Geometría y métodos probabilísticos en espacios de Banach
y varias variables complejas

1er cuatrimestre de 2008

Práctica 1 - Bases (primera parte)

1. Sea $\{x_n\}_n$ una base de Schauder de X. Probar que existe una norma equivalente en X para la cual la base $\{x_n\}_n$ es monótona.
2. Mostrar (a mano) que la base de Schauder de $C[0,1]$ no es achicante. Lo mismo para la base de Haar de $L_1[0,1]$.
3. Sea X un espacio de Banach con base $\{e_k\}$. Probar que si $\{e_k\}$ es achicante, entonces X'' es isomorfo a
$$\hat{X} = \Big\{(a_k)_k : \sup_n \Big\| \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \Big\| < \infty \Big\}.$$
4. Sea X un espacio de Banach con base $\{e_k\}$. Si $\{e_k\}$ es acotadamente completa, entonces X es isomorfo a $\big(\overline{[e_k : k \geq 1]}\big)'$
5. Sea X un espacio de Banach con base $\{e_k\}$. X es reflexivo si y sólo si $\{e_k\}$ es achicante y acotadamente completa.
6. Probar lo que falta del teorema de perturbación de bases.
7. Mostrar que en $L_p[0,1]$ hay sucesiones básicas equivalentes a la base canónica de ℓ_p.
8.
9. Sea $X = c_0$ o ℓ_p y consideremos la base canónica $\{e_n\}_n$ de X. Probar que:
   i) toda base en bloque normalizada es equivalente a $\{e_n\}_n$;
   ii) toda base en bloque normalizada genera un subespacio 1-complementado de X e isométrico a X.
10. Probar que para $p \neq q$, ℓ_p no es isomorfo a ℓ_q.
11. Probar (a mano) que la base de Schauder de $C[0,1]$ no es incondicional.