TEORÍA DE CIRCUITOS

CAPÍTULO 12:

RESPUESTA EN FRECUENCIA

Cátedra de Teoría de Circuitos

Edición 2016

CAPITULO 11: RESPUESTA EN FRECUENCIA

1. Introducción:

Hasta ahora hemos analizado circuitos con fuentes senoidales, cuya frecuencia se mantenía constante. En este capítulo analizaremos el efecto de variación de la frecuencia de la fuente sobre las tensiones y corrientes del circuito. Debido al hecho de que las impedancias que muestran las inductancias y capacidades presentes son función de la frecuencia, veremos que la elección cuidadosa de dichos elementos nos permitirá construir circuitos selectivos en frecuencia, en cuya salida sólo existan componentes de las frecuencias que nos interesan. Numerosos dispositivos que se comunican mediante señales eléctricas, tales como teléfonos, radios, televisores, etc., emplean circuitos selectivos en frecuencia, o “filtros”.

El nombre de filtro proviene de su habilidad para eliminar (“filtrar”) determinadas señales de entrada, o componentes de la señal de entrada, en base a su frecuencia. Si bien en la realidad es imposible eliminar totalmente las frecuencias seleccionadas, los filtros “atenúan” (o sea, debilitan) las frecuencias que pertenezcan a una banda determinada. Como consecuencia de esto, el módulo de la función transferencia $H(j\omega)$ mostrará un máximo de amplitud en la frecuencia que nos interesa obtener a la salida, frecuencia que entonces pasará a denominarse “***frecuencia de resonancia de amplitud***”.

Por otro lado, hemos visto que en los circuitos en que existen inductores y capacitores, sea cual fuere su configuración, a determinadas frecuencias las d.d.p. entre extremos de los mismos pueden ser superiores, en valor absoluto, a la d.d.p. en bornes de la fuente de alimentación, cosa que no ocurre si los circuitos son resistivos puros, pudiendo incluso llegar a cancelarse los efectos inductivos y capacitivos. Este hecho puede justificarse como una consecuencia del intercambio de energía entre el campo magnético de las inductancias y el campo eléctrico de los capacitores, y la frecuencia a la cual se produce la cancelación se denomina ***frecuencia de resonancia de fase***, debido a que el circuito se comporta como resistivo puro y la tensión y la corriente quedan en fase.

En la primera parte de este capítulo analizaremos la respuesta de un circuito para aquellas frecuencias a las cuales la tensión queda en fase con la corriente, con lo que el circuito presenta un comportamiento resistivo puro (**resonancia de fase**) y en la segunda parte buscaremos la o las frecuencias a las cuales el módulo de la función transferencia presenta un máximo (**resonancia de amplitud).**

1. Resonancia de fase

1.1. Resonancia de fase en un circuito serie:

El fenómeno de resonancia de fase aparece en un circuito cuando, a una frecuencia particular, los efectos capacitivos e inductivos en un circuito se cancelan uno a otro, es decir, las reactancias tienen el mismo valor absoluto, por lo que el circuito se comporta como puramente resistivo.

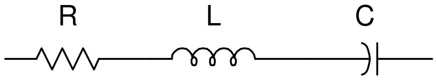


fig. 1

Para la rama mostrada, la impedancia es:

$$Z = R + jX = R + j\,\omega L - j\frac{1}{\omega C} = R + j\left(\omega L \quad \frac{1}{\omega C}\right)$$

expresión en la cual vemos que podemos encontrar una frecuencia para la cual las reactancias serán iguales y opuestas, de donde X = 0.

$$\omega_o L - \frac{1}{\omega_o C} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_o L = \frac{1}{\omega_o C} \quad \Rightarrow \quad \omega_o^2 = \frac{1}{L C}$$

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{L C}} \qquad f_0 = \frac{1}{2 \pi \sqrt{L C}}$$

Esta frecuencia f_o recibe el nombre de *frecuencia de resonancia de fase*

Gráficamente, podemos trazar las curvas de reactancia y módulo de impedancia del circuito:

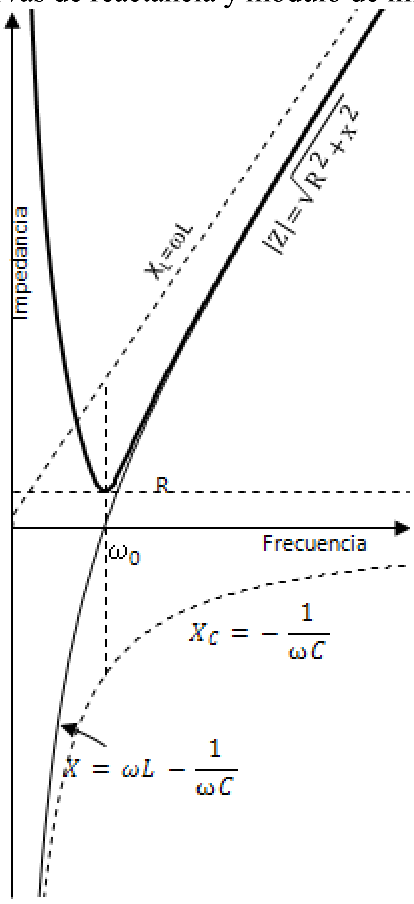


Fig. 2

Si trazamos los diagramas fasoriales correspondientes a los distintos comportamientos (inductivo, resistivo, capacitivo), veremos que, efectivamente, las tensiones en bornes de L o C pueden superar la tensión de alimentación. Estas altas tensiones pueden ser peligrosas, sobre todo si tenemos en cuenta que las mismas pueden ser 50 o 100 veces mayores que la alimentación, con el consiguiente riesgo para el operador y para el propio circuito.

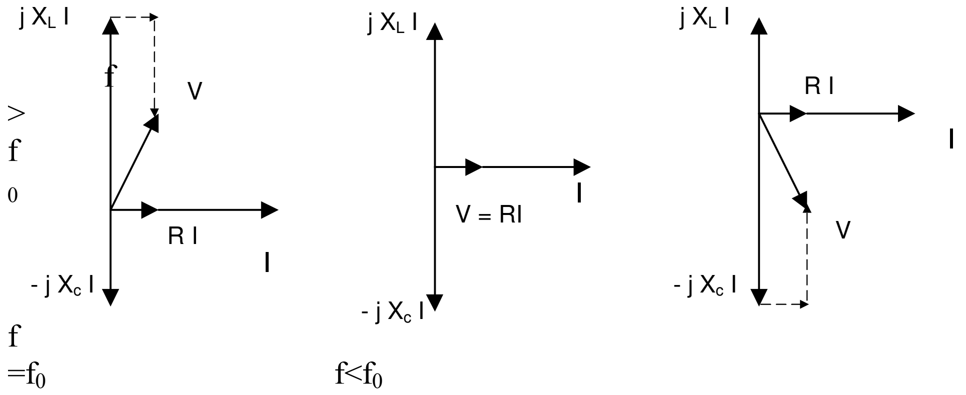


Fig. 3

Analizando la figura 2 podemos hacer varios comentarios:

1) Las curvas de X_L (recta) y de X_C (hipérbola rectangular) son función de la frecuencia. Su suma es la reactancia total del circuito, y va desde un valor negativo grande, cruza el eje real en ω_o y llega a valores positivos indefinidamente grandes, asintóticamente a la reactancia inductiva.

2) La recta horizontal representa la R constante, o sea, la suponemos independiente de la frecuencia. Interesa conocer el valor correcto de R a frecuencias próximas a resonancia.

3) La curva de *z* es la suma vectorial de R y X, o sea $z = \sqrt{R^2 + X^2}$ cuya representación tiene la forma de una curva en V, ligeramente redondeada en la parte inferior hasta ser tangencial a R. Salvo a $f \approx f_o$, es casi idéntica en magnitud a X.

1.2 Curvas de admitancia

Ahora bien, desde el punto de vista práctico, casi toda la información importante acerca del comportamiento del circuito en resonancia está contenida en el extremo redondeado de la curva en V, donde no se visualiza bien. Por eso es mas útil representar la admitancia, Y = 1 / Z, como se muestra en la figura 4, lo cual hace posible mostrar claramente el efecto de distintos valores de R, siendo casi imperceptible este efecto en la curva de figura 2.

Como **y** es pequeña a frecuencias lejanas de la de resonancia, se ha representado con una escala de frecuencias extendida, dejando solo un 10% a cada lado de ω_o . La escala de frecuencias es logaritmica, lo cual simetriza la curva respecto a la recta vertical $\omega_{o,}$ según analizaremos más adelante en este mismo capítulo. También se trazó la característica del ángulo de la admitancia, el cual es positivo a bajas frecuencias (circuito capacitivo), cero en resonancia (circuito resistivo) y negativo a altas frecuencias (circuito inductivo).

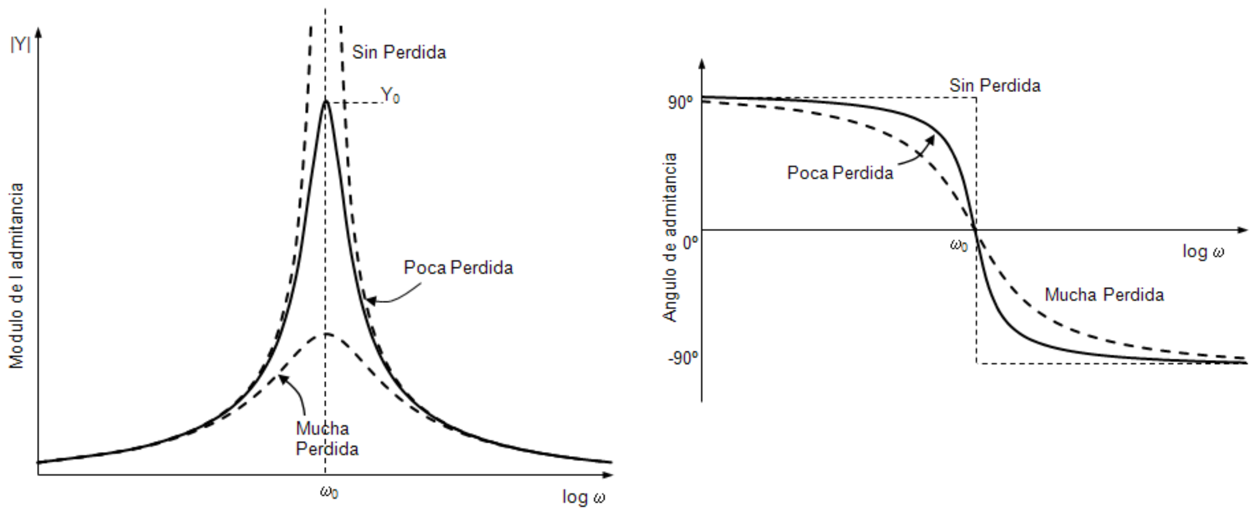


Fig. 4: Admitancia de un circuito serie, módulo y fase

En la curva de figura 4 queda claramente evidenciada la incidencia del valor de R, dado que la altura de la curva en resonancia está determinada por la resistencia del circuito, siendo 1/R el valor máximo. La curva correspondiente a un valor de R elevado es mas achatada que la correspondiente a un valor de R bajo, y si R = 0 Ω la curva es infinitamente alta (circuito sin pérdidas). A frecuencias alejadas de la de resonancias, las tres curvas se confunden, siendo indistinguibles entre sí.

1.3 Obtención de una expresión general de Z:

En ocasiones, y al solo efecto de facilitar el análisis de las modificaciones de la impedancia en función de la frecuencia, es conveniente modificar la expresión de Z, poniéndola en función de ciertos parámetros, que definiremos a continuación:

a) frecuencia de resonancia:

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

b) desintonización fraccional relativa:

$$\delta = \frac{\omega - \omega_o}{\omega_o}$$

c) reactancia del inductor a frecuencia de resonancia:

$$\omega_o L = \frac{1}{\omega_o C} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

c) Capacidad del capacitor:

$$C = \frac{1}{\omega_o^2 L}$$

e) Factor de merito o calidad del inductor: se define como la relación entre la tensión en bornes de L en condiciones de resonancia y la tensión en la fuente en las mismas condiciones:

$$Q = \frac{U_{L_o}}{U_o} = \frac{U_{L_o}}{U_{R_o}} = \frac{X_o}{R} = \frac{\omega_o L}{R}$$

Retomemos ahora la expresión de Z:

$$Z = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) \qquad \text{a una frecuencia cualquiera}$$

Expresando C en función de ω_o y C llegamos a que:

$$Z = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega \frac{1}{\omega_o^2 L}}) = R + j(\omega L - \frac{\omega_o^2 L}{\omega})$$

Podemos ahora reescribir Z de manera que se evidencia el factor de mérito Q:

$$Z = R + j\omega_o L(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}) = R_o[\frac{R}{R_o} + j\frac{\omega_o L}{R_o}(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega})]$$
$$= R_o[\frac{R}{R_o} + jQ_o(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega})]$$

Esta expresión es clara, pero si $\omega \approx \omega_o$ no es útil, pues nos da una diferencia muy pequeña en el paréntesis. Para evitar esto, introducimos un nuevo símbolo para representar la diferencia entre la frecuencia real y la de resonancia, que es la **desintonización fraccional** δ, que definimos anteriormente. A partir de la misma, podemos expresar que:

$$\delta = \frac{\omega}{\omega_o} - 1 \quad \Rightarrow \quad \delta + 1 = \frac{\omega}{\omega_o} \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_o}{\omega} = \frac{1}{1+\delta}$$

de donde:

$$\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega_o} = \delta + 1 - \frac{1}{1+\delta} = \frac{\delta^2 + 2\,\delta + 1 - 1}{1+\delta} = \delta\frac{2+\delta}{1+\delta}$$

reemplazando en la expresión de Z llegamos a que:

$$Z = R_o\left[\frac{R}{R_o} + j\,Q_o\,\delta\frac{2+\delta}{1+\delta}\right]$$

la cual, en lo formal, es tan general como la de partida.

Aproximaciones:

Analizando la última expresión podemos ver que surgen dos aproximaciones posibles:

- Que la resistencia pueda considerarse constante para el rango de frecuencias en análisis, por lo que $R = R_o$, resultando:

$$Z = R\left[\,1 + j\,Q_o\,\delta\frac{2+\delta}{1+\delta}\right]$$

Esta aproximación es válida para **audiofrecuencias**, es decir frecuencias menores a 20 kHz.

- Que el valor numérico de la resistencia sea proporcional a la frecuencia, por lo que será:

$$\frac{R}{R_o} = \frac{\omega}{\omega_o} = 1 + \delta$$

de donde:

$$Z = R_o\left[\,(1+\delta) + j\,Q_o\frac{2+\delta}{1+\delta}\right]$$

Esta aproximación es válida en el rango de **radiofrecuencias.**

Ninguna de estas aproximaciones es válida para todas las frecuencias, y, de hecho, en frecuencias próximas a la de resonancia $\delta \ll 1$, por lo que cualquiera de las dos expresiones anteriores se reduce a:

$$Z = R_o[1 + j\,2\,Q_o\,\delta]$$

y la impedancia en resonancia ($\delta = 0$) es $\mathbf{R_o}$ tanto para la formula exacta como para la aproximada.

La expresión de la admitancia será:

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R_o(1 + j\,2\,Q_o\,\delta)} = \frac{Y_o}{1 + j\,2\,Q_o\,\delta}$$

de donde:

$$\frac{Y}{Y_o}=\frac{1}{1+j\,2\,Q_o\,\delta}$$

1.4 Curva universal de resonancia

A partir de la última expresión, podemos graficar el cociente Y/Y_o en función de $Q_o\,\delta$. Esta gráfica se conoce como *curva universal de resonancia*, en la que se representa la relación de módulos y/y_o (denominada "componente total"), cuyo valor máximo es 1 a $\omega = \omega_0$, ya que a esa frecuencia la desintonización es nula. En el eje horizontal de la gráfica se representa el producto de la desintonización fraccional por el factor de mérito, $Q_o\,\delta$. A este producto se lo designa con la letra **a** y se lo denomina ***desintonización fraccional relativa***.

Si en vez de graficar **Y/Y_o** vs **a** hubiéramos hecho **Y/Y_o** vs **δ,** para circuitos de alto Q tendríamos curvas estrechas y agudas (sintonización definida, circuitos muy selectivos), y para valores de Q bajos, curvas anchas (poca selectividad), es decir, una familia de curvas Al incluir Q_0, todas las curvas coinciden.

Dado que **Y/Y_o** es un número complejo, podemos:

- graficar el ***módulo*** de dicho complejo, representación que recibe el nombre de ***componente total,*** y cuyo valor máximo es 1 a $\omega = \omega_0$, ya que a esa frecuencia la desintonización δ es nula.

$$\frac{y}{y_o}=\frac{\sqrt{1+(2\,Q_o\,\delta\,)^2}}{1+(2\,Q_o\,\delta\,)^2}=\frac{1}{\sqrt{1+(2\,Q_o\,\delta\,)^2}} \qquad \textit{componente total}$$

- graficar la ***componente real*** y la ***componente imaginaria*** del número complejo Y/Y_0, las cuales se hallan como se muestra a continuación:

$$\frac{Y}{Y_o}=\frac{1}{1+j\,2\,Q_o}=\frac{1-j\,2\,Q_o\,\delta}{1+(2\,Q_o\,\delta)^2}=\frac{G}{Y_o}+j\frac{B}{Y_o}$$

siendo:

$$\frac{G}{Y_o}=\frac{1}{1+(2\,Q_o\,\delta\,)^2} \qquad \textit{componente real}$$

$$\frac{B}{Y_o}=-\frac{2\,Q_o\,\delta}{1+(\,2\,Q_o\,\delta\,)^2} \qquad \textit{componente imaginaria}$$

Recordemos que son expresiones aproximadas, pero el error cometido es pequeño si Q>20. A partir de estas expresiones podemos observar que:

- a frecuencias alejadas de la de resonancia, ($\delta >> 1$), Y y B son prácticamente iguales en magnitud y G es muy pequeña.

- para $\omega \rightarrow \omega_o$ G se incrementa rápidamente hasta ser igual a B, sigue aumentando y B desciende abruptamente hasta que,

- para $\omega = \omega_o$, la componente imaginaria se anula (B = 0) y la componente total iguala a la real (y = G).

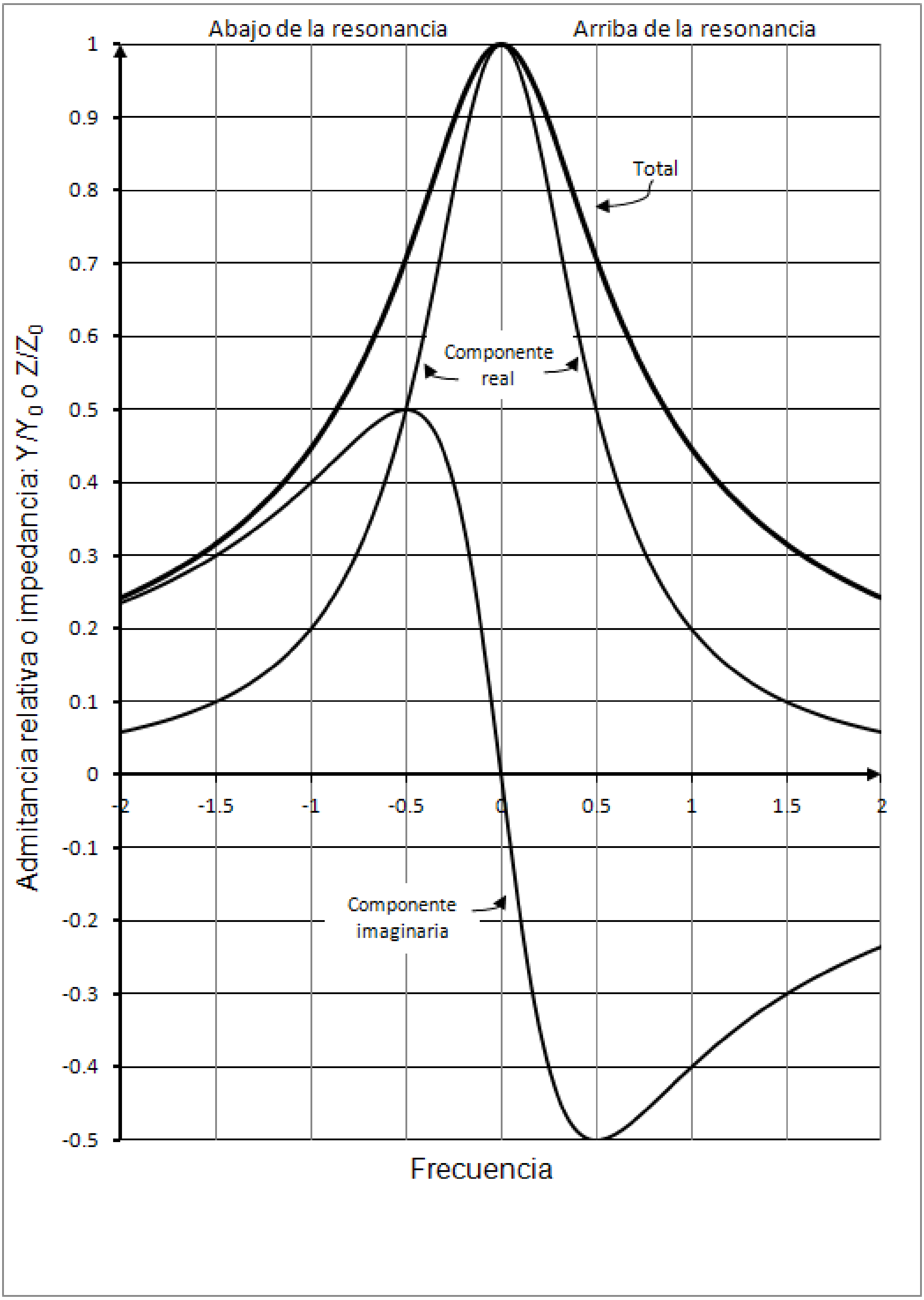


Figura 5: Curva Universal de resonancia

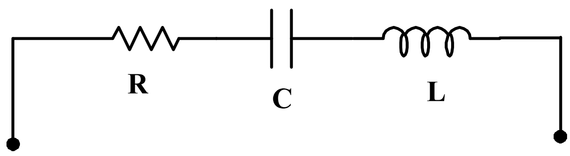
Ejercicios de aplicación:

En el circuito de la figura es:

L = 65μH *C = 1,56nF* *R = 5,1Ω*

Calcular:

a) Frecuencia de resonancia.
b) Factor de mérito.
c) Impedancia del circuito a una frecuencia del 1% por encima de la resonancia utilizando las curvas de resonancia.



Respuesta: *a)* $f_0 = 500KHz$ *b)* $Q_0 = 40$ *c)* $z = 6,8\Omega$

1.5 Puntos de potencia mitad

La comparación de las expresiones de las componentes real e imaginaria muestra que B y G son numéricamente iguales cuando $Q_o\,\delta = \pm \frac{1}{2}$. En efecto, para ese valor surge que:

$$\frac{1}{1+(2Q_o\delta)^2} = \pm\frac{2Q_o\delta}{1+(2Q_o\delta)^2} \quad\Rightarrow\quad Q_o\delta = \pm\frac{1}{2}$$

Y las componentes toman los valores:

$$\left.\begin{array}{l} G/Y_0 = 1/2 \\ B/Y_0 = -1/2 \end{array}\right\} para \quad Q_0\delta = 1/2 \qquad\qquad \left.\begin{array}{l} G/Y_0 = 1/2 \\ B/Y_0 = 1/2 \end{array}\right\} para \quad Q_0\delta = -1/2$$

Cumpliéndose para ambos puntos que :

$$\frac{y}{y_o} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707 \quad y \quad \varphi_{\frac{y}{y_o}} = 45°$$

Dado que la corriente es proporcional a la admitancia, esto significa que cuando la desintonización a partir de la frecuencia de resonancia es ± ½, el valor eficaz de la corriente será menor que el valor eficaz de la corriente en condiciones de resonancia, $I < I_o$ de forma que:

$$\frac{I}{I_o} = \frac{\frac{V}{z}}{\frac{V}{z_o}} = \frac{V\,y}{V\,y_o} = 0,707 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Por esta razón, a los puntos correspondientes sobre la curva de resonancia se los llama a veces "***puntos del 70 % de corriente"***. Veremos qué ocurre en función de la potencia:

$$\frac{P}{P_o}=\frac{I^2 R}{I_o^2 R}=\left(\frac{I}{I_o}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad P=\frac{1}{2}P_o$$

Vemos que la potencia útil de salida en los puntos del 70 % de corriente se reduce a un 50 % de la potencia en resonancia, por lo que también reciben el nombre de **"puntos de potencia mitad"**. En la figura siguiente se indican dichos puntos:

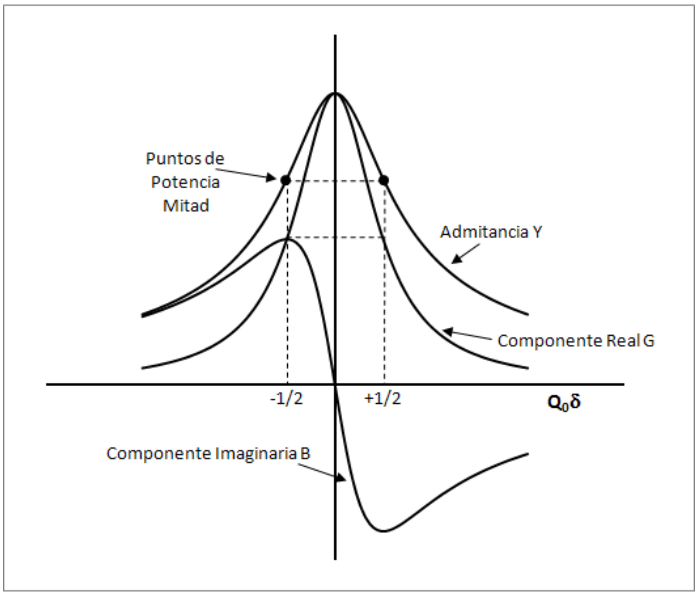


Fig. 6

Los puntos de ***potencia mitad*** se alcanzan cuando a = $Q_o\ \delta = \pm$ ½. Si hacemos la diferencia entre ambos valores de "a" resulta:

$$Q_o(\delta_1 - \delta_2) = 1$$

la cual es la distancia horizontal entre los puntos de potencia mitad. Esta distancia se denomina ***ancho de banda del circuito resonante***, y la idea es que fuera de ella una señal se transmite con menos del 50 % de la potencia máxima, la cual se obtiene a la frecuencia de resonancia f_o.

En la figura 7 se grafica la respuesta del circuito en función de la frecuencia ω, siendo ω_1 y ω_2 las frecuencias correspondientes a los puntos de potencia mitad. La gama de frecuencias comprendidas entre dichos puntos es el ***ancho de banda del circuito,*** o ***banda de frecuencias entre los puntos de potencia mitad.***

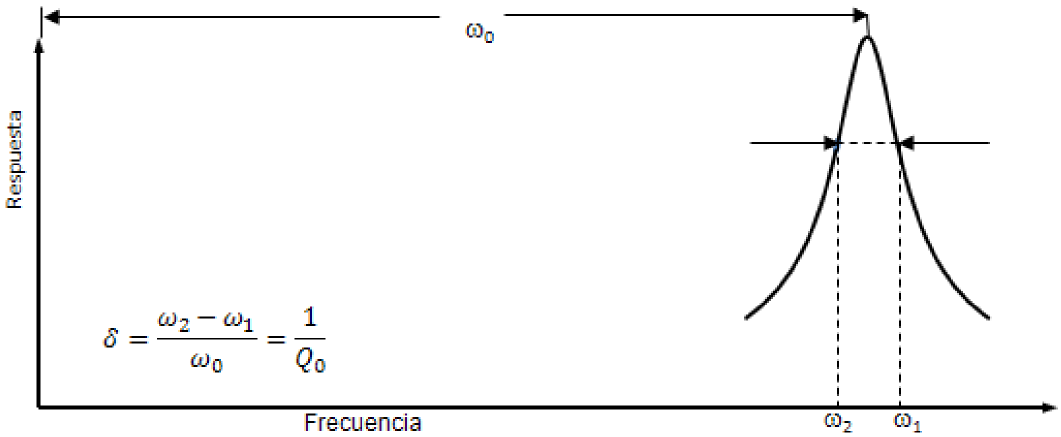


Fig. 7

Partiendo de la última expresión podemos llegar a establecer una relación entre el ancho de banda y el factor de mérito:

$$\mathrm{Qo}\ \delta_1 - \mathrm{Q}_0\, \delta_2 = \mathrm{Q}_0 \frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_o} - \mathrm{Q}_0 \frac{\omega_2 - \omega_0}{\omega_o} = \mathrm{Q}_0 \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_o} = 1 \quad \Rightarrow \omega_1 - \omega_2 = \frac{\omega_o}{\mathrm{Q}_0}$$

lo cual, recordando que $AB_\omega = \omega_1 - \omega_2$, muestra la relación entre un Q alto y una sintonización selectiva (es decir, ancho de banda estrecho) y nos permite decir que:

$$AB_\omega = \frac{\omega_o}{\mathrm{Q}_0} \qquad o \qquad AB_f = \frac{1}{2\pi}\frac{\omega_o}{\mathrm{Q}_0}$$

Si analizamos estas expresiones, vemos que a un Q elevado le corresponde una ancho de banda estrecho (circuito muy selectivo) y a un Q bajo le corresponde un ancho de banda amplio (circuito poco selectivo).

A los efectos de expresar las frecuencia extremas del ancho de banda en función de parámetros conocidos del circuito, hacemos lo siguiente:
Sabiendo que:

$$Q_o\, \delta_1 = Q_o \frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_o} = \frac{1}{2} \qquad y \qquad Q_o\, \delta_2 = Q_o \frac{\omega_2 - \omega_0}{\omega_o} = -\frac{1}{2}$$

resulta:

$$\frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_o} = \frac{1}{2\,Q_0} \qquad y \qquad \frac{\omega_2 - \omega_0}{\omega_o} = -\frac{1}{2Q_0}$$

y despejando ω_1 y ω_2 llegamos a que:

$$\omega_1 = \omega_o \left(1 + \frac{1}{2\,Q_0}\right) \qquad y \qquad \omega_2 = \omega_o \left(1 - \frac{1}{2\,Q_0}\right)$$

Si hacemos la diferencia entre ambas, vemos que se verifica nuevamente que:

$$\omega_1 - \omega_2 = \frac{\omega_0}{Q_0}$$

expresión que nos permite obtener una nueva definición del factor de mérito:

$$\mathrm{Q} = \frac{\omega_o}{AB_\omega} = \frac{\omega_o}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{\text{pulsacion de resonancia}}{AB_\omega \text{ entre los puntos del } 70\,\%}$$

Vemos que Q es una buena medida de la selectividad de un circuito sintonizado (cuanto más alto es Q, más selectivo es el circuito), y la expresión es una definición más general que la anteriormente obtenida.

1.6 Justificación de la simetría de la curva universal de resonancia

Según se observa en la característica de resonancia, vemos que la misma no es simétrica respecto a la frecuencia central. Podemos, sin embargo, "simetrizar " la misma simplemente mediante una representación en escala logarítmica, según se verá a continuación.

Partimos de la expresión de impedancia de un circuito serie:

$$Y = \frac{1}{R\left[1 + j\frac{\omega_o L}{R}\left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}\right)\right]}$$

Si observamos esta expresión vemos que:

1) es máxima cuando $\omega = \omega_o$, es decir, cuando la frecuencia de alimentación es igual a la frecuencia de resonancia.

2) A medida que ω aumenta o disminuye en forma monótona a partir de ω_o, la expresión

$$|Y| = \frac{1}{R\sqrt{1+\left(\frac{\omega_o L}{R}\right)^2\left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}\right)^2}}$$

también crece o decrece en forma monótona. En consecuencia, para dos frecuencias , menor y mayor respecto de ω_o la ecuacion anterior debe cumplir con:

$$|Y(\omega^-)| = |Y(\omega^+)|$$

Este supuesto surge del hecho que el paréntesis puede ser negativo o positivo para dicho campo de variación de ω. Ahora bien, si inspeccionamos la expresión de módulo de Y, vemos que esto ocurrirá sólo cuando:

$$\frac{L\,\omega_o}{R}\left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}\right) = \pm 1$$

Llevaremos esta expresión a una de la forma $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ en ω/ω_o :

$$Q\left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}\right) = \pm 1$$

multiplicando ambos miembros por ω/ω_o :

$$Q\left[\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2 - 1\right] = \pm\frac{\omega}{\omega_o} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2 \pm \frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_o} - 1 = 0$$

Las raíces de la ecuación de segundo orden serán, respectivamente:

$$\frac{\omega}{\omega_o} = \frac{1}{2Q} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \qquad y \qquad \frac{\omega}{\omega_o} = -\frac{1}{2Q} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1}$$

Vemos que se dan en pares opuestos, por lo que la forma general de las soluciones ω_1 y ω_2 que satisfacen la condición $0 < \omega_1 < \omega_o < \omega_2$ está dadas por:

$$\frac{\omega_{1,2}}{\omega_o} = \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \pm \frac{1}{2Q}$$

Si ahora hacemos la diferencia entre las dos frecuencias extremas surge que:

$$\frac{1}{\omega_o}(\omega_1-\omega_2)=\sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2+1}+\frac{1}{2Q}-\sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2+1}+\frac{1}{2Q}=\frac{1}{Q}$$

De donde hemos obtenido una expresión completamente general que vincula el ancho de banda, el factor de mérito y la frecuencia angular de resonancia:

$$AB=\frac{\omega_o}{Q_o}=\omega_2-\omega_1$$

Volviendo a lo que era nuestra idea original, es decir, justificar la posibilidad de simetrizar la curva mediante la adopción de una escala conveniente, hacemos el producto de las dos frecuencias extremas del ancho de banda, con lo que obtenemos lo siguiente:

$$\omega_1\,\omega_2=\omega_o^2\left[\left(\frac{1}{2Q}\right)^2+1-\left(\frac{1}{2Q}\right)^2\right]=\omega_o{}^2$$

es decir:

$$\omega_o=\sqrt{\omega_1\,\omega_2}$$

Si tomamos una escala logarítmica de frecuencias, podemos "simetrizar" la curva, ya que será:

$$2\log\omega_o=\log\omega_1+\log\omega_2 \quad\Rightarrow\quad \log\omega_o=\frac{\log\omega_1+\log\omega_2}{2}$$

con lo que ambas frecuencias quedan ubicadas simétricamente respecto a ω.

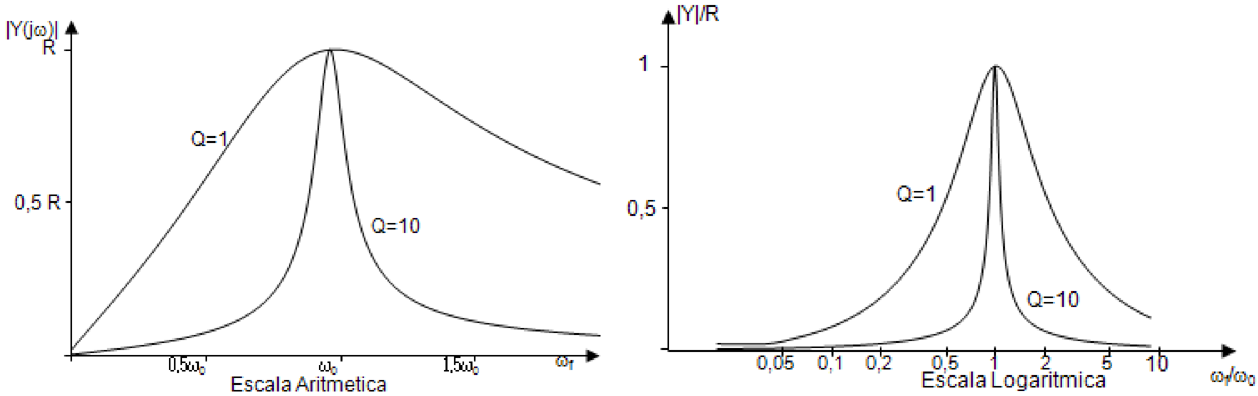


Fig. 8

Si analizamos la expresión de la admitancia compleja Y, vemos que el ancho (o la agudeza) de la curva de resonancia depende solo de Q, lo cual se observa tanto en la representación en función de ω como en función del log (ω/ω_o), es decir, a mayor Q, menor ancho de banda, o, lo que es lo mismo, curva más aguda.

Ejercicios de aplicación:

1) Un circuito RLC serie tiene un Q_0 =10 a la frecuencia de resonancia de fase de 100KHz, y disipa 1W de potencia activa cuando se alimenta con una fuente de corriente senoidal de 1A eficaz y frecuencia 1KHz.

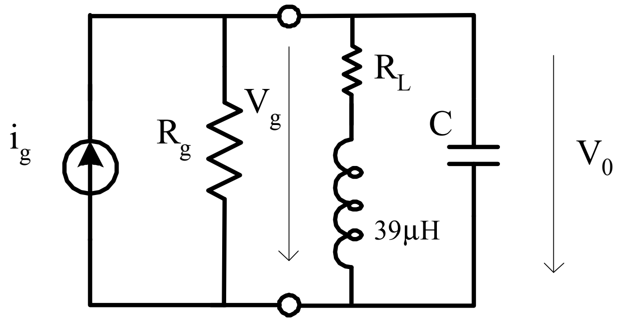
- *a) Cuál es el ancho de banda de potencia mitad?*
- *b) Determinar el valor numérico de R, L y C.*

Respuesta: a) AB = 20.000 πr/s = 62831,8 r/s
b) R = 1Ω, L = 15,91μH, C = 159,21nF.

2) Un circuito serie RLC con Q_0 = 250 está en resonancia a 1,5Mhz. Encontrar las frecuencias a las que la potencia activa del circuito resonante es un décimo de la potencia en resonancia, permaneciendo el voltaje de entrada constante.

Respuesta: f_1 = 1,509MHz. f_2 = 1,491MHz.

3) Un inductor real de 39μH tiene un Q_L = 50 a una f = 2,52MHz y se usa en el circuito de la figura para conformar un circuito resonante cuya frecuencia de resonancia sea 2,52MHz. Determinar:
a) El valor de C.
b) R_g para que el AB del circuito sea 380Krad/seg.
c) El Q_0 del circuito.



Respuesta: a) C = 102,24pF b) R_g = 154,39KΩ c) Q_0 = 41,66

1.7 Energía en un circuito resonante – Nueva definición del factor de mérito Q

Hasta ahora hemos arribado a tres definiciones del factor de mérito Q, a saber:

$$Q = \frac{V_{Lo}}{V} = \frac{V_{co}}{V}$$

$$Q = \frac{\omega_o L}{R}$$

$$Q = \frac{1}{\delta_1 - \delta_2} = \frac{\omega_o}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{\omega_o}{A\,B}$$

La primera y la segunda expresión son útiles solamente en circuitos serie. La tercera, en cambio, está basada en la selectividad en frecuencias, y es de suma utilidad pues está relacionada con magnitudes de índole práctica.

A fin de evaluar la posibilidad de obtener una expresión del factor de mérito que sea completamente general, procederemos a realizar un análisis de la energía en un circuito resonante:

Energía en un circuito resonante:

Hemos visto que la energía total almacenada en un circuito resonante es constante, y que si bien la energía almacenada en el campo magnético de una bobina varía de cero a máximo y vuelve a cero cada medio ciclo, lo mismo que la energía de campo eléctrico del capacitor, la energía total no varía en el tiempo.

La frecuencia de resonancia es la frecuencia a la que la bobina suministra energía tan rápidamente como el condensador la requiere durante un cuarto de ciclo, y la absorbe tan rápidamente como la descarga el capacitor en el siguiente. Así, el circuito externo solo debe suministrar las energía necesaria para cubrir las pérdidas resultantes de la presencia de una resistencia en el circuito resonante.

Asimismo, tampoco se le pide al circuito externo que suministre potencia reactiva al circuito resonante, dado que la misma esta asociada a la energia transferida hacia y desde la inductancia al capacitor dentro del circuito, dado que, según postulamos al inicio de la materia, nos manejamos con circuitos a parámetros concentrados. En base a estas consideraciones, entonces, el circuito externo solo suministra la potencia activa necesaria para compensar las pérdidas en la resistencia, por lo que V e I están en fase, y el f.p. es unitario.

La energía almacenada en un circuito resonante ideal puede ser varias veces mayor que la suministrada por el circuito externo en un ciclo aislado. A continuación veremos mediante un desarrollo matemático que la energía almacenada es Q veces la energía disipada, lo cual justifica el hecho de denominar "circuito tanque" al circuito resonante paralelo.

En la figura siguiente vemos una representación de los valores instantáneos de energía en la inductancia y energía en la capacidad:

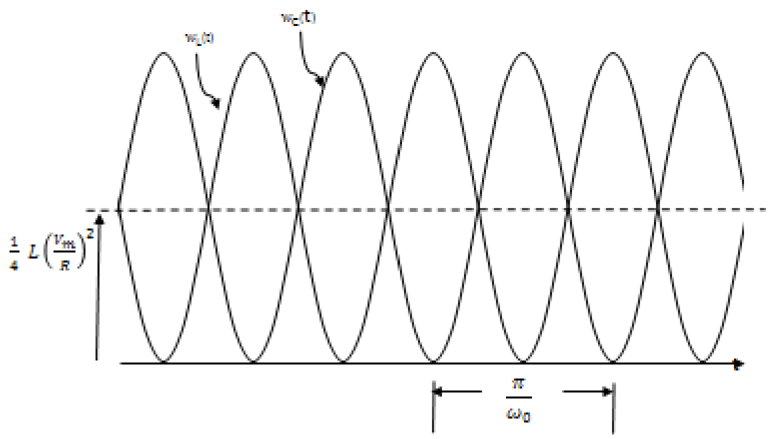


Fig. 9

cuyas expresiones temporales son:

$$v_c = \frac{I_m}{\omega C}\, sen\, \omega t \qquad i(t) = I_m \cos \omega t$$

$$w_L(t) = \frac{1}{2} L\, i^2(t) = \frac{1}{2} I_m^2 \cos^2 \omega t$$

$$w_c(t) = \frac{1}{2} C\, v^2(t) = \frac{1}{2} C\, V_m^2\, sen^2\, \omega t = \frac{1}{2}\frac{I_m^2}{\omega^2 C}\, sen^2\, \omega t$$

La energía instantánea total puesta en juego en el circuito resulta ser entonces:

$$w(t)_{total} = \frac{1}{2} I_m^2 [\, L \cos^2 \omega t + \frac{1}{2C}\, sen^2\, \omega t]$$

Supongamos ahora que hay resonancia, o sea $\omega = \omega_o$, de forma de poder expresar L en función de C. Llegamos así a que:

$$w_{total} = \frac{1}{2} I_m^2 [\, L \cos^2 \omega t + L\, sen^2\, \omega t\,] = \frac{1}{2} L\, I_m^2 = \frac{1}{2}\frac{I_m^2}{\omega_o^2 C}$$

es constante, es decir, independiente del tiempo. Esto implica que el intercambio de energía entre campo magnético y eléctrico se realiza entre los componentes, sin intervención "aparente" de la fuente. Con lo de "aparente" queremos indicar que, de alguna manera, se debe asegurar que la corriente se mantenga en un sistema que no es ideal, sino que posee resistencia óhmica, y, por lo tanto, pérdidas. Analizando la expresión, observamos que, cuando la corriente es máxima, el cos ω t = 1, y la energía está toda en la inductancia, mientras que cuando es cero está toda en el capacitor.

Ahora veremos cómo aprovechar esto para obtener una nueva definición de Q. La potencia instantánea es:

$$p(t) = R\frac{I_m^2}{2} + R\frac{I_m^2}{2}\cos 2\omega t$$

la potencia media disipada en un ciclo es:

$$P = I^2 R = \left(\frac{I_m}{\sqrt{2}}\right)^2 R = \frac{1}{2} I_m^2 R$$

Si la frecuencia es f_o, la energía disipada durante un ciclo es:

$$E = P\,T = P\frac{1}{f_o} \qquad E_{dis} = \frac{1}{2} I_m^2 \frac{R}{f_o}$$

Ahora hacemos el cociente entre la energía almacenada y la energía disipada y llegamos a que:

$$\frac{E_{almacenada}}{E_{disipada}} = \frac{\frac{1}{2} L I_m^2}{\frac{1}{2} I_m^2 \frac{R}{f_o}} = \frac{f_o L}{R} = \frac{\omega_o L}{R}\frac{1}{2\pi}$$

de donde:

$$Q = 2\pi \frac{E_{almacenada}}{E_{disipada\ por\ ciclo}}$$

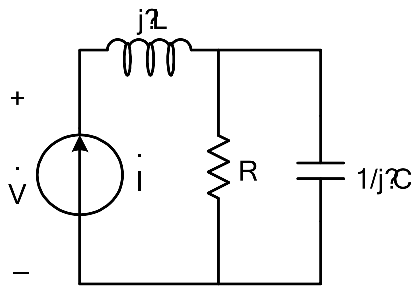
la cual es una expresión completamente general, e independiente de la configuración serie o paralelo del circuito.

Ejercicios de aplicación:

1) En el circuito siguiente:

a) Aprovechar el hecho de que en condiciones de resonancia la energía almacenada es igual a W_L e igual a W_C ($W_L = W_C$), para determinar la frecuencia de factor de potencia unitario ω_O.

b) Verifique su respuesta mostrando que su relación V/I es puramente real cuando $\omega = \omega_O$.



Respuesta: $\omega_O = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left[\frac{1}{R.C}\right]^2}$ $\qquad$ $Z_0 = L / RC \;\; \Omega$

1.8 Resonancia de fase en un circuito paralelo

Partimos de un circuito cuya configuración se muestra en la figura siguiente:

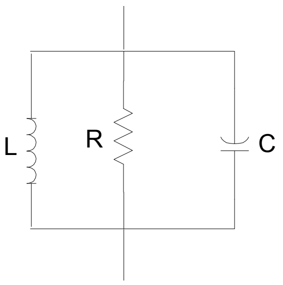


Fig. 10

Escribimos la expresión de la admitancia:

$$Y = G + j\omega C - \frac{1}{\omega L} = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

Vemos que, tal como ocurría en la expresión de la impedancia de un circuito serie, habrá algún valor de ω para el cual la componente imaginaria de la admitancia se anule. Esta es la frecuencia de resonancia, y su expresión resulta ser:

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Podemos asimismo dibujar los diagramas fasoriales para los distintos casos de admitancia inductiva, resistiva y capacitiva, tomando como referencia la tensión:

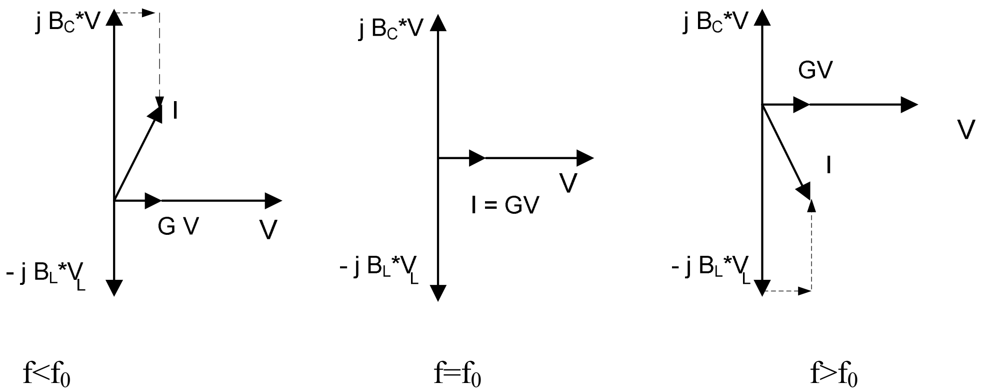


Fig. 11

También podemos trazar la curva en V, pero ahora corresponderá a la admitancia del circuito:

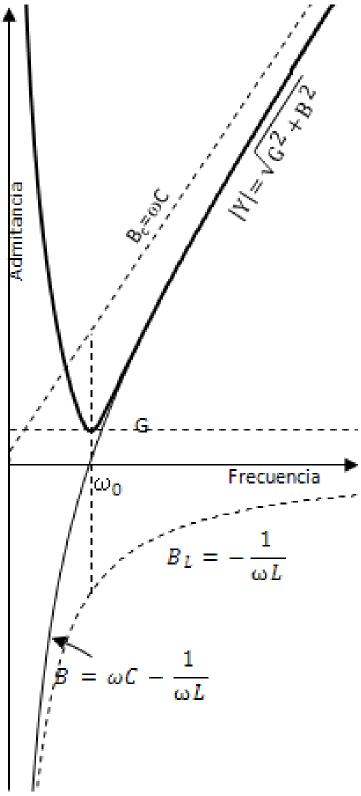


Fig. 12

Dado que, según sabemos, el circuito serie RLC y el circuito paralelo GCL son duales, todo el análisis realizado tendiente a la obtención de la curva universal de resonancia es válida, con la sola diferencia de que ahora nos dará información acerca de la relación entre la impedancia a una frecuencia cualquiera y la impedancia a frecuencia de resonancia (z/z_o).

Veremos que ocurre con el factor de mérito de un circuito paralelo:

$$Q = \frac{I_{Co}}{Io} = \frac{V\,\omega_o\,C}{V\,G} = \omega_o\,R_o\,C = \frac{R_o}{\omega_o\,L}$$

Vemos que para tener un factor de mérito alto deberé tener una resistencia en paralelo elevada, es decir, un circuito de bajas pérdidas.

1.9 Resonancia de fase en circuitos paralelo de dos ramas:

Queremos ver si podemos aplicar la curva universal de resonancia en un circuito como el mostrado en la figura siguiente, el cual de por sí es un circuito serie, comportándose como paralelo solo por un cambio en sus terminales.

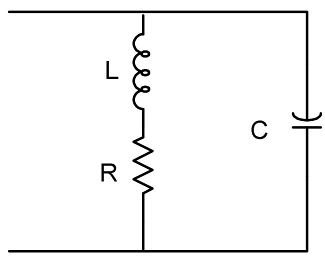


Fig. 13

La admitancia de entrada es:

$$Y = j\,\omega C + \frac{1}{R + j\,\omega L} = \frac{j\,\omega C\,(\,R + j\,\omega L\,) + 1}{R + j\,\omega L} =$$

$$\frac{R\,j\,\omega C - \omega^2 L\,C + 1}{R + j\,\omega L} = \frac{1 - \omega^2 L\,C + j\,R\,\omega C}{j\,\omega L\left(\dfrac{R}{j\,\omega L} + 1\right)}$$

$$\frac{R\,\omega C + j\,\omega L\left(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)}{\omega L\left(\dfrac{R}{j\,\omega L} + 1\right)} = \frac{\dfrac{R}{L}C + j\left(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)}{\dfrac{R}{j\,\omega L} + 1}$$

Si el factor de mérito es alto, es decir, se trata de un circuito de bajas pérdidas, a frecuencias próximas a la de resonancia la última expresión se puede aproximar a:

$$Y = \frac{C}{L}\left[\,R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]$$

Si observamos esta expresión, vemos que es formalmente igual a la de la impedancia de un circuito serie, por lo que concluimos que la admitancia de un circuito como el de la figura varia en la misma forma que la impedancia de un circuito serie, por lo que la característica universal de resonancia nos será útil para representar la impedancia de un circuito paralelo mixto como el de la figura. Podemos realizar las siguientes observaciones:

1) como la curva muestra una relación entre z y z_o, el factor C/L desaparece.

2) Podemos obtener la expresión del factor de mérito:

$$Y_o = \frac{C\,R_o}{L} \quad \Rightarrow \quad Z_o = \frac{L}{C\,R_o} \equiv R_o$$

y en función de Q será:

$$Q = \frac{I_{co}}{I_o} = \frac{V\,\omega_o\,C}{V\dfrac{C\,R_o}{L}} = \frac{\omega_o\,L}{R_o} = \frac{1}{\omega_o\,C\,R_o}$$

Ejercicios de aplicación:

1) En el circuito de la figura con "S" abierto, determinar:

a) Frecuencia de resonancia ω_o.

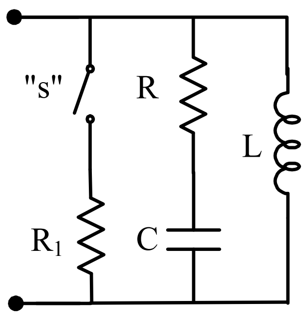
b) Impedancia del circuito en resonancia.

a) Valor que debe tomar R para que le circuito no resuene a ninguna frecuencia.

2) Con "S" cerrado, calcular:

a) La o las nuevas frecuencias de resonancia ω_o.

b) Impedancia del circuito en resonancia.



<u>*Datos:*</u> *R = 10Ω* *R_1 = 20Ω* *C = 10μF* *L = 2mH*

Respuesta:

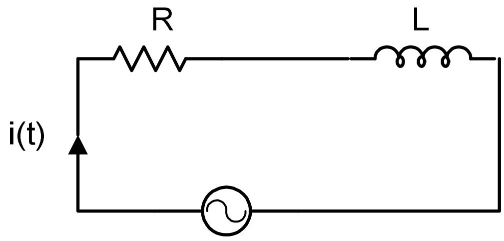
1) a) ω_o = 10.000 r/s *b) z_0 = 20 Ω* *c) R $\geq 10\sqrt{2}$ Ω*
2) a) No se altera la frecuencia de resonancia. *b) Z_0' = 10 Ω*

1.10 Factor de mérito para distintas configuraciones

Obtendremos la expresión del factor de mérito Q para distintas configuraciones a partir de la relación entre la energía almacenada y la energía disipada en las mismas.

a) Circuitos RL y RC serie y paralelo:
a.1) Circuito serie:

Analizaremos la siguiente configuración:



donde: $i(t) = I_m \cos(\omega t + \Phi)$.

Sabiendo que L almacena energía y R la disipa, podemos hallar Q:

$$w_L(t) = \frac{1}{2} L\, i^2(t) = \frac{1}{2} L\, I_m^2 \cos^2(\omega t + \Phi)$$

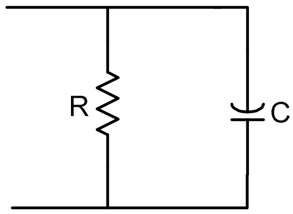
La potencia activa disipada por R es: $P = R\, I^2 = 1/2\, I_m^2\, R$.

En un periodo, la energía perdida es:

$$P.T = P.\frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow E_{dis.} = \frac{1}{2} R\, I_m^2 \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\therefore \quad Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2} L\, I_m^2}{\frac{1}{2} R\, I_m^2 \frac{2\pi}{\omega}} = \frac{\omega L}{R} = \frac{|X|}{R}$$

En el modelo usado, R representa la resistencia interna o de arrollamiento de la bobina, y L la autoinductancia. Un inductor con X grande comparado con R tiene un elevado factor de mérito. Pero Q disminuye al disminuir ω, y debido a que la resistencia del arrollamiento es inevitable, es difícil construir inductores con alto Q a bajas frecuencias *a.2) circuito paralelo RC:*



Al ser este circuito dual del anterior, el factor de mérito puede determinarse fácilmente, sustituyendo L por C y 1/R por R:

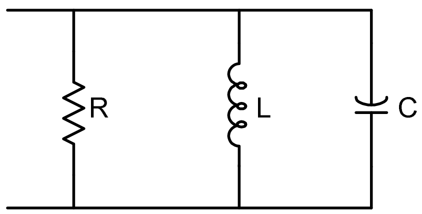
$$Q = \omega R C \quad \text{o} \quad Q = \frac{R}{|X|}$$

En el modelo, R representa la resistencia de pérdida del capacitor, y C su capacidad. La resistencia de pérdida surge de los portadores de carga en el dieléctrico que separa las placas del condensador, y aquellos capacitores cuyas respectivas reactancias son pequeñas comparadas con sus resistencias de pérdidas tienen alto Q.

En general, entonces, será:

$$Q = \frac{|X_s|}{R} \qquad\qquad Q = \frac{R}{|X_p|}$$

2) Circuito RLC:



La energía almacenada en el circuito es constante, por lo tanto:

$$E_{alm.\,pico} = \frac{1}{2} L\, I_o^2 = \frac{1}{2} L \left(\frac{v_m}{R} \right)^2$$

y la energía disipada es la potencia por ciclo:

$$E \quad = R\, I^2 \frac{2\pi}{\omega_o} = R \frac{V_m^2}{2 R^2} \frac{2\pi}{\omega_o}$$

por lo que:

$$Q = 2\pi \frac{E_{alm}}{E_{dis}} = \frac{\omega_o L}{R} = \frac{\omega_o}{\frac{R}{L}} = \frac{\omega_o}{2\alpha} = \frac{1}{2\zeta}$$

La frecuencia de resonancia a f.p.=1, las amplitudes de la tensión en L y C a frecuencia de resonancia son Q_o veces la la amplitud de la tensión en la fuente.

El factor de mérito Q es también indicador de la agudeza del pico de la característica de amplitud. Cualitativamente, cuanto mayor es Q_o, más agudo es el pico de resonancia. Recordando que:

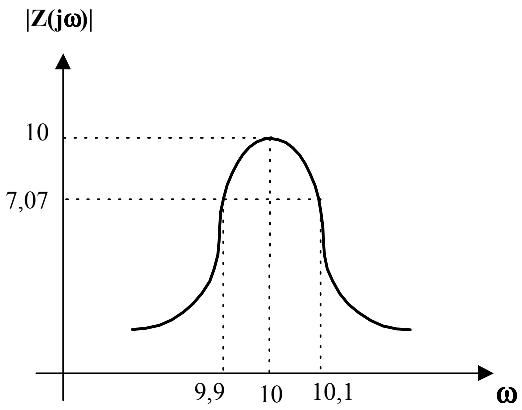
$$A\,B = 2\,\alpha \;\Rightarrow\; Q = \frac{\omega_o}{2\,\alpha} \;\Rightarrow\; A\,B_\omega = 2\alpha \;\Rightarrow\; A\,B_\omega = \frac{\omega_o}{Q_o}$$

Vemos así que el ancho de banda de potencia mitad es pequeño comparado con la "frecuencia central" ω_o cuando Q_o es grande, es decir, mucho mayor que 1.

Ejercicios propuestos:

1) En la figura siguiente se muestra la curva de resonancia de un circuito paralelo RLC.

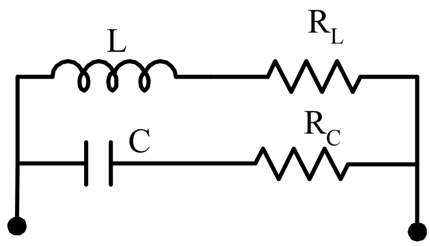
a) Hallar R, L, C.
b) Se desea el mismo comportamiento en resonancia pero alrededor de una frecuencia central de 20Krad/seg. El valor máximo de $|Z(j\omega)|$ debe ser 0,1MΩ. Hallar los nuevos valores de R, L y C manteniendo el valor de Q_0.



Respuesta: *a) R = 10 Ω L= 0,02Hy C = 0,5 F*
b) R = 0,1 MΩL= 0,1Hy C = 25nF $Q_o = 50$

2) En el circuito de la figura siendo R_L = 208,8 Ω, R_C = 110 Ω, L = 20mH y C = 2μF, determinar:

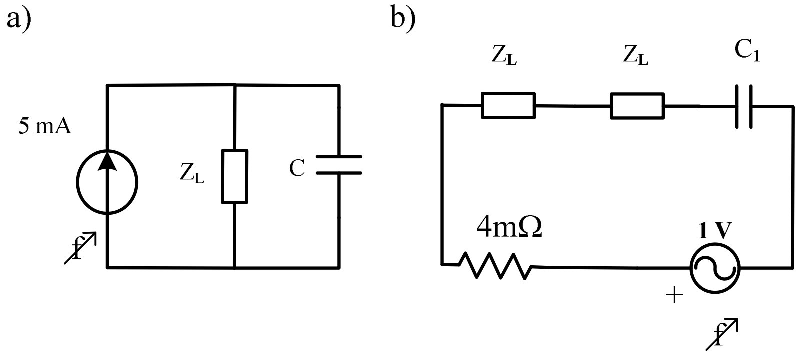
a) Frecuencia e impedancia de resonancia supuesta w variable.
b) Cuál es el mínimo valor que puede tomar R_C para mantener la resonancia. Se suponen constantes R_L, L y C.



Respuesta: *a)* f_0 *= 3181,5 Hz,* z_0 *= 103,41 Ω*
b) R_C *= 100 Ω*

3) Se efectúan los siguientes ensayos:

a) Una bobina no ideal y un condensador ideal se conecta en paralelo y se los somete a la alimentación de una fuente de corriente de 5mA eficaces y de frecuencia variable, obteniéndose la máxima U_C = 10 V para ω = 200 r/s, con un Q_0 = 200 del circuito.



b) Se conectan dos bobinas iguales a la anterior en serie con un capacitor, encontrándose que a la frecuencia de resonancia es ω_o = 100 r/s.

Determinar el valor de C_1.

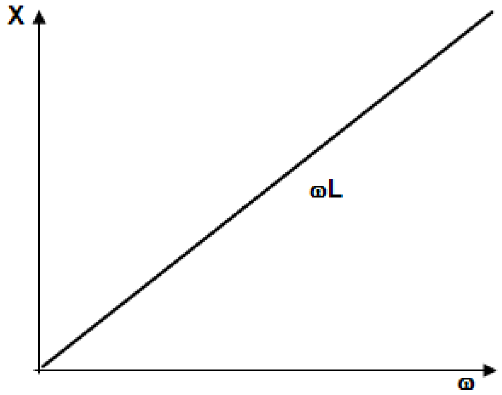
Respuesta: $C_1 = 1\ mF$

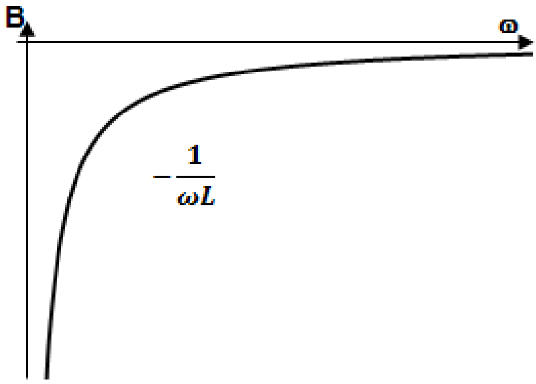
2. Análisis Grafico de Resonancia

Analizaremos el comportamiento de dipolos reactivos puros en función de la frecuencia. Es un método aproximado por la no precisión en la obtención de los valores de frecuencia.

2.1 Dipolo inductivo puro.

Representando la reactancia en función de ω, observamos que varía de forma creciente y lineal siendo proporcional al valor de la inductancia L.

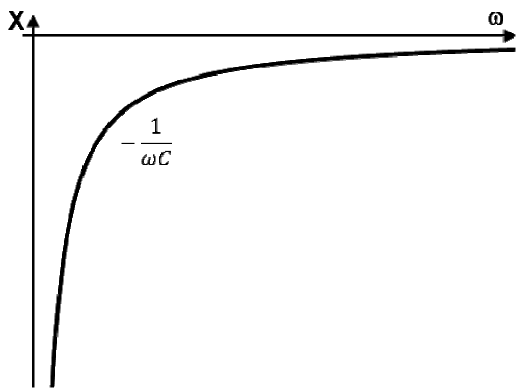


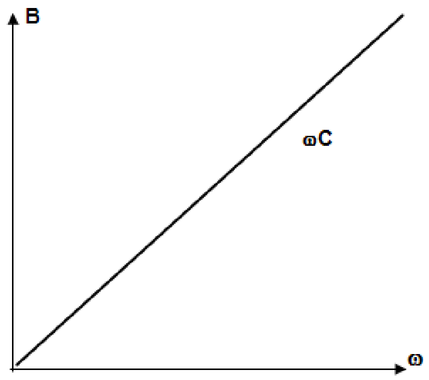


Podemos ver la susceptancia del elemento haciendo la inversa de la reactancia. Su respuesta en valor absoluto es decreciente.

2.2 Dipolo capacitivo puro.

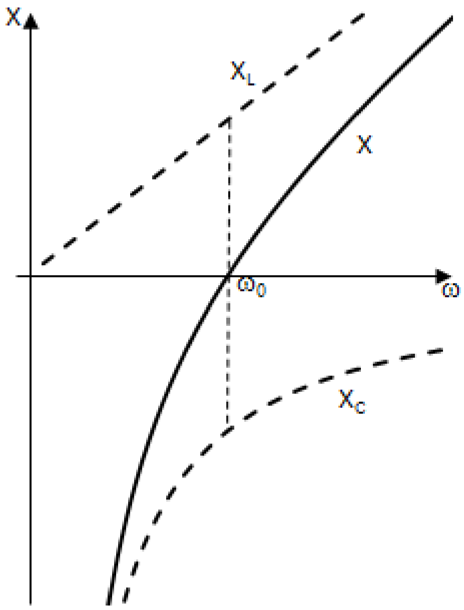
La reactancia varía con la inversa de la frecuencia y en valor absoluto decreciente. La susceptancia varía linealmente con la frecuencia.

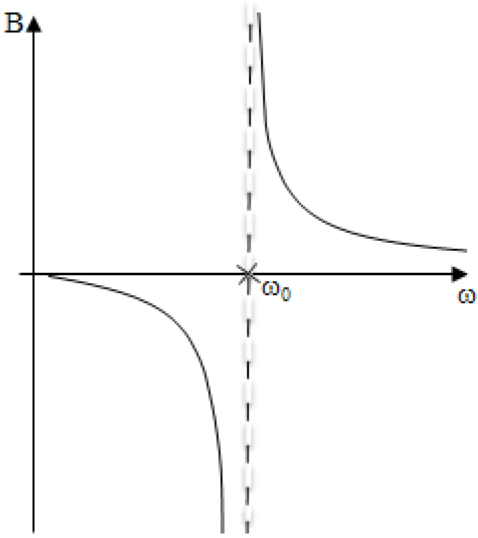




2.3 Circuito serie

Para el análisis del dipolo realizamos la suma de las reactancias de ambos elementos.



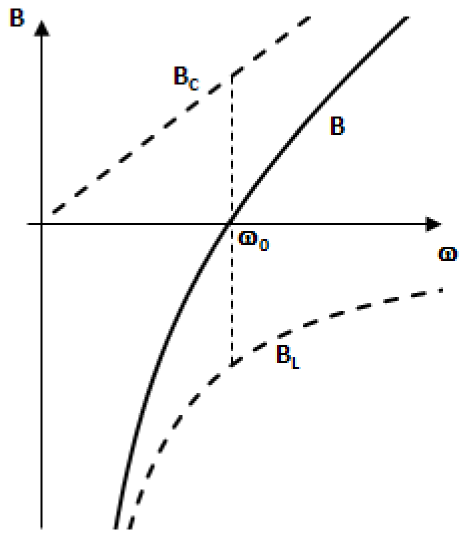


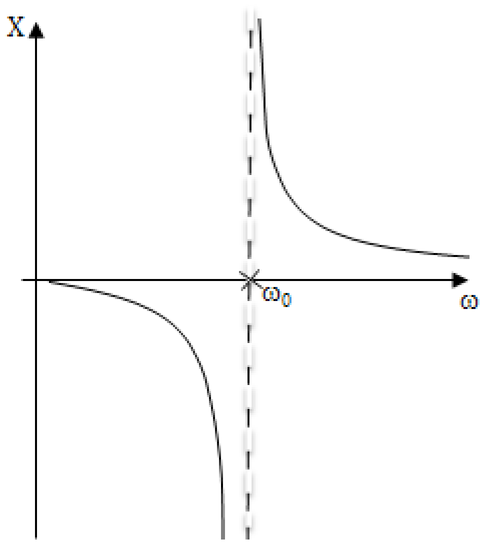
Observamos cómo cambia el comportamiento con el aumento de la frecuencia pasando de comportarse como capacitivo a inductivo y por un valor de ω con la cual la reactancia es nula.

Esta frecuencia a la cual la reactancia es nula, la denominaremos **frecuencia de resonancia serie**.

2.4 Circuito paralelo

Para el análisis del dipolo realizamos la suma de la susceptancia de ambos elementos. Igual que en circuito anterior, el comportamiento cambia con el aumento de la frecuencia pasando de comportarse como inductivo a capacitivo y por un valor por de ω la cual la susceptancia es nula

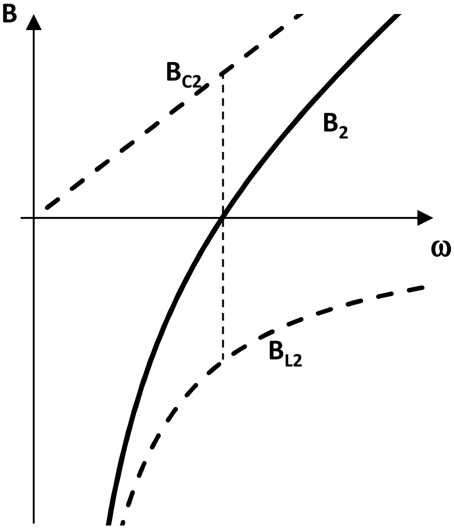




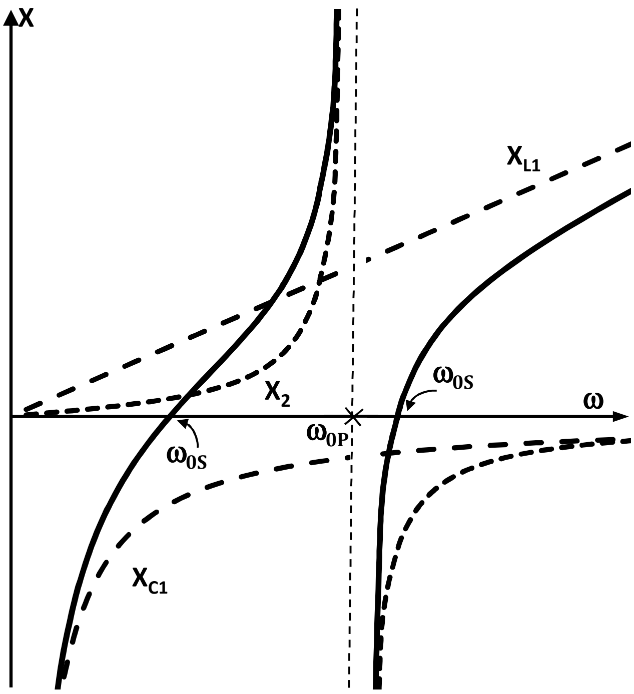
.
Esta frecuencia a la cual la susceptancia es nula, la denominaremos **frecuencia de resonancia paralelo**.

2.5 Circuito resonante serie-paralelo

Realizamos la combinación Serie de L1, C1 y la combinación Paralelo C2-L2. Iniciamos obteniendo la susceptancia del paralelo C2-L2.



Luego, haciendo la inversa de la susceptancia obteniendo la reactancia del paralelo C2-L2 y le sumamos la reactancia L1- C1.



Observamos que el comportamiento del dipolo cambia varias veces con la frecuencia. También que existen tres frecuencias a la cual el dipolo tiene un comportamiento especial. Dos frecuencias a la cual la reactancia es nula (Resonancia serie) y una cuya reactancia tiende a infinito (Resonancia paralelo).

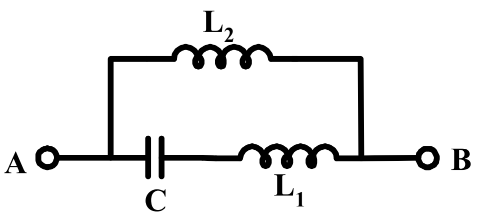
2.6. Conclusión

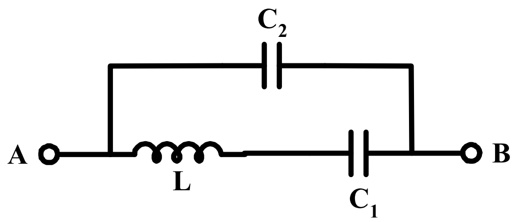
- Mirando las gráficas obtenidas vemos que siempre son crecientes.
- El número de frecuencias de resonancia es igual al número de elementos reactivos menos uno.
- Las frecuencias de resonancia serie y paralelo aparecen intercaladas entre sí.
- La grafica de resonancia empieza desde cero cuando podemos ir desde un extremo a otro del dipolo sin pasar por un capacitor.
- En el caso de que no exista un camino donde no haya capacitor, la susceptancia empieza de cero.

Ejercicios de aplicación:

En los siguientes circuitos obtener gráficamente las frecuencias de resonancia, comparar los resultados y sacar conclusiones.

a) Hallar Z_{AB}. Hallar Y_{AB}.





b) Hallar Z_{AB} de ambos circuitos.