y $H$ subgrafo de $G$ entonces $H \in \mathcal{C}$. (A veces es pedir demasiado, todo grafo es subgrafo de una clique suficientemente grande.)



# Propiedades deseables para un parámetro $\varphi$ en grafos

- Monotonía: $H$ subgrafo inducido de $G$ entonces $\varphi(H) \leq \varphi(G)$ (o $\varphi(H) \geq \varphi(G)$, dependiendo del problema).
- Monotonía en subgrafos: $H$ subgrafo de $G$ entonces $\varphi(H) \leq \varphi(G)$ (o $\varphi(H) \geq \varphi(G)$).
- Monotonía en subgrafos generadores: $H$ subgrafo generador de $G$ $(V(H) = V(G))$ entonces $\varphi(H) \leq \varphi(G)$ (o $\varphi(H) \geq \varphi(G)$).

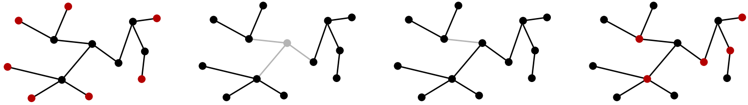
| Problema | Monótono | M. en subgrafos | M. en subg. gen. |
|---|---|---|---|
| clique | $\leq$ | $\leq$ | $\leq$ |
| cto. indep. | $\leq$ | x | $\geq$ |
| coloreo | $\leq$ | $\leq$ | $\leq$ |
| cub. cliques | $\leq$ | x | $\geq$ |
| cto. dominante | x | x | $\geq$ |

# Conexión

- La propiedad de ser conexo no es hereditaria (versión hereditaria: cliques).
- No puede ser expresada en términos de subgrafos inducidos prohibidos minimales.
- Muchos de los problemas (sobre todo parámetros monótonos) se pueden resolver en cada componente conexa y combinar las soluciones.
- Muchas veces vamos a suponer conexión aunque no la vamos a requerir.

# Los básicos: árboles y bosques

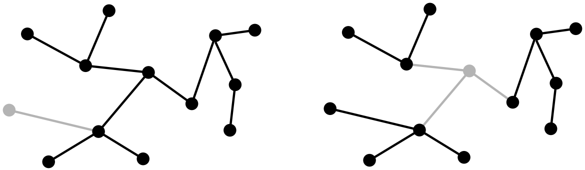
- $G$ es un bosque sii no tiene ciclos $C_n$, $n \geq 3$. $\leftrightsquigarrow$ caracterización por subgrafos inducidos prohibidos, más aún, por subgrafos prohibidos
- un árbol es un bosque conexo
- todo árbol no trivial tiene al menos dos hojas $\leftrightsquigarrow$ secuencia de desmantelamiento/construcción
- todo vértice $v$ que no es una hoja es un punto de corte y descompone el árbol en $d(v)$ partes $\leftrightsquigarrow$ teorema de descomposición/composición
- toda arista es un puente $\leftrightsquigarrow$ teorema de descomposición/composición
- para todo vértice $v$ y todo $k$, $N_k(v)$ es un conjunto independiente $\leftrightsquigarrow$ estructura de niveles
- un árbol es bipartito $\leftrightsquigarrow$ partición de vértices



# Los básicos: árboles y bosques

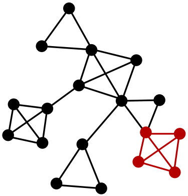
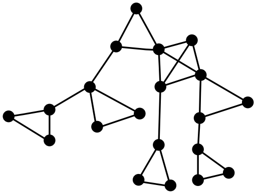
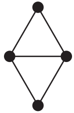
Uso algorítmico:

- List-coloring $\leftrightsquigarrow$ hojas + recursión
- Conjunto independiente máximo $\leftrightsquigarrow$ hojas + recursión o puntos de corte/estructura de niveles + programación dinámica
- Conjunto dominante mínimo $\leftrightsquigarrow$ puntos de corte/estructura de niveles + programación dinámica
- Cubrimiento por cliques mínimo $\leftrightsquigarrow$ forzado usando hojas



# Cómo generalizar los árboles? Grafos block

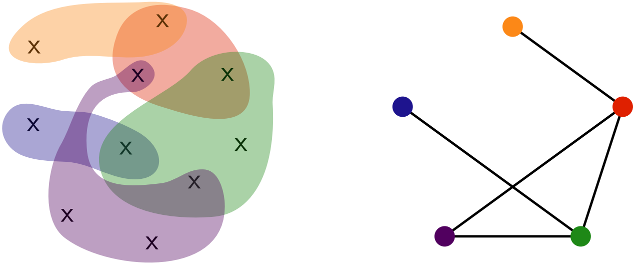
- La propiedad de los puntos de corte en árboles es equivalente a toda componente biconexa (block) es un vértice o una arista.
- Grafo block: todo bloque es una clique.
- Subgrafos inducidos prohibidos: $C_n$, $n \geq 4$, diamante.
- hojas $\leftrightsquigarrow$ end blocks
- Muchos algoritmos en árboles se extienden a grafos block.
- Grafo sin diamantes $\Leftrightarrow$ toda arista pertenece a una única clique maximal.

diamante

# Grafos de intersección

Un grafo de intersección de una familia (finita) de conjuntos $\mathcal{F}$ tiene un vértice por cada miembro $F \in \mathcal{F}$ y dos vértices $F, F'$ son adyacentes sii $F \cap F' \neq \emptyset$.

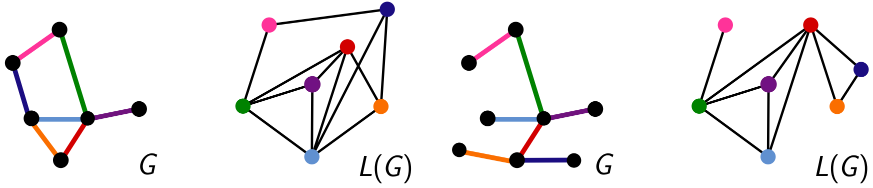



**Todo grafo es un grafo de intersección?**

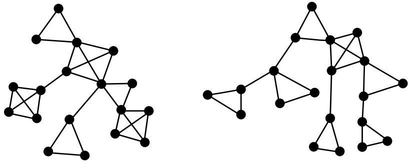
Los grafos de intersección de objetos específicos pueden tener propiedades interesantes.

# Hay un modelo de intersección para los grafos block?

El grafos de línea de un grafo es el grafo intersección de sus aristas.

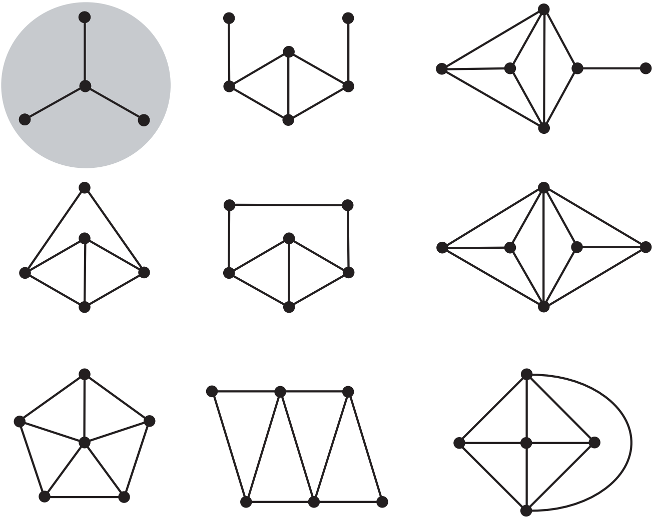



Grafos de línea de árboles?



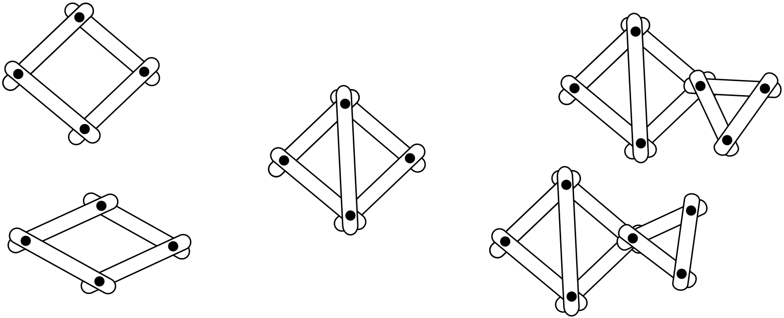
Grafos de línea de árboles $\subsetneq$ grafos block

# Subgrafos inducidos prohibidos minimales para la clase de grafos de línea (Beineke, 1970)



# Más general: grafos cordales

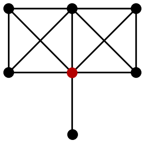
- Un grafo es cordal si no contiene como subgrafo inducido $C_n$, $n \geq 4$, o sea, si todo ciclo de longitud al menos 4 tiene una cuerda.
- También se llaman triangulados o de circuitos rígidos.



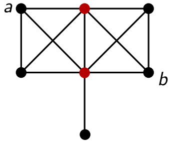
- [lectura recomendada] Blair and Peyton, An introduction to chordal graphs and clique trees

# Separadores minimales de vértices

- Un subconjunto $S \subset V$ es un separador si dos vértices que están en la misma componente conexa de $G$ están en diferentes componentes conexas de $G \setminus S$.
- Si $a$ y $b$ son dos vértices separados por $S$, se llama $ab$-separador.
- $S$ es un separador (resp. $ab$-separador) minimal si ningún subconjunto propio de $S$ es un separador (resp. $ab$-separador).



separador minimal





$ab$-separador minimal

- $S$ es un separador minimal de vértices si es un $ab$-separador minimal para algún par de vértices $ab$.
- Un separador minimal de vértices no necesariamente es un separador minimal.

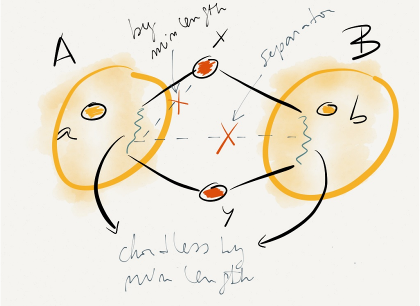
# Separadores minimales de vértices

**Teorema (Dirac, 1961)**

Un grafo es cordal si y sólo si todo separador minimal de vértices es completo.

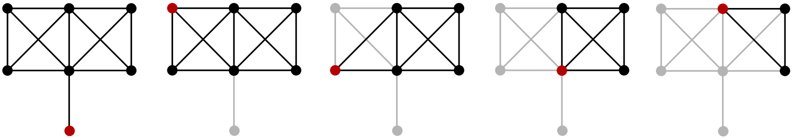
$\Leftarrow$) Sea $v_0 v_1 v_2 \dots v_k$, $k \geq 3$, un ciclo, y consideremos $v_0 v_2$. O $v_0 v_2$ es una cuerda o existe un $v_0 v_2$-separador minimal, que tiene que contener a $v_1$ y a algún $v_i$, $3 \leq i \leq k$. Como es completo, $v_1 v_i$ es una cuerda.

$\Rightarrow$) Sea $S$ un $ab$-separador minimal y supongamos que $x$ e $y$ en $S$ son no adyacentes. Sean $A$, $B$ las componentes conexas de $G \setminus S$ que contienen a $a$ y $b$, resp. Como $S$ es minimal, tanto $x$ como $y$ tienen vecinos en $A$ y en $B$. Sean $P_A$ y $P_B$ caminos entre $x$ e $y$ con interior en $A$ y $B$, resp., de longitud mínima. El ciclo $x P_A y P_B x$ no tiene cuerdas. $\square$



# Orden de eliminación perfecto

- Un vértice $v$ es simplicial si $N[v]$ induce un subgrafo completo en $G$.
- Un orden $v_1, v_2, \ldots, v_n$ de los vértices de un grafo $G$ es un orden de eliminación perfecto si, para cada $2 \leq i \leq n-2$ $v_i$ es simplicial en $G[v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n]$.

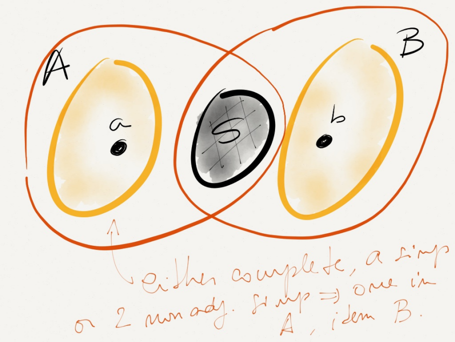


# Orden de eliminación perfecto

**Teorema (Dirac, 1961)**

Todo grafo cordal tiene un vértice simplicial. Si no es completo, tiene dos vértices simpliciales no adyacentes.

Demo. Si el grafo es completo o $n = 2$, trivial. Sino, inducción usando un separador minimal de vértices. □



# Orden de eliminación perfecto

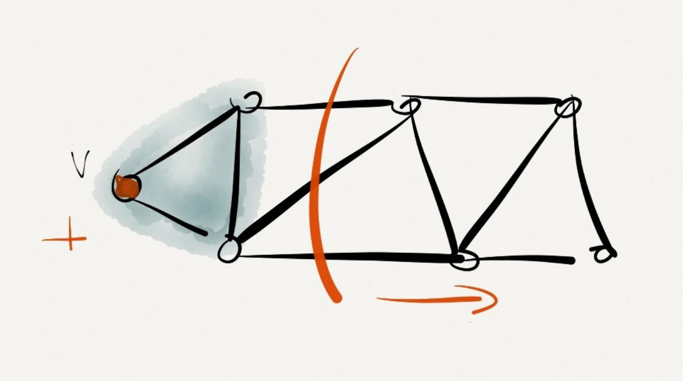
**Teorema (Fulkerson y Gross, 1965)**

Un grafo es cordal si y sólo si tiene un orden de eliminación perfecto.

Demo. ($\Rightarrow$) Por inducción. ($\Leftarrow$) Consideremos un ciclo y el vértice de menor índice en el orden. $\square$

# Problemas algorítmicos en grafos cordales

**Cómo podemos resolver clique máxima, conjunto independiente máximo, coloreo, y cubrimiento por cliques mínimo en grafos cordales?**



# Problemas algorítmicos en grafos cordales

**Clique máxima**. Sea $v$ un vértice simplicial:

o $v$ pertenece a una clique máxima o no... pero $v$ pertenece a una sola clique maximal! Entonces...

$$\omega(G) = \text{máx}\{|N[v]|, \omega(G - v)\}$$

Nota: hay a lo sumo $n$ cliques maximales! (y si $G$ tiene al menos una arista, a lo sumo $n - 1$)

**Conjunto independiente máximo**. Un conjunto independiente máximo o contiene a $v$ o contiene algún vecino $w$, pero como $N[w] \supseteq N[v]$, podemos reemplazarlo por $v$, entonces...

$$\alpha(G) = 1 + \alpha(G - N[v])$$

# Problemas algorítmicos en grafos cordales

**Coloreo**. Sea $v$ un vértice simplicial:

Siempre podemos extender un coloreo óptimo de $G - v$ a $G$ sin agregar colores nuevos salvo que $\chi(G - v) < d(v)$. Pero en ese caso agregamos un nuevo color y, como $N[v]$ es una clique, eso es óptimo. Entonces...

$$\chi(G) = \text{máx}\{|N[v]|, \chi(G - v)\}$$

**Cubrimiento por cliques**. Tenemos que cubrir $v$ y pertenece a una única clique, entonces usamos $N[v]$ y continuamos...

$$\tau(G) = 1 + \tau(G - N[v])$$

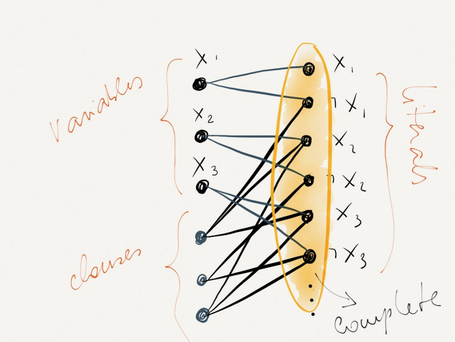
**Estas recursiones no suenan familiares?**

# Los grafos cordales son perfectos

Para todo grafo cordal $G$, $\omega(G) = \chi(G)$ y $\alpha(G) = \tau(G)$, y eso vale para todos los subgrafos inducidos porque la clase es hereditaria.

# Y conjunto dominante mínimo?

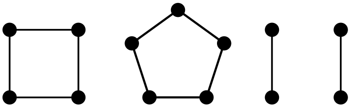
Podemos evitar usar vértices simpliciales (salvo que el grafo sea completo), pero no es tan fácil "patear" el problema a un grafo más chico. De hecho... el problema es NP-completo.




Dada una fórmula SAT de $n$ variables y $k$ cláusulas, hay un conjunto dominante de tamaño a lo sumo $n$ en el grafo?

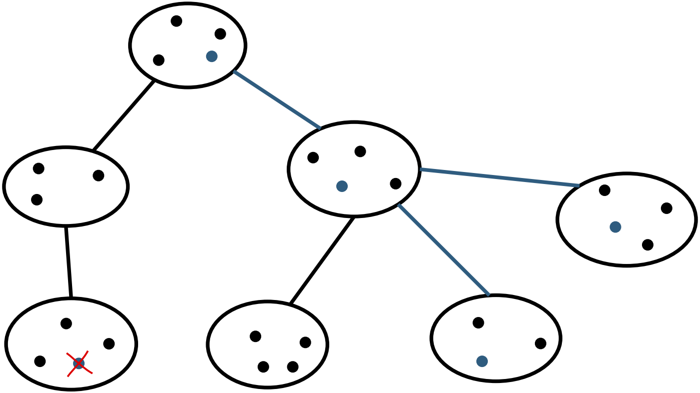
# Grafos split

- El problema de conjunto dominante mínimo es NP-completo aún en grafos split, una subclase de los grafos cordales.
- Un grafo $G$ es split si $V(G)$ se puede particionar en una clique y un conjunto independiente.
- Split $= \{C_4, C_5, 2K_2\}$-free



# Árboles clique

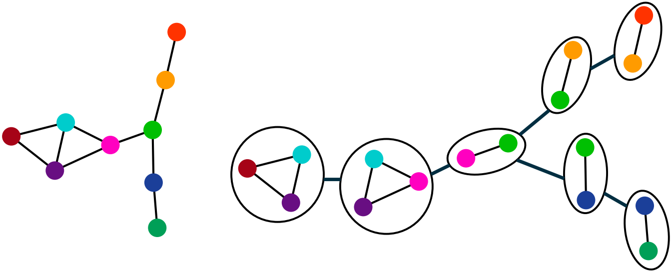
Un árbol clique de un grafo $G$ es un árbol $T(G)$ cuyos vértices son las cliques maximales de $G$ y tal que, para cada vértice $v \in G$, las cliques maximales de $G$ que contienen a $v$ forman un subgrafo conexo de $T(G)$.



# Árboles clique

**Teorema (Gavril/Buneman/Walter, 1974)**

Un grafo es cordal sii admite un árbol clique.

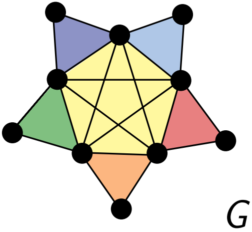


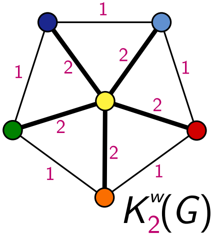
**Cómo podemos calcular los separadores minimales de vértices a partir de un árbol clique?**

# Encontrando un árbol clique

**Teorema (Bernstein y Goodman, 1981)**

Todo árbol clique de un grafo cordal es un árbol generador de peso máximo de su grafo clique pesado, y viceversa.

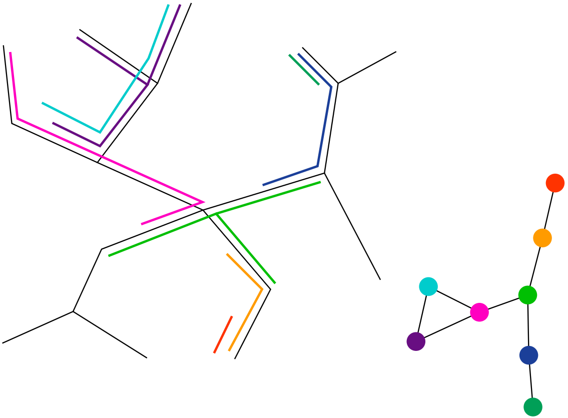


# Grafos cordales como grafos de intersección

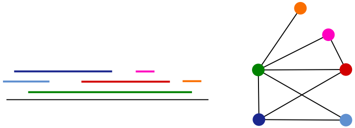
**Teorema (Gavril, 1974)**

Un grafo es cordal sii es el grafo intersección de subárboles de un árbol.

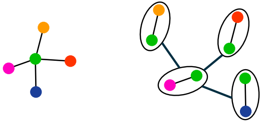


# Grafos de intervalos

- Son los grafos intersección de intervalos de una recta.



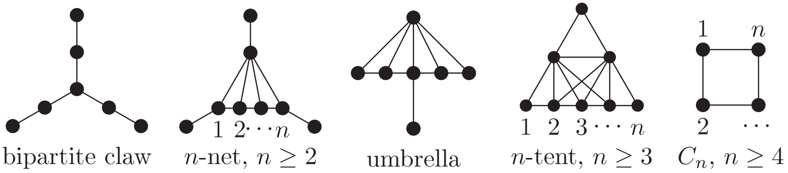
- Entonces, es un caso particular de grafo cordal. Cómo son los árboles clique de los grafos de intervalos?



- Admiten un árbol clique que es un camino, pero pueden admitir otros.
- Cuáles son los órdenes de eliminación perfectos?
- El orden de los extremos derechos de los vértices es uno.

# Grafos de intervalos

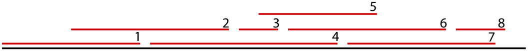
- Caracterización por subgrafos inducidos prohibidos (Lekkerkerker y Boland, 1962)




- Una tripla asteroidal es un conjunto de tres vértices tales que existe un camino entre todo par de ellos que evita la vecindad del tercero (en particular, son mutuamente no adyacentes).
- **Teorema** (Lekkerkerker y Boland, 1962). Un grafo es de intervalos sii es cordal y no tiene triplas asteroidales.

# Grafos de intervalos

- El orden de los extremos derechos de un grafo de intervalos satisface la siguiente propiedad: para cada tripla $(r, s, t)$ con $r < s < t$, si $v_t v_r \in E$, entonces $v_t v_s \in E$.

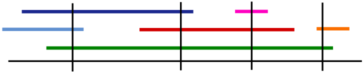


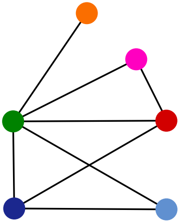

- En otras palabras, los vecinos del vértice $t$ con índice menor que $t$ son $t-1, t-2, \ldots, t-d$.
- Más aún, $G$ es un grafo de intervalos sii existe un orden de sus vértices que cumple con la propiedad mencionada. (Ramalingam y Pandu Rangan, 1988 / Olariu, 1991).

# Grafos de intervalos

**Teorema (Fulkerson and Gross, 1965)**

Un grafo $G$ es de intervalos si y sólo si sus cliques pueden ser ordenadas tal que, para cada vértice $v$ de $G$, las cliques que contienen $v$ son consecutivas.



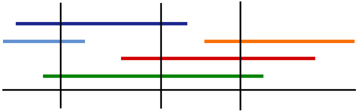


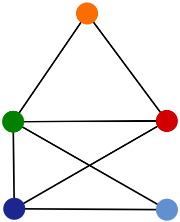
# Grafos de intervalos propios

Un grafo es de intervalos propio si tiene un modelo de intervalos en el cual no hay un intervalo propiamente contenido en otro.

**Teorema (Roberts, 1969)**

Un grafo $G$ es un grafo de intervalos propio si y sólo si sus vértices pueden ser ordenados tal que, para cada clique maximal $M$ de $G$, los vértices que forman $M$ son consecutivos.



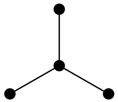


# Grafos de intervalos propios

Un grafo es un grafo de intervalos unitarios si admite un modelo con todos los intervalos de la misma longitud.

**Teorema (Roberts, 1969)**

Intervalos propios = intervalos unitarios = intervalos $\cap$ claw-free.



claw

# Grafos amigo-enemigo

Un grafo $G = (V, E)$ es amigo-enemigo en un cierto espacio métrico si sus vértices pueden ser embebidos en ese espacio de manera tal que para todo vértice $v$ de $G$, y todo par de vértices $w$, $z$ con $vw \in E$ y $vz \notin E$, $d(v, w) < d(v, z)$.

**Ejercicio:** Probar que un grafo es amigo-enemigo en la recta si y sólo si es de intervalos propios.

# Grafos arco-circulares

- Un grafo arco-circular es el grafo intersección de arcos en un círculo.

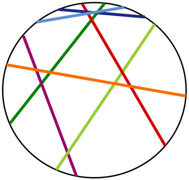
- Se usa como modelo para problemas de horarios en situaciones "non-stop".
- Subgrafos inducidos prohibidos minimales: abierto
- Caracterización por obstáculos prohibidos, del estilo de las triplas asteroidales [Hell, Francis y Stacho, 2014]
- Reconocimiento, clique máxima, 3-coloreo: polinomial
- Conjunto dominante, cub. cliques, conjunto independiente: lineal
- Coloreo: NP-completo [referencias en graphclasses.org]

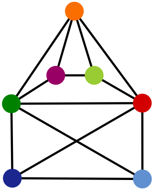
# Grafos arco-circulares

- Subclases: propios (modelo sin arcos contenidos en otros), unitarios (modelo con arcos de la misma longitud), Helly (modelo tal que toda clique tiene un punto común), normales (modelo tal que no hay dos arcos que cubran el círculo), combinaciones.
- Los grafos arco-circulares propios están caracterizados por subgrafos inducidos prohibidos [Bang Jensen y Hell], y se pueden colorear en tiempo polinomial.
- Surveys recientes: Lin y Szwarcfiter (algorítmico), Durán, Grippo y Safe (caracterizaciones) .

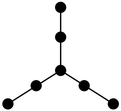
# Grafos circulares

- Un grafo circular es el grafo intersección de cuerdas de un círculo.

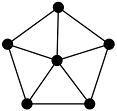




- Son una superclase de los árboles.
- No son comparables con los arco-circulares: bipartite-claw, 5-wheel.



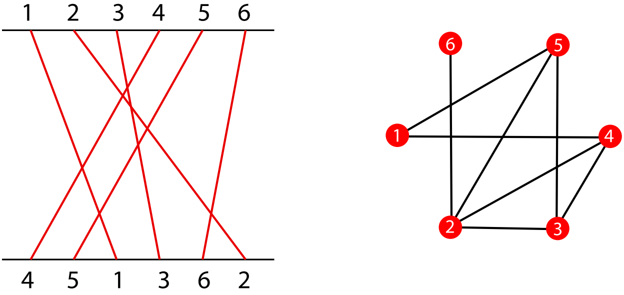
bipartite claw



5-wheel

# Grafos circulares

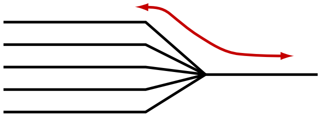
Los grafos circulares son una superclase de los grafos de permutación: los de permutación son aquellos grafos circulares que admiten un ecuador (agregar un vértice universal).

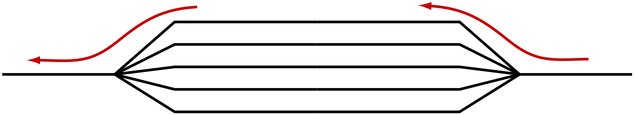



Ejemplo: $C_5$ no es de permutación $\Rightarrow$ $W_5$ no es circular.

# Grafos circulares

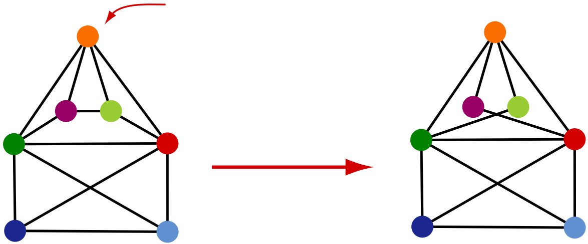
Sirven como modelo para asignación de trenes en un área de reposo con/sin “stop” nocturno.





# Grafos circulares: complementación local

Dado un grafo $G$ y un vértice $v$, la complementación local de $G$ con respecto a $v$ consiste en invertir las adyacencias en $N(v)$.

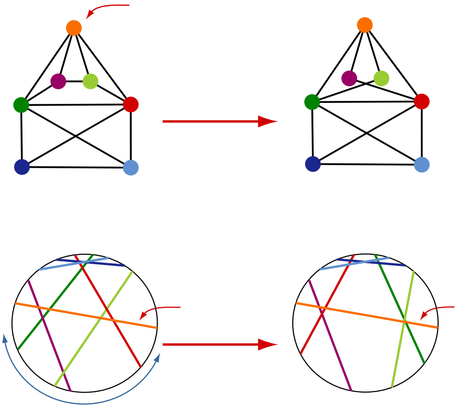


Equivalencia local: grafo obtenido por una secuencia de complementaciones locales.

# Grafos circulares: complementación local

**Teorema (Bouchet, 1994)**

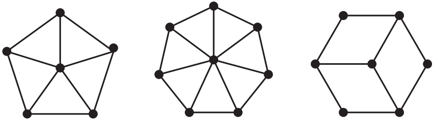
La clase de grafos circulares es cerrada bajo complementación local.



# Grafos circulares: complementación local

**Teorema (Bouchet, 1994)**

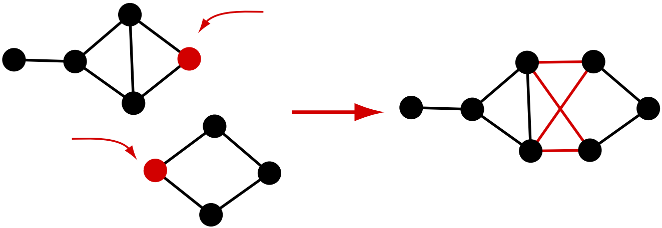
Un grafo $G$ es circular sii ningún grafo locamente equivalente a $G$ contiene $W_5$, $W_7$, o $BW_3$ como subgrafo inducido.



$W_5$ $W_7$ $BW_3$

# Grafos circulares: descomposición split

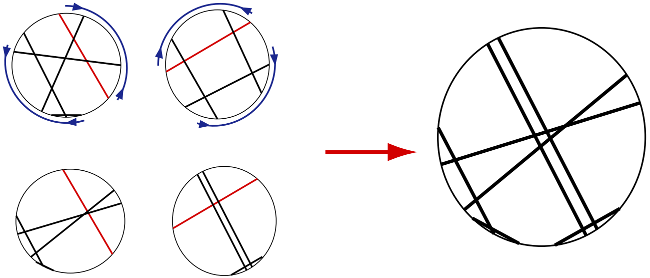
Sean $G_1$ y $G_2$ dos grafos disjuntos con al menos tres vértices, y sean $v_1 \in V(G_1)$, $v_2 \in V(G_2)$. La composición split de $G_1$ y $G_2$ con respecto a $v_1$ y $v_2$ es el grafo $G_1 * G_2$ tal que
$V(G_1 * G_2) = (V(G_1) \cup V(G_2)) \setminus \{v_1, v_2\}$ y $E(G_1 * G_2) = E(G_1 - \{v1\}) \cup E(G_2 - \{v_2\}) \cup \{uv : u \in N_{G_1}(v_1), v \in N_{G_2}(v_2)\}$.



# Grafos circulares: descomposición split

**Teorema (Bouchet, 1987)**

Sea $G$ un grafo que tiene una descomposición split $G = G_1 * G_2$. Entonces, $G$ es circular sii $G_1$ y $G_2$ son circulares.



# Grafos circulares

- Subclases: unitarios (modelo con todas las cuerdas de la misma longitud) = arco-circulares unitarios, Helly (modelo tal que toda clique comparte un punto).
- Qué grafo es circular pero no circular Helly?
- Circular Helly = circular sin diamantes (conjeturado por Durán en 2000, demostrado por Daligault, Gonçalves y Rao, 2010)
- Caracterización por subgrafos inducidos prohibidos minimales: abierta
- Reconocimiento, clique máxima, conjunto independiente, 3-coloreo: polinomial
- Conjunto dominante, cub. cliques, coloreo: NP-completos
- En grafos de permutación, son todos polinomiales [referencias en graphclasses.org]

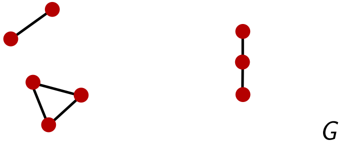
# Cografos

- Un cografo es un grafo sin $P_4$ inducido (camino de 4 vértices sin cuerdas).

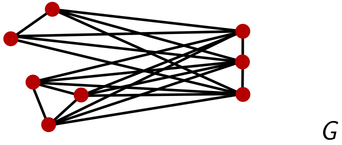
- Propiedad [Corneil, Perl, y Stewart, 1981]: Si $G$ es un cografo no trivial, entonces o $G$ o $\bar{G}$ no es conexo.
  Demo. Considerar $G$ minimal con la propiedad de que $G$ y $\bar{G}$ son conexos.

# Cografos

- En el primer caso, $G$ es la unión de dos cografos más chicos ($G = G_1 \cup G_2$).




- En el segundo caso, $G$ es el join de dos cografos más chicos ($G = G_1 \vee G_2$).



# Problemas algorítmicos en cografos

- **Clique máxima.** Sea $G_0$ un grafo trivial. Entonces $\omega(G_0) = 1$, $\omega(G_1 \cup G_2) = \max\{\omega(G_1), \omega(G_2)\}$, y $\omega(G_1 \vee G_2) = \omega(G_1) + \omega(G_2)$.
- **Conjunto independiente.** $\alpha(G_0) = 1$, $\alpha(G_1 \cup G_2) = \alpha(G_1) + \alpha(G_2)$, y $\alpha(G_1 \vee G_2) = \max\{\alpha(G_1), \alpha(G_2)\}$.
- **Coloreo.** $\chi(G_0) = 1$, $\chi(G_1 \cup G_2) = \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$, y $\chi(G_1 \vee G_2) = \chi(G_1) + \chi(G_2)$.
- **Cubrimiento por cliques.** $\tau(G_0) = 1$, $\tau(G_1 \cup G_2) = \tau(G_1) + \tau(G_2)$, y $\tau(G_1 \vee G_2) = \max\{\tau(G_1), \tau(G_2)\}$.
  En particular, eso muestra que los cografos son perfectos.
- **Conjunto dominante.** $\gamma(G_0) = 1$, $\gamma(G_1 \cup G_2) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2)$, y $\gamma(G_1 \vee G_2) = 1$ si $G$ tiene un vértice universal, y $2$ sino.

# Otro algoritmo para colorear cografos....

El algoritmo goloso basado en elegir sucesivamente conjuntos independientes máximos funciona para cografos!! (aún eligiendo simplemente maximales!)

**Lemma [Corneil, Lerchs, y Stewart Burlingham, 1984]**

Sea $G$ un cografo. Entonces todo conjunto independiente maximal de $G$ interseca toda clique maximal de $G$.

Demo. Por inducción, usando la descomposición. Para el grafo trivial vale. Si $G = G_1 \cup G_2$, todo conjunto independiente maximal está compuesto por un conjunto independiente maximal de $G_1$ y uno de $G_2$, y por hipótesis inductiva la parte en $G_i$ interseca todas las cliques maximales de $G_i$, para $i = 1, 2$, y esas son exactamente las cliques maximales de $G$. Si $G = G_1 \vee G_2$, todo conjunto independiente maximal de $G$ es un conjunto independiente maximal de $G_1$ o uno de $G_2$, pero toda clique maximal se compone de una de $G_1$ y una de $G_2$, y entonces por hipótesis inductiva el conjunto independiente interseca la clique, o en su parte en $G_1$ o en su parte en $G_2$. $\square$

Usando el lema, el resultado sigue por inducción en $\omega(G)$.

# Un algoritmo más....

El algoritmo greedy (darle a $v$ el primer color no usado por un vecino) funciona para cografos para cualquier orden de los vértices!! [Chvátal, 1984].

Notemos que el conjunto de vértices que reciben color $i$ es un conjunto independiente maximal en el subgrafo de $G$ inducido por los vértices que reciben color al menos $i$.

# Descomposición modular

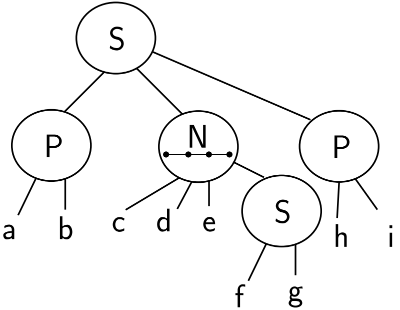
- Un módulo de un grafo $G = (V, E)$ es un conjunto $X \subseteq V$ de vértices tal que todos los vértices en $X$ tienen los mismos vecinos en $V \setminus X$.
- $V$ y los conjuntos de un solo vértice de $V$ se llaman módulos triviales.
- Un módulo $X$ es fuerte si para todo otro módulo $Y$, o $X \cap Y = \emptyset$ o $X \subseteq Y$ o $Y \subseteq X$.
- Si $X$ es un módulo fuerte de $G$ entonces $Y$ es un módulo fuerte de $G[X]$ sii $Y \subseteq X$ e $Y$ es un módulo fuerte de $G$.
- Un módulo es maximal si no está contenido en otro módulo no trivial.

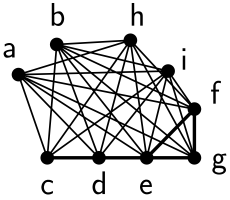
# Descomposición modular

- Entonces, los módulos fuertes se pueden organizar en una estructura de árbol donde los vértices son las hojas, y hay $O(n)$ módulos fuertes (no hay vértices de grado 2 en el árbol salvo quizás la raíz).
- Esta estructura de árbol se llama descomposición modular de $G$ y se puede calcular en tiempo polinomial.
- Hay tres tipos de nodos $X$ en el árbol: paralelos ($G[X]$ disconexo) serie ($\overline{G[X]}$ disconexo) y primos o vecindad ($G[X]$ y $\overline{G[X]}$ conexos).
- En cografos, solo hay nodos serie y paralelos.

# Descomposición modular

Ejemplo:




Si podemos caracterizar los módulos primos de una clase de grafos y lidiar con ellos, podemos extender muchos algoritmos para cografos. Ejemplos: grafos $P_4$-sparse, $P_4$-tidy, y muchas de las clases definidas acotando el número de $P_4$'s.

# Temas de tesis

# Algoritmos en clases de grafos

**Algoritmos exactos polinomiales** para problemas de optimización en grafos que son en general NP-completos, pero tratables en clases de grafos más restringidas.

**Ejemplos:**

- coloreo en grafos sin ciertos subgrafos inducidos (resultados recientes para 3-coloreo en grafos $P_7$-free).
- conjunto independiente máximo en grafos sin ciertos subgrafos inducidos (resultados recientes para conjunto independiente máximo en grafos claw-free y cubrimiento por cliques mínimo en grafos claw-free perfectos).
- variantes de conjunto dominante mínimo en ciertas clases de grafos.

# Casos abiertos de coloreo

Complejidad de $k$-coloreo en la clase de grafos $P_t$-free:

| k\t | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | $O(m)$ [1] | $O(n^\alpha)$ [4] | $O(mn^\alpha)$ [5] | P [6] | ? | ... |
| 4 | $O(m)$ [1] | P [2] | ? | NPC [3] | NPC | ... |
| 5 | $O(m)$ [1] | P [2] | NPC [3] | NPC | NPC | ... |
| 6 | $O(m)$ [1] | P [2] | NPC | NPC | NPC | ... |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ |

[1] Chvátal, 1984, Corneil, Perl, Stewart 1984.
[2] Hoàng, Kamiński, Lozin, Sawada, Shu 2010.
[3] Huang 2013.
[4] Mellin 2002.
[5] Randerath, Schiermeyer 2004.
[6] Bonomo, Chudnovsky, Maceli, Schaudt, Stein, Zhong, 2016.

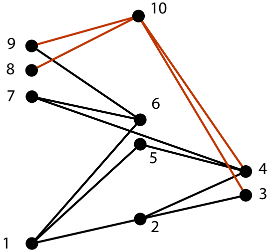
# Caracterizaciones estructurales de clases de grafos

**Ejemplo:** La clase está definida por igualdad de ciertos parámetros o por una representación geométrica y buscamos una caracterización por subgrafos inducidos prohibidos; o la clase está definida por subgrafos inducidos prohibidos y buscamos propiedades de descomposición de esos grafos, que puedan ser útiles al desarrollo de algoritmos.

# Grafos $k$-thin

**Definición**

Un grafo $G = (V, E)$ es $k$-thin si existe un orden $v_1, \ldots, v_n$ de $V$ y una partición de $V$ en $k$ clases tal que para cada tripla $(r, s, t)$ con $r < s < t$, si $v_r$, $v_s$ están en la misma clase y $v_t v_r \in E$, entonces $v_t v_s \in E$.




El mínimo $k$ tal que $G$ es $k$-thin se llama la thinness de $G$.

# Problemas abiertos

- Caracterizar grafos $k$-thin por subgrafos inducidos prohibidos.
- Complejidad computacional de calcular la thinness de un grafo.
- Detectar problemas que sean polinomiales en grafos de thinness acotada.