Estructuras Algebraicas - FaMAF - 2017

Práctico 2: Grupos II

1. Para un homomorfismo de grupos $f : G \to H$ probar lo siguiente.
   (a) $f(e_G) = e_H$ y $f(g^{-1}) = (f(g))^{-1}$ para todo $g \in G$. (f no merecería llamarse homomorfismo de grupos si no cumpliera al menos estas dos propiedades).
   (b) Si A es un subgrupo de G y B es un subgrupo de H, entonces $f(A)$ es un subgrupo de H y $f^{-1}(B)$ es un subgrupo de G. En particular, $\mathrm{Im}(f) = f(G)$ es un subgrupo de H y $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(\{1_H\})$ es un subgrupo de G.
   (c) Si G que es abeliano (resp., finito), entonces $f(G)$ es abeliano (resp., finito).
   (d) Si G es cíclico generado por a, entonces $f(G)$ es cíclico generado por $f(a)$. En particular, $f(a^n) = f(a)^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y luego f está completamente determinada por su valor en a.
   (e) Generalizando el punto anterior, si G está generado por un subconjunto S, entonces $f(G)$ está generado por $f(S)$. En particular, f queda completamente determinado por sus valores en S.
   (f) Concluir que si $a \in G$ tiene orden n, entonces $f(a)$ tiene orden $\leq n$ (veremos más adelante que en realidad el orden de $f(a)$ divide a n).

2. Decir si las siguientes funciones son homomorfismos, y el tal caso, decir si son monomorfismos y/o epimorfismos. (Considerar $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}_n$, $n = 6, 5, 12$, con las sumas usuales).
   (a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(a) = ma$, $m \in \mathbb{Z}$.
   (b) $f : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_{12}$, $f(a) = 2a$.
   (c) $f : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5$, $f(a) = 3a$.

3. Un subconjunto finito no vacío de un grupo G es un subgrupo si y sólo si es cerrado bajo el producto del grupo G.

4. Sea $f : G \to H$ homomorfismo de grupos, con f biyectiva. Probar que f^{-1} es homomorfismo de grupos.

5. Sea G un grupo.
   (a) Sea $f : G \to G$ definida por $f(a) = a^{-1}$. Probar que f es isomorfismo si y sólo si G es abeliano.
   (b) Sea $f : G \to G$ definida por $f(a) = a^2$. Si G es abeliano, entonces f es endomorfismo.

6. Sea G un grupo finito y $f : G \to G$ un isomorfismo sin puntos fijos no triviales tal que $f^2 = $id. Probar que G es abeliano. ¿Y si G no es finito?

7. Sean G y H grupos.
   (a) Probar que $G \times H$ con la operación $(g, h) * (g', h') = (gg', hh')$ es un grupo. Si G y H son grupos abelianos con notación aditiva $(+)$, entonces denotamos a $G \times H$ por $G \oplus H$. En tal caso, probar que $G \oplus H$ es abeliano.
   (b) Probar que las proyecciones $\pi_G : G \times H \to G$ y $\pi_H : G \times H \to H$ (dadas por $(g, h) \mapsto g$ y $(g, h) \mapsto h$ respectivamente) son epimorfismos de grupos. Decir quién es $\mathrm{Ker}(\pi_G)$ y $\mathrm{Ker}(\pi_H)$.
   (c) Probar que si G_1 es un subgrupo de G y H_1 es un subgrupo de H, entonces $G_1 \times H_1$ es un subgrupo de $G \times H$.
   (d) En el caso $G = H$, probar que la diagonal $\{(g, g) : g \in G\}$ es un subgrupo de $G \times G$.

(e) Más en general, si $\{G_i : i \in I\}$ es una familia de grupos indexada por un conjunto I, entonces el producto cartesiano $G = \prod_{i\in I} G_i$ con la operación punto a punto es un grupo y las proyecciones $\pi_j : G \to G_j$ dadas por $(g_i)_{i\in I} \to g_j$ son epimorfismos de grupos.

(f) (Propiedad universal del producto) Sean G_1 y G_2 dos grupos y $\pi_i : G_1\times G_2 \to G_i$, con $i = 1, 2$, las proyecciones. Probar que para cualquier grupo H, se tiene una función biyectiva

$$\mathrm{Hom}(H, G_1 \times G_2) \to \mathrm{Hom}(H, G_1) \times \mathrm{Hom}(H, G_2)$$

que manda un homomorfismo $\varphi : H \to G_1 \times G_2$ en el par $(\pi_1\varphi, \pi_2\varphi)$.

8. Dar todos los subgrupos de $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. ¿Es $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ isomorfo a $\mathbb{Z}_4$?

9. Calcular los subgrupos cerrados (topológicamente) de $(\mathbb{R}, +)$.

10. Calcular $\mathrm{End}(\mathbb{Z})$, $\mathrm{End}(\mathbb{Q})$, $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$ y $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q})$.

11. (a) Sea Q_8 el subgrupo de $GL(2,\mathbb{C})$ generado por $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$. Probra que Q_8 es no abeliano de orden 8.

(b) Sea H el subgrupo de $GL(2,\mathbb{C})$ generado por $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Probra que H es no abeliano de orden 8 no isomorfo a Q_8.

12. Sea G un grupo. Se define $C(G) := \{a \in G : ab = ba, \forall b \in G\}$. Probar que $C(G)$ es un subgrupo abeliano de G (llamado el *centro de* G).

13. Para un grupo G probar lo siguiente.

(a) $|a| = |a^{-1}|$, $|bab^{-1}| = |a|$ y $|ab| = |ba|$ para todos $a, b \in G$.

(b) Sea $a \in G$. Si $|a| < \infty$, entonces $|a^k| = |a|/(|a|, k)$. Si $|a| = \infty$, entonces $|a| = |a^k|$ para $k \neq 0$.

(c) Si $f : G \to H$ es un homomorfismo de grupos y $a \in G$ tiene orden finito, entonces $|f(a)|$ divide a $|a|$.

(d) Sean $a, b \in G$ elementos de orden finito que conmutan. Si $(|a|, |b|) = 1$, entonces $|ab| = |a||b|$. Si $(|a|, |b|) = d > 1$, entonces $|ab| \leq [|a|, |b|]$. Además, existen divisores m y n de $|a|$ y $|b|$ respectivamente, tales que $(m, n) = 1$ y $mn = [|a|, |b|]$. Luego, el elemento $a^{|a|/m}b^{|b|/n}$ tiene orden $[|a|, |b|]$.

(e) Si G es abeliano, entonces el conjunto de todos los elementos de orden finito forman un subgrupo de G.

(f) El resultado anterior no es cierto si G no es abeliano como bien lo muestra el siguiente ejemplo. Sea $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ y consideremos

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego $a^2 = b^2 = 1$; sin embargo

$$ab = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

tiene orden infinito.

14. Sea G un grupo abeliano y $p, q \in \mathbb{N}$, primos distintos. Si $|G| = pq$ y existen $a, b \in G$, con $|a| = p$, $|b| = q$, entonces G es cíclico.

15. Probar que todos los elementos de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tienen orden finito, pero sin embargo $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un grupo infinito.

16. Sea G un grupo. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $r_k(G)$ el número de elementos de G de orden k.

    (a) Probar que si G y H son isomorfos, entonces $r_k(G) = r_k(H)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

    (b) Calcular $r_k(\mathbb{Z}_2 \oplus Z_2)$, $r_k(\mathbb{Z}_6)$ y $r_k(\mathbb{S}_3)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

    (c) Probar que $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ no es isomorfo a $\mathbb{Z}_4$. En cambio, $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_6$.

    (d) Probar que si $(m, n) > 1$, entonces $\mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_m$ no es isomorfo a $\mathbb{Z}_{mn}$.

17. Si $(m, n) = 1$, entonces $\mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_m$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_{mn}$. Más en general, si G es un grupo abeliano de orden mn que contiene un elemento de orden n y uno de orden m, entonces G es isomorfo a $\mathbb{Z}_{mn}$. Mostrar con un ejemplo que esto puede no ser cierto si G no es abeliano.

18. Para un grupo G y un entero k, sea $a_k(G)$ el número de subgrupos de G de orden k.

    (a) Si G y H son grupos isomorfos, entonces $a_k(G) = a_k(H)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

    (b) Probar que si G es un grupo finito cíclico, entoces $a_k(G) \leq 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

19. Sea G un grupo y $\mathrm{Subg}(G) := \{A : A < G\}$. Si $\mathrm{Subg}(G)$ es finito, entonces G es finito.

20. Si G y H son dos grupos isomorfos, entonces $\mathrm{Aut}(G) \cong \mathrm{Aut}(H)$.

21. (a) Sea H el subgrupo cíclico de $\mathbb{S}_3$ generado por $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Entonces ninguna coclase a izquierda de H (excepto la misma H) es también una coclase a derecha de H.

    (b) Sea K el subgrupo cíclico de $\mathbb{S}_3$ generado por $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces toda coclase a izquierda de K es también una coclase a derecha de K.

22. Probar el Teorema de Fermat: si $(a, p) = 1$, entonces $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$. Ayuda: pensar en el grupo $(\mathbb{Z}_p - \{0\}, \cdot)$.

23. Sea G un grupo y $H, K < G$. Probar que $HK < G$ si y sólo si $HK = KH$. En particular, si G es abeliano, entonces $HK < G$. ($HK := \{hk : h \in H, k \in K\}$).

24. Sean $k, m, p \in \mathbb{N}$, con $(p, m) = 1$ y p primo. Sea G un grupo, con $|G| = p^k m$, $H, K < G$ tales que $|H| = p^k$, $|K| = p^d$, $0 < d \leq k$ y $K \subsetneq H$. Mostrar que HK no es subgrupo de G.

25. Si H y K son subgrupos de índice finito de G tales que $([G : H], [G : K]) = 1$, entonces $G = HK$.

26. (a) Si H y K son subgrupos de un grupo G, entonces $[H \vee K : H] \geq [K : H \cap K]$.

    (b) Si $p > q$ son números primos y G es un grupo de orden pq, entonces G tiene a lo sumo un subgrupo de orden p