



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL



ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

UNIDAD TICOMAN

INGENIERÍA AERONÁUTICA

“DISEÑO DE PERFILES AERODINÁMICOS”

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

INGENIERO EN AERONÁUTICA

POR LA OPCION:

TESIS INDIVIDUAL

PRESENTA:

DIEGO RODRIGO FLORES GALINDO

Asesores de Tesis:

M. en C. Alfredo Arias Montaña
M. en C. Tiburcio Fernández Roque
Ing. Fausto H. Rodríguez Ibarra.

México D.F., Mayo del 2006

Dedicatoria

Para mi Madre:

Por su valor y coraje ante las adversidades, por su espíritu de lucha y por su inagotable forma de amar, gracias por todo lo que me haz dado. (Gracias por enseñarme a leer mucho antes de lo que debía).

Para mi hermano:

Por sus ganas de salir adelante y que esto sirva de apoyo para que logre sus objetivos. (Gracias por compartir momentos durante nuestra infancia).

Para toda mi Familia:

Es decir, abuelos, tíos y primos por su apoyo y sustento incondicional en los momentos difíciles.
(Gracias por todos esos momentos en los que estamos juntos y que no se repetirán)

Para todas esas personas que directa o indirectamente colaboraron con este trabajo.

Agradecimientos

Al Instituto Politécnico Nacional y a todas las instituciones educativas que me brindaron la oportunidad de formarme académicamente.

Es difícil nombrar a las personas que influyeron en mi educación, por ende agradezco a todos los profesores que colaboraron con su enseñanza hacia mi.

A todos mis amigos, compañeros de estudios por brindarme su amistad y sus conocimientos en la vida.

Índice

Índice.....	1
Relación de Figuras y Tablas.....	3
Introducción.....	5
Justificación.....	7
Objetivo.....	8
Alcance.....	9

CAPITULO 1. Perfiles Aerodinámicos

1.1 Definición y descripción de un perfil aerodinámico.....	10
1.2 Clasificación de los perfiles aerodinámicos.....	12
1.2.1 La serie de perfiles NACA.....	12
1.2.2 Serie NACA de 4 dígitos.....	13
1.2.3 Serie NACA de 5 dígitos.....	15
1.2.4 Serie NACA de 4 y 5 dígitos modificada.....	17
1.2.5 Serie NACA 1 o NACA 16.....	19
1.2.6 Serie NACA 6.....	20
1.2.7 Serie NACA 7.....	21
1.2.8 Serie NACA 8.....	22
1.3 Principio de funcionamiento de los perfiles aerodinámicos.....	24

CAPITULO 2. Tipos de Diseño de Perfiles Aerodinámicos

2.1 Reseña histórica del Diseño de perfiles aerodinámicos.....	27
2.2 Métodos de Diseño de perfiles aerodinámicos.....	31
2.2.1 Diseño Directo.....	32
2.2.2 Diseño Inverso.....	33
2.3 Tipos de diseño de perfiles.....	35
2.3.1 Diseño de perfiles con espesor máximo.....	36
2.3.2 Diseño de perfiles con sustentación máxima.....	36
2.3.3 Diseño de perfiles Laminares.....	36
2.3.4 Diseño de perfiles Transónicos.....	37
2.3.5 Diseño de perfiles para bajos números de Reynolds.....	38
2.3.6 Diseño de perfiles multipuntual.....	39

CAPITULO 3. Modelo Matemático para el Diseño de Perfiles Aerodinámicos

3.1 Formulación del problema.....	41
3.2 Desarrollo teórico.....	42
3.2.1 Función de Corriente.....	42
3.2.2 Potencial de Velocidad.....	47
3.2.3 Relación entre la función de corriente y el potencial de velocidad.....	49
3.2.4 Potencial Complejo y Velocidad Compleja.....	51

CAPITULO 4. Desarrollo y Resultados

4.1 Metodología de diseño aplicada a un perfil NACA 4412.....	68
4.2 Comparación de resultados teóricos contra experimentales y computacionales (XFOIL) de la distribución de presiones del perfil NACA 4412.....	83

Conclusiones	90
---------------------------	----

Referencias y Bibliografía	91
---	----

Apéndice 1	94
Apéndice 2	97
Apéndice 3	105

Relación de Figuras y Tablas

Relación de Figuras

Figura 1.1.1.	Terminología de un perfil.....	10
Figura 1.1.2.	Definición de ángulo de ataque.....	12
Figura 1.2.1.	Construcción geométrica del perfil NACA.....	13
Figura 1.2.2.	Perfil aerodinámico NACA 2415 perteneciente a la familia NACA de 4 dígitos.....	15
Figura 1.2.3.	Perfil aerodinámico NACA 23012 perteneciente a la familia NACA de 5 dígitos.....	17
Figura 1.2.4.	Perfil Aerodinámico NACA 0012-64 perteneciente a la familia NACA de 4 dígitos modificada.....	19
Figura 1.2.5.	Perfil Aerodinámico NACA 16-212 perteneciente a la familia NACA 1 o NACA 16.....	20
Figura 1.2.6.	Perfil Aerodinámico NACA 64 ₁ -212 perteneciente a la familia NACA 6.....	21
Figura 1.2.7.	Perfil Aerodinámico NACA 747A315 perteneciente a la familia NACA 7.....	22
Figura 1.2.8.	Perfil Aerodinámico NACA 835A216 perteneciente a la familia NACA 8.....	23
Figura 1.3.1.	Perfil asimétrico con sustentación nula.....	24
Figura 1.3.2.	Perfil asimétrico con sustentación positiva.....	25
Figura 1.3.3.	Perfil simétrico con sustentación nula.....	25
Figura 1.3.4.	Bosquejo de la presión y el esfuerzo cortante sobre una superficie aerodinámica.....	25
Figura 1.3.5.	Fuerzas actuantes sobre un plano aerodinámico.....	26
Figura 2.2.1.	Diagrama de Flujo del Diseño Directo.....	33
Figura 2.2.2.	Diagrama de Flujo del Diseño Inverso.....	34
Figura 3.2.1.	Diferentes líneas de corriente son determinadas por diferentes valores de la función de corriente.....	42
Figura 3.2.2.	El flujo másico a través de Δn es la suma de los flujos másicos a través de Δy y $-\Delta x$	45
Figura 3.2.3.	Esquema de la transformación de una curva casi circular B en un perfil.....	54
Figura 3.2.4.	Sistema coordenado del perfil.....	55
Figura 4.1.1.	Sistema coordenado del Perfil NACA 4412.....	69
Figura 4.1.2.	Perfil NACA 4412.....	70
Figura 4.1.3.	Grafica q VS y del Perfil NACA 4412.....	72
Figura 4.1.4.	Grafica q VS y' del Perfil NACA 4412.....	74
Figura 4.1.5.	Grafica q VS e del Perfil NACA 4412.....	77
Figura 4.1.6.	Grafica q VS e' del Perfil NACA 4412.....	78
Figura 4.1.7.	Distribución de Presiones del Perfil NACA 4412 a partir de la tabla 4.1.16, para un $\alpha = 0^\circ$	82
Figura 4.2.1.	Distribución de Presiones del Perfil NACA 4412 para un $\alpha = 0^\circ$	83
Figura 4.2.2.	Distribución de Presiones del Perfil NACA 4412 para un $\alpha = 2^\circ$	84
Figura 4.2.3.	Distribución de Presiones del Perfil NACA 4412 para un $\alpha = 4^\circ$	85
Figura 4.2.4.	Distribución de Presiones del Perfil NACA 4412 para un $\alpha = 8^\circ$	86
Figura 4.2.5.	Distribución de Presiones del Perfil NACA 4412 para un $\alpha = 12^\circ$	87
Figura 4.2.6.	Distribución de Presiones del Perfil NACA 4412 para un.....	88

	$a = 16^\circ$	
Figura 4.2.7.	Distribución de Presiones del Perfil NACA 4412 para un $a = 18^\circ$	89
Figura 4.2.8.	Distribución de Presiones del Perfil NACA 4412 para un $a = 20^\circ$	90

Relación de Tablas

Tabla 1.2.1.	Valores de m y k_1	16
Tabla 1.2.2.	Valores de a_x y d_x	18
Tabla 1.2.3.	Descripción de las familias NACA.....	23
Tabla 4.1.1.	Coordenadas del Extradós e Intrados.....	69
Tabla 4.1.2.	Valores de L , $\sin^2 q$, $\sin q$ y q	70
Tabla 4.1.3.	Valores de y	71
Tabla 4.1.4.	Valores de q y y	72
Tabla 4.1.5.	Valores de q , y y y'	73
Tabla 4.1.6.	Valores de j_c y y' para $q=0$	74
Tabla 4.1.7.	Valores de $j_1, j_{-1}, j_2, j_{-2}, j_3, j_{-3}, j_4$ y j_{-4}	75
Tabla 4.1.8.	Valores de $y_1, y_{-1}, y_2, y_{-2}, y_3, y_{-3}, y_4$ y y_{-4}	75
Tabla 4.1.9.	Coeficientes a_k	76
Tabla 4.1.10.	Valores de q y e	76
Tabla 4.1.11.	Valores de q , e y e'	77
Tabla 4.1.12.	Valores de F	79
Tabla 4.1.13.	Valores de $q + e$ en radianes y grados.....	79
Tabla 4.1.14.	Valores de $\sin(q + e + a) + \sin(a + e_T)$ para $a = 0$	80
Tabla 4.1.15.	Valores de $\frac{v}{V}$ para $a = 0$	80
Tabla 4.1.16.	Valores de $\frac{P}{q}$ para $a = 0$	81

Introducción

Es obligación del ingeniero aeronáutico saber ¿cómo? y de ¿dónde? surge el diseño de perfiles aerodinámicos, generalmente cuando alguien necesita las características aerodinámicas (coeficiente de levantamiento, coeficiente de resistencia al avance o coeficiente de momento de cabeceo) de alguno de tales perfiles, se recurre a los catálogos existentes, pero realmente el ingeniero aeronáutico no tiene el conocimiento de donde surgieron todos esos datos y desde mi punto de vista es más que necesario dominar ese tópico.

El problema del diseño de perfiles se puede definir como la determinación de la forma de un cuerpo con el fin de satisfacer ciertas características y restricciones de diseño que pueden ser aerodinámicas (coeficiente de resistencia al avance, coeficiente de levantamiento, fineza aerodinámica, coeficiente de momento de cabeceo, distribución de presiones o en su defecto distribución de velocidades, retardo en la transición de flujo laminar a flujo turbulento, retardo en la formación de la onda de choque, etc.), geométricas (cuerda, espesor, línea de curvatura, radio del borde de ataque etc.) o de naturaleza estructural (momento de inercia, área, esfuerzos de compresión / tensión y de corte, etc.).

Por ejemplo, la principal meta que se plantea en el diseño aerodinámico de un perfil para un ala de una aeronave de transporte aéreo es minimizar el arrastre en crucero y por lo tanto minimizar el consumo de combustible, en otro caso podemos requerir de un sistema con excelentes cualidades de levantamiento y cuyo objetivo del diseño aerodinámico es lograr el máximo levantamiento con la mínima separación del flujo.

El Capítulo 1 muestra los conceptos básicos que definen un perfil aerodinámico, así como la clasificación que le dio la NACA a los perfiles aerodinámicos, además de mostrar el principio de funcionamiento de los perfiles aerodinámicos. El Capítulo 2, se refiere a una reseña histórica del diseño de perfiles aerodinámicos seguida por la definición de los tipos de diseño de perfiles aerodinámicos, finalizando con la definición y breve descripción de los diferentes tipos de diseño aerodinámico que existen en la actualidad. El Capítulo 3 sienta las bases teóricas para el desarrollo de la

formulación matemática, habla de las definiciones de función de corriente, potencial de velocidad además de la relación que existe entre estas mismas. El Capítulo 4 muestra la aplicación de las ecuaciones del Capítulo 3 mediante el cálculo de la distribución de presiones de un perfil NACA 4412, además de que se presenta la comparación de los resultados obtenidos con el método Theodorsen con resultados experimentales y con resultados computacionales.

Justificación

Ya que en la literatura convencional hispanoamericana de aerodinámica y turbomaquinaria no existen explicaciones profundas relativas al diseño de perfiles, en este trabajo se intenta explicar y aplicar el método de Theodorsen con el fin de que pueda aplicarse en trabajos posteriores, ya sea en el diseño de perfiles aerodinámicos para turbinas de gas, turbocompresores y ¿porqué no?, en el diseño de alas de aviones. También a causa de que las aplicaciones en la ingeniería son distintas, es necesario diseñar para cada una de ellas un perfil distinto, ya que su comportamiento varía en función de los parámetros de la aplicación requerida. Para algunas aplicaciones, el uso de los perfiles de la serie NACA es particularmente inadecuado porque los requerimientos de diseño para estos perfiles de aeronave de baja velocidad son significativamente diferentes de los otros perfiles para las otras aplicaciones; las turbinas de viento son un buen ejemplo. Los catálogos también padecen de una falta de cobertura. Cada aplicación requiere un rendimiento específico del perfil. Si este rendimiento cae dentro del alcance de las características contenidas en un catálogo, el perfil puede ser seleccionado de ese catálogo para la aplicación en particular. Sin embargo, muy probablemente, este perfil todavía representará un reto porque sus características no combinan exactamente con la aplicación. Una ventaja relacionada del método de diseño del perfil teórico es que permite que muchos conceptos diferentes sean analizados económicamente. Tales esfuerzos son en general poco prácticos en los túneles de viento debido al tiempo y las restricciones de dinero. Por lo tanto, la necesidad para un método de diseño de perfiles está compuesta principalmente de tres razones: primero, el diseño de perfiles que quedan fuera del alcance de la aplicabilidad de los catálogos existentes; segundo, para el diseño de perfiles que se ajusten en mayor medida a los requisitos de la aplicación prevista; y en tercer lugar, para la exploración económica de muchos conceptos de perfiles.

Objetivo

Aplicar la metodología propuesta por Theodorsen en el cálculo de la distribución de presiones de un perfil aerodinámico en un flujo potencial a diferentes ángulos de ataque.

Alcance

Desarrollar las graficas de distribución de presiones para diferentes ángulos de ataque del perfil NACA 4412, además de demostrar la fácil utilización de este método en ingeniería aeronáutica.

CAPÍTULO 1

CAPÍTULO 1



CAPITULO 1. PERFILES AERODINAMICOS

1.1 Definición y descripción de un perfil aerodinámico

Anderson [1] define un perfil aerodinámico como cualquier sección del ala cortada por un plano paralelo a la cuerda de la misma. Los perfiles se pueden dividir en dos grandes tipos: simétricos y asimétricos. Anderson precisa que un perfil simétrico es un perfil sin combadura, es decir, la línea de curvatura media y la línea de cuerda coincide. Claramente en los perfiles simétricos la parte superior del perfil (extrados) es una imagen reflejo de la parte inferior (intrados) [1]. Debido a esta condición geométrica, el perfil simétrico tiene un bajo costo y es de fácil construcción con respecto a un perfil asimétrico. Por otra parte, los perfiles asimétricos tienen la ventaja de generar mayor levantamiento y mejores prestaciones ante la entrada en pérdida de sustentación o desplome, la cual ocurre a altos ángulos de ataque.

Terminología de un perfil

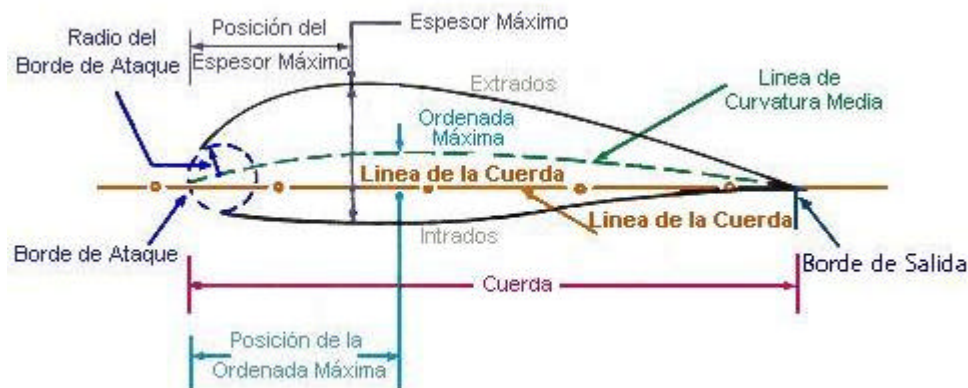


Figura 1.1.1 Terminología de un perfil [3].

Carmona [2] y Anderson [1] definen los términos utilizados en la descripción de un perfil y que se muestran en la figura 1.1.1.

1.-*Borde de Ataque*. Es el punto más delantero del perfil.

2.-*Borde de Salida*. Es el punto más trasero del perfil.

3.- *Línea de la cuerda*: Es la línea recta que pasa por el borde de ataque y por el borde de salida.

4.- *Cuerda*. Es la línea recta que une el borde de ataque con el borde de salida. Es una dimensión característica del perfil.

5.- *Línea de Curvatura Media*. Línea equidistante entre el extradós y el intrados. Esta línea “fija” la curvatura del perfil. Si la línea de curvatura media “queda” sobre la cuerda (como en la figura 1.1) se dice que la curvatura es positiva, si queda por debajo, negativa, y si va por debajo y por arriba, doble curvatura.

6.- *Ordenada máxima de la línea de curvatura media*. Es la máxima distancia entre la línea de curvatura media y la cuerda del perfil. El valor suele darse en porcentaje de la cuerda.

7.- *Posición de la curvatura máxima*. Es la distancia medida a partir del borde de ataque, en porcentaje de la cuerda, donde se encuentra la ordenada máxima de la línea de curvatura media.

8.- *Espesor máximo*. Es la distancia máxima entre el extradós e intrados, medida perpendicularmente a la cuerda. Es una característica importante, que se expresa en porcentaje de la cuerda. El valor varía desde un 3 % en los perfiles delgados hasta un 18 % en los más gruesos.

9.- *Posición del espesor máximo*. Es la distancia paralela a la cuerda, medida desde el borde de ataque hasta la ordenada donde existe el espesor máximo del perfil.

10.- *Radio de Curvatura del Borde de Ataque*. Define la forma del borde de ataque y es el radio de un círculo tangente al extradós e intrados, y con su

centro situado en la línea tangente a la línea de curvatura media y que pasa por el borde de ataque.



Figura 1.1.2 Definición de ángulo de ataque [3].

1.2 Clasificación de perfiles aerodinámicos

1.2.1 La serie de perfiles NACA

Las primeras series de perfiles NACA, la de 4 dígitos, 5 dígitos y las modificadas de 4 y 5 dígitos fueron generados usando ecuaciones analíticas que describen la combadura (curvatura) de la línea media (línea central geométrica) del perfil así como la distribución de espesor a lo largo de la longitud del perfil. Familias posteriores, incluyendo la serie 6, son formas más complicadas derivadas de métodos teóricos en lugar de los métodos geométricos. Antes de que el Comité Nacional Asesor para la Aeronáutica (NACA) desarrollara estas series, el diseño de perfiles era más arbitrario sin alguna guía para el diseñador excepto su previa experiencia con formas conocidas y experimentación con modificaciones de aquellas formas. Esta metodología comenzó a cambiar a principios de los 30's con la publicación de un reporte de la NACA titulado *Las características de 78 perfiles relacionados de pruebas en el túnel de viento de densidad variable* (cf. [6]). En este reporte histórico, los autores notaron que había muchas similitudes entre los perfiles que fueron los más exitosos, que las dos primeras variables que afectan estas geometrías son la pendiente de la línea de combadura media y la distribución de espesores abajo y arriba de esta línea. Entonces ellos presentaron una serie de ecuaciones incorporando estas dos variables que podían ser usadas para

generar una familia completa de formas de perfil relacionadas. De esta forma del diseño de perfiles se volvió más sofisticado, esta aproximación básica fue modificada incluyendo variables adicionales, a pesar de esto, estos dos valores geométricos permanecieron en el corazón de todas las series NACA, como se muestra en la figura 1.2.1, [4], [5].

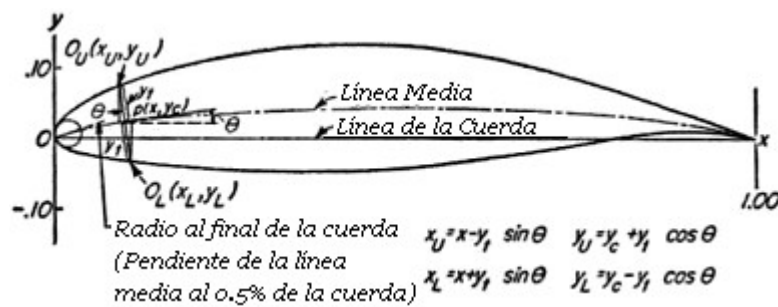


Figura 1.2.1 Construcción geométrica del perfil NACA, [4], [5].

1.2.2 Serie NACA de 4 dígitos

La primera familia de perfiles diseñados usando esta aproximación se conoció como la serie NACA de 4 dígitos. El primer dígito especifica la combadura máxima (m) en porcentaje de la cuerda (longitud del perfil), el segundo indica la posición de la combadura máxima (p) en décimas de cuerda, y los dos últimos números indican el espesor máximo (t) del perfil en porcentaje de la cuerda. Por ejemplo, el perfil NACA 2415 tiene un espesor máximo del 15% con una combadura máxima del 2% localizada al 40% detrás del borde de ataque del perfil (o 0.4c), ver figura 1.2.2. Utilizando estos valores de m , p y t , se puede calcular las coordenadas para un perfil completo usando las siguientes relaciones:

1. Elegir valores de x desde 0 hasta la cuerda máxima c .
2. Calcular las coordenadas de la línea de combadura media introduciendo los valores de m y p dentro de las siguientes ecuaciones para cada una de las coordenadas x .

$$y_c = \frac{m}{p^2} (2px - x^2) \quad \text{desde } x=0 \text{ hasta } x=p \quad (1.1)$$

$$y_c = \frac{m}{(1-p)^2} [(1-2p) + 2px - x^2] \quad \text{desde } x = p \text{ hasta } x = c \quad (1.2)$$

donde

x = las coordenadas a lo largo de la longitud del perfil, desde 0 hasta c (las cuales se posicionan en la cuerda)

y = las coordenadas por encima y debajo de la línea extendiéndose a lo largo del la longitud del perfil, estas son tanto para las coordenadas del espesor y_t y para las coordenadas de la combadura y_c .

t = espesor máximo del perfil en décimas de la cuerda (i.e. un 15% de espesor del perfil debe de ser 0.15)

m = combadura máxima del perfil en décimas de la cuerda

p = posición de la combadura máxima a lo largo de la cuerda en décimas de la cuerda

3. Calcular la distribución de espesores por encima (+) y por debajo (-) de la línea media introduciendo el valor de t dentro de la siguiente ecuación para cada una de las coordenadas x .

$$\pm y_t = \frac{t}{0.2} (0.2969\sqrt{x} - 0.1260x - 0.3516x^2 + 0.2843x^3 - 0.1015x^4) \quad (1.3)$$

4. Determinar las coordenadas finales de la superficie superior (x_U, y_U) y de la superficie inferior (x_L, y_L) usando las siguientes relaciones, [4], [5].

$$x_U = x - x_t \sin \mathbf{q} \quad (1.4)$$

$$y_U = y_c + y_t \cos \mathbf{q} \quad (1.5)$$

$$x_L = x + y_t \sin \mathbf{q} \quad (1.6)$$

$$y_L = y_c - y_i \cos \mathbf{q} \quad (1.7)$$

donde

$$\mathbf{q} = \arctan\left(\frac{dy_c}{dx}\right) \quad (1.8)$$

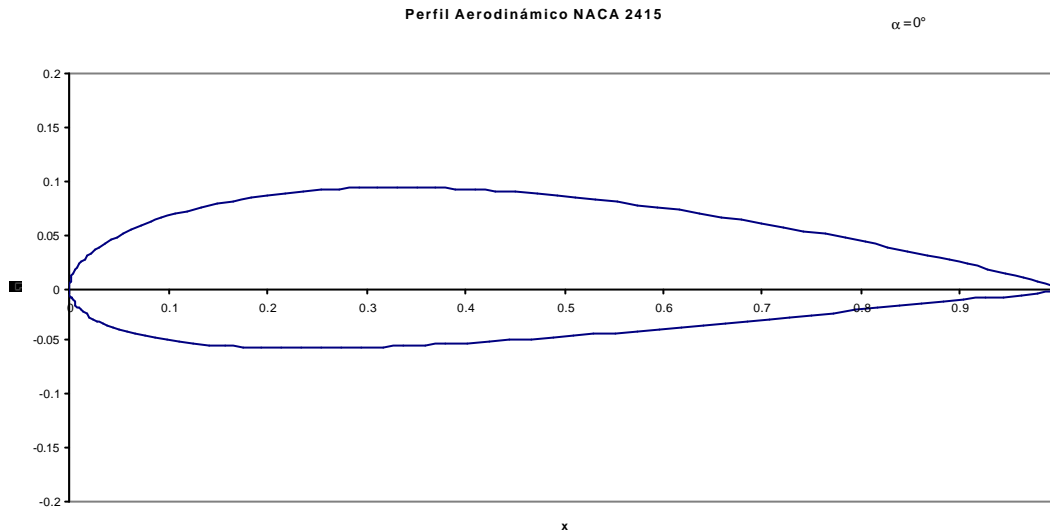


Figura 1.2.2 Perfil Aerodinámico NACA 2415 perteneciente a la familia NACA de 4 dígitos

1.2.3 Serie NACA de 5 dígitos

La serie NACA de 5 dígitos usa la misma distribución del espesor como la serie de 4 dígitos pero la línea de combadura media se define de diferente forma y la convención de la nomenclatura es un poco más complicada. El primer dígito, cuando se multiplica por $3/2$, produce el coeficiente de levantamiento de diseño (c_l) en décimas. Los siguientes dos dígitos, cuando se dividen entre 2, resulta la posición de la combadura máxima (p) en décimas de la cuerda. Los dos últimos dígitos indican otra vez el espesor máximo (t) en porcentaje de la cuerda. Por ejemplo, el perfil NACA 23012 tiene un espesor máximo del 12%, un coeficiente de sustentación de diseño de 0.3, y una combadura máxima localizada al 15% detrás del borde de ataque, ver figura 1.2.3. Los pasos necesarios para calcular las coordenadas de tales perfiles son:

1. Elegir valores de x desde 0 hasta la cuerda máxima c .

2. Calcular las coordenadas de la línea de combadura media para cada posición x usando las siguientes ecuaciones, y como se sabe p determina los valores de m y k_1 usando la tabla 1.

$$y_c = \frac{k_1}{6} [x^3 - 3mx^2 + m^2(3-m)x] \quad \text{desde } x=0 \text{ hasta } x=p \quad (1.9)$$

$$y_c = \frac{k_1 m^3}{6} (1-x) \quad \text{desde } x=p \text{ hasta } x=c \quad (1.10)$$

(en donde m y k_1 se determinan de la tabla 1.2.1)

El radio del borde de ataque r se aplica para suavizar el frente.

$$r = 1.1019t^2 \quad (1.11)$$

Tabla 1.2.1. Valores de m y k_1

Designación de la línea media	Posición de la combadura máxima (p)	m	k_1
210	0.05	0.0580	361.400
220	0.1	0.126	51.640
230	0.15	0.2025	15.957
240	0.20	0.2900	6.643
250	0.25	0.3910	3.230

3. Calcular la distribución de espesores usando la misma ecuación de la serie de 4 dígitos.
4. Determinar las coordenadas finales usando la misma ecuación de la serie de 4 dígitos, **[4]**, **[5]**.

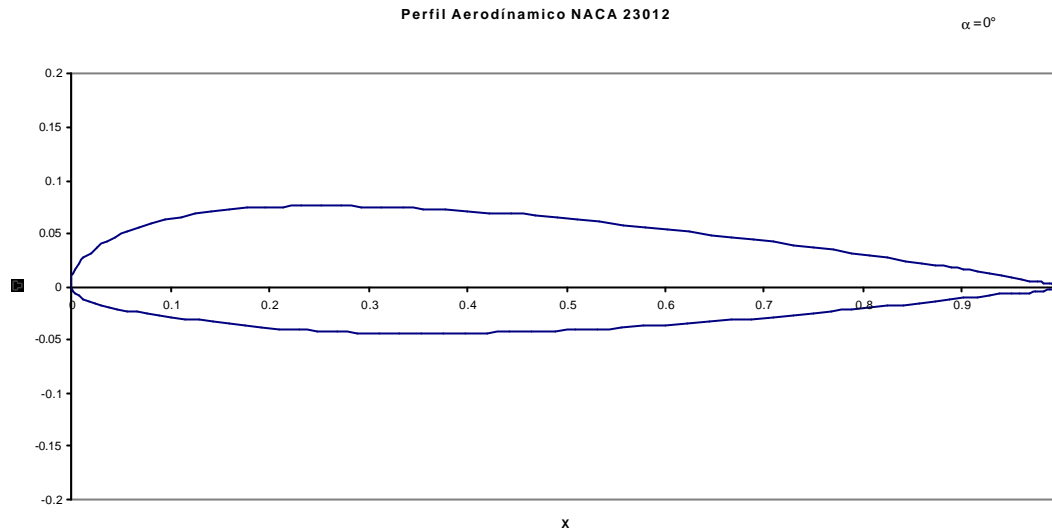


Figura 1.2.3 Perfil Aerodinámico NACA 23012 perteneciente a la familia NACA de 5 dígitos

1.2.4 Serie NACA de 4 y 5 dígitos modificada

Los perfiles del bombardero B-58 son miembros de la serie de 4 y 5 dígitos, sin embargo los nombres son ligeramente diferentes a esas formas que han sido modificadas. Considérese el perfil raíz, el NACA 0003.46-64.069, como un ejemplo. La forma básica es la 0003, un 3% de espesor con 0% de combadura. Esta forma es un perfil simétrico que es idéntico por encima y por debajo de la línea de combadura media. La primera modificación que se considera es el 0003.46-64. El primer dígito después del guión se refiere a la redondez de la nariz. El valor de 6 indica que el radio de la nariz es el mismo que el perfil original mientras que un valor de 0 indica un borde de ataque puntiagudo. Al incrementar este valor significa que se incrementa la redondez de la nariz. El segundo dígito determina la posición del espesor máximo de décimas de la cuerda. La posición estándar del espesor máximo de los perfiles de 4 y 5 dígitos es al 30% detrás del borde de ataque. En este ejemplo, la posición del espesor máximo se ha movido al 40% detrás del borde de ataque. Finalmente, se debe notar que el 0003.46-64.069 tiene dos arreglos de dígitos precedidos por decimales. Estos indican simplemente ligeros ajustes al espesor máximo y la posición. En lugar de que sea 3% de espesor, este perfil tiene 3.46% de espesor. En lugar de que el espesor máximo sea bcalizado al 40% de la cuerda, la posición sobre este perfil esta al 40.69% de la cuerda, en la figura

1.2.4 se muestra un ejemplo. Para calcular las coordenadas de la forma de un perfil modificado:

1. Elegir valores de x desde 0 hasta la cuerda máxima c .
2. Calcular las coordenadas de la línea de combadura media usando las mismas ecuaciones dadas para la serie de 4 o 5 dígitos respectivamente.
3. Calcular la distribución de espesores por encima (+) y por debajo (-) de la línea media usando estas ecuaciones. Los valores de los coeficientes a_x y d_x se determinan de la tabla 2 (los coeficientes son obtenidos para un espesor de 20% del perfil).

$$\pm y_t = a_0\sqrt{x} + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad \text{delante de } t_{\max} \quad (1.12)$$

$$\pm y_t = d_0 + d_1(1-x) + d_2(1-x)^2 + d_3(1-x)^3 \quad \text{detrás de } t_{\max} \quad (1.13)$$

Tabla 1.2.2. Valores de a_x y d_x

Perfil	a_0	a_1	a_2	a_3	d_0	d_1	d_2	d_3
0020-62	0.296900	0.213337	-2.931954	5.229170	0.002000	0.200000	-0.040625	-0.070312
0020-63	0.296900	-0.096082	-0.543310	0.559395	0.002000	0.234000	-0.068571	-0.093878
0020-64	0.296900	-0.246867	0.175384	-0.266917	0.002000	0.315000	-0.233333	-0.032407
0020-65	0.296900	-0.310275	0.341700	-0.321820	0.002000	0.465000	-0.684000	0.292000
0020-66	0.296900	-0.271180	0.140200	-0.082137	0.002000	0.700000	-1.662500	1.312500
0020-03	0.000000	0.920286	-2.801900	2.817990	0.002000	0.234000	-0.068571	-0.093878
0020-33	0.148450	0.412103	-1.672610	1.688690	0.002000	0.234000	-0.068571	-0.093878
0020-93	0.514246	-0.840115	1.110100	-1.094010	0.002000	0.234000	-0.068571	-0.093878
0020-05	0.000000	0.477000	-0.708000	0.308000	0.002000	0.465000	-0.684000	0.292000
0020-35	0.148450	0.083362	-0.183150	-0.006910	0.002000	0.465000	-0.684000	0.292000
0020-34	0.148450	0.193233	-0.558166	0.283208	0.002000	0.315000	-0.233333	-0.032407

4. Determinar las coordenadas finales usando las mismas ecuaciones de la serie de 4 dígitos.
5. Como se nota, esto producirá un 20% de espesor del perfil. Para obtener el espesor deseado, simplemente se aplica una escala al perfil multiplicando las coordenadas finales y por $(t/0.2)$, [4], [5].

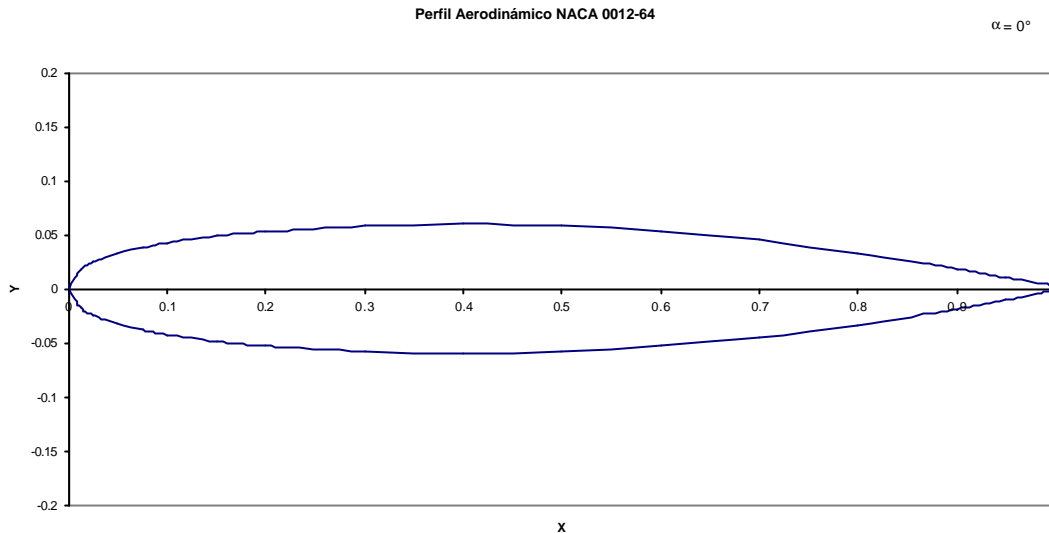


Figura 1.2.4 Perfil Aerodinámico NACA 0012-64 perteneciente a la familia NACA de 4 dígitos modificada

1.2.5 Serie NACA 1 o NACA 16

A diferencia de las anteriores familias de perfiles descritas, la serie 1 se desarrolló basándose en una teoría en lugar de relaciones geométricas. Por esas fechas estos perfiles fueron diseñados durante los finales de los 30's, al mismo tiempo que muchos avances se habían hecho en los métodos de diseño inverso de perfiles. El concepto básico detrás de esta aproximación de diseño es especificar la distribución de presiones deseada sobre el perfil (esta distribución determina las características de levantamiento del perfil) y entonces determinar la forma geométrica que produce esta distribución de presiones. Como un resultado, estos perfiles no fueron generados usando algunos arreglos de expresiones analíticas como los de las series 4 y 5. Los perfiles de la serie 1 son identificados por 5 dígitos, como por ejemplo el 16-212. El primer dígito, 1, indica la serie (esta serie fue diseñada para perfiles con regiones de escaso flujo supersónico). El 6 especifica la posición de presión mínima en décimas de la cuerda, i.e. 60% detrás del borde de ataque en este caso. Seguido del guión, el primer dígito indica el coeficiente de sustentación en décimas (0.2) y los dos últimos dígitos especifican el espesor máximo en décimas de la cuerda (12%), ver figura 1.2.5. Debido a que los perfiles 16-XXX son los únicos que han tenido mucho uso, esta familia es referida usualmente

como la serie 16 en lugar de nombrarla como una subfamilia de la serie 1, [4], [5].

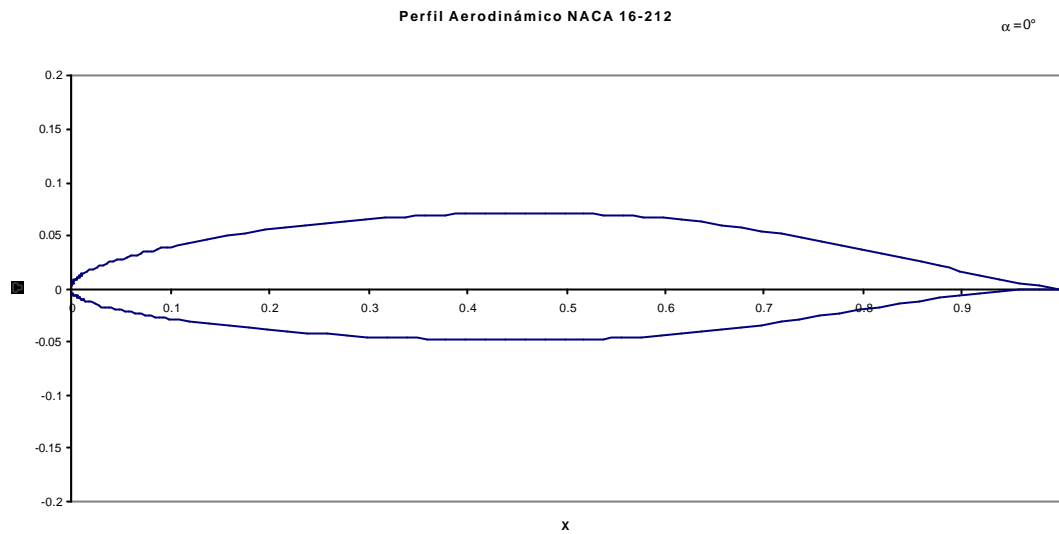


Figura 1.2.5 Perfil Aerodinámico NACA 16-212 perteneciente a la familia NACA 1 o NACA 16

1.2.6 Serie NACA 6

Aunque la NACA experimentó con métodos teóricos aproximados que produjeron la serie 2 por medio de la serie 5, ninguna de estas aproximaciones se encontró que producía de forma precisa el comportamiento deseado del perfil. La serie 6 fue derivada usando un método teórico mejorado que, como la serie 1, dependía específicamente de la distribución de presiones deseada y empleaba matemáticas avanzadas para generar la forma geométrica requerida. La meta de esta aproximación fue diseñar perfiles que maximizaran la región sobre la cual el flujo de aire se conserva laminar. Y para hacer esto, el arrastre sobre un pequeño rango de coeficientes de levantamiento se debe reducir sustancialmente. La nomenclatura de la serie 6 es de las más confusas de cualquiera de las familias previamente señaladas, especialmente debido a que tiene diferentes variaciones. Uno de los ejemplos más comunes es el NACA 64₁-212, $a = 0.6$, ver figura 1.2.6. En este ejemplo, el 6 expresa la serie e indica que esta familia es diseñada para flujos laminares más grandes que las series 4 y 5. El segundo dígito, 4, es la posición de la presión mínima en décimos de la cuerda ($0.4c$). El subíndice 1 indica que un bajo arrastre se mantiene en

coeficientes de levantamiento 0.1 por encima y por debajo del coeficiente de levantamiento de diseño en decimos (0.2) especificado por el primer dígito posterior al guión en décimas. Los dos últimos dígitos especifican el espesor en porcentaje de la cuerda, 12%. La fracción especificada por $a = \text{---}$ indica el porcentaje de la cuerda del perfil sobre la cual la distribución de presiones es uniforme sobre el perfil, 60% de la cuerda en este caso. Si no se especifica, la cantidad que se considera es 1 o en su defecto la distribución es constante sobre todo el perfil, [4], [5].

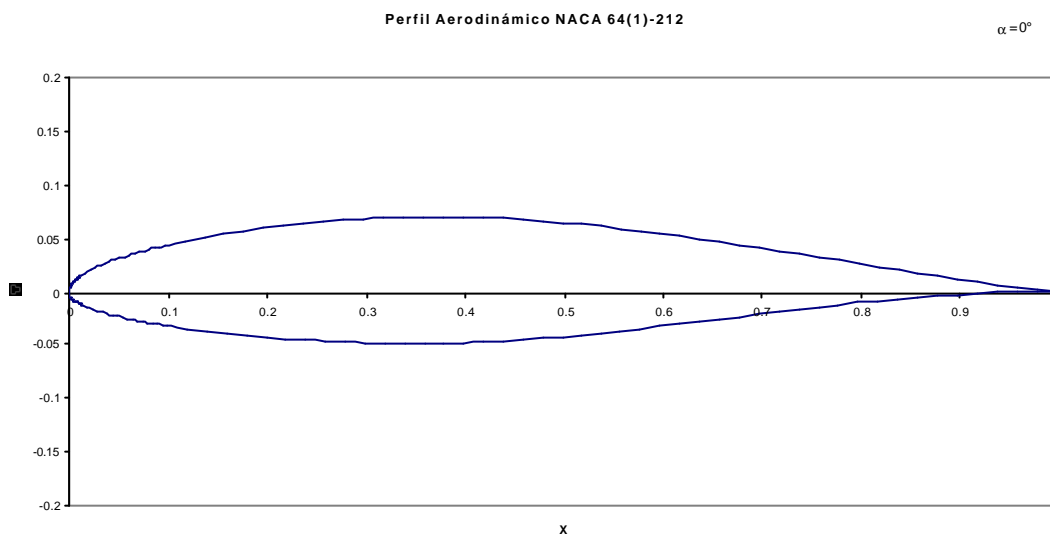


Figura 1.2.6 Perfil Aerodinámico NACA 64₁-212 perteneciente a la familia NACA 6

1.2.7 Serie NACA 7

La serie 7 fue un logro adicional al maximizar las regiones de flujo laminar sobre un perfil diferenciando las posiciones de la presión mínima sobre las superficies superior e inferior. Un ejemplo es el NACA 747A315, ver figura 1.2.7. El 7 denota la serie, el 4 da la posición de la presión mínima sobre la superficie inferior en décimas de cuerda (40%), el tercer número 7 indica la magnitud sobre el intrados, en décimas de cuerda (70%) desde el borde de ataque, de la región de gradiente favorable de presión en el coeficiente de sustentación de diseño. El cuarto carácter, una letra, indica las formas usadas para la distribución de espesor y de la línea media. Una serie de formas estandarizadas derivadas de las primeras familias se designan por diferentes letras. Otra vez, el quinto dígito indica el coeficiente de sustentación de diseño

en décimas (0.3) y los dos últimos dígitos son el espesor del perfil en porcentaje de la cuerda (15%), [4], [5].

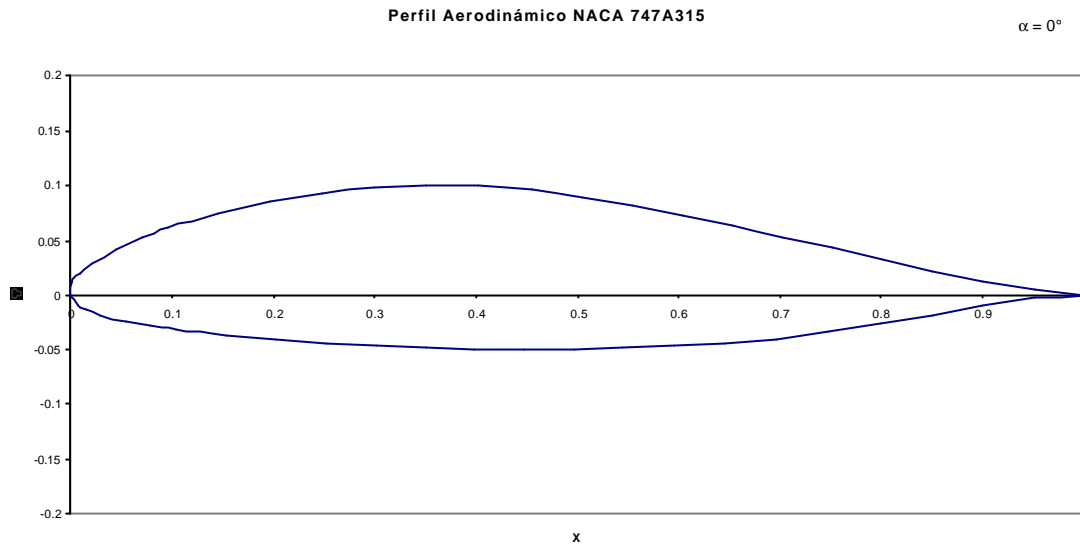


Figura 1.2.7 Perfil Aerodinámico NACA 747A315 perteneciente a la familia NACA 7

1.2.8 Serie NACA 8

Una variación final de la metodología de las series 6 y 7 fue la serie NACA 8 diseñada para el vuelo a velocidades supercríticas. Como los primeros perfiles, la meta fue maximizar la magnitud del flujo laminar en las superficies superior e inferior de forma independiente. La nomenclatura es muy similar a la serie 7, un ejemplo es el NACA 835A216, ver figura 1.2.8. El 8 designa la serie, el 3 es la posición de la presión mínima sobre la superficie superior en décimas de la cuerda (0.3c), el 5 es la posición de la presión mínima sobre la superficie inferior en décimas de la cuerda (0.5c), la letra A distingue los perfiles que tienen diferentes formas de combadura y espesor, el 2 denota el coeficiente de sustentación de diseño en décimas (0.2), y el 16 se refiere al espesor del perfil en porcentaje de la cuerda (16%), [4], [5].

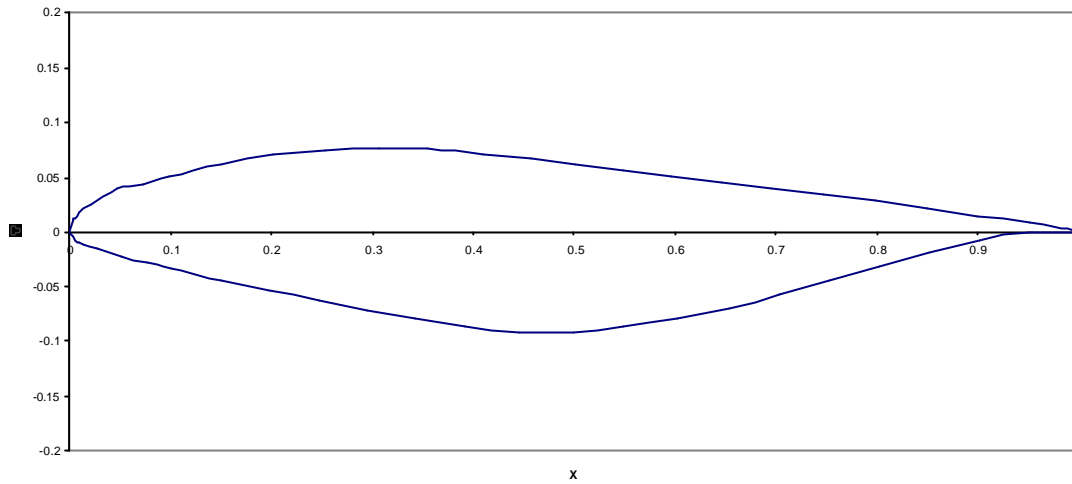


Figura 1.2.8 Perfil Aerodinámico NACA 835A216 perteneciente a la familia NACA 8

Tabla 1.2.3. Descripción de las familias NACA

Familia	Ventajas	Desventajas	Aplicaciones
Serie 4	<ol style="list-style-type: none"> 1. Buenas características de pérdida 2. Pequeño movimiento del centro de presiones a lo largo del rango de gran velocidad 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Bajo coeficiente de levantamiento 2. Relativamente gran arrastre 3. Elevado momento de cabeceo 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Aviación general 2. Colas horizontales <p>Simétricos:</p> <ol style="list-style-type: none"> 3. Jets supersónicos 4. Palas de helicópteros 5. Soportes 6. Aletas de misiles y cohetes
Serie 5	<ol style="list-style-type: none"> 1. Coeficiente de levantamiento más alto 2. Bajo momento de cabeceo 3. La rugosidad tiene un pequeño efecto 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Pobre comportamiento de pérdida 2. Relativamente alto arrastre 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Aviación general 2. Aviones de bombardeo propulsados por motores de pistón 3. Conmutadores 4. Jets de negocios
Serie 16	<ol style="list-style-type: none"> 1. Evita los picos de baja presión 2. Bajo arrastre a altas velocidades 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Relativamente bajo levantamiento 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Propelas (hélices) de aeronaves 2. Propelas de barcos
Serie 6	<ol style="list-style-type: none"> 1. Coeficiente de levantamiento alto 2. Muy bajo arrastre sobre un pequeño rango de condiciones de operación 3. Optimizado para altas velocidades con regiones amplias de flujo laminar 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Alto arrastre fuera del rango óptimo de las condiciones de operación 2. Momento de cabeceo elevado 3. Comportamiento pobre de pérdida 4. Muy susceptible a la rugosidad 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Bombarderos propulsados por motor de pistón 2. Jets de negocios 3. Entrenadores para Jets 4. Jets supersónicos
Serie 7	<ol style="list-style-type: none"> 1. Muy bajo arrastre sobre un pequeño rango de condiciones de operación 2. Bajo momento de cabeceo 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Reducido coeficiente de levantamiento 2. Alto arrastre fuera del rango óptimo de las condiciones de operación 3. Comportamiento pobre de pérdida 4. Muy susceptible a la rugosidad 	Raramente usados
Serie 8	Desconocidas	Desconocidas	Muy raramente usados

Aunque se ha introducido a las familias de los primeros perfiles desarrollados en los Estados Unidos antes de la llegada del vuelo supersónico, no se ha dicho algo acerca de sus usos. Así que brevemente la tabla 1.2.3 muestra las ventajas, desventajas, y aplicaciones de cada una de estas familias.

Los recursos computacionales disponibles en estos días le permiten al diseñador, crear y optimizar rápidamente un perfil específicamente adaptado a una aplicación particular en lugar de hacer una selección de una familia existente.

1.3 Principio de funcionamiento de perfiles aerodinámicos

El aumento de la velocidad del aire sobre el extradós de un perfil, con respecto a la velocidad del aire en el intrados, genera una diferencia de presiones, entre ambas superficies del perfil. Si esta diferencia de presiones es diferente de cero, ya sea positiva o negativa, y al estar actuando sobre las superficies del perfil, genera una fuerza resultante denominada levantamiento. Si se observa la figura 1.3.1 (perfil asimétrico), se notará que las presiones resultantes sobre el extradós e intrados generan fuerzas opuestas de la misma magnitud, por lo tanto no existe la sustentación.



Figura 1.3.1 Perfil asimétrico con sustentación nula [3]

Cuando se incrementa el ángulo de ataque las presiones en el extradós son inferiores a las del intrados, obteniéndose una fuerza resultante en dirección vertical y hacia arriba llamada levantamiento. El punto donde se puede considerar aplicada esa fuerza se denomina *centro de presión*.

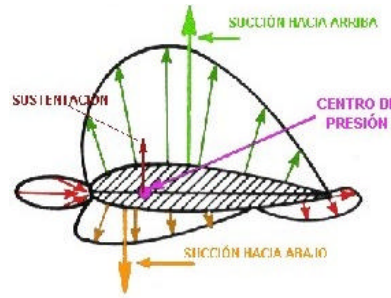


Figura 1.3.2 Perfil asimétrico con sustentación positiva [3]

La distribución de las presiones es diferente en los perfiles simétricos. La distribución de las presiones, como se puede observar en la figura 1.3.2, es similar tanto en el extradós como en el intrados (ángulo de ataque cero), y las fuerzas resultantes de ambas presiones son iguales en magnitud pero de sentido contrario y aplicadas en el mismo punto.

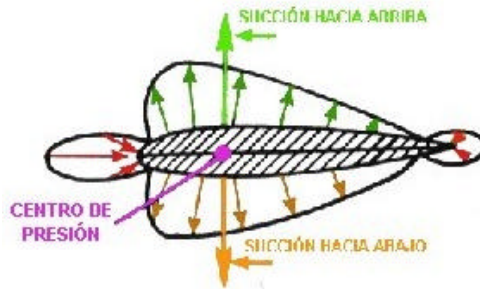


Figura 1.3.3 Perfil simétrico con sustentación nula [3]

Anderson señala que las fuerzas aerodinámicas sobre un cuerpo son debidas únicamente a dos fuentes [1]:

1. La distribución de presiones (p) sobre la superficie del cuerpo
2. La distribución de esfuerzos cortantes (t) sobre la superficie del cuerpo.

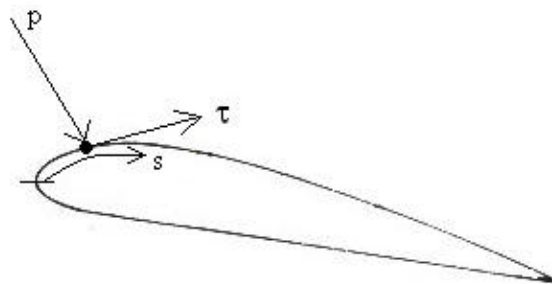


Figura 1.3.4 Bosquejo de la presión y el esfuerzo cortante sobre una superficie aerodinámica

[1]

Como muestra la figura 1.3.4, p actúa *normal* a la superficie, y t actúa de forma *tangencial* a la superficie. El efecto total de las distribuciones p y t integradas sobre la superficie completa del perfil resulta en una *fuerza total aerodinámica*, algunas veces llamada *fuerza resultante* que puede ser dividida en dos componentes, que son el *levantamiento* (provocada por la distribución de presiones) y la resistencia al avance (provocada principalmente por la distribución de esfuerzos cortantes a bajos ángulos de ataque y por la distribución de presiones para ángulos de ataque elevados). El levantamiento actúa en forma perpendicular al viento relativo. La resistencia al avance es la fuerza paralela al viento relativo que se opone al movimiento de un perfil en un flujo.

Muchos factores contribuyen al levantamiento total generado por un perfil. El incremento de velocidad causa un aumento de sustentación debido a la diferencia de presiones entre el extradós y el intrados. La sustentación se incrementa con el cuadrado de la velocidad. Normalmente, un aumento de la sustentación generará un aumento del arrastre. Por lo tanto, cuando se diseña un perfil se toman en cuenta todos estos factores y se diseña para que tenga el mejor desempeño en el rango de velocidades en el que se vaya a operar.

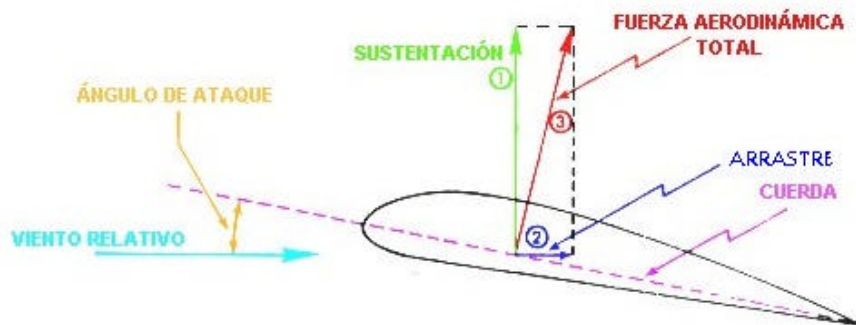


Figura 1.3.5 Fuerzas actuantes sobre un plano aerodinámico [3]

CAPÍTULO 2

CAPÍTULO 2



CAPITULO 2 TIPOS DE DISEÑO DE PERFILES

2.1 Reseña histórica del diseño de perfiles aerodinámicos

Desde sus inicios, el Comité Asesor Nacional para la Aeronáutica (NACA) reconoció la importancia de los perfiles aerodinámicos como una piedra angular de la investigación aeronáutica y su desarrollo. En su primer Informe Anual al Congreso de los Estados Unidos, la NACA tuvo la necesidad de la evolución de perfiles más eficientes de forma práctica, incluyendo dimensiones apropiadas para una estructura económica con una variación moderada del centro de presión y ofreciendo un gran rango de ángulos de ataque combinado con un desempeño eficiente. Hacia 1920, el Comité había publicado un compendio de resultados experimentales de varias fuentes. Brevemente después de esto, el desarrollo de perfiles por la NACA fue iniciado en el Laboratorio Aeronáutico Conmemorativo Langley. La primera serie de perfiles, designada "secciones M" por Max M. Munk, fue probada en el túnel Langley de densidad variable. Esta serie era significativa porque representó un acercamiento sistemático al desarrollo del perfil contrariamente a la que se hacía antiguamente, de forma aleatoria, las aproximaciones eran de prueba y error. Esta aproximación empírica, la cual involucró modificación de la geometría de un perfil existente, culminó en el desarrollo de las series de perfiles de cuatro y cinco dígitos a mediados de los 30's [7].

Concurrentemente, Eastman N. Jacobs (cf. [28] y [29]) empezó a trabajar en perfiles de flujo laminar. Inspirado por las discusiones con B. Melvill Jones y G. I. Taylor en Inglaterra, Jacobs invirtió el método de análisis de perfiles de Theodore Theodorsen (cf. [20]) para determinar la forma del perfil que produciría la distribución de presión que él deseaba (decreciendo la presión con la distancia del borde de ataque sobre la porción delantera del perfil), esta distribución de presión, se creía, mantendría el flujo laminar [7].

Así, la idea básica detrás del diseño de perfiles moderno fue concebida: las características de la capa límite deseadas son el resultado de la distribución de presión que es función de la forma del perfil. El método

inverso transforma matemáticamente la distribución de presión en una forma de perfil considerando que el diseñador intuitivamente o empíricamente transforma las características de la capa límite en la distribución de presión [7].

El resultado de las series de perfiles 2 a 7, la más notable de las cuales son las series 6, fueron probadas en el Túnel Langley de Baja Turbulencia y en el Túnel de Presión Langley de Baja Turbulencia (LTPT) a finales de los 30's e inicios de los 40's. Para concentrarse en la aerodinámica de gran velocidad, la NACA dejó a un lado el diseño de bs perfiles aerodinámicos en los 50's, dejando al mundo con un gran número de perfiles diseñados sistemáticamente y experimentalmente probados. Las series de cuatro y cinco dígitos, perfiles de flujo turbulento produjeron relativamente altos coeficientes de sustentación máxima aunque sus coeficientes de arrastre no fueron particularmente bajos, la serie 6 (perfiles de flujo laminar) ofrecieron la posibilidad de bajos coeficientes de arrastre aunque sus coeficientes de sustentación máxima no fueron especialmente altos [7].

La escena del perfil cambió entonces a Alemania dónde F. X. Wortmann y Richard Eppler estaban comprometidos en el diseño de perfiles de flujo laminar. Wortmann empleó los métodos de singularidad y de capa límite integral para desarrollar un catálogo de perfiles pensado principalmente para los aviones de vela (planeadores). Los métodos teóricos que él usó eran relativamente malos, sin embargo, la evaluación final de los perfiles fue realizada en un túnel de viento de baja turbulencia. Eppler, por otro lado, siguió el desarrollo de métodos teóricos más precisos [7].

El sucesor a la NACA, la National Advisory Space Administration (NASA), volvió a entrar al campo de los perfiles en los 60's con el diseño de perfiles supercríticos por Richard T. Whitcomb. Las lecciones aprendidas durante el desarrollo de estos perfiles transónicos fue transferido al diseño de una serie de perfiles de flujo turbulento para aeronaves de baja velocidad. El objetivo básico de esta serie de perfiles era lograr coeficientes de sustentación máxima más elevados que los antiguos perfiles NACA. Mientras estos perfiles de flujo turbulento de la NASA lograron coeficientes de sustentación máxima más elevados, los coeficientes de arrastre en crucero no fueron tan bajos como los

de aquéllos perfiles de las series de cuatro y cinco dígitos NACA. El énfasis por consiguiente fue cambiado hacia perfiles de flujo laminar natural (NLF) en un esfuerzo por combinar características de bajo arrastre de la serie de perfiles 6 de la NACA con las características de alta sustentación de los perfiles de baja velocidad de la NASA. En este contexto, el término “Perfil de flujo laminar natural” se refiere a un perfil que puede lograr magnitudes significantes de flujo laminar (≈ 30 por ciento de cuerda) en ambas superficies, extradós e intrados, simultáneamente, solamente a través de gradientes de presión favorables (ninguna succión de capa límite o enfriamiento) [7].

El surgimiento de estructuras compuestas también ha alimentado el resurgimiento en la investigación de NLF. Esta técnica de construcción permite a los perfiles NLF lograr en la práctica, las características de baja resistencia al avance medidas en los túneles de viento de baja turbulencia. Hoy, los perfiles están siendo diseñados para un amplio rango de aplicaciones en la vida. Los ejemplos incluyen vehículos aéreos sin tripular, ventiladores de torres de enfriamiento, aviones de vela, turbinas de viento, helicópteros, aviación general, regionales y aviones de transporte [7].

El uso de catálogos ha sido exitoso, sin embargo, cuando las aplicaciones se han diversificado, los perfiles más viejos y las características medidas se han vuelto menos apropiadas. Hoy, con un rango de aplicaciones desde ventiladores hasta aeronaves de transporte, el uso de perfiles diseñados para aeronaves que tienen números de Reynolds de 3 a 9×10^6 , bajos números de Mach, y coeficientes de sustentación relativamente bajos son inaceptables. Para algunas aplicaciones, el uso de tales perfiles (serie NACA) es particularmente inadecuado porque los requerimientos de diseño para estos perfiles de aeronave de baja velocidad son significativamente diferentes de los otros perfiles para las otras aplicaciones, las turbinas de viento son un buen ejemplo [7].

Los catálogos también padecen de una falta de cobertura. Cada aplicación requiere un rendimiento específico del perfil. Si este rendimiento cae dentro del alcance de las características contenidas en un catálogo, el perfil puede ser seleccionado de ese catálogo para la aplicación en particular. Sin embargo,

muy probablemente, este perfil no funcionara del todo bien porque sus características no empatan exactamente con la aplicación. Una ventaja relacionada del método de diseño de perfiles teórico es que permite que muchos conceptos diferentes sean analizados económicamente al mismo tiempo. Tales conceptos son en general poco prácticos en los túneles de viento debido al tiempo y las restricciones de dinero. Por lo tanto, la necesidad para un método de diseño de perfiles abarca tres grupos diferentes del diseño de perfiles: primero, para el diseño de perfiles que quedan fuera del alcance de la aplicabilidad de los catálogos existentes; segundo, para el diseño de perfiles que más exactamente se ajusten a los requisitos de la aplicación prevista; y en tercer lugar, para la exploración económica de muchos conceptos de perfiles [7].

En 1975, el personal de la NASA empezó a trabajar con el diseño de perfiles de Eppler y el código de análisis. Somers expresa que este código contiene un método de trazado conformal para el diseño de perfiles con las características de distribución de velocidad prescritas, un método de paneles para el análisis del flujo potencial sobre los perfiles dados, y un método integral de capa límite [7], [21]. Con este código, se pueden diseñar perfiles con las características de capa límite prescritas y se pueden analizar perfiles con formas prescritas. En todos los otros métodos inversos, la distribución de velocidad (presión) es especificada a un ángulo de ataque y la forma del perfil causará que esa distribución de velocidad (presión) sea calculada. Por lo tanto, el perfil se diseña en un solo punto. Todas las otras condiciones son consideradas "fuera de diseño" y deben ser tomadas en cuenta y analizadas después para determinar la aceptabilidad [7]. (cf. [14], [15]).

El método de trazado conformal en el código Eppler es único porque permite que la distribución de velocidad sea especificada a lo largo de diferentes segmentos del perfil a diferentes ángulos de ataque. Esta es una capacidad extremadamente potente porque permite que las características importantes de muchas distribuciones de velocidad sean incluidas en el diseño del perfil desde el principio. Por lo tanto, el perfil es diseñado en algunos puntos simultáneamente y las condiciones "fuera de diseño" pueden ser tomadas en

cuenta en la especificación inicial. El código utiliza un método integral esencial para la predicción del desarrollo de la capa límite para cada distribución de velocidad. El método puede predecir capas límite laminar y turbulenta, la transición y la separación, tanto para flujo laminar como para flujo turbulento. La resistencia al avance debido a la separación laminar de burbujas también se puede predecir. El método es semi-empírico y contiene una iteración del desplazamiento de capa límite [7]. (cf. [14], [15]).

Una característica importante del código de Eppler es la conexión entre el método de capa límite y el método de trazado conformal. Esta conexión permite que las características de capa límite sean controladas directamente durante el proceso de diseño del perfil. Esto es una capacidad particularmente importante para el diseño de perfiles de flujo laminar y representa un paso adelante muy importante comparado con el procedimiento usado para diseñar los perfiles de flujo laminar de la NACA. Ahora, en lugar de transformar las características de capa límite en una distribución de velocidad intuitivamente o empíricamente, el diseñador puede determinar las modificaciones directamente a la distribución de velocidad que producirá el desarrollo de capa límite deseado a cualquier ángulo de ataque en particular. Richard Eppler, a través de su código de computadora, ha desarrollado una conexión mucho más directa entre el desarrollo de capa límite y la distribución de presión. El rango de aplicabilidad del método ha sido establecido. Inicialmente se investigó, el tradicional, rango de número de Reynolds de baja velocidad de 3 a 9×10^6 . Inicialmente, se investigó, números de Reynolds más altos ($\approx 20 \times 10^6$) y números de Mach (≈ 0.7). Más recientemente se ha investigado los números de Reynolds más bajos ($\approx 0.5 \times 10^6$) (cf. [16]). Las más recientes indicaciones señalan que el método es también aplicable en números de Reynolds más bajos ($\approx 0.1 \times 10^6$) (cf. [12]). El método ha sido mejorado regularmente en respuesta a los defectos revelados durante estas investigaciones experimentales [7].

2.2 Métodos de Diseño de Perfiles Aerodinámicos

Jepson [22] expresa que los métodos diseño de perfiles se pueden clasificar ampliamente en dos tipos: diseño directo e inverso. El proceso del diseño del

perfil viene de un conocimiento de las propiedades de la capa límite y de la relación entre la geometría y la distribución de presiones [7].

Una aproximación para el diseño de perfiles es usar un perfil que ya fue diseñado por alguien. Este método es llamado “optimización de perfiles” y trabaja bien cuando los objetivos de un problema de diseño particular suelen coincidir con los objetivos del diseño del perfil original. En estos casos, los perfiles deben ser elegidos de catálogos tales como son: “Teoría de Secciones de Ala” de Abbott y Von Doenhoff [cf. 4 y 5], “Profilkatalog Stuttgarter” de Althaus y Wortmann, “Catalogo de perfiles para bajo numero de Reynolds” de Althaus o de “Perfiles a bajas velocidades” de Selig. La ventaja a esta aproximación es que hay disponibilidad de los datos de las pruebas. Sin embargo, las herramientas disponibles ahora son lo suficientemente refinadas que se puede asegurar que el rendimiento predicho se puede obtener [7].

2.2.1 Diseño Directo

Filippone [8] señala que los métodos directos para el diseño de perfiles incluyen la especificación de la geometría de la sección, el cálculo de presiones y rendimiento. Se evalúa la forma dada y entonces se modifica la forma para mejorar el rendimiento mediante la optimización. Los rendimientos aerodinámicos pueden ser controlados directamente usando métodos de optimización, generalmente basada en la evaluación de algunos gradientes. La optimización apunta a la minimización de una función objetivo característica de los rendimientos del perfil. Anderson describe el diseño directo, donde la forma del perfil es dada y la distribución de presiones de la superficie se calcula, mediante la teoría de perfil delgado y los métodos de panel numéricos [1]. Csanady [23] define el diseño directo como sigue, dada una forma de los álabes en una cascada, se debe encontrar la distribución de presiones para una tasa de flujo específica y la dirección de flujo a la entrada. Jepson [22] describe que en el método directo, la forma del perfil se usa como punto inicial para el ciclo de diseño. Los resultados aerodinámicos se calculan como una salida del diseño. Sucesivamente ajustando la forma, la aproximación del diseño trabaja hacia la obtención de un perfil que resulta en el rendimiento deseado. La figura 2.2.1 presenta una representación esquemática del proceso

del diseño directo, en el cual la forma del perfil es usada para calcular las distribuciones de velocidad, características de capa límite, la posición de la transición laminar a turbulenta y finalmente la polar de arrastre.

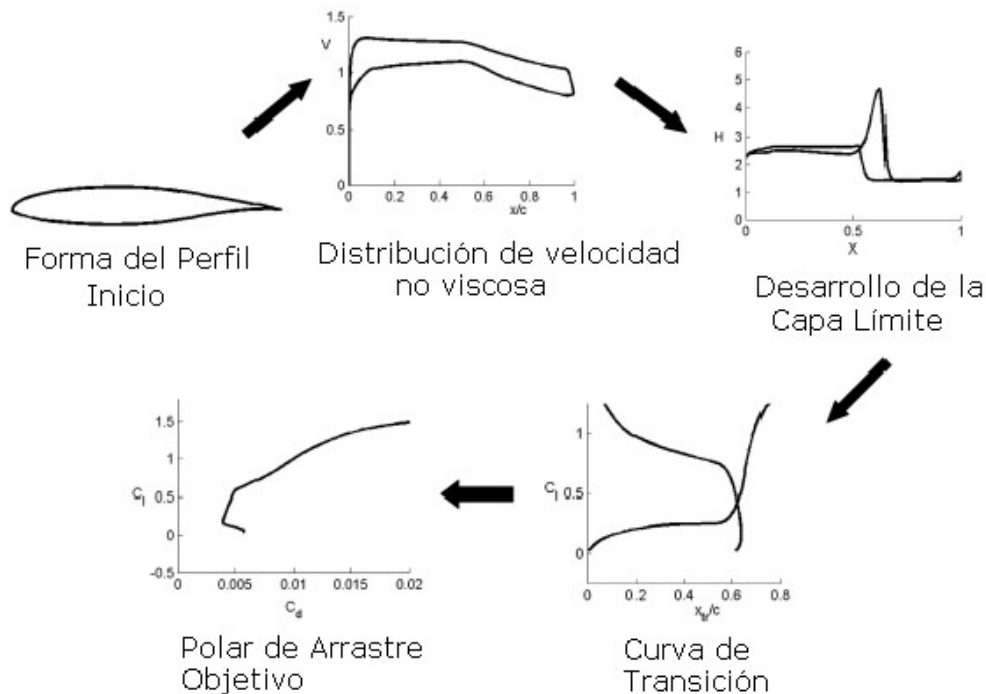


Figura 2.2.1 Diagrama de Flujo del Diseño Directo [22]

2.2.2 Diseño Inverso

Fillipone define el diseño inverso como la determinación de la forma del perfil correspondiente a una distribución de presiones de superficie especificada bajo condiciones de flujo [8]. Anderson describe que es deseable especificar la distribución de presiones de superficie, una presión que logre el rendimiento del perfil mejorado, y calcular la forma del perfil que producirá la distribución de presiones especificada, esta aproximación es llamada diseño inverso [1]. Csanady define el diseño inverso como sigue, a ciertas condiciones preescritas de flujo, para una distribución de presiones preescrita a lo largo de la superficie del álabe (especificada, por ejemplo, de tal manera de evitar la separación de la capa límite, cavitación local, o velocidades aproximadas a la velocidad sónica) se debe encontrar la forma del álabe [23]. Jepson describe que el objetivo de un método de diseño de perfiles inverso es determinar la forma de un perfil que satisfaga especificaciones geométricas y aerodinámicas. Los

primeros métodos permitían la prescripción de la distribución de velocidad no viscosa a un solo ángulo de ataque. La motivación de estos métodos fue tomar ventaja de las relaciones entre la distribución de velocidad y otras propiedades aerodinámicas tales como sustentación, arrastre y momento de cabeceo. Estas relaciones resultan del hecho que la velocidad es una medición de la presión de superficie. Los gradientes de velocidad sobre el perfil también se determinan del desarrollo de la capa límite. Del desarrollo de capa límite también se puede calcular la resistencia al avance. Por lo tanto, el rendimiento total del perfil puede ser indirectamente controlado especificando la distribución de velocidad. Subsecuentemente, para permitir un mayor control sobre el rendimiento final del perfil, los métodos de diseño de perfil inversos fueron desarrollados y permitieron especificaciones en el desarrollo de capa límite. En estos métodos primero se usa un método de capa límite inverso para determinar la distribución de velocidad, después esta distribución de velocidades es usada para determinar la forma del perfil [22]. Zingg señala una descripción, la aplicación y las desventajas del método inverso [9]. Dahl da una descripción del método [10]. Liebeck describe el método inverso al igual que las referencias anteriores [11]. La figura 2.2.2 muestra la representación esquemática del diseño inverso.

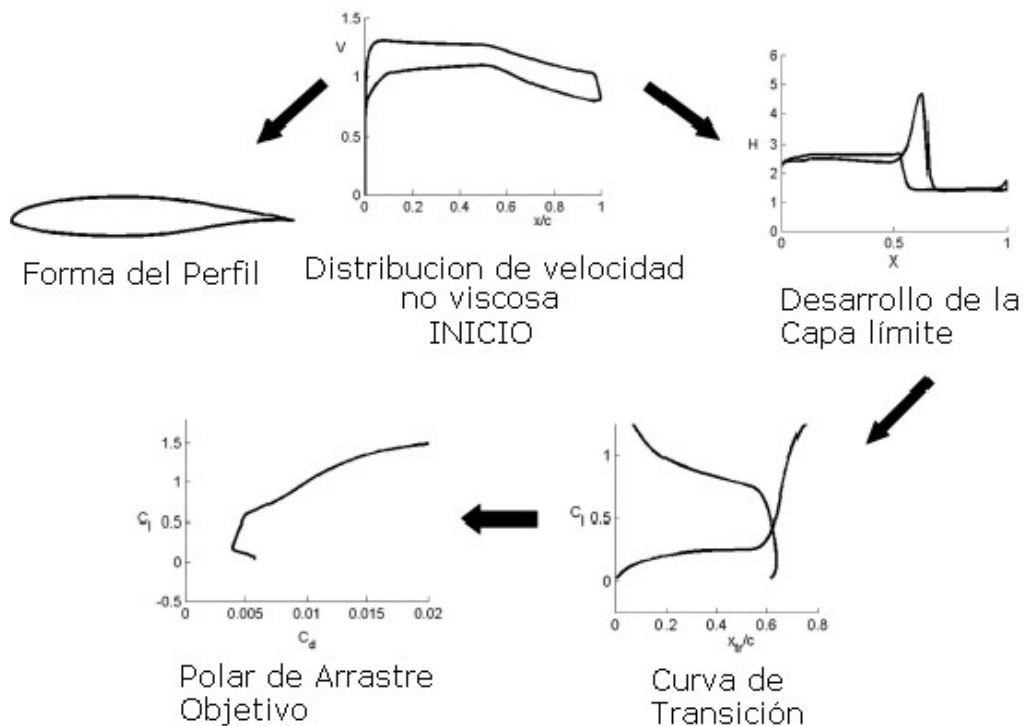


Figura 2.2.2 Diagrama de Flujo del Diseño Inverso [22]

En general, el diseñador especifica una función objetiva que comúnmente es la distribución de presión. Es a veces posible especificar una distribución C_p deseada y usar la diferencia de mínimos cuadrados entre los verdaderos C_p 's y los designados como el objetivo. Esto es la idea básica detrás de una variedad de métodos para el diseño inverso. El diseño inverso requiere que el diseñador especifique una distribución de presiones que producirá el rendimiento deseado, la forma que produce esta distribución de presiones se calcula usando un método inverso. La segunda parte del problema de diseño empieza cuando uno ha definido de algún modo un objetivo para el diseño del perfil. Esta etapa del diseño involucra cambiar la forma del perfil para mejorar el rendimiento. Esto puede ser hecho en algunas formas:

1. Usando conocimientos de los efectos de los cambios de geometría sobre el C_p y los cambios del C_p sobre el rendimiento.
2. Por la optimización numérica, usando funciones de forma para representar la geometría del perfil y dejando que la computadora, mediante un algoritmo previamente programado, realice la secuencia de modificaciones que se necesitan para la mejora del diseño.

2.3 Tipos de diseño de perfiles aerodinámicos

El objetivo de un diseño de perfil es variado. Algunos perfiles son diseñados para producir bajo arrastre (y pueden no ser diseñados para generar sustentación del todo). Algunos perfiles pueden necesitar producir un bajo arrastre mientras producen una cantidad dada de sustentación. En algunos casos, el arrastre realmente no importa, sino el máximo levantamiento es lo que realmente importa. El perfil debe ser diseñado para lograr este rendimiento con una limitación: en el espesor, o en el momento de cabeceo, o en el rendimiento fuera del diseño, o en algunas otras limitaciones inusuales. Sin considerar los objetivos de diseño y las restricciones, uno se enfrenta con algunos problemas muy comunes que hacen difícil el diseño de perfiles.

2.3.1 Diseño de perfiles con espesor máximo

La dificultad con los perfiles con espesor es que la presión mínima es reducida debido al espesor. Esto resulta en un gradiente de presión adversa más severa y la necesidad de iniciar la recuperación prontamente. Si el punto de máximo espesor se especifica, la sección con el espesor máximo debe recuperarse de un punto en particular con el gradiente más inclinado posible. La sección más gruesa posible tiene una capa límite justo sobre el borde de separación durante toda la recuperación. Somers diseña y analiza una familia de perfiles gruesos, los S822 y los S823, para turbinas de viento de eje horizontal de 3 a 10 metros con pérdida regulada, los objetivos principales son obtener la máxima sustentación y un bajo arrastre, todo bajo las restricciones de momento de cabeceo y espesor del perfil [25].

2.3.2 Diseño de perfiles con sustentación máxima

Para producir coeficientes de sustentación elevados, se requieren presiones demasiado negativas sobre la superficie superior del perfil. El límite para esta succión puede ser relacionado con los efectos de compresibilidad, o puede ser impuesto por el requisito de que la capa límite sea capaz de retrasarse en su gradiente de presión adversa. Selig y Guglielmo presentan una nueva filosofía de diseño de perfiles con sustentación máxima validada experimentalmente en pruebas de túnel de viento. La clave de esta filosofía es usar una presión de recuperación cóncava con carga trasera. Se utilizaron tres códigos de diseño y análisis (PROFOIL, el código Eppler e ISES) para diseñar el perfil de sustentación máxima S1223 para un número de Reynolds de 2×10^5 . El perfil demuestra ganancias dramáticas en el $c_{l_{max}}$ sobre otros perfiles previamente usados [26]. cf. [11], [12].

2.3.3 Diseño de perfiles Laminares

El flujo laminar puede ser útil para reducir el arrastre por fricción, incrementando la máxima sustentación y reduciendo la transferencia de calor. Se puede lograr fácilmente a bajos números de Reynolds manteniendo una superficie delgada y usando un perfil con un gradiente de presión favorable.

Bradford E. Green et al. desarrollan un método de diseño iterativo en el cual un perfil se puede diseñar con una cantidad substancial de flujo laminar, mientras se mantienen otras restricciones geométricas y aerodinámicas. Las reducciones de arrastre se realizan usando el método de diseño sobre un rango de números de Mach, números de Reynolds y espesores de perfil [13]. Jepson desarrolla una aproximación para la cual una curva deseada de transición de capa límite puede ser especificada como una entrada en el diseño inverso, también presenta una aproximación para incorporar consideraciones de diseño de la aeronave en el proceso de diseño inverso [22]. Somers diseña y analiza teóricamente una familia de perfiles de flujo laminar natural (NLF) para ventiladores de torres de enfriamiento. Los objetivos de una elevada sustentación y un bajo arrastre fueron alcanzados [24]. Somers diseña y analiza teóricamente el perfil S829 de flujo laminar natural (NLF) de 16% de espesor para la región de punta de una turbina de viento de eje horizontal de 20 a 40 metros de diámetro con pérdida regulada. Los objetivos principales son la máxima sustentación y bajo arrastre, bajo las restricciones de momento de cabeceo y el espesor del perfil, además de que el perfil debe tener una pérdida dócil [27].

2.3.4 Diseño de perfiles Transónicos

Fillipone señala que a velocidades más altas se tienen los perfiles en el rango transónico, aquí se desea diseñar perfiles supercríticos y la optimización de los perfiles básicos para mover la onda de choque dondequiera que ocurra (minimización de la resistencia al avance) [7]. Se desea limitar las pérdidas por resistencia aerodinámica de la onda de choque a una velocidad transónica. El problema de diseño transónico es crear una sección de perfil con elevado levantamiento y/o espesor sin causar fuertes ondas de choque. Una regla general es que los números de Mach locales máximos no deben exceder aproximadamente de 1.2 a 1.3 sobre un perfil supercrítico bien diseñado. Fillipone indica que este tipo de diseño ha sido tratado por Volpe y Melnik (cf. [18]). Volpe y Melnik señalan que la solución exacta de Lighthill del problema de determinar la forma del perfil que corresponde a una distribución prescrita en un flujo incompresible demuestra que la distribución de presiones de

superficie y la velocidad de corriente libre no pueden ser preescritas independientemente, ellos presentan un nuevo método que no viola la restricción antes señalada para resolver el problema inverso a velocidades transónicas [17]. Volpe y Melnik fueron entre los primeros en probar que el diseño inverso transónico estaba mal propuesto y lo dirigieron hacia el papel de las restricciones [7].

2.3.5 Diseño de perfiles para bajos números de Reynolds

Los métodos de diseño a un bajo número de Reynolds deben ser capaces de tomar en cuenta los fuertes efectos viscosos que llevan a la separación de burbujas laminares, extensos efectos de capa límite, transición a la turbulencia, histéresis en los coeficientes de fuerza, comportamiento no lineal. Filippone expresa que el rango de números de Reynolds es aproximadamente 50,000 a 500,000 (números de Reynolds más bajos todavía no son investigados) [8]. Los números de Reynolds bajos hacen el problema del diseño de perfiles difícil porque la capa límite es mucho menos capaz de manejar un gradiente de presión adversa sin la separación. Por lo tanto, los diseños para bajo número de Reynolds no tienen gradientes de presión severas y la capacidad de sustentación máxima está restringida. Los diseños de perfiles para bajos números de Reynolds son abominables con el problema de demasiado flujo laminar. Es a veces difícil garantizar que la capa límite sea turbulenta sobre las regiones de recuperación de presión más pronunciadas. Las burbujas de separación laminar son comunes y a menos de que sean estabilizadas, pueden resultar en un excesivo arrastre y en un bajo coeficiente de sustentación. A bajos números de Reynolds, la mayoría o todas las capas límite son laminares. Bajo tales condiciones la capa límite puede manejar solamente la recuperación de presión gradual. Los métodos de diseño para velocidades intermedias (Números de Reynolds entre 500,000 y algunos millones) tienen las mismas características de los métodos que trabajan con rangos de velocidades bajas, la separación de burbujas laminar se puede omitir, el flujo puede ser completamente turbulento (dependiendo de la turbulencia de la corriente libre, condiciones de superficie, etc.) [7]. Wayman demuestra la creación de una

familia de perfiles con un bajo número de Reynolds, se crearon seis perfiles y el análisis indica un buen rendimiento de las secciones a $Re = 500000$ [16].

2.3.6 Diseño de perfiles multipuntual

El diseño de perfiles multipuntuales¹ incluye efectos no lineales de un elemento sobre los otros elementos [7]. Una de las dificultades en el diseño de un buen perfil es el requisito para el rendimiento aceptable fuera de diseño. Mientras que un perfil con un bajo arrastre no es demasiado difícil de diseñar, podría separarse en ángulos de ataque ligeramente altos de su punto de diseño. Los perfiles con la capacidad de una elevada sustentación pueden funcionar muy poco a bajos ángulos de ataque. Se puede acercar al diseño de perfiles con puntos de diseño múltiples en una manera bien definida. A menudo está claro que la superficie superior será crítica en uno de los puntos y podemos diseñar la superficie superior en esta condición. El intrados puede ser diseñada para hacer que la sección actúe apropiadamente en el segundo punto. Las restricciones están afectadas por la geometría de borde de salida del perfil. Cuando tal compromiso no es posible, la configuración de geometría variable puede ser empleada (algo costosa) como en los sistemas de hipersustentación. En este tipo de diseño Selig resuelve el problema usando un método de Newton-Raphson mediante la especificación de las distribuciones de velocidad a lo largo de los segmentos, para un ángulo de ataque dado, usando un trazado conformal y tres restricciones integrales [19]. Selig y Gopalarathnam presentan un método inverso multipuntual para el diseño de perfiles con múltiples elementos con una distribución de velocidad deseada en flujo potencial incompresible. El método usa un código inverso, multipuntual y de perfil aislado para generar cada elemento del perfil con múltiples elementos y un método de panel bidimensional para analizar el perfil con múltiples elementos. Mediante una iteración de Newton, las variables asociadas con el

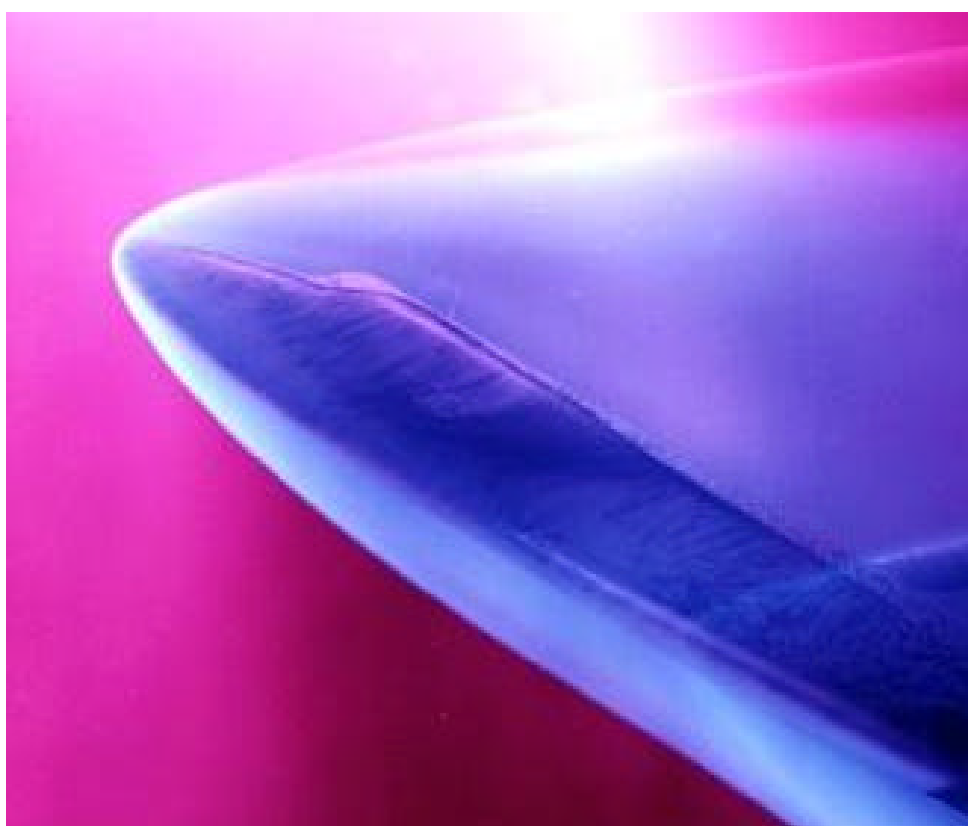
¹ El termino en ingles es multi-point, y se refiere a que en este tipo de diseño se proponen segmentos de diferentes distribuciones de velocidad, y se diseña el perfil para esos tipos de distribuciones propuestos, en conclusión el perfil es apto para funcionar a diferentes regimenes de velocidad y por ende a diferentes ángulos de ataque, por esa razón es que el termino se entiende de esa manera.

diseño de elementos aislados son ajustadas para lograr las distribuciones de velocidad multielementales² deseadas [26].

² El término en inglés es multi-element, y se refiere a la distribución de velocidad compuesta por diferentes segmentos de diferentes distribuciones de velocidad.

CAPÍTULO 3

CAPÍTULO 3



CAPITULO 3. MODELO MATEMATICO PARA EL DISEÑO DE PERFILES AERODINÁMICOS

3.1 Planteamiento del problema

La teoría de perfiles es de vital importancia en la aeronáutica. Este logro es el resultado de persistentes y extensivas pruebas realizadas por un gran número de instituciones e investigadores, además del hecho de que los factores importantes para el diseño ya se conocen. Sin el conocimiento de la teoría del flujo de aire alrededor de perfiles (aerodinámica) sería casi imposible interpretar inteligentemente los resultados del trabajo experimental o hacer otras mejoras a la teoría. Una ciencia solo puede desarrollarse sobre una base completamente experimental durante un cierto tiempo. La teoría es un proceso de arreglos y simplificaciones de hechos conocidos. Mientras los hechos sean pocos, la teoría no es necesaria pero cuando estos se vuelven muchos y complejos, la teoría es necesaria. Aunque el experimento por si mismo requiere un poco de esfuerzo, es, sin embargo, a menudo extremadamente difícil de analizar los resultados, incluso de los experimentos más sencillos. Por lo tanto, allí existe, siempre una tendencia para producir más resultados que puedan ser resumidas por la teoría y aplicadas en la industria. Los diferentes tipos de perfiles exhiben propiedades totalmente diferentes, y es uno de los objetivos de la ciencia aerodinámica, detectar y definir de una manera precisa los factores que contribuyen al perfeccionamiento del perfil **[20]**.

El propósito de este capítulo es establecer la teoría para obtener la distribución de presiones de superficie (alrededor) de un perfil mediante la transformación conforme, dada una geometría se procederá a obtener la formulación que determinará la distribución de presiones de superficie.

3.2 Desarrollo teórico

3.2.1 Función de Corriente

En esta sección, se considera flujo estacionario bidimensional. De acuerdo a la ecuación diferencial para una línea de corriente en un flujo bidimensional, la cual es como sigue

$$vdx - udy = 0 \quad (3.2.1)$$

Si u y v son funciones conocidas de x y y , entonces la ecuación (3.2.1) se puede integrar para producir la ecuación algebraica para una línea de corriente:

$$f(x, y) = c \quad (3.2.2)$$

donde c es una constante de integración arbitraria, con diferentes valores para diferentes líneas de corriente. En la ecuación (3.2.2), la función de x y y se denota por el símbolo $\bar{\psi}$. De esa forma, la ecuación (3.2.2) se escribe como

$$\bar{\psi}(x, y) = c \quad (3.2.3)$$

La función $\bar{\psi}(x, y)$ es conocida como la *función de corriente*. De la ecuación (3.2.3) se nota que la ecuación para una línea de corriente esta determinada por *un conjunto de funciones de corriente iguales a una constante*, es decir, c_1, c_2, c_3 , etc. En la figura 3.2.1 se ilustran dos líneas de corriente diferentes; las líneas de corriente ab y cd están dadas respectivamente por $\bar{\psi}_1 = c_1$ y $\bar{\psi}_2 = c_2$.

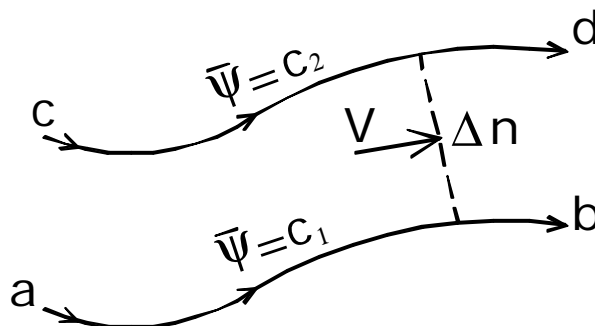


Figura 3.2.1. Diferentes líneas de corriente son determinadas por diferentes valores de la función de corriente.

Existe cierta arbitrariedad en las ecuaciones (3.2.2) y (3.2.3) debido a la constante de integración arbitraria c . La definición más precisa de la función de corriente que reduce esta arbitrariedad se refiere a la figura 3.2.1, definiendo el valor numérico de \bar{y} de manera que la *diferencia* $\Delta\bar{y}$ entre $\bar{y}_2 = c_2$ para la línea de corriente cd y $\bar{y}_1 = c_1$ para la línea de corriente ab es igual al flujo másico entre las dos líneas de corriente. Debido a que la figura 3.2.1 es un flujo bidimensional, el flujo másico entre dos líneas de corriente se define por unidad de profundidad, es decir, perpendicular a la página. Esto es, en la figura 3.2.1, se considera el flujo másico dentro de un tubo de corriente limitado por las líneas de corriente ab y cd , con un área rectangular seccional igual a Δn veces una unidad de profundidad perpendicular a la página. Aquí, Δn es la distancia normal entre ab y cd , como se muestra en la figura 3.2.1. Aquí, el flujo másico entre líneas de corriente ab y cd por unidad de profundidad perpendicular a la página es

$$\Delta\bar{y} = c_2 - c_1 \quad (3.2.4)$$

La definición anterior no remueve completamente la arbitrariedad de la constante de integración en las ecuaciones (3.2.2) y (3.2.3), sin embargo hace las cosas un poco más precisas. Por ejemplo, considerar un campo de flujo bidimensional dado. Elegir una línea de corriente del flujo, y darle un valor arbitrario de la función de corriente, es decir, $\bar{y}_1 = c_1$. Entonces, el valor de la función de corriente para cualquier otra línea de corriente en el flujo, es decir, $\bar{y}_2 = c_2$, es fijo de acuerdo a la definición dada en la ecuación (3.2.4).

La equivalencia entre $\bar{y}_1 = \text{constante}$ designada como línea de corriente, y $\Delta\bar{y}$ igualando el flujo másico (por unidad de profundidad) entre líneas de corriente, es natural. Para un flujo estable, el flujo másico dentro de un tubo de corriente dado es constante a lo largo del tubo; el flujo másico a lo largo de cualquier sección del tubo es la misma. Como por definición $\Delta\bar{y}$ es igual a este flujo másico, entonces $\Delta\bar{y}$ por si misma es constante para un tubo de corriente dado. En la figura 3.2.1, si $\bar{y}_1 = c_1$ designa la línea de corriente sobre el fondo del tubo de corriente, entonces $\bar{y}_2 = c_2 = c_1 + \Delta\bar{y}$ es también constante a lo

largo del lado superior del tubo de corriente. Como por definición de un tubo de corriente el límite superior de un tubo de corriente es una línea de corriente por si misma, entonces $\bar{y}_2 = c_2 = \text{constante}$, debe designar esta línea de corriente.

Aun falta desarrollar la propiedad más importante de la función de corriente, es decir, las derivadas de \bar{y} producen las velocidades del campo de flujo. Para obtener esta relación, se deben de considerar otra vez *ab* y *cd* en la figura 3.2.1. Se asume que estas líneas de corriente están demasiado juntas (i.e., se asume que Δn es pequeño), de manera que la velocidad de flujo V es un valor constante a lo largo de Δn . El flujo másico a través del tubo de corriente por unidad de profundidad perpendicular a la página es

$$\Delta\bar{y} = rV\Delta n(1)$$

o

$$\frac{\Delta\bar{y}}{\Delta n} = rV \quad (3.2.5)$$

Considerando el límite de la ecuación (3.2.5) cuando $\Delta n \rightarrow 0$:

$$rV = \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\Delta\bar{y}}{\Delta n} = \frac{\partial\bar{y}}{\partial n} \quad (3.2.6)$$

La ecuación (3.2.6) expresa que si se conoce \bar{y} , entonces se puede obtener el producto (rV) diferenciando \bar{y} en la dirección normal a V . Para obtener una forma practica de la ecuación (3.2.6) para coordenadas cartesianas, observar la figura 3.2.2. Se debe notar que la distancia normal dirigida Δn es equivalente primero, al movimiento hacia arriba en la dirección y por la cantidad Δy y después, a la izquierda en la dirección negativa x por la cantidad $-\Delta x$. Debido a la conservación de masa, el flujo másico a través de Δn (por unidad de profundidad) es igual a la suma de los flujos másicos a través de Δy y $-\Delta x$ (por unidad de profundidad):

$$\text{Flujo Másico} = \Delta\bar{y} = rV\Delta n = ru\Delta y + rv(-\Delta x) \quad (3.2.7)$$

Permitiendo que cd se aproxime a ab , en el límite la ecuación (3.2.7) se vuelve

$$d\bar{y} = rudy - rvdx \quad (3.2.8)$$

Sin embargo, como $\bar{y} = \bar{y}(x, y)$, la regla de la cadena del cálculo expresa que

$$d\bar{y} = \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} dx + \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} dy \quad (3.2.9)$$

Comparando las ecuaciones (3.2.8) y (3.2.9), se tiene

$$ru = \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} \quad (3.2.10a)$$

$$rv = -\frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \quad (3.2.10b)$$

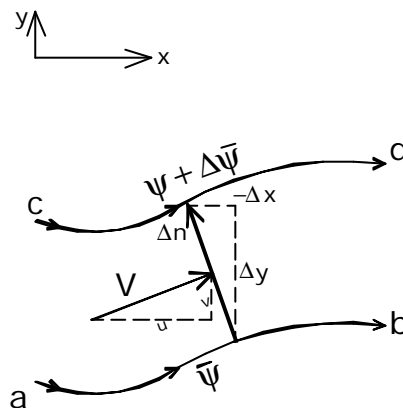


Figura 3.2.2. El flujo másico a través de Δn es la suma de los flujos másicos a través de Δy y $-\Delta x$.

Las ecuaciones (3.2.10a) y (3.2.10b) son importantes. Si $\bar{y}(x, y)$ es conocida para un campo de flujo dado, entonces en cualquier punto en el flujo los productos ru y rv se pueden obtener diferenciando \bar{y} en las direcciones normales a u y v respectivamente.

Se debe notar que las dimensiones de \bar{y} son iguales a flujo másico por unidad de profundidad perpendicular a la página. Esto es, en unidades del Sistema Internacional, \bar{y} está en términos de kilogramos por segundo por metro perpendicular a la página, o simplemente $kg/(s \cdot m)$.

La función de corriente \bar{y} definida anteriormente aplica para flujo compresible e incompresible. Ahora, si se considera el caso de flujo incompresible solamente, donde $r = \text{constante}$. La ecuación (3.2.6) se puede escribir como

$$V = \frac{\partial(\bar{y}/r)}{\partial n} \quad (3.2.11)$$

Si ahora se define una nueva función de corriente, para flujo incompresible solamente, como $y = \bar{y}/r$.

Entonces la ecuación (3.2.11) se vuelve

$$V = \frac{\partial y}{\partial n} \quad (3.2.12)$$

y las ecuaciones (3.2.10a) y (3.2.10b) se vuelven

$$u = \frac{\partial y}{\partial y} \quad (3.2.13a)$$

$$v = -\frac{\partial y}{\partial x} \quad (3.2.13b)$$

La función de corriente incompresible y tiene características análogas a su contraparte más general compresible \bar{y} . Por ejemplo, cuando $\bar{y}(x, y) = c$ es la ecuación de una línea de corriente, y como r es una constante para flujo incompresible, entonces $y(x, y) = \bar{y}/r = \text{constante}$, es también la ecuación para una línea de corriente (solamente para flujo incompresible). Además, debido a que $\Delta\bar{y}$ es el flujo másico entre dos líneas de corriente (por unidad de

profundidad perpendicular a la página), y como ρ es masa por unidad de volumen, entonces físicamente $\Delta\mathbf{y} = \Delta\bar{\mathbf{y}}/\rho$ representa el flujo volumétrico (por unidad de profundidad) entre dos líneas de corriente. En unidades del Sistema Internacional, $\Delta\mathbf{y}$ está expresado como metros cúbicos por segundo por metro perpendicular a la página, o simplemente m^2/s .

En resumen, el concepto de función de corriente es una poderosa herramienta en aerodinámica, por dos razones. Considerando que se conoce $\bar{\mathbf{y}}(x, y)$ o $[\mathbf{y}(x, y)]$ en un campo de flujo bidimensional, entonces:

1. $\bar{\mathbf{y}} = \text{constante}$ (o $\mathbf{y} = \text{constante}$) da la ecuación de una línea de corriente.
2. La velocidad del flujo se puede obtener derivando $\bar{\mathbf{y}}$ (o \mathbf{y}), cuando es dada por las ecuaciones (10a) y (10b) para flujo compresible y las ecuaciones (3.2.13a) y (3.2.13b) para flujo incompresible.

3.2.2 Potencial de Velocidad

Partiendo de que un flujo irrotacional está definido como un flujo donde las vorticidad es cero en cualquier punto. La ecuación para un flujo irrotacional es:

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{V} = 0 \quad (3.2.14)$$

Considerando la siguiente identidad vectorial: si f es una función escalar, entonces

$$\nabla \times (\nabla f) = 0 \quad (3.2.15)$$

es decir, el rotacional del gradiente de una función escalar es idéntico a cero. Comparando las ecuaciones (3.2.14) y (3.2.15), se demuestra que

$$\mathbf{V} = \nabla f \quad (3.2.16)$$

La ecuación (3.2.16) expresa que para un *flujo irrotacional*, existe una función escalar f tal que la velocidad es dada por el gradiente de f . Se denota f

como el *potencial de velocidad*. f es una función de las coordenadas espaciales; es decir, $f = f(x, y, z)$. De la definición de gradiente en coordenadas cartesianas, dado por la siguiente ecuación:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k \quad (3.2.17)$$

se tiene, de la ecuación (3.2.16)

$$ui + vj + wk = \frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j + \frac{\partial f}{\partial z}k \quad (3.2.18)$$

Los coeficientes de los vectores unitarios deben ser los mismos en ambos lados de la ecuación (3.2.18). Por lo tanto, en coordenadas cartesianas,

$$u = \frac{\partial f}{\partial x} \quad v = \frac{\partial f}{\partial y} \quad w = \frac{\partial f}{\partial z} \quad (3.2.19)$$

El potencial de velocidad es análogo a la función de corriente en el sentido de que las derivadas de f producen las velocidades del campo de flujo. Sin embargo, hay distintas diferencias entre f y \bar{y} (o y):

1. Las velocidades del campo de flujo se obtienen derivando f en la misma dirección que las velocidades, considerando que \bar{y} (o y) se deriva normal a la dirección de la velocidad.
2. El potencial de velocidad se define solamente para flujo irrotacional. En contraste, la función de corriente se puede usar en flujo rotacional e irrotacional.
3. El potencial de velocidad aplica a flujos tridimensionales, mientras que la función de corriente se define únicamente para flujos bidimensionales.

Cuando el campo de flujo es irrotacional, si se define un potencial de velocidad, existe una enorme simplificación. En lugar de tratar con las componentes de

velocidad (es decir, u , v y w) como desconocidas, aquí se requieren tres ecuaciones para estas tres incógnitas, se puede tratar con el potencial de velocidad como una incógnita, debido a esto se requiere la solución de una sola ecuación para el campo de flujo. Una vez que ψ se conoce para un problema dado, las velocidades se obtienen directamente de la ecuación (3.2.19). Esto es debido a que, en aerodinámica teórica, se hace una distinción entre flujos rotacionales e irrotacionales y debido a que el análisis de flujos irrotacionales es más simple que el de flujos rotacionales.

Debido a que los flujos irrotacionales se pueden describir mediante el potencial de velocidad f , tales flujos son llamados *flujos potenciales*.

3.2.3 Relación entre la función de corriente y el potencial de velocidad

Se puede ver que una línea constante f es una isolínea de f ; como f es el potencial de velocidad, se le da un nombre específico a esta isolínea, *línea equipotencial*. Además, si se dibuja una línea en el espacio de manera que ∇f sea tangente en cada punto se define como línea gradiente; sin embargo, como $V = \nabla f$, esta línea gradiente es una línea de corriente. A su vez, una línea de corriente es una línea constante de $\bar{\psi}$ (para un flujo bidimensional). Debido a que las líneas gradiente y las isolíneas son perpendiculares, entonces las líneas equipotenciales ($f=\text{constante}$) y las líneas de corriente ($\bar{\psi} = \text{constante}$) son mutuamente perpendiculares.

Para ilustrar este resultado más claramente, considerar el flujo bidimensional, irrotacional e incompresible en coordenadas cartesianas. Para una línea de corriente, $\psi(x, y) = \text{constante}$. De esta forma, la diferencial de ψ a lo largo de una línea de corriente es cero; es decir,

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0 \quad (3.2.20)$$

De las ecuaciones (3.2.13a y 3.2.13b), la ecuación (3.2.20) se puede escribir como

$$d\mathbf{y} = -vdx + udy \quad (3.2.21)$$

Solucionando la ecuación (3.2.21) para dy/dx , la cual es la pendiente de $y =$ línea constante, es decir, la pendiente de la línea de corriente:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{y=\text{constante}} = \frac{v}{u} \quad (3.2.23)$$

De forma similar, para una línea equipotencial, $f(x, y) = \text{constante}$. A lo largo de esta línea,

$$d\mathbf{f} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} dy = 0 \quad (3.2.24)$$

de la ecuación (3.2.19), la ecuación (3.2.24) se puede escribir como

$$d\mathbf{f} = udx + vdy \quad (3.2.25)$$

Solucionando la ecuación (3.2.25) para dy/dx , la cual es la pendiente de $f =$ línea constante, es decir, la pendiente de la línea equipotencial, se obtiene

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{f=\text{constante}} = -\frac{u}{v} \quad (3.2.26)$$

Combinando las ecuaciones (3.2.23) y (3.2.26), se tiene

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{y=\text{constante}} = -\frac{1}{(dy/dx)_{f=\text{constante}}} \quad (3.2.27)$$

La ecuación (3.2.27) muestra que la pendiente de una línea constante y es el recíproco negativo de la pendiente de una línea constante f , es decir, las líneas de corriente y las líneas equipotenciales son mutuamente perpendiculares.

3.2.4 Potencial Complejo y Velocidad Compleja

Existe una relación entre la función potencial y la función de corriente y además entre las componentes de la velocidad en flujo bidimensional. Denotando el potencial mediante Φ , la función de corriente Ψ y las componentes de velocidad mediante u y v , se tiene

$$\begin{aligned}\Phi &= \Phi(x, y), & \Psi &= \Psi(x, y) \\ u &= u(x, y), & v &= v(x, y).\end{aligned}$$

Las funciones Φ y Ψ se relacionan mediante las ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial x} &= u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}\end{aligned}$$

y ambas obedecen la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad \nabla^2 \Psi = 0$$

Las líneas equipotenciales descritas por $\Phi(x, y) = \text{constante}$, y las líneas de corriente descritas por $\Psi(x, y) = \text{constante}$, forman un conjunto de curvas ortogonales.

Las componentes de velocidad tienen propiedades similares, con lo que se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \quad (\text{condición de incompresibilidad})$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{condición de irrotacionalidad})$$

y

$$\nabla^2 u = 0, \quad \nabla^2 v = 0.$$

De la misma forma, las curvas $u(x, y) = \text{constante}$ y $v(x, y) = \text{constante}$, forman una red ortogonal.

De las ecuaciones anteriores se deduce que existe una interrelación entre la función potencial y la función de corriente, al igual que en las componentes u y v , y que además son exactamente las mismas que existen en las partes real e imaginaria de una función analítica. *Por lo tanto, se puede combinar naturalmente el potencial y la función de corriente en una función analítica de una variable compleja, e incluso afirmar que las partes real e imaginaria de alguna función analítica representa, respectivamente, la función potencial y la función de corriente de un cierto flujo potencial bidimensional.* Equivalentemente, las componentes u y v se pueden interpretar como las componentes real e imaginaria de una función analítica y viceversa.

En general es habitual combinar Φ y Ψ en una función analítica y llamarla el *potencial complejo*. Denotándolo mediante $F(z)$

$$F(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y) \quad (3.2.28)$$

Hablando en este contexto, el plano x, y se vuelve el plano de la variable compleja z . La derivada del potencial complejo está dada por

$$\begin{aligned} F'(z) &= \frac{dF}{dz} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Psi}{\partial x} \\ &= \frac{\partial \Psi}{\partial y} - i \frac{\partial \Phi}{\partial y} = u(x, y) - iv(x, y) \end{aligned} \quad (3.2.29)$$

La principal ventaja de usar el *potencial complejo* es que en la función analítica de variable compleja $F(z)$ están implícitas, la función potencial Φ y la función de corriente Ψ .

Cabe mencionar que en el presente trabajo se hacen notar las siguientes consideraciones, que se hacen de acuerdo a lo tratado en los puntos 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3 y 3.2.4:

1. *El flujo de fluido es bidimensional*, es decir, el modelo del flujo básico y las características del movimiento del fluido en un plano, son esencialmente las mismas en todo plano paralelo. Esto nos permite confinar nuestra atención no más que a un plano simple, por lo que los efectos lejanos se pueden despreciar razonablemente.

2. *El flujo es estable*, es decir, la velocidad del fluido en un punto, depende solamente de la posición (x, y) y no del tiempo.

3. *El fluido es incompresible*, es decir, la densidad, o masa por unidad de volumen del fluido, es constante.

4. *El fluido es no viscoso*, es decir, no tiene viscosidad o fricción interna. Un movimiento de un fluido viscoso tiende a adherirse a la superficie de un obstáculo colocado en su camino. Un fluido que es no viscoso e incompresible, se llama frecuentemente un fluido ideal. Se debe por supuesto observar que tal fluido es solamente un modelo matemático de un fluido real, en el cual seguramente, tales efectos, se supone, son insignificantes.

5. *Los componentes de la velocidad se derivan de un potencial*, o sea, si u y v denotan los componentes de la velocidad del fluido en (x, y) en las direcciones x y y positivas respectivamente, existe una función escalar Φ , que se llama potencial de velocidad.

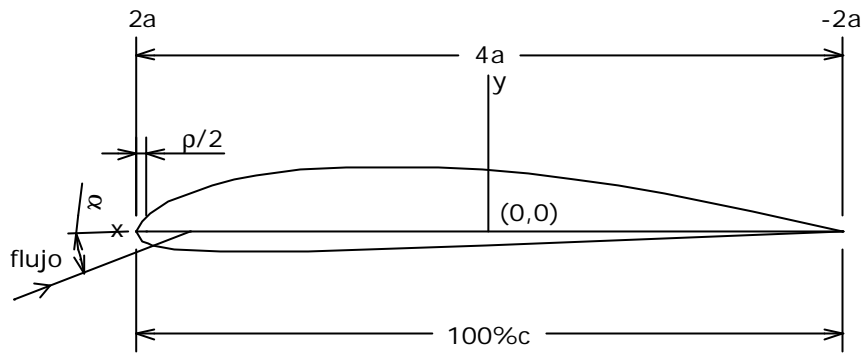


Figura 3.2.4. Sistema coordenado del Perfil

Se notará que a grandes distancias del origen $z' \rightarrow z$; es decir, ambos flujos son similares en el infinito. En particular, el "ángulo de ataque", definido como la dirección de flujo en el infinito con respecto a alguna línea de referencia fija en el cuerpo, es idéntico en ambos flujos. Cerca del origen los dos flujos son completamente diferentes; un valor de z' es relacionado con un valor en particular de z por la relación (3.2.30).

En un punto posterior, se determinara el flujo en el plano z' . Ahora se determinara la apariencia del perfil cuándo la curva casi circular B sea dada, o en su equivalencia, determinaremos la curva B cuando el perfil sea dado. En la figura 3.2.3, C es un círculo de radio unitario. Debido a que el tema de las dimensiones es algo importante, se evitará la confusión en lo que sigue, señalando a esta longitud como unitaria. La curva B es dada únicamente por la relación $z' = ae^{y+iq}$ donde y es una función real conocida o desconocida del ángulo q , donde q varía desde cero hasta 2π e i es la unidad imaginaria. Cuando la superficie del perfil corresponde a la superficie de la curva, lo anterior es dado de la relación (3.2.30) como

$$z = ae^{y+iq} + ae^{-y-iq}$$

o como

$$z = a(e^y + e^{-y})\cos q + ia(e^y - e^{-y})\sen q$$

Esta relación, además debe ser expresada convenientemente en funciones hiperbólicas

$$z = 2a \cosh y \cos q + 2i a \sinh y \sen q$$

Y como $z = x + iy$, las coordenadas del perfil (x, y) son dadas por

$$\begin{aligned} x &= 2a \cosh y \cos q \\ y &= 2a \sinh y \sen q \end{aligned} \tag{3.2.31}$$

Obteniendo una relación entre q y las coordenadas del perfil como sigue:

$$\begin{aligned} \cosh y &= \frac{x}{2a \cos q} \\ \sinh y &= \frac{y}{2a \sen q} \end{aligned}$$

y como $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$, se tiene que

$$\left(\frac{x}{2a \cos q} \right)^2 - \left(\frac{y}{2a \sen q} \right)^2 = 1$$

desarrollando queda

$$2 \sen^2 q = L + \sqrt{L^2 + \left(\frac{y}{a} \right)^2} \tag{3.2.32}$$

donde

$$L = 1 - \left(\frac{x}{2a} \right)^2 - \left(\frac{y}{2a} \right)^2$$

de manera similar se obtiene la relación entre y y las coordenadas del perfil usando la ecuación

$$\left(\frac{x}{2a \cosh y} \right)^2 + \left(\frac{y}{2a \sinh y} \right)^2 = 1$$

desarrollando queda

$$2\operatorname{senh}^2 y = -L + \sqrt{L^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2} \quad (3.2.33)$$

despejando a y tenemos

$$y = \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{-L + \sqrt{L^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2}}{2}} \right) \quad (3.2.34a)$$

Ahora se está en la postura de reproducir la representación conformal de un perfil en el plano z' , de manera que para cada punto del perfil (x, y) se han determinado q y Y .

Las curvas en donde $y = \text{constante}$, son elipses en el plano z

$$\left(\frac{x}{2a\operatorname{cosh}y}\right)^2 + \left(\frac{y}{2a\operatorname{senh}y}\right)^2 = 1$$

Los focos están ubicados a $(\pm 2a, 0)$. El radio de curvatura al final del eje mayor

$$\text{es } r = \frac{(2a\operatorname{senh}y)^2}{2a\operatorname{cosh}y}$$

$$\text{o } \frac{r}{2a} = \frac{(\operatorname{senh}y)^2}{\operatorname{cosh}y} \cong y^2$$

despejando a y , tenemos

$$y \cong \sqrt{\frac{r}{2a}} \quad (\text{para } y \text{ pequeños})$$

La relación es útil para la determinación de y cerca de la nariz y la cola.

El borde de ataque, correspondiente a $q = 0$, está localizado a

$$2a \cosh \cong y 2a \left(1 + \frac{y^2}{2} \right) = 2a + ay^2 = 2a + \frac{1}{2} r$$

Por lo tanto, se ve que la longitud $4a$ corresponde a la distancia entre el punto medio entre la nariz y el centro de la curvatura del borde de ataque al punto medio entre la cola y el centro de curvatura del borde de salida³.

Para establecer la magnitud de la velocidad en cualquier punto (x, y) sobre el perfil, se comienza en la manera acostumbrada con la velocidad alrededor de un círculo en flujo bidimensional. Sin embargo, contrario a la práctica acostumbrada haremos que el radio del círculo sea igual a ae^{y_0} , donde y_0 es una cantidad constante pequeña. Esta cantidad es demostrada después en este desarrollo (ecuación (e)), para representar el valor medio de y , tomado alrededor del círculo C .

La función potencial del flujo más allá de este círculo es

$$w = -V \left(z + \frac{a^2 e^{2y_0}}{z} \right) - \frac{i\Gamma}{2p} \log \frac{z}{ae^{y_0}} \quad (3.2.35)$$

y la velocidad⁴

$$\frac{dw}{dz} = -V \left(1 - \frac{a^2 e^{2y_0}}{z^2} \right) - \frac{i\Gamma}{2pz} \quad (3.2.36)$$

donde Γ es la circulación. Esta expresión debe desaparecer en el punto de estancamiento trasero (condición de Kutta) cuya coordenada es $z = -ae^{y_0+i(a+\epsilon_T)}$, donde a es el ángulo de ataque y ϵ_T es el ángulo de cero levantamiento.

Obteniendo

$$\Gamma = -\frac{2pz}{i} V \left(1 - \frac{a^2 e^{2y_0}}{z^2} \right)$$

³ La elección de los ejes es completamente arbitraria. Es un tema de conveniencia solamente para escoger que los ejes de manera que el perfil sea casi elíptico tanto como sea posible, de este modo haciendo a la curva B "casi circular", tan circular como sea posible así por medio de la simple transformación 3.2.30. Será visto que la evaluación de la integral importante que aparece en el apéndice es entonces más fácilmente resuelta. De hecho, la transformación 3.2.30 así misma es solamente un tema de conveniencia para permitir la evaluación de esta integral.

⁴ $\frac{dw}{dz}$ en realidad iguala $u-iv$, la imagen del vector velocidad cerca del eje x .

$$\Gamma = 4pVae^{y_0} \left(\frac{e^{i(a+e_T)} - e^{-i(a+e_T)}}{2i} \right)$$

$$\Gamma = 4pVae^{y_0} \text{sen}(a + e_T) \quad (3.2.37)$$

Este flujo alrededor del círculo ahora debe ser transformado en el flujo alrededor de cualquier otro cuerpo. En el caso particular en el cual el flujo en el infinito no es alterado, la circulación no será modificada y la fuerza experimentada por un cuerpo en el origen permanecerá en el valor fijo $L = rV\Gamma$.

Ahora, se debe transformar este círculo, definido como $z = ae^{y_0+j}$ dentro de la curva B definida por la relación $z' = ae^{y+j}$. Para este propósito se debe emplear la transformación general $z' = ae^{\sum_1^{\infty} (A_n + iB_n) \frac{1}{z^n}}$ que deja el flujo en el infinito sin alteraciones, las constantes que están determinadas por las condiciones de límite. Por definición

$$z' = ae^{y - y_0 + i(q - j)}$$

Consecuentemente

$$y - y_0 + i(q - j) = \sum_1^{\infty} (A_n + iB_n) \frac{1}{z^n}$$

o

$$y - y_0 + i(q - j) = \sum_1^{\infty} (A_n + iB_n) \frac{1}{r^n} (\cos nj - i \sin nj)$$

donde z ha sido expresada en la forma polar

$$z = r(\cos j + i \sin j)$$

y del teorema de Moivre

$$\frac{1}{z^n} = \frac{1}{r^n} (\cos nj - i \sin nj)$$

Igualando las partes real e imaginaria obtenemos las dos expansiones de Fourier:

$$y - y_0 = \sum_1^{\infty} \left(\frac{A_n}{r^n} \cos nj + \frac{B_n}{r^n} \sin nj \right) \quad (a)$$

y

$$q - j = \sum_1^{\infty} \left(\frac{B_n}{r^n} \cos nj - \frac{A_n}{r^n} \sin nj \right) \quad (b)$$

Los valores de los coeficientes $\frac{A_n}{r^n}, \frac{B_n}{r^n}$ al igual que la cantidad y_0 pueden ser determinados de (a) como sigue:

$$\frac{A_n}{r^n} = \frac{1}{p} \int_0^{2p} y \cos nj \, dj \quad (c)$$

$$\frac{B_n}{r^n} = \frac{1}{p} \int_0^{2p} y \sin nj \, dj \quad (d)$$

y

$$y_0 = \frac{1}{2p} \int_0^{2p} y \, dj \quad (e)$$

La cantidad $(q - j)$ es necesaria en el siguiente análisis. Si se eliminan los coeficientes $\frac{A_n}{r^n}$ y $\frac{B_n}{r^n}$ en (b) por medio de (c) y (d).

Se obtiene

$$(q - j)_c = \sum_1^{\infty} \cos nj_c \frac{1}{p} \int_0^{2p} y \sin nj \, dj - \sin nj_c \frac{1}{p} \int_0^{2p} y \cos nj \, dj$$

El subíndice c se agrega para indicar que los ángulos así distinguidos son mantenidos constantes mientras la integración se lleva a cabo. La expresión puede ser simplificada

$$(q - j)_c = \frac{1}{p} \sum_1^{\infty} \int_0^{2p} y (\sin nj \cos nj_c - \cos nj \sin nj_c) \, dj$$

$$(q - j)_c = \frac{1}{p} \sum_1^{\infty} \int_0^{2p} y \sin n(j - j_c) \, dj$$

Pero

$$\sum_1^{\infty} \sin n(j - j_c) = \frac{1}{2} \cot \frac{(j - j_c)}{2} - \frac{\cos(2n+1) \frac{(j - j_c)}{2}}{2 \sin \frac{(j - j_c)}{2}}$$

Por lo tanto,

$$(q - j)_c = \frac{1}{2p} \int_0^{2p} y \cot \frac{(j - j_c)}{2} dj - \frac{1}{2p} \int_0^{2p} y \frac{\cos(2n+1) \frac{(j - j_c)}{2}}{2 \sin \frac{(j - j_c)}{2}} dj$$

La última integral es idéntica a cero.

Entonces

$$(q - j)_c = \frac{1}{2p} \int_0^{2p} y \cot \frac{(j - j_c)}{2} dj \quad (3.2.38)$$

Debido a propósitos de cálculo esta integral es expresada en forma conveniente en el apéndice 1 y 2.

Ahora se debe resumir la tarea de determinar la velocidad en cualquier punto de la superficie del perfil.

La velocidad en la superficie del círculo es $\frac{dw}{dz}$ (ver ecuación (3.2.36) y la nota al pie). Para puntos correspondientes sobre la curva B en el plano z' y sobre el perfil en el plano z las velocidades son respectivamente $\frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{dz'}$ y

$$\frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{dz'} \cdot \frac{dz'}{dz}$$

Las cantidades z y z' son relacionadas por la expresión

$$z = z' + \frac{a^2}{z'}$$

Ahora derivando la relación anterior

$$\frac{dz}{dz'} = 1 - \frac{a^2}{z'^2} = \frac{1}{z'} \left(z' - \frac{a^2}{z'} \right) = \frac{1}{z'} (ae^{y+iq} - ae^{-y-iq})$$

$$\frac{dz}{dz'} = \frac{1}{z'} [a(e^y - e^{-y}) \cos q + ia(e^y + e^{-y}) \sin q]$$

$$\frac{dz}{dz'} = \frac{1}{z'} [2a \sinh y \cos q + 2i a \cosh y \sin q]$$

Usando las relaciones (3.2.31)

$$2a \sinh y = \frac{y}{\sin q} \quad y \quad 2a \cosh y = \frac{x}{\cos q}$$

se obtiene

$$\frac{dz}{dz'} = \frac{1}{z'} [y \cot q + ix \tan q] \quad (3.2.39)$$

Ahora queda encontrar la relación $\frac{dz}{dz'}$. De la relación

$$z' = a e^{i \sum_1^{\infty} (A_n + i B_n) \frac{1}{z^n}}$$

derivando se obtiene

$$\frac{dz'}{dz} = z' \left[\frac{1}{z} + \frac{d}{dz} \sum_1^{\infty} (A_n + i B_n) \frac{1}{z^n} \right]$$

o

$$\frac{dz'}{dz} = z' \left\{ \frac{1}{z} + \frac{d}{dz} [(y - y_0) + i(q - j)] \right\}$$

$$\frac{dz'}{dz} = z' \frac{d}{dz} (y + i(q - j) + \log z)$$

Pero

$$z = a e^{y_0 + ij}$$

de la cual,

$$\frac{1}{z} = \frac{d}{dz} (\log z) = \frac{d}{dz} (\log a + y_0 + ij) = \frac{d}{dz} (ij)$$

Por lo tanto

$$\frac{dz'}{dz} = z' \frac{d}{dz} (y + i(q - j) + ij)$$

$$\frac{dz'}{dz} = z' \frac{d}{dz} (y + iq)$$

Esta expresión puede ser escrita

$$\frac{dz'}{dz} = z' \frac{d}{dq} (y + iq) \cdot \frac{dq}{dz}$$

Pero tenemos

$$\frac{1}{z} = i \frac{dj}{dz}$$

o

$$\frac{dz}{z} = idj = id(j - q) + idq$$

y

$$\frac{dz}{dq} = iz \left(1 + \frac{d(j - q)}{dq} \right)$$

Ahora

$$\frac{dz'}{dz} = \frac{z'}{z} \frac{d}{dq} (-iy + q) \cdot \frac{1}{1 + \frac{de}{dq}}$$

donde

$$e = j - q$$

o

$$\frac{dz'}{dz} = \frac{z'}{z} \frac{1 - iy'}{1 + e'} \quad (3.2.40)$$

donde e' y y' indican $\frac{de}{dq}$ y $\frac{dy}{dq}$, respectivamente.

Al multiplicar las ecuaciones (3.2.39) y (3.2.40) ahora resulta

$$\frac{dz}{dz'} \cdot \frac{dz'}{dz} = \frac{dz}{dz} = \frac{1}{z} (y \cot q + ix \tan q) \frac{z'}{z} \frac{1 - iy'}{1 + e'}$$

$$\frac{dz}{dz'} \cdot \frac{dz'}{dz} = \frac{dz}{dz} = (y \cot q + ix \tan q) \frac{1 - iy'}{z(1 + e')} \quad (3.2.41)$$

Debido a que hay más interés en la magnitud que en la dirección de la velocidad escribiremos para el valor numérico de esta expresión

$$\left| \frac{dz}{dz'} \right| = \frac{\sqrt{(y^2 \cot^2 q + x^2 \tan^2 q)(1 + y'^2)}}{ae^{y_0}(1 + e')} \quad (3.2.41a)$$

La cantidad $\left(\frac{y}{2a}\right)^2 \cot^2 q + \left(\frac{x}{2a}\right)^2 \tan^2 q$ es visible que es igual a (por la relación (3.2.31))

$$\left(\frac{y}{2a \sin q}\right)^2 + \sin^2 q$$

o también

$$\sinh^2 y + \sin^2 q$$

Ahora

$$\left| \frac{dz}{dz'} \right| = 2 \frac{\sqrt{\left(\left(\frac{y}{2a \sin q}\right)^2 + \sin^2 q\right)(1 + y'^2)}}{e^{y_0}(1 + e')} \quad (3.2.41b)$$

El valor numérico de la velocidad en la superficie del círculo se obtiene mediante las ecuaciones (3.2.36) y (3.2.37) como sigue:

Se sustituye el punto general $z = e^{y_0 + i(a+j)}$, donde a es el ángulo de ataque medido desde el eje de coordenadas, en la ecuación (3.2.36)

$$\frac{dw}{dz} = -V(1 - e^{-2i(a+j)}) - 2iV \sin(a + e_\tau) e^{-i(a+j)}$$

$$\frac{dw}{dz} = -V[1 - \cos 2(a+j) + 2 \sin(a + e_\tau) \sin(a+j) + i(\sin 2(a+j) + 2 \sin(a + e_\tau) \cos(a+j))]$$

$$\left| \frac{dw}{dz} \right|^2 = V^2 [4 \sin^2(\mathbf{a} + \mathbf{e}_\tau) + 8 \sin(\mathbf{a} + \mathbf{e}_\tau) \sin(\mathbf{a} + \mathbf{j}) + 4 \sin^2(\mathbf{a} + \mathbf{j})]$$

$$\left| \frac{dw}{dz} \right| = 2V [\sin(\mathbf{a} + \mathbf{j}) + \sin(\mathbf{a} + \mathbf{e}_\tau)]$$

Remplazando \mathbf{j} por $(\mathbf{q} + \mathbf{e})$ (\mathbf{e}_τ , el ángulo de cero levantamiento, es el valor de $(\mathbf{j} - \mathbf{q})$ en la cola), se tiene

$$\left| \frac{dw}{dz} \right| = 2V [\sin(\mathbf{a} + \mathbf{q} + \mathbf{e}) + \sin(\mathbf{a} + \mathbf{e}_\tau)]$$

Para un punto sobre el perfil tenemos, entonces, $\mathbf{n} = \left| \frac{dw}{dz} \right| \cdot \left| \frac{dz}{dz} \right|$ y de (3.2.41),

finalmente

$$\mathbf{n} = V \frac{[\sin(\mathbf{a} + \mathbf{q} + \mathbf{e}) + \sin(\mathbf{a} + \mathbf{e}_\tau)](1 + \mathbf{e}')e^{y_0}}{\sqrt{(\sinh^2 \mathbf{y} + \sin^2 \mathbf{q})(1 + \mathbf{y}'^2)}} \quad (3.2.42)$$

donde los varios símbolos tienen el siguiente significado:

- \mathbf{n} Es la velocidad en cualquier punto (x, y) del perfil
- V Es la velocidad uniforme del flujo en el infinito
- y Es la ordenada del perfil medida desde el eje x , donde para fijar el sistema de coordenadas $(2a, 0)$, es el punto medio entre la nariz y el centro de curvatura de la nariz y $(-2a, 0)$ es el punto medio entre la cola y el centro de curvatura de la cola, visto en la figura 3.2.4.
- \mathbf{a} Es el ángulo de ataque medido desde el eje x como se indica en la figura 3.2.4.

y, q, y', e, e' Todas son funciones de x

La ecuación (3.2.24), expresa el valor de la velocidad en cualquier punto de un perfil de cualquier forma, es sorprendentemente simple cuando se considera que la naturaleza del problema es compleja y tiene la ventaja de ser exacta.

Se debe hacer notar algunas de las propiedades de esta importante relación. Debido que y es generalmente pequeña, el término $\frac{y}{2a \sin q}$ es de influencia principalmente cerca del borde de ataque, donde $\sin q$ es pequeño. Sin embargo, se nota que si $\frac{y}{\sin q} = 0$ para $q = 0$, la ecuación (3.2.42) produce en todos los casos $n = \infty$. Esto significa que la velocidad en la nariz se vuelve infinita para $\sinh y = 0$ (perfiles delgados). La cantidad $\frac{y}{2a \sin q}$ o $\sinh y$ es por lo tanto de considerable significado en la teoría de perfiles gruesos. La velocidad cerca de la cola se obtiene poniendo $q = p + \Delta q$ y $e = e_\tau + e' \Delta q$. Donde Δq es un ángulo pequeño, en la ecuación (3.2.42).

$$\left| \frac{n}{V} \right| = \frac{e^{y_0} (1 + e') [\sin(q + a + e) + \sin(a + e_\tau)]}{\sqrt{(\sinh^2 y + \sin^2 q)(1 + y'^2)}}$$

se obtiene

$$\left| \frac{n}{V} \right| \cong \frac{e^{y_0} (1 + e') [-\Delta q + a + e_\tau + e' + a + e_\tau]}{\sqrt{(y^2 + \Delta q^2)(1 + y'^2)}}$$

$$\left| \frac{n}{V} \right| \cong \frac{e^{y_0} (1 + e')^2 \Delta q}{\sqrt{(y^2 + \Delta q^2)(1 + y'^2)}}$$

$$\left| \frac{n}{V} \right| \cong \frac{e^{y_0} (1 + e')^2 \Delta q}{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{y}{\Delta q}\right)^2\right)(1 + y'^2)}} \quad (f)$$

y cerca de la cola puede ser expresado como

$$y = y_\tau + y' \Delta q + \frac{1}{2} y'' (\Delta q)^2 + \dots$$

o

$$\frac{y}{\Delta q} = \frac{y_\tau}{\Delta q} + y' + \frac{1}{2} y'' \Delta q + \dots$$

La cantidad $\frac{y_T}{\Delta q}$ es infinita si y_T es diferente de cero en $\Delta q = 0$. La velocidad es en este caso cero, indicando la presencia de un punto de estancamiento trasero. Sin embargo, si y_T es cero, significa que, si la cola esta perfectamente afilada,

$$\frac{y}{\Delta q} = y' \quad \text{para } \Delta q = 0$$

y la velocidad en la cola es

$$n_T = V \frac{e^{y_0}(1+e')^2}{(1+y'^2)}$$

o

$$n_T^2 = V^2 \frac{e^{2y_0}(1+e')^4}{(1+y'^2)^2} \quad (g)$$

Se obtiene el punto de estancamiento frontal permitiendo que $n = 0$ en la ecuación (3.2.42). Ahora

$$a + q + e_N = -(a + e_T)$$

$$q = -(2a + e_N + e_T)$$

$$a_1 = \frac{e_N + e_T}{2}$$

ha sido definido como el ángulo de ataque ideal. Es visto que, para este ángulo de ataque, q es cero o el punto de estancamiento ocurre directamente en la nariz.

La ecuación (3.2.42) puede ser aplicada también a formas punteadas, y para tales formas simétricas incluso lleva una forma más simple.

CAPÍTULO 4

CAPÍTULO 4



CAPITULO 4. DESARROLLO Y RESULTADOS

4.1 Metodología de diseño aplicada al perfil NACA 4412

Ahora se aplicará la formula (3.2.42) al caso de un perfil NACA 4412, y se calcularán las velocidades en los puntos de la superficie del perfil. El método detallado del procedimiento es como sigue:

1. El eje de coordenadas es dibujado a través de los puntos $(2a,0)$ y $(-2a,0)$ localizados respectivamente en el punto medio entre la nariz y el centro de curvatura de la nariz y el punto medio entre la cola y el centro de curvatura de la cola. (Ver figura 4.1.1).
2. Los puntos (x,y) de las superficies superior e inferior del perfil están determinadas con respecto a este eje.
3. $\sin^2 q$, $\sin q$ y q están determinados por la ecuación (3.2.32).
4. y es dado por la ecuación (3.2.34a)
5. y es trazado como una función de q , $y = y(q)$
6. Se debe de determinar y' de la grafica y vs q
7. Determinar e_c mediante la formula mostrada en el apéndice 1.
8. De la curva e vs q determinar e' .
9. Determinar F de la ecuación (3.2.41a).
10. $(q + e)$ es determinada en radianes y grados.
11. $\sin(q + a + e) + \sin(a + e_T)$ es calculado ahora donde a sea el ángulo de ataque medido desde el eje de coordenadas.
12. $\frac{n}{V} = F \cdot [\sin(q + a + e) + \sin(a + e_T)]$
13. $\frac{P}{q} = 1 - \left(\frac{n}{V}\right)^2$ (Coeficiente de Presión)

A continuación se describirán y realizaran cada uno de los puntos para llevar a cabo la metodología, antes mencionada.

Punto 1.

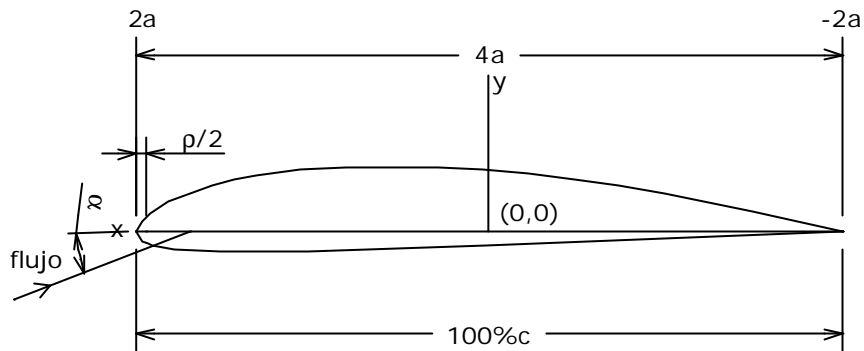


Figura 4.1.1. Sistema coordenado del Perfil NACA 4412

Punto 2.

Tabla 4.1.1. Coordenadas del Extradós e Intrados

Extradós		
%C	x	y
0	2.035	0
1.25	1.98413	0.09931
2.5	1.93325	0.13797
5	1.8315	0.19251
7.5	1.72975	0.23443
10	1.628	0.26821
15	1.4245	0.32112
20	1.221	0.35816
30	0.814	0.39723
40	0.407	0.39886
50	0	0.37403
60	-0.407	0.3313
70	-0.814	0.27228
80	-1.221	0.19902
90	-1.628	0.1103
95	-1.8315	0.05983
100	-1.999	0.00529

Intrados		
%C	x	y
0	2.035	0
1.25	1.98413	-0.0582
2.5	1.93325	-0.07937
5	1.8315	-0.10134
7.5	1.72975	-0.11152
10	1.628	-0.1164
15	1.4245	-0.11722
20	1.221	-0.11152
30	0.814	-0.09198
40	0.407	-0.07326
50	0	-0.05698
60	-0.407	-0.0407
70	-0.814	-0.02646
80	-1.221	-0.01587
90	-1.628	-0.00895
95	-1.8315	-0.00651
100	-1.999	-0.00529

Perfil NACA 4412

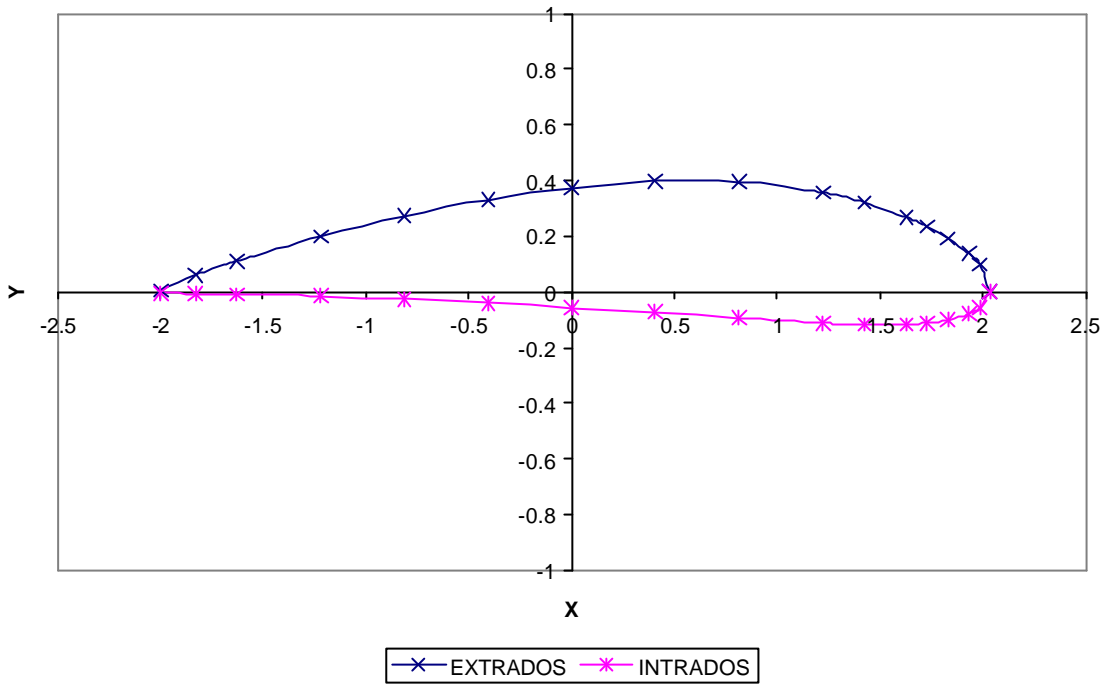


Figura 4.1.2. Perfil NACA 4412

Punto 3. En este caso $a = 1$, los valores de “x” y “y” se toman de la tabla 4.1.1.

Tabla 4.1.2. Valores de L , $\sin^2 q$, $\sin q$ y q .

Extradós					
%C	L	$\sin^2 q$	$\sin q$	q (rad)	q (°)
0	-0.03530625	0	0	0	0
1.25	0.013346476	0.056773656	0.23827223	0.240586453	13.78458839
2.5	0.060876972	0.10584166	0.325333152	0.331364025	18.98576013
5	0.152136816	0.198753061	0.445817295	0.462087106	26.47564094
7.5	0.238251644	0.286250183	0.535023535	0.564535604	32.34550751
10	0.319419447	0.368256478	0.606841395	0.65208056	37.36146399
15	0.466919942	0.516803497	0.718890462	0.802204825	45.96295075
20	0.595220104	0.644944745	0.803084519	0.932453848	53.42567005
30	0.794902685	0.841766416	0.917478292	1.161694045	66.56016585
40	0.918815425	0.9602348	0.979915711	1.370038355	78.4974155
50	0.965024829	1	1	1.570796327	90
60	0.931148159	0.959738844	0.979662617	1.772819562	101.5750787
70	0.815816492	0.837935739	0.9153883	1.985121241	113.7390689
80	0.617387211	0.633030284	0.795632003	2.2215425	127.2850093
90	0.334362643	0.343223792	0.585853046	2.515660395	144.1367233
95	0.16050706	0.165901101	0.407309589	2.722086378	155.964061
100	0.000992751	0.00318804	0.056462735	3.085099875	176.7632022

Intrados					
%C	L	$\sin^2 q$	$\sin q$	q (rad)	q (°)
0	-0.03530625	0	0	6.283185307	360
1.25	0.014965157	0.037529676	0.193725776	6.088226854	348.8297034
2.5	0.064061409	0.083027438	0.288144821	5.990896384	343.2530783
5	0.158834337	0.173622728	0.416680607	5.853394541	335.374803
7.5	0.248882168	0.260803284	0.510689029	5.747199293	329.2902635
10	0.334016644	0.343867407	0.586402086	5.656575404	324.0978971
15	0.48926504	0.496187618	0.704405862	5.501599563	315.2184355
20	0.624180684	0.629122592	0.793172486	5.367184479	307.5170185
30	0.832235828	0.834769667	0.913657303	5.130992934	293.9842398
40	0.957245993	0.958645631	0.979104505	4.917175082	281.7333794
50	0.99918832	1	1	4.71238898	270
60	0.958173628	0.958605633	0.979084078	4.507502457	258.260867
70	0.834176033	0.834385729	0.913447168	4.293268371	245.986158
80	0.627226762	0.627327169	0.792039878	4.055735937	232.376552
90	0.337383956	0.337443355	0.580898747	3.761425055	215.5137806
95	0.161391336	0.161456998	0.40181712	3.555093	203.6918247
100	0.000992751	0.00318804	0.056462735	3.085099875	176.7632022

Punto 4. Se calcula y de la ecuación (3.2.34a), y sustituyendo los valores de las tablas 4.1.1 y 4.1.2, queda como sigue:

Tabla 4.1.3. Valores de y .

Extradós		Intrados	
%C	y	%C	y
0	0.18681111	0	0.18681111
1.25	0.20691231	1.25	0.14965565
2.5	0.21049099	2.5	0.13728556
5	0.21426473	5	0.12130978
7.5	0.21736987	7.5	0.10896808
10	0.21923068	10	0.09908878
15	0.22152987	15	0.08310634
20	0.22118238	20	0.07024093
30	0.21482417	30	0.05031602
40	0.20213813	40	0.03740302
50	0.18594315	50	0.02848615
60	0.16829227	60	0.02078324
70	0.14818251	70	0.01448035
80	0.12474846	80	0.01002016
90	0.0939952	90	0.00770695
95	0.07337827	95	0.0081031
100	0.04683679	100	0.04683679

Punto 5. Se traza y como una función de q

Tabla 4.1.4. Valores de q y y .

Extradós			Intrados		
%C	q (rad)	y	%C	q (rad)	y
0	0	0.18681111	0	6.283185307	0.18681111
1.25	0.240586453	0.20691231	1.25	6.088226854	0.14965565
2.5	0.331364025	0.21049099	2.5	5.990896384	0.13728556
5	0.462087106	0.21426473	5	5.853394541	0.12130978
7.5	0.564535604	0.21736987	7.5	5.747199293	0.10896808
10	0.65208056	0.21923068	10	5.656575404	0.09908878
15	0.802204825	0.22152987	15	5.501599563	0.08310634
20	0.932453848	0.22118238	20	5.367184479	0.07024093
30	1.161694045	0.21482417	30	5.130992934	0.05031602
40	1.370038355	0.20213813	40	4.917175082	0.03740302
50	1.570796327	0.18594315	50	4.71238898	0.02848615
60	1.772819562	0.16829227	60	4.507502457	0.02078324
70	1.985121241	0.14818251	70	4.293268371	0.01448035
80	2.2215425	0.12474846	80	4.055735937	0.01002016
90	2.515660395	0.0939952	90	3.761425055	0.00770695
95	2.722086378	0.07337827	95	3.555093	0.0081031
100	3.085099875	0.04683679	100	3.085099875	0.04683679

Grafica q vs Y

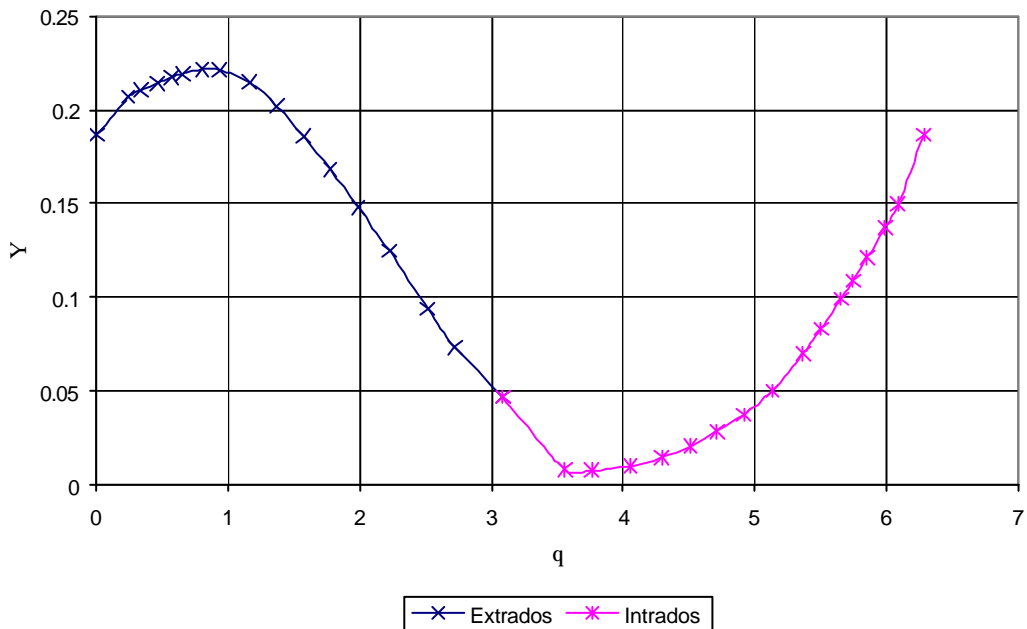


Figura 4.1.3. Grafica q vs y del Perfil NACA 4412

Punto 6. Se debe de determinar y' de la grafica y vs q

En el método Theodorsen plantea la lectura de y' de forma grafica en cada punto (y, q) , lo cual no es muy preciso, debido a lo anterior se planteó la posibilidad de aplicar algún ajuste de curva, siendo el ajuste con splines cúbicos el apropiado debido a que es posible derivar cada uno de estos y obtener y' . Para ver la formulación de este tipo de interpolación ver el apéndice 3.

Tabla 4.1.5. Valores de q , y y y' .

Extradós			
%C	q (rad)	y	y'
0	0	0.18681111	0.09909292
1.25	0.240586453	0.20691231	0.05246672
2.5	0.331364025	0.21049099	0.03092685
5	0.462087106	0.21426473	0.03043465
7.5	0.564535604	0.21736987	0.02598985
10	0.65208056	0.21923068	0.01906198
15	0.802204825	0.22152987	0.00722643
20	0.932453848	0.22118238	-0.01167146
30	1.161694045	0.21482417	-0.04558633
40	1.370038355	0.20213813	-0.0736504
50	1.570796327	0.18594315	-0.08486101
60	1.772819562	0.16829227	-0.09101613
70	1.985121241	0.14818251	-0.0971105
80	2.2215425	0.12474846	-0.10194783
90	2.515660395	0.0939952	-0.10525098
95	2.722086378	0.07337827	-0.08999058
100	3.085099875	0.04683679	-0.11078807

Intradós			
%C	q (rad)	y	y'
0	6.283185307	0.18681111	0.09909292
1.25	6.088226854	0.14965565	0.14837469
2.5	5.990896384	0.13728556	0.11613858
5	5.853394541	0.12130978	0.11716972
7.5	5.747199293	0.10896808	0.11282854
10	5.656575404	0.09908878	0.10635623
15	5.501599563	0.08310634	0.09924206
20	5.367184479	0.07024093	0.09260024
30	5.130992934	0.05031602	0.07262022
40	4.917175082	0.03740302	0.04973061
50	4.71238898	0.02848615	0.03987783

60	4.507502457	0.02078324	0.03417365
70	4.293268371	0.01448035	0.02468534
80	4.055735937	0.01002016	0.01219118
90	3.761425055	0.00770695	0.0081971
95	3.555093	0.0081031	-0.02566377
100	3.085099875	0.04683679	-0.11078807

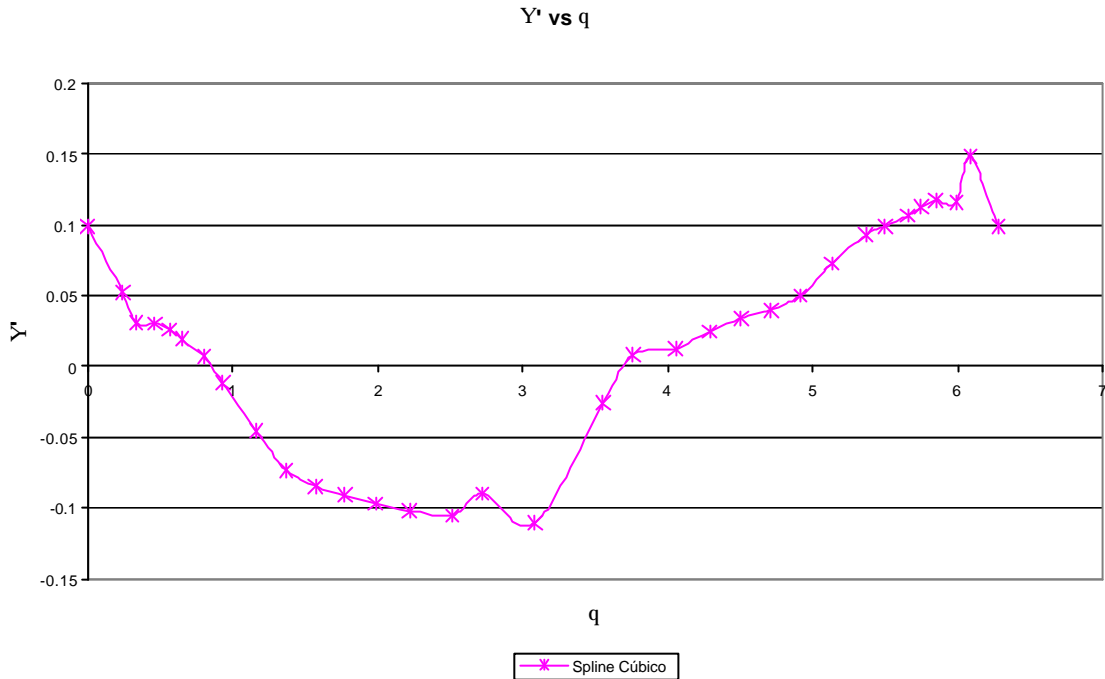


Figura 4.1.4. Grafica q VS y' del Perfil NACA 4412

Punto 7. Se procede a determinar e_c mediante la formula mostrada en el apéndice 1:

Se pretende analizar el primer dato como ejemplo, para posteriormente presentar los demás datos obtenidos conforme al procedimiento dado. De acuerdo a los valores de la tabla 4.1.5, se conoce lo siguiente:

Tabla 4.1.6. Valores de j_c y y' para $q=0$.

j_c	y'_0
0	0.09909292

Donde:

j_c es la coordenada analizada q .

y'_0 es la pendiente determinada con el método de splines cúbicos del punto correspondiente a la coordenada analizada q .

Posteriormente se determina la siguiente tabla, donde se aplica para

$$j_1 = j_c + \frac{p}{5}, \quad j_{-1} = j_c - \frac{p}{5}, \quad j_2 = j_c + \frac{2p}{5}, \quad j_{-2} = j_c - \frac{2p}{5}, \quad j_3 = j_c + \frac{3p}{5},$$

$$j_{-3} = j_c - \frac{3p}{5}, \text{ etc.}$$

Tabla 4.1.7. Valores de $j_1, j_{-1}, j_2, j_{-2}, j_3, j_{-3}, j_4$ y j_{-4} .

j_1	0.628318531
j_{-1}	5.654866776
j_2	1.256637061
j_{-2}	5.026548246
j_3	1.884955592
j_{-3}	4.398229715
j_4	2.513274123
j_{-4}	3.769911184

Ahora con los valores obtenidos de la tabla 4.1.7, se procede leer en la grafica de la figura 4.1.4 los correspondientes valores de y , esto se hace mediante la interpolación con los splines cúbicos, resultando la siguiente tabla:

Tabla 4.1.8. Valores de $y_1, y_{-1}, y_2, y_{-2}, y_3, y_{-3}, y_4$ y y_{-4} .

y_1	0.21877628
y_{-1}	0.09890719
y_2	0.20977405
y_{-2}	0.04339583
y_3	0.15783236
y_{-3}	0.01731725
y_4	0.09424935
y_{-4}	0.00778632

Una vez que se han obtenido los valores de las tablas 4.1.7 y 4.1.8, se procede a calcular los coeficientes de la ecuación del punto 7, estos coeficientes estarán en función del número de divisiones (en este caso se manejan 10 divisiones) que se mencionan en el apéndice 1.

Tabla 4.1.9. Coeficientes a_k .

k	n	a_k
1	10	1.065439104
2	10	0.443105417
3	10	0.231170061
4	10	0.103015453
5	10	0

Sustituyendo valores de las tablas 4.1.6, 4.1.8 y 4.1.9 en la ecuación del punto 7, se procede a calcular el valor de e .

$$e_c = -\frac{1}{P} \left[\begin{array}{l} 0.628(0.09909292) + 1.065(0.21877628 - 0.09890719) \\ + 0.445(0.20977405 - 0.04339583) + 0.231(0.15783236 - 0.01731725) \\ + 0.104(0.09424935 - 0.00778632) \end{array} \right]$$

$$e = -0.09711257^5$$

La tabla 4.1.10 muestra los 33 valores de e para cada punto q .

Tabla 4.1.10. Valores de q y e .

Extradós			Intradós		
%C	q (rad)	e	%C	q (rad)	e
0	0	-0.09711257	0	6.283185307	-0.07729398
1.25	0.240586453	-0.07134722	1.25	6.088226854	-0.11690068
2.5	0.331364025	-0.05975961	2.5	5.990896384	-0.11445052
5	0.462087106	-0.04767101	5	5.853394541	-0.11870027
7.5	0.564535604	-0.03487968	7.5	5.747199293	-0.1189941
10	0.65208056	-0.02189092	10	5.656575404	-0.11709722
15	0.802204825	-0.00429082	15	5.501599563	-0.1084438
20	0.932453848	0.01137116	20	5.367184479	-0.10280175
30	1.161694045	0.03856169	30	5.130992934	-0.0895095
40	1.370038355	0.06354968	40	4.917175082	-0.07252762
50	1.570796327	0.08010511	50	4.71238898	-0.05834175
60	1.772819562	0.09240327	60	4.507502457	-0.04328675
70	1.985121241	0.10337123	70	4.293268371	-0.02650875
80	2.2215425	0.10895352	80	4.055735937	-0.00712108
90	2.515660395	0.1084115	90	3.761425055	0.01967606
95	2.722086378	0.10286428	95	3.555093	0.04253077
100	3.085099875	0.09129857	100	3.085099875	0.09129857

⁵ El procedimiento anterior se debe hacer para los siguientes 32 puntos correspondientes de q .

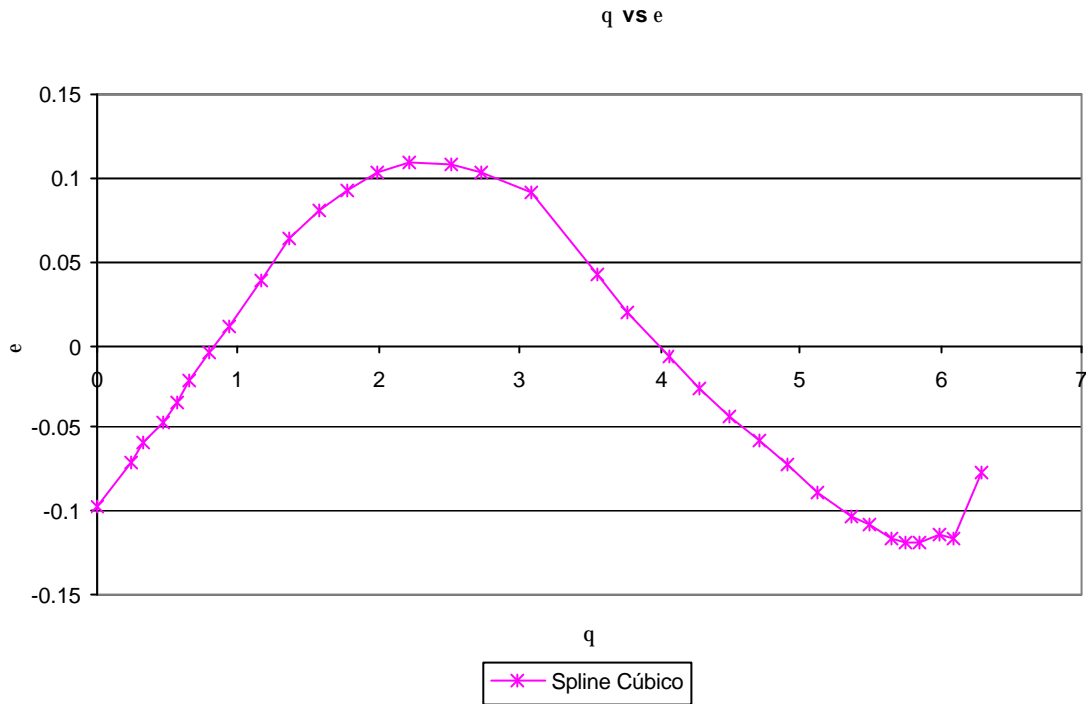


Figura 4.1.5. Grafica q VS e del Perfil NACA 4412

Punto 8. De la curva e vs q se determinan e' .

Nuevamente para este punto se aplica el método de interpolación de splines cúbicos (ver apéndice 3) para obtener e' .

Tabla 4.1.11. Valores de q , e y e' .

Extradós			
%C	q (rad)	e	e'
0	0	-0.09711257	0.113327466
1.25	0.240586453	-0.07134722	0.12950275
2.5	0.331364025	-0.05975961	0.107049206
5	0.462087106	-0.04767101	0.099169063
7.5	0.564535604	-0.03487968	0.143328134
10	0.65208056	-0.02189092	0.13609774
15	0.802204825	-0.00429082	0.111926589
20	0.932453848	0.01137116	0.118831167
30	1.161694045	0.03856169	0.120810517
40	1.370038355	0.06354968	0.102447712
50	1.570796327	0.08010511	0.066329164
60	1.772819562	0.09240327	0.05724917
70	1.985121241	0.10337123	0.039507707
80	2.2215425	0.10895352	0.011238437
90	2.515660395	0.1084115	-0.01733675
95	2.722086378	0.10286428	-0.03345087
100	3.085099875	0.09129857	-0.08646194

Intrados			
%C	q (rad)	e	e'
0	6.283185307	-0.07729398	0
1.25	6.088226854	-0.11690068	0.02066265
2.5	5.990896384	-0.11445052	-0.01595138
5	5.853394541	-0.11870027	0.030108123
7.5	5.747199293	-0.1189941	-0.01202543
10	5.656575404	-0.11709722	-0.03780861
15	5.501599563	-0.1084438	-0.05396052
20	5.367184479	-0.10280175	-0.04110494
30	5.130992934	-0.0895095	-0.07386874
40	4.917175082	-0.07252762	-0.07650047
50	4.71238898	-0.05834175	-0.06930046
60	4.507502457	-0.04328675	-0.0768678
70	4.293268371	-0.02650875	-0.08009139
80	4.055735937	-0.00712108	-0.08329277
90	3.761425055	0.01967606	-0.10470847
95	3.555093	0.04253077	-0.10930037
100	3.085099875	0.09129857	-0.08646194

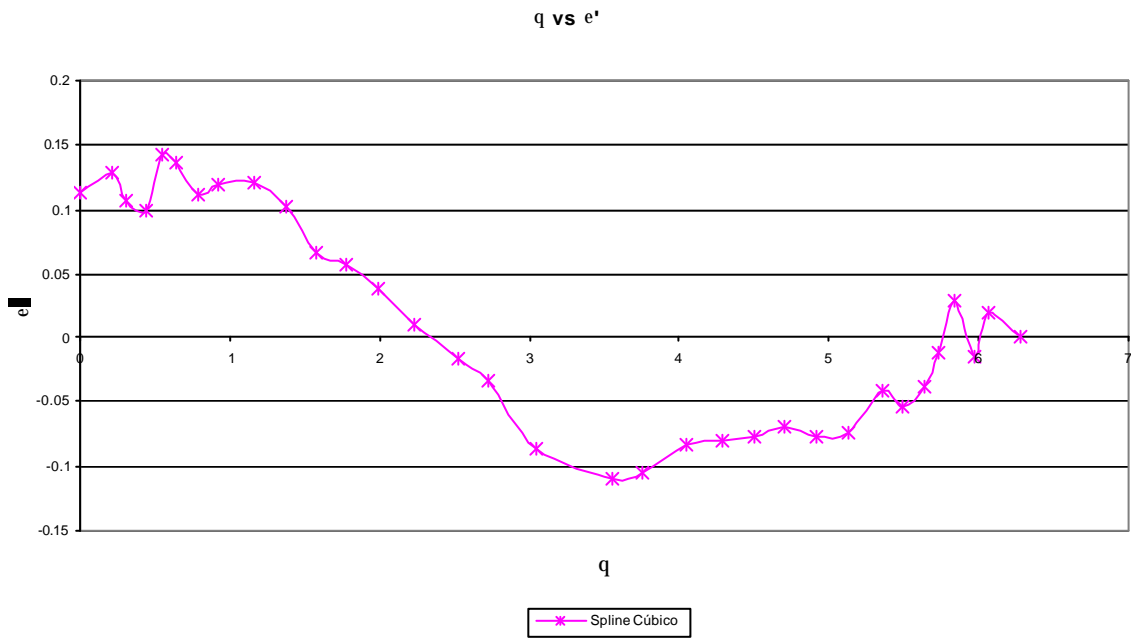


Figura 4.1.6. Grafica q VS e' del Perfil NACA 4412

Punto 9. Determinar F de la ecuación (3.2.41a). Con los valores de las tablas 4.1.1, 4.1.5 y 4.1.11 se determina el valor de F .

Tabla 4.1.12. Valores de F .

Extradados		Intradados	
%C	F	%C	F
0	6.33	0	6.33
1.25	4.13872841	1.25	4.62321026
2.5	3.34089386	2.5	3.47049011
5	2.6011395	5	2.67171088
7.5	2.32318594	7.5	2.13397404
10	2.07356747	10	1.83022625
15	1.75129943	15	1.51373734
20	1.60673516	20	1.37086032
30	1.44818099	30	1.16286042
40	1.36185581	40	1.09464018
50	1.3037739	50	1.08557953
60	1.32729626	60	1.10298303
70	1.40367574	70	1.18367074
80	1.57655544	80	1.36879078
90	2.08329064	90	1.82630196
95	2.91305014	95	2.67165028
100	15.7115132	100	15.7115132

Punto 10. $(q + e)$ es determinada en radianes y grados. Con los valores de las tablas 4.1.10 se determinan los valores para $q + e$.

Tabla 4.1.13. Valores de $q + e$ en radianes y grados.

Extradados			Intradados		
%C	$q + e$ (rad)	$q + e$ (°)	%C	$q + e$ (rad)	$q + e$ (°)
0	-0.09711257	-5.56414035	0	6.20589132	-4.42861911
1.25	0.16923924	9.69669391	1.25	5.97132618	-17.868212
2.5	0.27160441	15.5617866	2.5	5.87644587	-23.3044532
5	0.41441609	23.744293	5	5.73469427	-31.4262214
7.5	0.52965592	30.347049	7.5	5.6282052	-37.527596
10	0.63018964	36.1072067	10	5.53947818	-42.6112795
15	0.79791401	45.7171049	15	5.39315576	-50.9949368
20	0.94382501	54.0771895	20	5.26438273	-58.3730881
30	1.20025573	68.7695878	30	5.04148344	-71.1442766
40	1.43358804	82.1385442	40	4.84464746	-82.4221474
50	1.65090144	94.5896849	50	4.65404723	-93.3427362
60	1.86522284	106.869396	60	4.4642157	-104.219281
70	2.08849247	119.661804	70	4.26675962	-115.532682
80	2.33049602	133.527586	80	4.04861485	-128.031456
90	2.6240719	150.348245	90	3.78110112	-143.358864
95	2.82495066	161.85775	95	3.59762377	-153.871342
100	3.17639845	181.994225	100	3.17639845	-178.005775

Punto 11.

Tabla 4.1.14. Valores de $\sin(\mathbf{q} + \mathbf{e} + \mathbf{a}) + \sin(\mathbf{a} + \mathbf{e}_T)$ para $\mathbf{a} = 0$.

α (°)	0	εT	5.231022768	$\alpha + \varepsilon T$	5.231022768
--------------	---	-----------------	-------------	--------------------------	-------------

Extradós	
%C	$\sin(\mathbf{q} + \mathbf{e} + \mathbf{a}) + \sin(\mathbf{a} + \mathbf{e}_T)$
0	-0.005788211
1.25	0.25960429
2.5	0.359449169
5	0.493827306
7.5	0.596408228
10	0.680469771
15	0.807072993
20	0.900979919
30	1.02330351
40	1.081773489
50	1.087965089
60	1.048140509
70	0.960133403
80	0.816214653
90	0.585898864
95	0.402549043
100	

Intradós	
%C	$\sin(\mathbf{q} + \mathbf{e} + \mathbf{a}) + \sin(\mathbf{a} + \mathbf{e}_T)$
0	0.013954744
1.25	-0.215656832
2.5	-0.304445098
5	-0.430228416
7.5	-0.517971683
10	-0.58584908
15	-0.685918558
20	-0.760308935
30	-0.855163603
40	-0.900094801
50	-0.907126815
60	-0.878190955
70	-0.811167784
80	-0.696500842
90	-0.505629324
95	-0.349216506
100	

Punto 12.

Tabla 4.1.15. Valores de v/V para $\mathbf{a} = 0$.

α (°)	0	εT	5.231022768	$\alpha + \varepsilon T$	5.231022768
--------------	---	-----------------	-------------	--------------------------	-------------

Extradós	
%C	v/V
0	0.036639374
1.25	1.074431649
2.5	1.20088152
5	1.28451371
7.5	1.385567212
10	1.410999982
15	1.413426469
20	1.447636113
30	1.481928688
40	1.473219515
50	1.418460484
60	1.391192977
70	1.347715961
80	1.286807647
90	1.220597621
95	1.172645547
100	0.883722139

Intradós	
%C	v/V
0	0.088333529
1.25	0.997026879
2.5	1.056573704
5	1.149445938
7.5	1.105338125
10	1.072236365
15	1.038300531
20	1.042277349
30	0.994435906
40	0.985279935
50	0.984758301
60	0.968629723
70	0.960155572
80	0.953363933
90	0.923431823
95	0.932984373
100	0.883722139

Punto 13.

Tabla 4.1.16. Valores de P/q para $a = 0$.

α (°)	0
Extrados	
%C	P/q
0	0.99865756
1.25	-0.00470031
2.5	-0.25510273
5	-0.4360066
7.5	-0.67083723
10	-0.73273826
15	-0.73870294
20	-0.82388632
30	-0.91132069
40	-0.88892135
50	-0.75111002
60	-0.68443285
70	-0.58079551
80	-0.44114014
90	-0.29665365
95	-0.19677488
100	0.16241605
Intrados	
%C	P/q
0	0.99219719
1.25	0.0059374
2.5	-0.11634799
5	-0.32122597
7.5	-0.22177237
10	-0.14969082
15	-0.07806799
20	-0.08634207
30	0.01109723
40	0.02922345
50	0.03025109
60	0.06175646
70	0.07810128
80	0.09109721
90	0.14727367
95	0.12954016
100	0.16241605

Finalmente, se obtiene la distribución de presiones para $a = 0$ mediante el método de Theodorsen. La Figura 4.1.7 muestra a manera de ejemplo la distribución de presiones obtenida mediante la aplicación del método desarrollado en este capítulo. En la siguiente sección se mostrarán resultados obtenidos a diferentes ángulos de ataque y serán comparados contra datos experimentales y métodos computacionales.

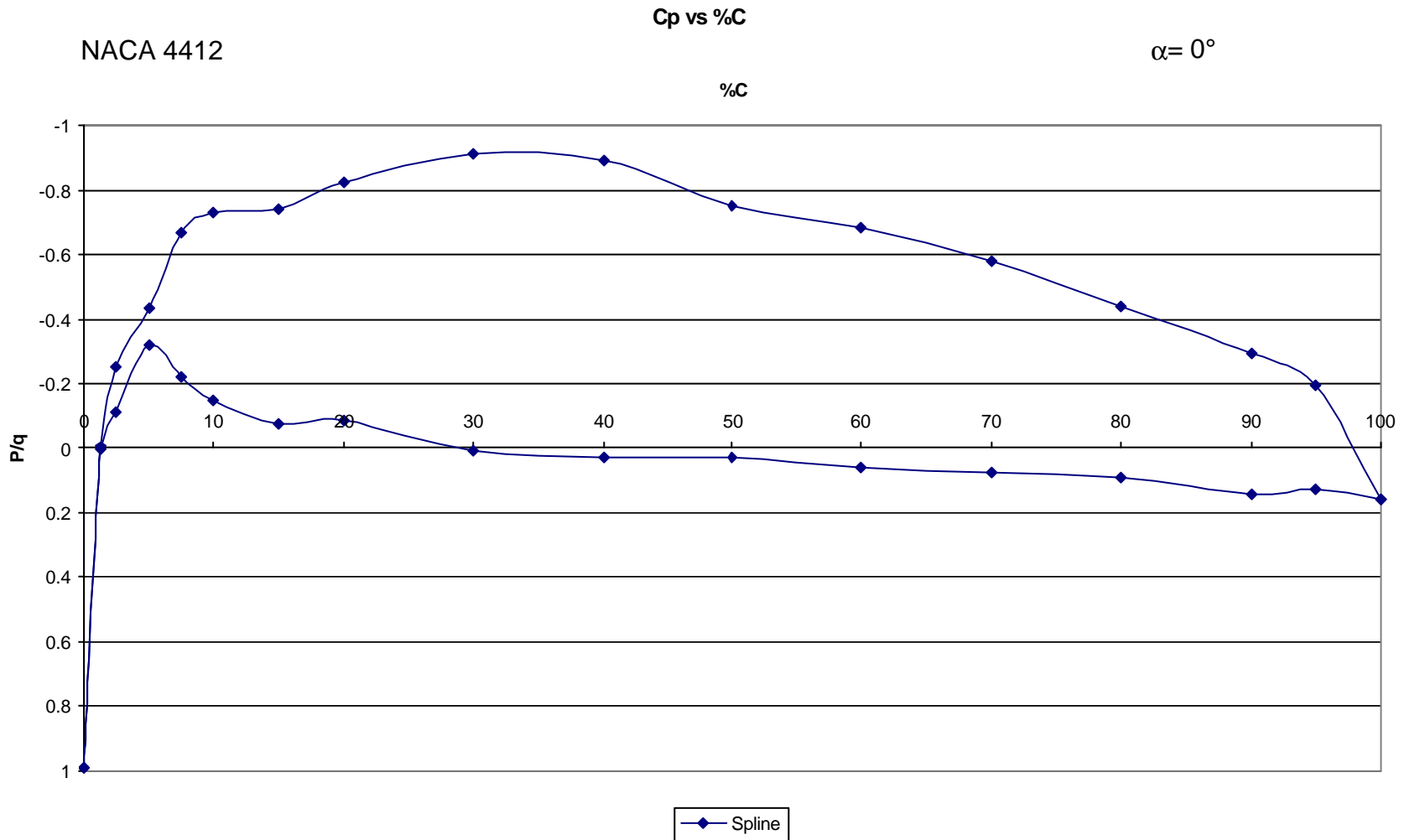


Figura 4.1.7. Distribución de Presiones del Perfil NACA 4412 a partir de la tabla 4.16, mediante el método Theodorsen para un $\alpha = 0^\circ$

4.2 Comparación de resultados teóricos contra experimentales y computacionales (XFOIL) de la distribución de presiones del perfil NACA 4412

Las siguientes graficas muestran la comparación de la distribución de presiones entre el método desarrollado en el presente trabajo, el software XFOIL v6.94 y datos experimentales [31].

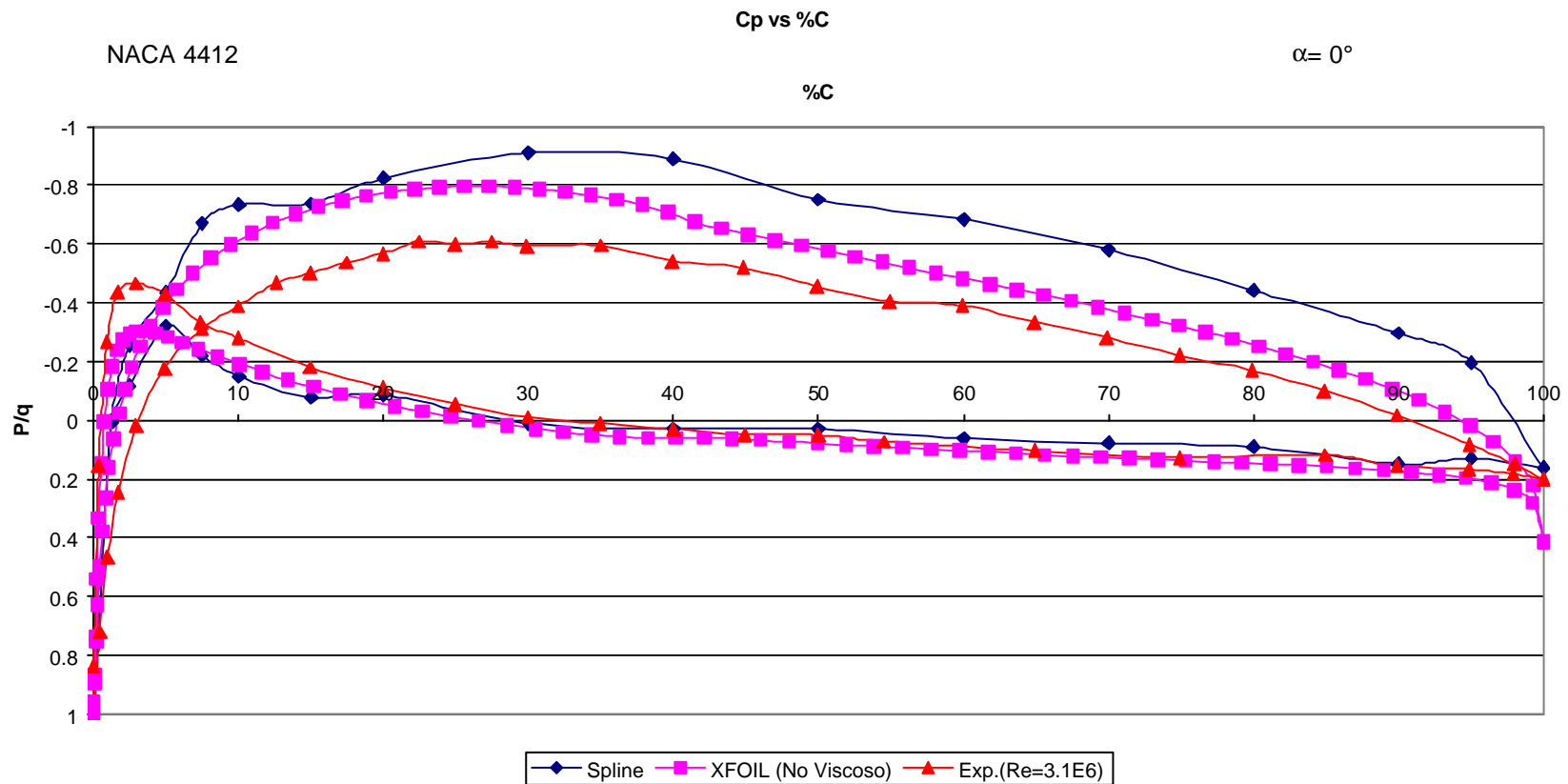


Figura 4.2.1. Distribución de Presiones del Perfil NACA 4412 para un $\alpha = 0^\circ$

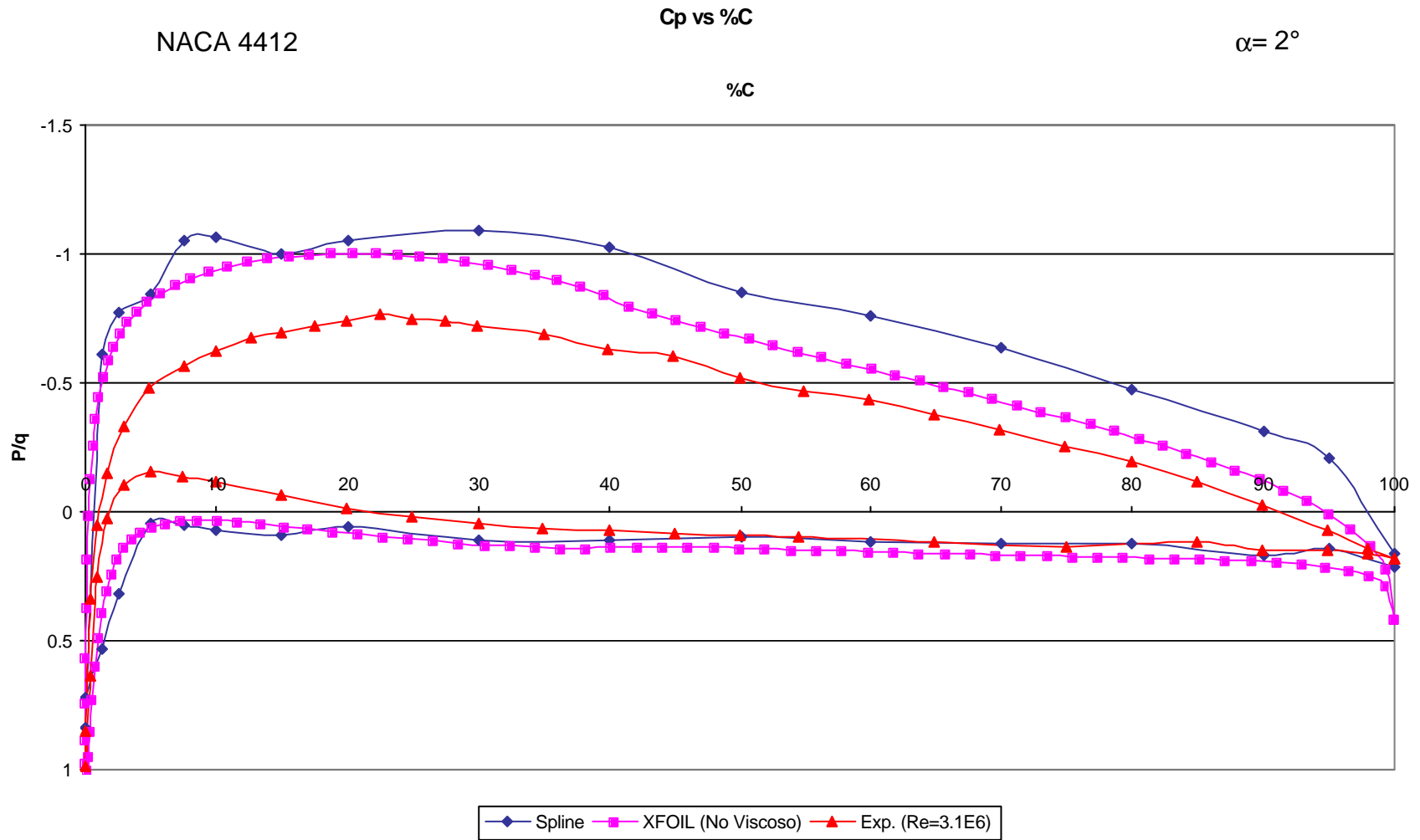


Figura 4.2.2. Distribución de Presiones del Perfil NACA 4412 para un $\alpha = 2^\circ$

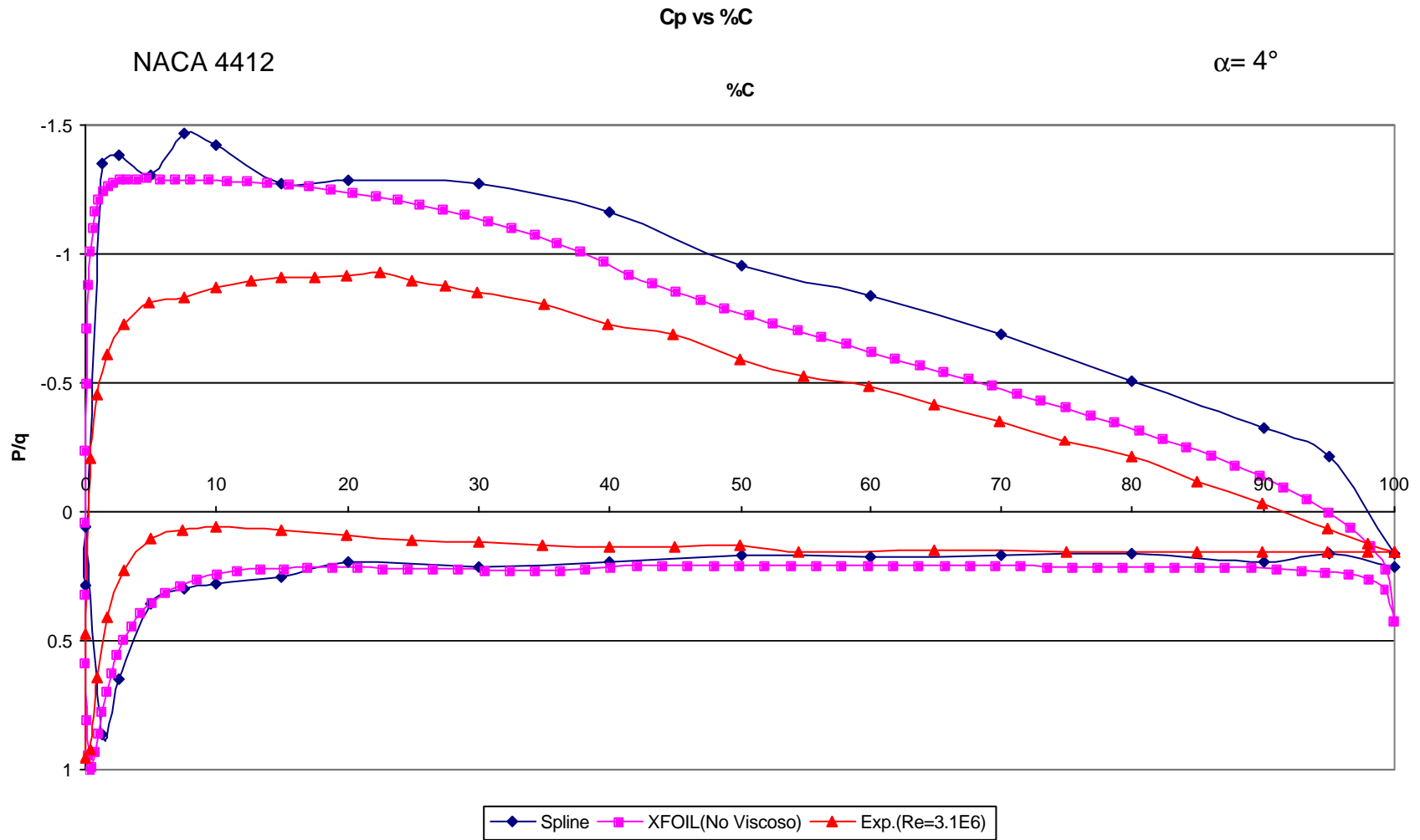


Figura 4.2.3. Distribución de Presiones del Perfil NACA 4412 para un $\alpha = 4^\circ$

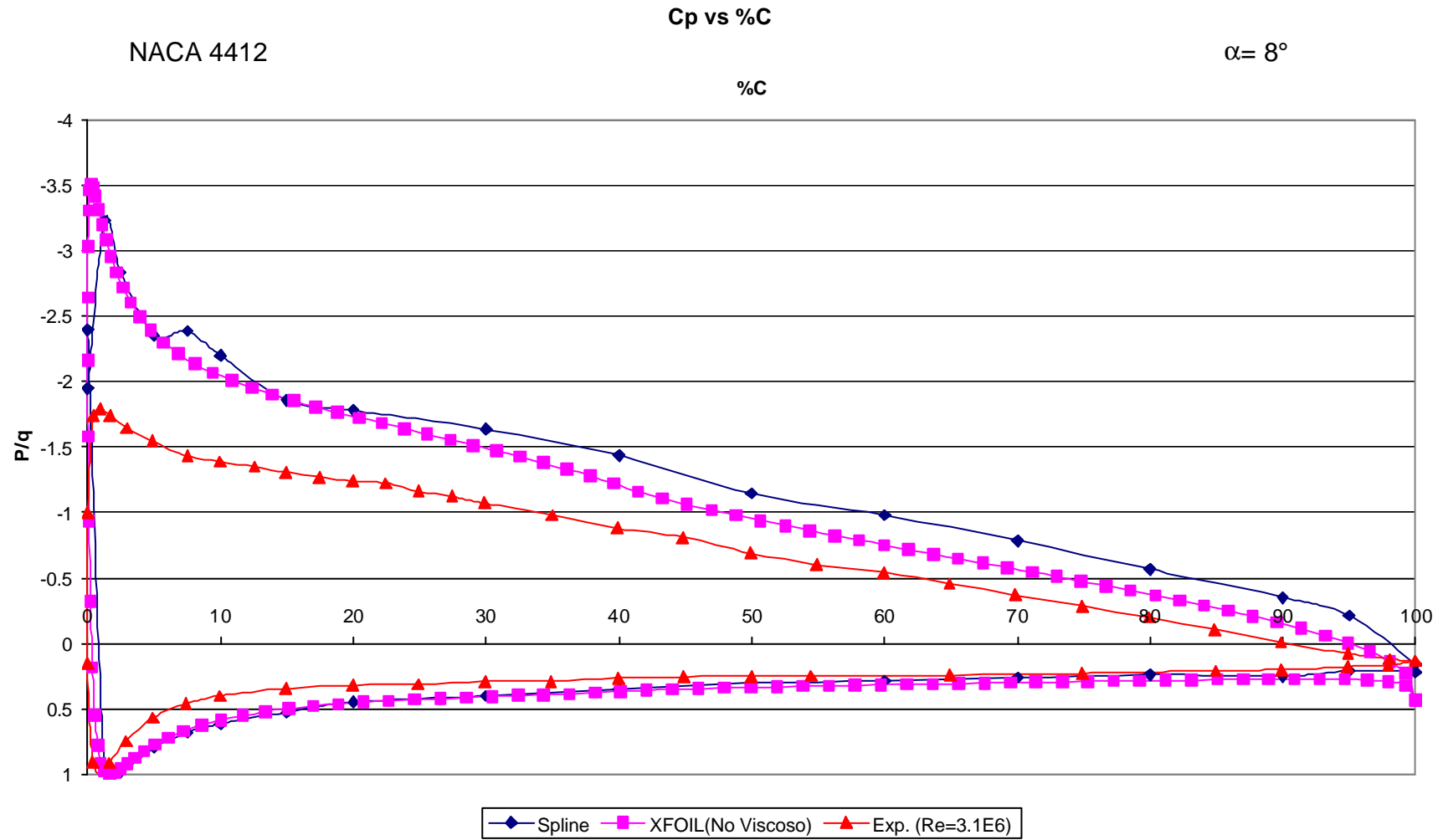


Figura 4.2.4. Distribución de Presiones del Perfil NACA 4412 para un $\alpha = 8^\circ$

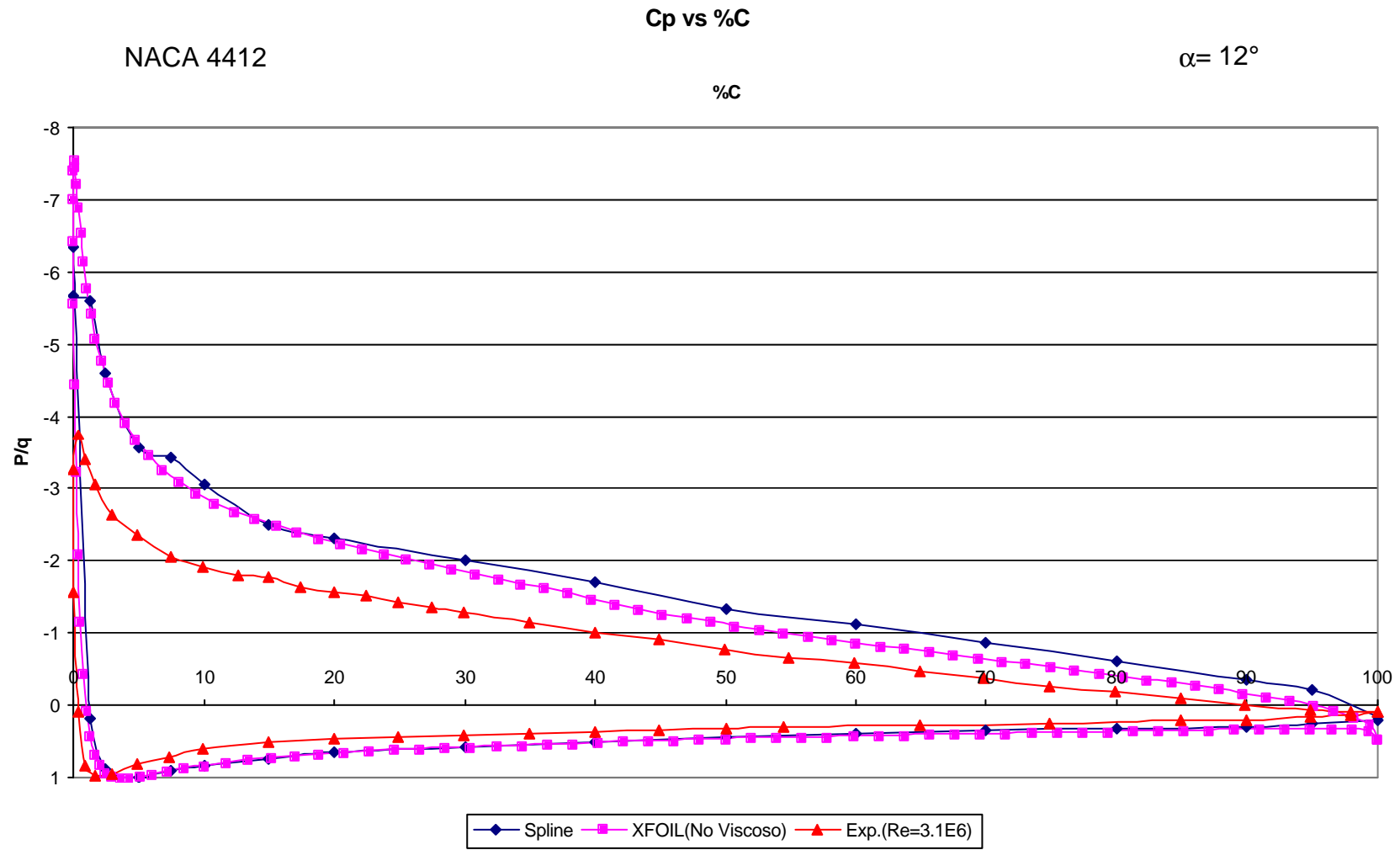


Figura 4.2.5. Distribución de Presiones del Perfil NACA 4412 para un $\alpha = 12^\circ$

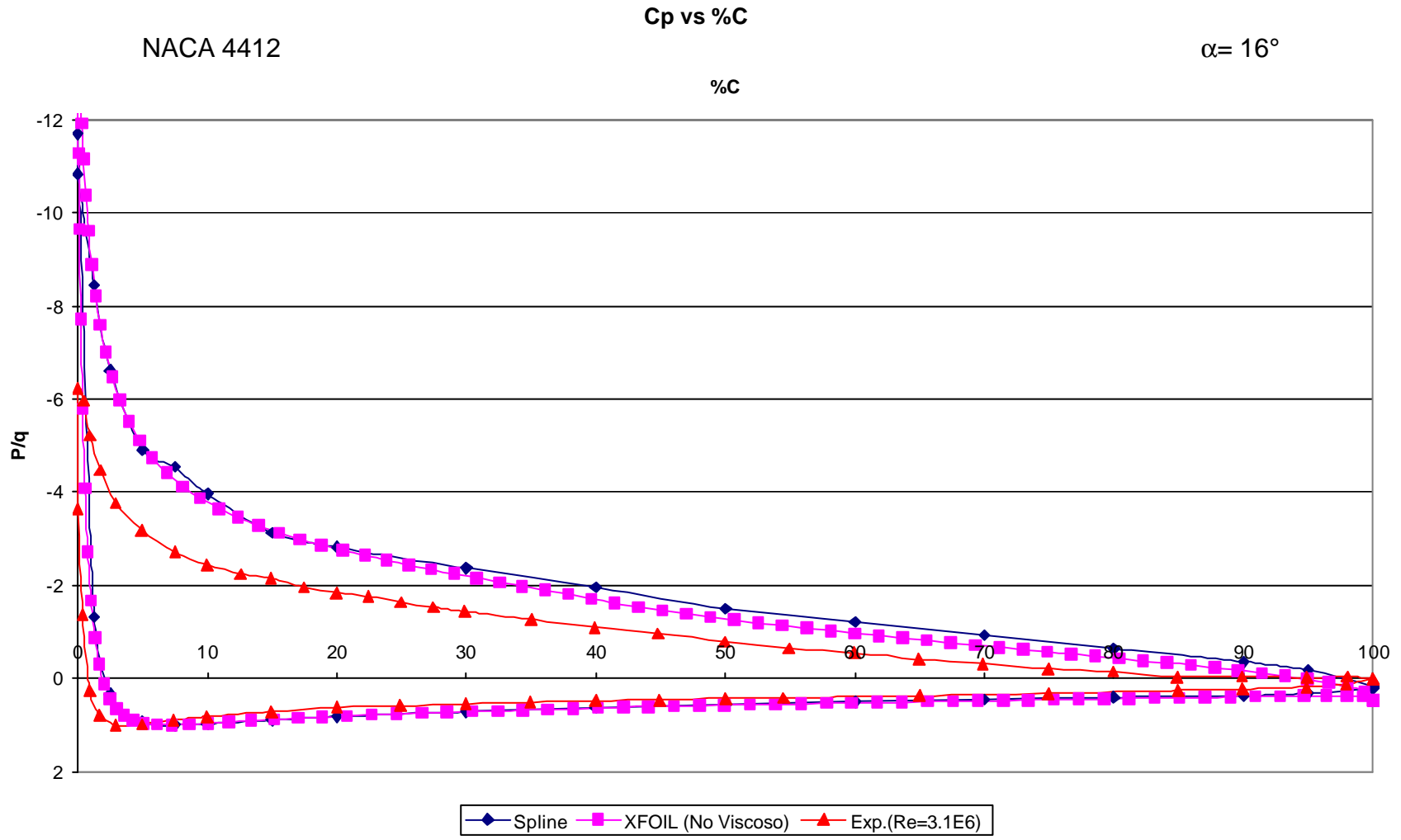


Figura 4.2.6. Distribución de Presiones del Perfil NACA 4412 para un $\alpha = 16^\circ$

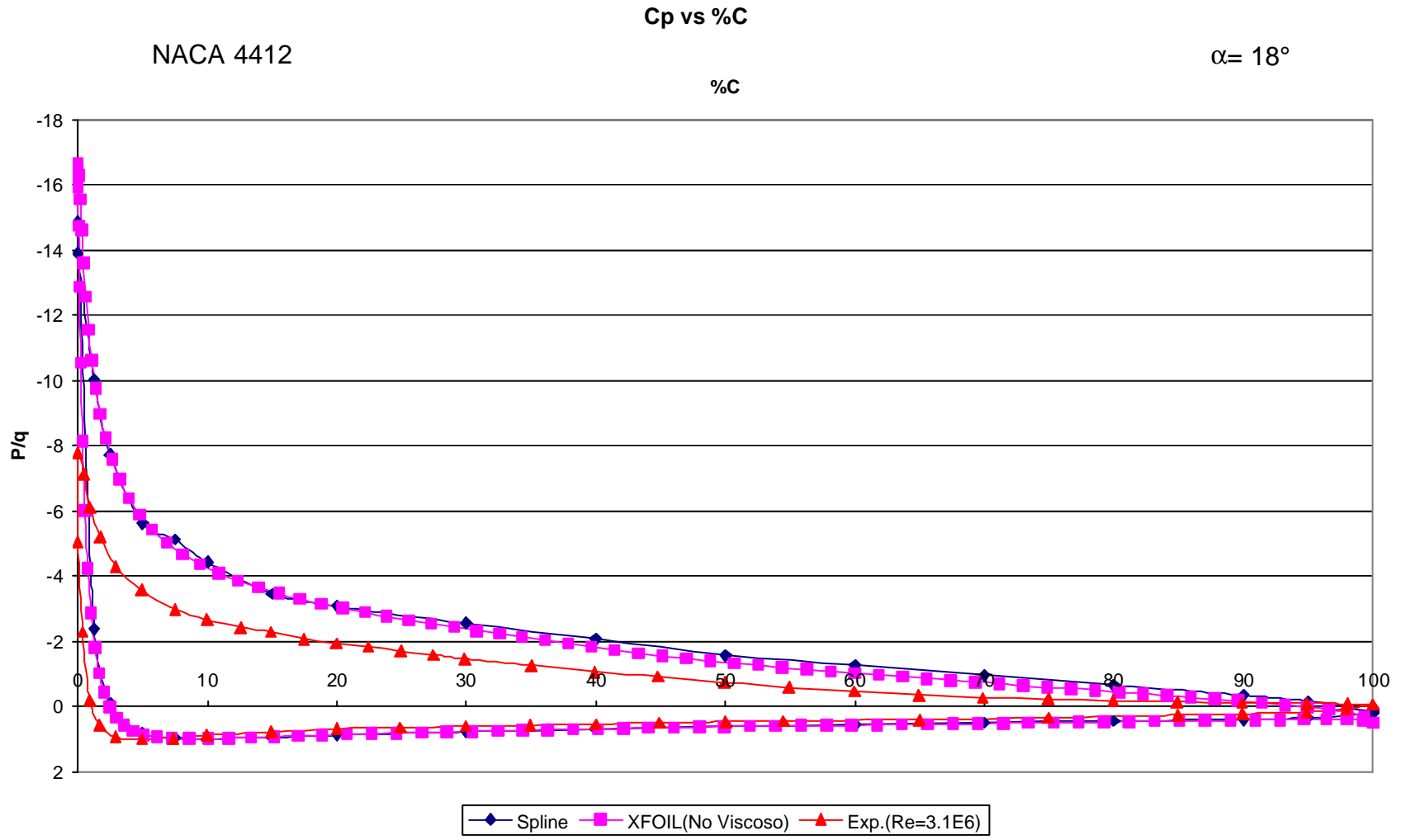


Figura 4.2.7. Distribución de Presiones del Perfil NACA 4412 para un $\alpha = 18^\circ$

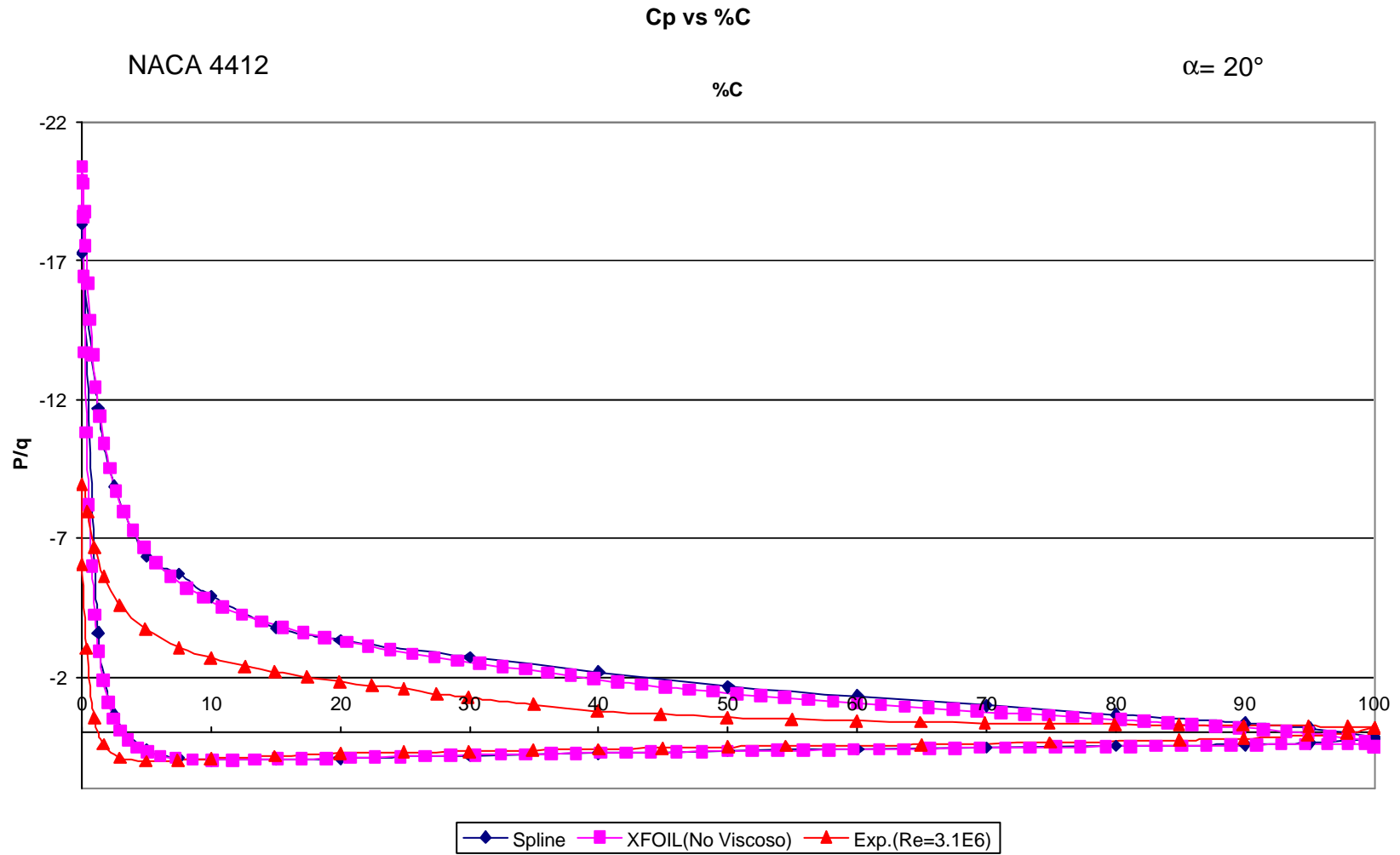


Figura 4.2.8. Distribución de Presiones del Perfil NACA 4412 para un $\alpha = 20^\circ$

CONCLUSIONES

CONCLUSIONES

Conclusiones

- Se presentó un método en el cual la velocidad de flujo en cualquier punto a lo largo de la superficie de un perfil se puede determinar. La velocidad del flujo potencial alrededor del perfil se expresó mediante una fórmula exacta y ninguna consideración se hizo en el análisis.
- En la teoría de perfil delgado ciertas aproximaciones han restringido su aplicación solamente para pequeñas curvaturas. Esta característica se ha evitado, y los resultados obtenidos tienen una aplicabilidad completa a perfiles de cualquier curvatura y espesor.
- El método Theodorsen ordinariamente usado para calcular las distribuciones de presiones en los perfiles, no es lo suficientemente preciso respecto a los datos experimentales cerca del borde de ataque como lo muestran las graficas de resultados para la predicción de los gradientes locales de presión.
- La distribución de presiones cerca de cualquier perfil puede ser calculada mediante el método Theodorsen, aunque el método es laborioso, los cálculos son demasiado largos como para permitir cálculos rápidos y fáciles para un gran número de perfiles.
- La precisión del método Theodorsen respecto a los resultados experimentales no aumenta a pesar de la implementación del método de interpolación mediante splines cúbicos.
- Un gran defecto del método Theodorsen es la predicción de una velocidad infinita en el borde de ataque.

REFERENCIAS
REFERENCIAS
Y
Y
BIBLIOGRAFIA
BIBLIOGRAFIA

Referencias y Bibliografía

- [1] Anderson J. D., Fundamentals of Aerodynamics, Third Edition, Ed. Mc Graw Hill, 2001.
- [2] Carmona A. I. Aerodinámica y Actuaciones del Avión, Ed. Paraninfo, 11ª Edición, 2001.
- [3]
<http://www.geocities.com/CapeCanaveral/Launchpad/5249/aerodinamica/terminologia.htm> (noviembre, 2005)
- [4] Abbott, I.H., Von Doenhoff, A.E., Theory of Wing Sections (Summary of Airfoil Data) Dover, New York, 1959.
- [5] Abbott, I.H., Von Doenhoff, A.E., Stivers L. S. Summary of Airfoil Data, NACA Report 824. 1945
- [6] Jacobs Eastman N., Ward Kenneth E., Pinkerton Robert M. "The Characteristics of 78 related airfoil sections from tests in the variable-density wind tunnel", NACA Report 460. 1932
- [7] Somers Dan M. President, Airfoils Incorporated, Research Engineer, NASA Langley Research Center, 122 Rose Drive, Port Matilda, PA 16870-9483, USA, Telephone: 1 (814) 357-0500, Facsimile: 1 (814) 357-0357, E-mail: dan@airfoils.com <http://www.airfoil.com> (Noviembre 2005)
- [8] Antonio Filippone, The University of Manchester, Dept. Mechanical, Aerospace, Civil Engineering , P.O. Box 88, Manchester M60 1QD , United Kingdom, Phone (+44) 161-200 3702 (direct), Fax (+44) 161- 200 3723, Email: filippone@aerodyn.org, <http://aerodyn.org> (Noviembre 2005)
- [9] Zingg D. W., Jay Liu P. Y., Kong F. M., Comparison of optimization and inverse design of long-endurance airfoils
- [10] Dahl S. Kristian, Fuglsang Peter. Design of the Wind Turbine Airfoil Family RISO-A-XX, Riso National Laboratory, Roskilde, Denmark, December 1998
- [11] Liebeck R. H. "Design of Subsonic Airfoils for High Lift", Aircraft J., Vol.15, No. 9, 1978 547-
- [12] Selig M. S. and Guglielmo J. J. High-Lift Low Reynolds Number Airfoil Design, Aircraft J. Vol. 34, No. 1, January-February 1997
- [13] Bradford E. Green et al. A Method for the Constrained Design of Natural Laminar Flow Airfoils 14th AIAA Applied Aerodynamics Conference, June 17-20, 1996, New Orleans, LA

- [14] Eppler R. and Somers Dan M. A computer program for the design and analysis of low-speed airfoils. NASA TM-80210
- [15] Eppler R. and Somers Dan M. Supplement to: A computer program for the design and analysis of low-speed airfoils. NASA TM-81862
- [16] Wayman T. R. Low Reynolds Number Airfoil Design Using The Eppler Method. AIAA Journal 1993
- [17] Volpe G., Melnik R. E., "The Role of constraints in the inverse design problem for transonic airfoils", AIAA Journal, 22, 1984, 12, 1770-1778.
- [18] Volpe G., Melnik R. E., "A method for designing closed airfoils for arbitrary supercritical speed distributions". Aircraft J.
- [19] Selig, M.S. and Maughmer, M.D. "Multipoint inverse airfoil design method based on conformal mapping", AIAA Journal, Vol. 30 No. 5, pp. 1162-1170, 1992
- [20] Theodorsen, Theodore, Theory of wing section of arbitrary shape, NACA Report No. 411. 1931.
- [21] Somers D.M. and Maughmer M.D. Theoretical Aerodynamic Analyses of Six Airfoils for Use on Small Wind Turbines. NREL/SR-500-33295. June 2003
- [22] Keith Jepson Jeffrey. Enhancements to the Inverse Design of Low Speed Natural Laminar Flow Airfoils. North Carolina State University. Aerospace Engineering. MSc Thesis. 2003
- [23] Csanady G. T. Theory of Turbomachines. Mc Graw Hill. 1964
- [24] Somers D.M. The S904 and S905 Airfoils. NREL/SR-500-36338. January 2005
- [25] Somers D.M. The S822 and S823 Airfoils. NREL/SR-500-36342. January 2005
- [26] Gopalarathnam Ashok and Selig M. S. Multipoint Inverse Method for Multielement Airfoil Design, Journal of Aircraft, Vol. 35, No. 3, May. June 1998
- [27] Somers D.M. The S829 Airfoil. NREL/SR-500-36337. January 2005
- [28] Jacobs, Eastman N.; and Pinkerton, Robert M.: Tests in the Variable-Density Wind Tunnel of Related Airfoils Having the Maximum Camber Unusually far Forward. NACA Rep. 537, 1935.
- [29] Jacobs, Eastman N.; Pinkerton, Robert M.; and Greenberg, Harry: Tests of Related Forward Camber Airfoils in the Variable Density Wind Tunnel. NACA Rep. 610, 1937.

[30] Karamcheti, Krishnamurty, Principles of Ideal-Fluid Aerodynamics, First Edition, Ed. John Wiley and Sons, Inc., 1966.

[31] Pinkerton M. Robert, Calculated and Measured Distributions over the Midspan Section of the N.A.C.A. 4412 Airfoil, NACA Report No. 563. 1937.

APPENDICE 1

APPENDICE 1

Apéndice 1

Evaluación de la formula $e_c = -\frac{1}{2p} \int_0^{2p} y \cot \frac{(j - j_c)}{2} dj$

Aunque la integral anterior se vuelve positivamente y negativamente infinita alrededor de $j = j_c$, es fácilmente verificable que para y finito, durante todo el intervalo $0 - 2p$, la integral permanece finita, las tiras infinitas positivas y negativas finitas se cancelan exactamente una con otra.

El valor de la integral para cualquier punto j_c puede ser obtenido con exactitud mediante el siguiente dispositivo. Sabemos que si y es una función continua y el rango de j_1 a j_2 no es demasiado grande.

$\frac{1}{2} \int_{j_1}^{j_2} y \cot \frac{(j - j_c)}{2} dj$ esta cercanamente a $y_A \log \frac{\sin \frac{j_2 - j_c}{2}}{\sin \frac{j_1 - j_c}{2}}$, donde y_A es el

valor medio de y en el rango de j_1 a j_2 . También cerca de $j = j_c$, podemos escribir

$$y = y_c + (j - j_c)y'_c + (j - j_c)^2 \frac{y''_c}{2} + \dots$$

Entonces para s una cantidad pequeña

$$\frac{1}{2} \int_{j_1+s}^{j_2-s} y \cot \frac{(j - j_c)}{2} dj = 2 \int_{j_1+s}^{j_2-s} y'_c \frac{(j - j_c)}{2} \cot \frac{(j - j_c)}{2} dj = 4sy'_c$$

(Ya que las potencias uniformes se omitan y el $\lim_{j \rightarrow 0} j \cot j = 1$)

Sea la división del intervalo $0 - 2p$ en 10 partes, comenzando con j_c como punto de referencia. (Ver figura 1)

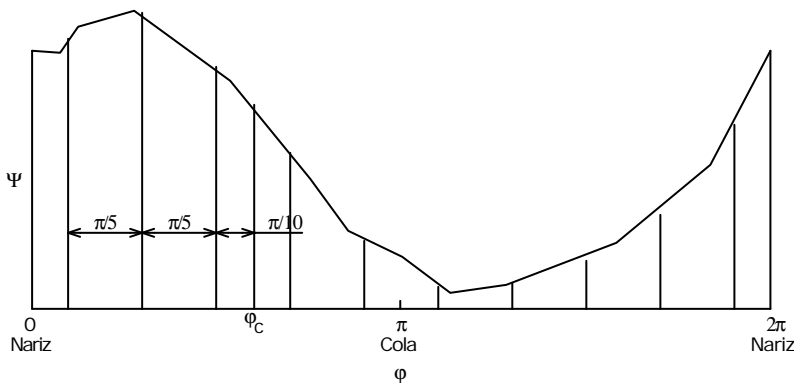


Figura 1. Curva y vs j , ilustrando el método de evaluación de j_c

$$j_c - \frac{p}{10} \text{ a } j_c + \frac{p}{10}, j_c + \frac{p}{10} \text{ a } j_c + \frac{3p}{10}, j_c + \frac{3p}{10} \text{ a } j_c + \frac{5p}{10}, j_c + \frac{5p}{10} \text{ a } j_c + \frac{7p}{10},$$

$$j_c + \frac{7p}{10} \text{ a } j_c + \frac{9p}{10}, j_c + \frac{9p}{10} \text{ a } j_c - \frac{9p}{10}, j_c - \frac{9p}{10} \text{ a } j_c - \frac{7p}{10}, j_c - \frac{7p}{10} \text{ a } j_c - \frac{5p}{10},$$

$$j_c - \frac{5p}{10} \text{ a } j_c - \frac{3p}{10} \text{ y } j_c - \frac{3p}{10} \text{ a } j_c - \frac{p}{10}.$$

Entonces,

$$e_c = -\frac{1}{2p} \int_0^{2p} y \cot \frac{(j-j_c)}{2} dj \cong -\frac{1}{p} \left[\frac{p}{5} y'_c + (y_1 - y_{-1}) \log \frac{\sin \frac{3p}{20}}{\sin \frac{p}{20}} + (y_2 - y_{-2}) \log \frac{\sin \frac{5p}{20}}{\sin \frac{3p}{20}} \right.$$

$$\left. + (y_3 - y_{-3}) \log \frac{\sin \frac{7p}{20}}{\sin \frac{5p}{20}} + (y_3 - y_{-3}) \log \frac{\sin \frac{7p}{20}}{\sin \frac{5p}{20}} + (y_4 - y_{-4}) \log \frac{\sin \frac{9p}{20}}{\sin \frac{7p}{20}} \right]$$

$$e_c = -\frac{1}{2p} \int_0^{2p} y \cot \frac{(j-j_c)}{2} dj \cong -\frac{1}{p} [0.628y'_c + 1.065(y_1 - y_{-1}) + 0.445(y_2 - y_{-2})$$

$$+ 0.231(y_3 - y_{-3}) + 0.104(y_4 - y_{-4})]$$

donde y'_c es la pendiente de la curva y en $j = j_c$

y_1 valor de y en $j = j_c + \frac{p}{5}$, y_{-1} en $j = j_c - \frac{p}{5}$, y_2 en $j = j_c + \frac{2p}{5}$, y_3 en $j = j_c + \frac{3p}{5}$, etcétera.

Para valorar la integral anterior, es, estrictamente hablando, necesario conocer y como una función de j en lugar de q ⁶. Tenemos $j = q + e$. Sin embargo, para todos los cuerpos planos o de línea de corriente, e es pequeño; para perfiles ordinarios es, de hecho, tan pequeño que $y(q)$ puede incondicionalmente ser considerado igual a $y(j)$. Sin embargo, por causa de la exactitud matemática demostraremos cómo puede ser solucionado el problema para cuerpos de contornos más irregulares mediante las aproximaciones sucesivas. Tenemos

$$y(j) = y(q) + ey'(q) + \dots$$

Como una primera aproximación negamos el segundo y todos los términos siguientes de esta expresión. El valor de e , por lo tanto se obtiene mediante la

⁶La ecuación para e es una ecuación integral no lineal y para obtener su solución exacta es un tema difícil; afortunadamente debido a la magnitud pequeña de e , la solución es alcanzable a cualquier exactitud deseada mediante integrales definidas ordinarias.

integración gráfica o de otra manera, entonces se usa en la expresión para $y(j)$ y una segunda integración es llevada a cabo, etcétera.

APPENDICE 2

APPENDICE 2

Apéndice 2 “Evaluación numérica de la integral e que ocurre en la teoría potencial de perfiles arbitrarios de Theodorsen⁷”

RESUMEN

Un más preciso método de evaluar la integral e que ocurre en la teoría potencial de perfiles arbitrarios de Theodorsen (Reportes NACA #411 y #452) es desarrollado manteniendo los términos de orden más alto en la expansión de Taylor y mediante el uso de la regla de Simpson. Las formulas son dadas para una rutina de calculo de la integral e y para los coeficientes computacionales necesarios. Los coeficientes computacionales son tabulados para una división de 40 puntos en un rango de integración de 0 a $2p$. Sin algún incremento en el trabajo computacional el error sistemático en el valor numérico de e es reducido del orden de 1% a aproximadamente 0.1%.

INTRODUCCIÓN

La solución del problema general por medio de la transformación conforme para el flujo cerca de un perfil arbitrario (referencias 1 y 2), un enrejado simétrico (referencia 3) y un biplano (referencia 4) involucra la determinación de la parte imaginaria de una función de transformación compleja, dada la parte real. Como se muestra en las referencias 1 y 2 la parte real puede ser extendida en una serie de Fourier y la parte imaginaria es la conjugada de la serie de Fourier. También se muestra en estas referencias que la parte imaginaria e puede ser obtenida de la parte real y mediante la siguiente ecuación funcional:

$$e(j') = -\frac{1}{2p} \int_0^{2p} y(j) \cot \frac{j-j'}{2} dj \quad (1)$$

Esta integral frecuentemente ocurre en los problemas de transformación conforme involucrando la evaluación de las funciones sobre un círculo. Un procedimiento para la evaluación numérica de esta integral es dado en las referencias 1 y 2. Este método, el cual es actualmente usado en el LMAL, da un error de aproximadamente 1.5% para una división de 40 puntos de rango de integración. Por lo tanto, una mejora en la precisión se desea, particularmente si el trabajo involucrado no se incrementa. Un método revisado dado aquí es encontrado para involucrar un poco menos de esfuerzo del que previamente era requerido y da un error aproximadamente cercano del 0.1%. Las constantes para el uso de este método más preciso son calculadas y presentadas en la tabla 1.

EVALUACIÓN DE LA INTEGRAL e

⁷ Traducido del reporte, Irvén Naiman, Numerical Evaluation of the e -integral occurring in the Theodorsen Arbitrary Airfoil Potencial Theory, NACA ARR L4D27a. April 1944. Las series de potencias originales fueron extendidas en la traducción a un número mayor de términos con la finalidad de obtener mayor precisión.

La evaluación de la integral e es complicada debido a la discontinuidad $j = j'$. Esta dificultad puede ser superada mediante una solución separada a lo largo de la discontinuidad. Cuando $s = j - j'$ se sustituye en la ecuación (1) se tiene:

$$e(j') = -\frac{1}{2p} \int_{-j'}^{2p-j'} y(j'+s) \cot \frac{s}{2} ds$$

o, debido a la periodicidad de esta función

$$e(j') = -\frac{1}{2p} \int_{-s}^{2p-s} y(j'+s) \cot \frac{s}{2} ds \quad (2)$$

La discontinuidad ahora ocurre en $s=0$. Para propósitos de evaluación numérica esta integral puede ser separada como sigue:

$$e(j') = -\frac{1}{2p} \left[\int_{-s}^s y(j'+s) \cot \frac{s}{2} ds + \int_s^{2p-s} y(j'+s) \cot \frac{s}{2} ds \right] \quad (3)$$

$$e(j') = e_1 + e_2$$

Donde

$$e_1 = -\frac{1}{2p} \int_{-s}^s y(j'+s) \cot \frac{s}{2} ds \quad (4)$$

y

$$e_2 = -\frac{1}{2p} \int_s^{2p-s} y(j'+s) \cot \frac{s}{2} ds \quad (5)$$

Evaluación de e_1 . - La primera integral e_1 incluye la discontinuidad y el límite s puede ser tomado como algún valor conveniente pequeño. Mediante una expansión en serie de Taylor la integral es fácilmente evaluada como sigue:

$$y(j'+s) = y(j') + \frac{s}{1!} y'(j') + \frac{s^2}{2!} y''(j') + \frac{s^3}{3!} y'''(j') + \dots$$

Cuando esta expansión se sustituye en la ecuación (4) las integrales contienen derivadas de igual orden y se encuentra que son idénticamente igual a cero. La ecuación (4) entonces se vuelve:

$$e_1 = -\frac{1}{2p} \left[y' \int_{-s}^s s \cot \frac{s}{2} ds + \frac{y'''}{3!} \int_{-s}^s s^3 \cot \frac{s}{2} ds + \frac{y^{(5)}}{5!} \int_{-s}^s s^5 \cot \frac{s}{2} ds \right] \quad (6)$$

donde las derivadas son evaluadas en j' . La expansión de Taylor para $\cot \frac{s}{2}$

es:

$$\cot \frac{s}{2} = \frac{2}{s} - \frac{1}{6} s - \frac{1}{360} s^3 - \frac{1}{15120} s^5 + s(s^6)$$

y por lo tanto la ecuación (6) se obtiene integrando y sustituyendo como:

$$e_1 = -\frac{1}{2p} \left[4sy' \left(1 - \frac{s^2}{36} - \frac{s^4}{3600} - \frac{s^6}{211680} \dots \right) + \frac{2}{9} s^3 y'' \left(1 - \frac{s^2}{20} - \frac{s^4}{1680} - \frac{s^6}{90720} \dots \right) + \frac{s^5}{150} y^{(3)} \left(1 - \frac{5s^2}{84} - \frac{s^4}{1296} - \frac{s^6}{66528} \dots \right) + \frac{s^7}{8820} y^{(4)} \left(1 - \frac{7s^2}{108} - \frac{7s^4}{7920} - \frac{s^6}{56160} \dots \right) + \dots \right] \quad (7)$$

Evaluación de e_2 . - La segunda integral e_2 (ecuación (5)) puede ser reordenada por conveniencia en cálculos numéricos como sigue:

$$e_2 = -\frac{1}{2p} \left[\int_s^p y(j'+s) \cot \frac{s}{2} ds + \int_p^{2p-s} y(j'+s) \cot \frac{s}{2} ds \right]$$

$$e_2 = -\frac{1}{2p} \left[\int_s^p y(j'+s) \cot \frac{s}{2} ds + \int_s^p y(j'-s) \cot \frac{s}{2} ds \right] \quad (8)$$

$$e_2 = -\frac{1}{2p} \left\{ \int_s^p [y(j'+s) - y(j'-s)] \cot \frac{s}{2} ds \right\}$$

donde $-s$ ha sido sustituida por s en la segunda integral y los limites han sido reacomodados.

MÉTODOS NUMÉRICOS

Método de la referencia 1. - En la referencia 1 el intervalo 0 a $2p$ es dividido en n partes iguales en magnitud $2p/n$ (n es un número par). Los valores de y son designados $y_{-\frac{n}{2}}, y_{-\frac{n}{2}+1}, \dots, y_{-1}, y_0, y_1, y_{\frac{n}{2}}$, donde y_0 es el valor de y en $j = j'$ y $y_{-\frac{n}{2}} = y_{\frac{n}{2}}$ es el valor en $j = j' \pm p$. Las integraciones se desarrollan sobre los intervalos de ancho $2p/n$ con los valores de y en el punto medio del intervalo. El rango de integración para e_1 es desde $s = -p/n$ hasta $s = p/n$ y para e_2 desde p/n hasta $2p - \frac{p}{n}$.

La primera integral e_1 es evaluada conservando únicamente los términos de primer orden en s :

$$e_1 \cong -\frac{1}{2p} 4sy_0' = -\frac{2s}{p} y_0' = -\frac{2p}{pn} y_0' = -\frac{2}{n} y_0' \quad (9)$$

donde la pendiente y_0' es determinada gráficamente en y_0 , esto es en $j = j'(s=0)$.

La segunda integral e_2 esta compuesta de la suma de las integrales que cruzan cada intervalo

$$e_2 = -\frac{1}{2p} \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{2k-1}{n}p}^{\frac{2k+1}{n}p} y(j'+s) \cot \frac{s}{2} ds$$

La función y no cambia mucho a través del intervalo y por lo tanto es aproximada mediante el uso del valor en el punto medio $y_k = y\left(j' + \frac{2kp}{n}\right)$.

Entonces,

$$e_2 = -\frac{1}{2p} \sum_{k=1}^{n-1} y_k \int_{\frac{2k-1}{n}p}^{\frac{2k+1}{n}p} \cot \frac{s}{2} ds$$

$$e_2 = -\frac{1}{p} \sum_{k=1}^{n-1} y_k \log \frac{\sin \frac{2k+1}{2n} p}{\sin \frac{2k-1}{2n} p}$$

o, mediante la ecuación (8), con $y_{n-k} = y_{-k}$

$$e_2 = -\frac{1}{p} \sum_{k=1}^{n/2} a_k (y_k - y_{-k}) \quad (10)$$

donde

$$\left. \begin{aligned} a_k &= \log \frac{\sin \frac{2k+1}{2n} p}{\sin \frac{2k-1}{2n} p} \\ a_{\frac{n}{2}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

La integral completa es dada por $e = e_1 + e_2$, o

$$e = -\left\{ \frac{2}{n} y_0 + \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{n/2} a_k (y_k - y_{-k}) \right\} \quad (12)$$

Los valores de las constantes a_k en la referencia fueron de $n=10$ y en la referencia 2 de $n=20$. Los valores revisados para estas constantes para $n=40$ se proporcionan en la tabla 2.

Método mejorado.- Se mostrara una mejora en la precisión numérica de la evaluación de la integral e mediante el siguiente método: el intervalo 0 a $2p$ es dividido en n partes iguales y los valores de y son designados como en la

sección previa. La segunda integral e_2 es evaluada mediante la regla de Simpson desde y_1 hasta y_{n-1} ($y_{n-1} = y_{-1}$). Por lo tanto, el rango de integración para e_1 es del doble de grande que el de la sección previa, esto es desde $s = -2p/n$ hasta $s = 2p/n$. La aproximación en la que solo el término de primer orden de la ecuación (7) es insuficiente y las derivadas más altas deben ser usadas. Estas derivadas deben obtenerse convenientemente mediante diferenciación numérica.

Las formulas de Newton-Stirling para derivadas (referencia 5, p. 75) son

$$\left. \begin{aligned} sy' &= dy - \frac{1}{6}d^3y + \frac{1}{30}d^5y - \dots \\ s^3y''' &= d^3y - \frac{1}{4}d^5y + \dots \\ s^5y^V &= d^5y - \dots \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

donde s = intervalo tabular ($2p/n$). La diferencia central media dy puede ser expresada en términos de los valores tabulares como

$$\left. \begin{aligned} 2dy &= y_1 - y_{-1} \\ 2d^3y &= y_2 - 2y_1 + 2y_{-1} - y_{-2} \\ 2d^5y^V &= y_3 - 4y_2 + 5y_1 - 5y_{-1} + 4y_{-2} - y_{-3} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

La sustitución de las relaciones (13) en la ecuación (7) resulta

$$\begin{aligned} e_1 &= -\frac{1}{2p} \left[2dy \left(2 - \frac{s^2}{18} - \frac{s^4}{1800} - \frac{s^6}{105840} - \dots \right) - 2d^3y \left(\frac{2}{9} - \frac{s^2}{270} - \frac{s^4}{37800} - \frac{s^6}{2857680} - \dots \right) \right. \\ &\quad \left. + d^5y \left(\frac{19}{450} - \frac{s^2}{1512} - \frac{31s^4}{6804000} - \frac{37s^6}{628689600} - \dots \right) - \dots \right] \end{aligned} \quad (15)$$

La sustitución adicional de la relación (14) en la ecuación (15) resulta como

$$\begin{aligned}
e_1 = & -\frac{1}{2p} \left\{ (y_1 - y_{-1}) \left[\left(2 + \frac{4}{9} + \frac{19}{90} + \dots \right) - \frac{s^2}{18} \left(1 + \frac{2}{15} + \frac{5}{84} + \dots \right) - \frac{s^4}{1800} \left(1 + \frac{2}{21} + \frac{31}{756} + \dots \right) \right. \right. \\
& - \frac{s^6}{105840} \left(1 + \frac{2}{27} + \frac{37}{1188} + \dots \right) - \dots \left. \right] - (y_2 - y_{-2}) \left[\left(\frac{2}{9} + \frac{38}{225} + \dots \right) - s^2 \left(\frac{1}{270} + \frac{1}{378} + \dots \right) \right. \\
& - \frac{s^4}{37800} \left(1 + \frac{31}{45} + \dots \right) - \frac{s^6}{2857680} \left(1 + \frac{37}{55} + \dots \right) - \dots \left. \right] - (y_3 - y_{-3}) \left[\left(\frac{19}{450} + \dots \right) - s^2 \left(\frac{1}{1512} + \dots \right) \right. \\
& \left. \left. - s^4 \left(\frac{31}{6804000} + \dots \right) - s^6 \left(\frac{37}{628389600} + \dots \right) - \dots \right] \right\}
\end{aligned}$$

o

$$e_1 = b_1(y_1 - y_{-1}) + b_2(y_2 - y_{-2}) + b_3(y_3 - y_{-3}) \quad (16)$$

donde

$$\begin{aligned}
b_1 = & \frac{1}{2p} \left[\left(2 + \frac{4}{9} + \frac{19}{90} + \dots \right) - \frac{s^2}{18} \left(1 + \frac{2}{15} + \frac{5}{84} + \dots \right) - \frac{s^4}{1800} \left(1 + \frac{2}{21} + \frac{31}{756} + \dots \right) - \right. \\
& \left. \frac{s^6}{105840} \left(1 + \frac{2}{27} + \frac{37}{1188} + \dots \right) - \dots \right] \\
b_1 = & \frac{1}{2p} \left(\frac{239}{90} - \frac{167s^2}{2520} - \frac{859s^4}{1360800} - \frac{1313s^6}{125737920} - \dots \right) \\
b_2 = & -\frac{1}{2p} \left[\left(\frac{2}{9} + \frac{38}{225} + \dots \right) - s^2 \left(\frac{1}{270} + \frac{1}{378} + \dots \right) - \frac{s^4}{37800} \left(1 + \frac{31}{45} + \dots \right) - \right. \\
& \left. \frac{s^6}{2857680} \left(1 + \frac{37}{55} + \dots \right) - \dots \right] \\
b_2 = & -\frac{1}{2p} \left[\frac{88}{225} - \frac{2}{315} s^2 - \frac{19s^4}{425250} - \frac{23s^6}{39293100} - \dots \right] \\
b_3 = & \frac{1}{2p} \left(\frac{19}{450} - \frac{s^2}{1512} - \frac{31s^4}{6804000} - \frac{37s^6}{628689600} - \dots \right)
\end{aligned} \quad (17)$$

La segunda integral e_2 es evaluada mediante la regla de Simpson desde y_1 hasta y_{n-1} :

$$e_2 = -\frac{1}{2p} \frac{2p}{3n} \left[y_1 \cot \frac{p}{n} + 4y_2 \cot \frac{2p}{n} + 2y_3 \cot \frac{3p}{n} + \dots + y_{n-1} \cot \frac{(n-1)p}{n} \right]$$

o escrito, mediante la ecuación (8), con $y_{n-k} = y_{-k}$

$$\mathbf{e}_2 = \sum_{k=1}^{n/2} c_k (\mathbf{y}_{-k} - \mathbf{y}_k) \quad (13)$$

donde

$$\left. \begin{array}{l} c_1 = \frac{1}{3n} \cot \frac{p}{n} \\ \cdot \\ \cdot \\ c_k = \frac{a}{3n} \cot \frac{kp}{n} \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{\frac{n}{2}} = 0 \end{array} \right\} \quad (19)$$

donde (excepto en el primer termino) $a = 2$ para k impar y $a = 4$ para k par. La integral completa es dada por $\mathbf{e} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, o como sigue

$$\mathbf{e} = \sum_{k=1}^{n/2} A_k (\mathbf{y}_{-k} - \mathbf{y}_k) \quad (20)$$

donde

$$A_k = b_k + c_k \quad (21)$$

Los valores de A_k para $n = 40$ se muestran en la tabla 1.

PRECISIÓN DE LA EVALUACIÓN

La precisión de los dos métodos de evaluación descritos puede ser determinada integrando varias armónicas. Los resultados son presentados como relaciones de los valores integrados para el valor correcto de manera que un valor de unidad sea una evaluación correcta. Los valores de esta relación para las armónicas son:

Armónica	40 puntos, método de la referencia 1	40 puntos, presente método
1	1.01434	0.99977
2	1.02662	1.00044
3	1.03700	0.99940
4	1.04547	1.00060
5	1.05280	0.99840
10	1.06112	0.95420

Considerando que las armónicas más altas generalmente entran en una proporción mucho más pequeña que las más bajas para tales contornos que son encontrados para formas de perfil, el error de los 40 puntos del método de la referencia 1 es del orden de 1.5%, mientras que el del presente método es aproximadamente del 0.1%.

Tabla 1. Valores de A_k para usar con la ecuación (20)

k	A_k	k	A_k
	$n = 40$		$n = 40$
1	0.52827	11	0.01423
2	0.14824	12	0.02422
3	0.07614	13	0.01021
4	0.10259	14	0.01698
5	0.04024	15	0.0069
6	0.06542	16	0.01083
7	0.0272	17	0.004
8	0.04588	18	0.00528
9	0.01951	19	0.00066
10	0.03333	20	0

Tabla 2. Valores de a_k para usar con la ecuación (12); método de las referencias 1 y 2.

k	a_k		
	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$
1	1.06544	1.09037	1.09656
2	0.44311	0.49426	0.50671
3	0.23117	0.31141	0.33028
4	0.10302	0.2175	0.24303
5	0	0.15773	0.19028
6		0.1144	0.15453
7		0.08024	0.12841
8		0.05115	0.10826
9		0.02493	0.09207
10		0	0.07862
11			0.06714
12			0.05711
13			0.04816
14			0.04004
15			0.03255
16			0.02553
17			0.01887
18			0.01245
19			0.00318
20			0

REFERENCIAS

1. Theodorsen, Theodore: Theory of Wing Sections of Arbitrary Shape. NACA Rep.#411, 1931
2. Theodorsen, Theodore and Garrick, I. E.: General Potential Theory of Arbitrary Wing Sections. NACA Rep.#452, 1933
3. Garrick, I. E.: On the Plane Potential Flow Past a Symmetrical Lattice of Arbitrary Airfoils. NACA ARR #4A07, 1944

4. Garrick, I. E.: Potential Flow About Arbitrary Biplane Wing Sections. NACA Rep. #542, 1936
5. Davis, Harold T.: Tables of the Higher Mathematical Functions. Vol. 1. The Principia Press, Inc. (Bloomington, Ind), 1935, p. 75

APPENDICE 3

APPENDICE 3

Apéndice 3 Interpolación Spline

Se sabe que se requieren polinomios de un elevado grado para obtener una aproximación precisa y que estos tienen algunas serias desventajas. Todos tienen una naturaleza oscilatoria, y una fluctuación sobre una pequeña porción del intervalo que puede inducir grandes fluctuaciones sobre todo el rango.

Una aproximación alternativa es dividir el intervalo en una colección de subintervalos y construir un polinomio de aproximación diferente en cada subintervalo. Esto es llamado **aproximación polinomial por pedazos**.

La aproximación polinomial por pedazos más simple consiste de la unión de un conjunto de puntos dato $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$ mediante una serie de líneas rectas.

Una desventaja de la aproximación lineal es que la aproximación generalmente no es diferenciable en los puntos finales de los subintervalos, de manera que la función de interpolación no es “suave” en esos puntos. Es claro que de las condiciones físicas se requiere suavidad, y que la función de aproximación debe ser continuamente diferenciable.

Un remedio para este problema es usar un polinomio por pedazos de Hermite. Por ejemplo, si los valores de f y f' son conocidos en cada uno de los puntos $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, se puede usar un polinomio cúbico de Hermite en cada uno de los subintervalos $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ para obtener una función de aproximación que tiene una derivada continua en el intervalo $[x_0, x_n]$. Para determinar el polinomio cúbico de Hermite adecuado sobre un intervalo dado, simplemente se calcula la función $H_3(x)$ para ese intervalo.

Los polinomios de Hermite son comúnmente usados en problemas de aplicación para estudiar el movimiento de partículas en el espacio. La dificultad con el uso de los polinomios por pedazos de Hermite para problemas de interpolación en general concierne a la necesidad de conocer la derivada de la función aproximada.

La aproximación polinomial por pedazos más común usa polinomios cúbicos entre pares de nodos y es llamada interpolación de splines cúbicos. Un polinomio cúbico general involucra cuatro constantes; así es que hay suficiente flexibilidad en el procedimiento de splines cúbicos para asegurar que la interpolación tiene dos derivadas continuas sobre el intervalo. Sin embargo, las derivadas del spline cúbico en general no concuerdan con las derivadas de la función, incluso en los nodos.

Interpolación de Splines Cúbicos

Dada una función f definida entre $[a, b]$ y un conjunto de nodos, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, una interpolación de splines cúbicos S , para una función f que satisface las siguientes condiciones:

- (a) Para cada $j = 0, 1, \dots, n-1$, $S(x)$ es un polinomio cúbico, denotado por $S_j(x)$, en el subintervalo $[x_j, x_{j+1})$.
- (b) $S_j(x) = f(x_j)$ para cada $j = 0, 1, \dots, n$.
- (c) $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$ para cada $j = 0, 1, \dots, n-2$.
- (d) $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$ para cada $j = 0, 1, \dots, n-2$.
- (e) $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$ para cada $j = 0, 1, \dots, n-2$.
- (f) Uno de los siguientes conjuntos de condiciones límite se debe cumplir:
- (i) $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ (Limite natural o libre)
- (ii) $S'(x_0) = f'(x_0)$ y $S'(x_n) = f'(x_n)$ (Limite sujeto).

Aunque los splines cúbicos son definidos con otras condiciones límites, las condiciones dadas en (f) son las más usadas en la práctica. Cuando las condiciones límites naturales se usan, el spline adopta la forma que una vara flexible larga tomaría si se le obligara a pasar por los puntos $\{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))\}$. Este spline continúa linealmente cuando $x \leq x_0$ y cuando $x \geq x_n$.

En general, las condiciones límite fijas llevan a aproximaciones más precisas debido a que incluyen más información acerca de la función. Sin embargo, para este tipo de condición límite, se necesitan valores de la derivada en los puntos finales o una aproximación precisa de estos valores.

Para construir la interpolación de splines cúbicos para una función dada f , las condiciones en la definición se aplican a los polinomios cúbicos

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3$$

para cada $j = 0, 1, \dots, n-1$.

Como

$$S_j(x_j) = a_j = f(x_j)$$

se puede aplicar la condición (c) para obtener

$$a_{j+1} = S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1}) = a_j + b_j(x_{j+1} - x_j) + c_j(x_{j+1} - x_j)^2 + d_j(x_{j+1} - x_j)^3$$

para cada $j = 0, 1, \dots, n-2$.

Debido a que el término $x_{j+1} - x_j$ se usa repetidamente en este desarrollo, es conveniente introducir una notación más simple

$$h_j = x_{j+1} - x_j$$

para cada $j = 0, 1, \dots, n-1$. También si se define $a_n = f(x_n)$, entonces la ecuación

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3 \quad (3.1)$$

se conserva para cada $j = 0, 1, \dots, n-1$.

De una forma similar, se define $b_n = S'(x_n)$ y se observa que

$$S'_j(x) = b_j + 2c_j(x - x_j) + 3d_j(x - x_j)^2 \quad (3.2)$$

implica que $S'_j(x) = b_j$ para cada $j = 0, 1, \dots, n-1$. Aplicando la condición (d) resulta

$$b_{j+1} = b_j + 2c_j h_j + 3d_j h_j^2 \quad (3.3)$$

para cada $j = 0, 1, \dots, n-1$.

Otra relación entre los coeficientes de S_j se obtiene definiendo $c_n = S''(x_n)/2$ y aplicando la condición (e). En este caso,

$$c_{j+1} = c_j + 3d_j h_j \quad (3.4)$$

para cada $j = 0, 1, \dots, n-1$.

Resolviendo para d_j en la ecuación (3.4) y sustituyendo este valor en las ecuaciones (3.1) y (3.3) resultan nuevas ecuaciones

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + \frac{h_j^2}{3}(2c_j + c_{j+1}) \quad (3.5)$$

y

$$b_{j+1} = b_j + h_j(c_j + c_{j+1}) \quad (3.6)$$

para cada $j = 0, 1, \dots, n-1$.

La relación final que involucra los coeficientes se obtiene resolviendo la ecuación apropiada en la forma de la ecuación (3.5) para b_j ,

$$b_j = (a_{j+1} - a_j) \frac{1}{h_j} - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1}) \quad (3.7)$$

y entonces, con una reducción del índice, para b_{j-1} , resulta

$$b_{j-1} = (a_j - a_{j-1}) \frac{1}{h_{j-1}} - \frac{h_{j-1}}{3} (2c_{j-1} + c_j)$$

Sustituyendo estos valores dentro de la ecuación derivada de la ecuación (3.6), cuando el índice es reducido por 1, resulta en un sistema lineal de ecuaciones

$$h_{j-1}c_{j-1} + 2(h_{j-1} + h_j)c_j + h_jc_{j+1} = \frac{3}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{3}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}) \quad (3.8)$$

para cada $j = 0, 1, \dots, n-1$. Este sistema involucra solo $\{c_j\}_{j=0}^n$ como incógnitas debido a que los valores de $\{h_j\}_{j=0}^{n-1}$ y $\{a_j\}_{j=0}^n$ son conocidos por el espaciado de los nodos $\{x_j\}_{j=0}^n$ y los valores $\{f(x_j)\}_{j=0}^n$.

Una vez que los valores de $\{c_j\}_{j=0}^n$ son determinados, es simple encontrar las constantes $\{b_j\}_{j=0}^{n-1}$ de la ecuación (3.7) y $\{d_j\}_{j=0}^{n-1}$ de la ecuación (3.4) y construir el polinomio cúbico $\{S_j(x)\}_{j=0}^{n-1}$. En el caso de un spline fijo, se necesitan ecuaciones que involucren $\{c_j\}$ que aseguren que $S'(x_0) = f'(x_0)$ y $S'(x_n) = f'(x_n)$. En la ecuación (3.2) se tiene $S'_j(x_0)$ en términos de b_j , c_j y d_j . Debido a que ahora se conocen b_j y d_j en términos de c_j , se puede usar esta ecuación para mostrar que las ecuaciones apropiadas son

$$2h_0c_0 + h_0c_1 = \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3f'(x_0) \quad (3.9)$$

y

$$h_{n-1}c_{n-1} + 2h_{n-1}c_n = 3f'(x_n) - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}). \quad (3.10)$$