Universidad Europea de Madrid
LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

APLICACIONES EN ESPACIOS VECTORIALES

EL HOMOMORFISMO

Índice

Presentación

Ya hemos estudiado las estructuras, las subestructuras y los puntos de vista. Pero eso es como si en el cine te mostrasen los decorados, el atrezo y las cámaras. Esta claro que es interesante y fundamental para que la película funcione, pero no es lo que uno espera ver.

Las transformaciones, llamadas homomorfismos, son las que dan lugar a la *acción* en los espacios vectoriales. Tendremos todo tipo de transformaciones, desde aquellas que afectan al espacio geométrico dando lugar a proyecciones de vectores sobre subespacios, simetrías, o rotaciones en torno a un eje vectorial, a transformaciones sin un significado tan claro, entre espacios distintos, que convierten unos vectores en otros de infinidad de formas distintas.

Así es el estudio de los homomorfismos, uno de los campos más interesantes dentro del álgebra al que de momento apenas nos hemos asomado.

En este tema, aprenderás:

- Qué es un homomorfismo, cómo funciona, cómo se enuncia.
- Para qué sirve un homomorfismo.
- La clasificación de los distintos tipos de homomorfismos.
- Qué son los subespacios núcleo e imagen, dos de los subespacios más importantes con que nos vamos a cruzar.
- Y mucho más.

Homomorfismos

¿Qué es un homomorfismo o aplicación lineal? Un homomorfismo, tal como hemos visto, es una aplicación lineal entre estructuras algebraicas iguales, veámoslo ahora en el caso de espacios vectoriales.

En primer lugar, hay que llamar la atención sobre que un homomorfismo **transforma un vector en otro vector**, y estos pueden estar en **espacios distintos** o en el **mismo espacio**. Por ejemplo, puede transformar un vector de R^3 en otro vector de R^3, pero bien podemos crear otro que transforme una matriz en un polinomio.

Un homomorfismo debe responder a una serie de sencillas normas para ser considerado como tal. En primer lugar y más importante, debe ser una aplicación.

Recordemos que una aplicación es una correspondencia que cumple lo siguiente:

$$f : V^n \to W^m$$
$$\{\forall \vec{x} \in V^n \quad \exists \vec{y} \in W^m \quad / \quad f(\vec{x}) = \vec{y}\}$$

Pero un homomorfismo también habrá de cumplir lo siguiente:

- $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V^n\} \quad \Rightarrow \quad f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$
- $\left.\begin{matrix} \forall \vec{x} \in V^n \\ \forall \lambda \in \Re \end{matrix}\right\} \quad \Rightarrow \quad f(\lambda \vec{x}) = \lambda f(\vec{x})$

Estas dos propiedades se pueden resumir en una sola, más manejable, que es la que utilizaremos de aquí en adelante:

$$\left.\begin{array}{l}\forall \vec{x}, \vec{y} \in V^n \\ \forall \lambda, \mu \in \Re\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad f(\lambda \vec{x}+\mu \vec{y})=\lambda f(\vec{x})+\mu f(\vec{y})$$

Recordemos que en un homomorfismo entre grupos el elemento neutro del grupo de partida siempre se transforma en el elemento neutro del grupo de llegada. En espacios vectoriales no es una excepción:

$$f\left(\vec{0}_V\right)=\vec{0}_W$$

Comprobación práctica de un homomorfismo

Planteemos un caso práctico para ver cómo funciona un homomorfismo.

Partamos de dos espacios sencillos, por ejemplo R^3 y R^2, y creemos una aplicación lineal que transforme los vectores del primero en vectores del segundo, por ejemplo:

$$f : \mathfrak{R}^3 \to \mathfrak{R}^2$$
$$f\left(\underbrace{(x, y, z)}_{\in\mathfrak{R}^3}\right) = \underbrace{(x+y, y+z)}_{\in\mathfrak{R}^2}$$

f transforma un vector genérico de R^3, (x,y,z), en uno de R^2 que tiene por primera componente la suma de las dos primeras del vector del que es transformado y, como segunda, la suma de las dos últimas del mismo.

Así, por ejemplo en este caso, f(1,2,3)=(1+2,2+3)=(3,5).

Veamos si es homomorfismo, para eso debe cumplir:

$$\left.\begin{array}{r} \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathfrak{R}^3 \\ \forall \lambda, \mu \in \mathfrak{R} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad f(\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}) = \lambda f(\vec{x}) + \mu f(\vec{y})$$

Tomemos dos vectores genéricos de R^3: $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$ e $\vec{y} = (y^1, y^2, y^3)$

Calculemos ahora $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}$:

$$\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} = \lambda(x^1, x^2, x^3) + \mu(y^1, y^2, y^3) = (\lambda x^1 + \mu y^1, \lambda x^2 + \mu y^2, \lambda x^3 + \mu y^3)$$

Por último, comprobaremos que $f(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda f(\vec{x}) + \mu f(\vec{y})$ se cumple, luego efectivamente f es un homomorfismo.

Recuerda que esto es un ejemplo. Existen infinitos homomorfismos entre espacios, tantos como relaciones entre vectores podamos crear.

$$\begin{aligned}
&f(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda f(\vec{x}) + \mu f(\vec{y}) \\
&\quad (\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = f(\lambda x^1 + \mu y^1, \lambda x^2 + \mu y^2, \lambda x^3 + \mu y^3) = \\
&\quad = \left(\underbrace{\lambda x^1 + \mu y^1 + \mu y^2 + \lambda x^2}_{1^{a} componente + 2^{a} componente}, \underbrace{\mu y^2 + \lambda x^2 + \lambda x^3 + \mu y^3}_{2^{a} componente + 3^{a} componente}\right) = \\
&\quad = \big(\lambda(x^1 + x^2) + \mu(y^1 + y^2), \lambda(x^2 + \lambda x^3) + \mu(y^2 + y^3)\big) = \\
&\quad = \lambda\big((x^1 + x^2), (x^2 + x^3)\big) + \mu\big((y^2 + y^3), (y^1 + y^2)\big) = \\
&\quad = \lambda f(\vec{x}) + \mu f(\vec{y})
\end{aligned}$$

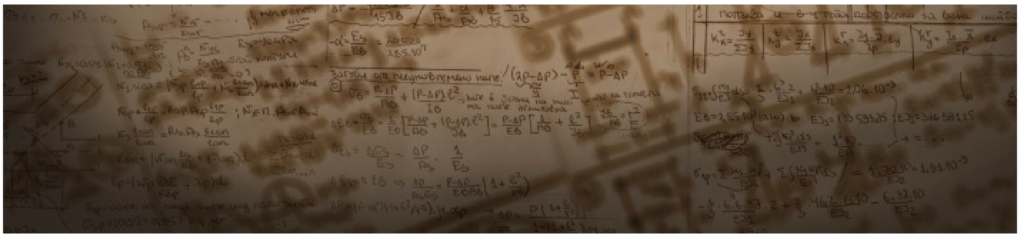
Clasificación de los homomorfismos

Partiendo de un homomorfismo entre dos espacios vectoriales V^n y W^m, de la forma:

$$f : V^n \to W^m$$

Conocida la estructura de la aplicación y la similitud o diferencia entre los espacios que lo sustentan, podremos clasificar el homomorfismo en las siguientes categorías:

	V ≠ W	V = W
f (sin peculiaridades)	**Homomorfismo**	**Endomorfismo**
f inyectiva	**Monomorfismo**	**Endomorfismo Inyectivo**
f sobreyectiva	**Epimorfismo**	**Endomorfismo Sobreyectivo**
f biyectiva	**Isomorfismo**	**Automorfismo**



El núcleo de un homomorfismo

El núcleo de un homomorfismo es el **subespacio del espacio inicial** formado por todos aquellos vectores del espacio que se transforman en el **vector nulo**.

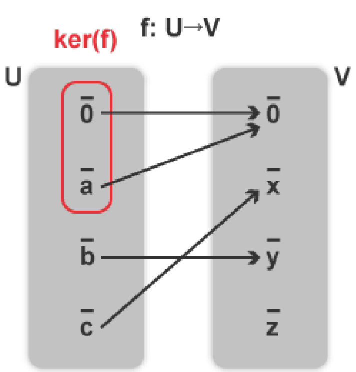
En un homomorfismo f entre dos espacios U y V, se suele denotar al núcleo como ker(f). Ker es una abreviatura de la palabra alemana *kernel*, que significa núcleo.

$$\ker(f) = \left\{\vec{x} \in U / f(\vec{x}) = \vec{0}\right\}$$

Si un homomorfismo es inyectivo, su núcleo está formado exclusivamente por el vector nulo.

$$\ker(f) = \left\{\vec{0}\right\} \quad \Rightarrow \quad \dim(\ker(f)) = 0$$

Veamos que el núcleo de un morfismo entre espacios vectoriales es, efectivamente, un subespacio del espacio inicial. Sea f un homomorfismo entre los espacios vectoriales U(K) y V(K):



$$f : U(K) \to V(K)$$

Sea N(f) el núcleo del morfismo de la forma:

$$N(f) = \left\{\vec{u} \in U / f(\vec{u}) = \vec{0}_V\right\}.$$

Se verá que N(f) es subespacio de U. $\Phi \neq N(f) \subset U$ pues $\vec{0}_U \in N(f)$.

Se demuestra que:

$$\left.\begin{array}{r}\forall \vec{x}, \vec{y} \in N(f) \\ \forall \lambda, \mu \in K\end{array}\right\} \to \lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{y} \in N(f)$$

Lo cual es trivial, pues se comprueba que:

$$f(\lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{y}) = \lambda \cdot f(\vec{x}) + \mu \cdot f(\vec{y}) = \lambda \cdot \vec{0}_V + \mu \cdot \vec{0}_V = \vec{0}_V \ .$$

La imagen de un homomorfismo

La imagen de un homomorfismo es el **subespacio del espacio final** formado por todos aquellos vectores que son transformados de otro vector.

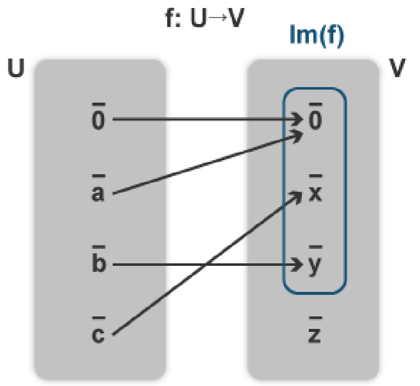
En un homomorfismo f, entre dos espacios U y V, se suele denotar la imagen como Im(f).

$$\mathrm{Im}(f) = \{\vec{y} \in V / \exists \vec{x} \in U \quad \rightarrow \quad f(\vec{x}) = \vec{y}\}$$

Si un homomorfismo es sobreyectivo, su imagen tiene igual dimensión que el espacio final, es decir, coincide con él.

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(V) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Im}(f) = V$$

Veamos que la imagen de un morfismo entre espacios vectoriales es, efectivamente, un subespacio del espacio final.



Sea f un homomorfismo entre los espacios vectoriales U(K) y V(K): $f: U(K) \rightarrow V(K)$, y sea Im(f)=f(U) la imagen de f.

Se verá que f(U) es subespacio de V. $\Phi \neq f(U) \subset V$.

Se verá que:

$$\left.\begin{array}{r}\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in f(U) \\ \forall \lambda, \mu \in K\end{array}\right\} \rightarrow \lambda \cdot \vec{v}_1 + \mu \cdot \vec{v}_2 \in f(U).$$

$$\vec{v}_1 \in f(U) \Leftrightarrow \exists \vec{u}_1 \in U / \vec{v}_1 = f(\vec{u}_1)$$
$$\vec{v}_2 \in f(U) \Leftrightarrow \exists \vec{u}_2 \in U / \vec{v}_2 = f(\vec{u}_2)$$

Luego:

$$\lambda \cdot \vec{v}_1 + \mu \cdot \vec{v}_2 = \lambda \cdot f(\vec{u}_1) + \mu \cdot f(\vec{u}_2) =$$
$$= f(\lambda \cdot \vec{u}_1 + \mu \vec{u}_2) \in f(U)$$

Dimensiones de núcleo e imagen

Veamos ahora cómo se demuestra que, dado un morfismo entre dos espacios vectoriales de dimensión finita, se cumple que la suma de las dimensiones de su núcleo y de su imagen coincide con la dimensión del espacio inicial.

Es decir:

dim$N(f)$+dim$Im(f)$=dimU

Primero, planteemos las condiciones de partida. Sean:

- $f : U^n(K) \to V^m(K)$ un morfismo.
- dim$N(f)$=p y $B_1 = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p\}$ una base de N(f).

En el caso $p = n \to N(f) = U \wedge \mathrm{Im}(f) = \vec{0}_V$, con lo que el teorema se cumple de forma trivial.

Se supondrá, pues, p < n.

Sea $B = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p, \vec{e}_{p+1}, \ldots, \vec{e}_n\}$ una base de U obtenida por ampliación de B_1 (En el caso p=0, B sería una base cualquiera de U.) y sean $f(\vec{e}_{p+1}) = \vec{v}_{p+1}, \ldots, f(\vec{e}_n) = \vec{v}_n$

- $\left\{\vec{v}_{p+1}, \ldots, \vec{v}_n\right\}$ es sistema libre en V.

- $\left\{\vec{v}_{p+1}, \ldots, \vec{v}_n\right\}$ generan Im(f).

Como hemos podido comprobar, $\left\{\vec{v}_{p+1}, \ldots, \vec{v}_n\right\}$ es base de Im(f).

$\left\{\vec{v}_{p+1}, \ldots, \vec{v}_n\right\}$ **es sistema libre en V**

$$Si \quad \lambda_{p+1} \cdot \vec{v}_{p+1} + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{v}_n = \vec{0}_V \rightarrow \lambda_{p+1} \cdot f(\vec{e}_{p+1}) + \ldots + \lambda_n \cdot f(\vec{e}_n) =$$
$$= \vec{0}_V \rightarrow f(\lambda_{p+1} \cdot \vec{e}_{p+1} + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{e}_n) =$$
$$= \vec{0}_V \rightarrow \lambda_{p+1} \cdot \vec{e}_{p+1} + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{e}_n \in N(f)$$

Siendo dicho vector por tanto combinación lineal de los de la base B1.

$$\rightarrow \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in K / \lambda_{p+1} \cdot \vec{e}_{p+1} + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{e}_n = \lambda_1 \cdot \vec{e}_1 + \ldots + \lambda_p \cdot \vec{e}_p \rightarrow$$
$$\rightarrow \lambda_1 \cdot \vec{e}_1 + \ldots + \lambda_p \cdot \vec{e}_p - \lambda_{p+1} \cdot \vec{e}_{p+1} - \ldots - \lambda_n \cdot \vec{e}_n = \vec{0}_U \rightarrow$$

Dado que B es sistema libre $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0 \wedge \lambda_{p+1} = \ldots = \lambda_n = 0$, siendo nulos todos los escalares de la combinación de partida.

$\left\{\vec{v}_{p+1}, \ldots, \vec{v}_n\right\}$ **generan Im(f)**

$\forall \vec{z} \in \operatorname{Im}(f) \rightarrow \exists \vec{x} \in U / f(\vec{x})=\vec{z}$, como B es base de U y, además, $\vec{x} \in U \rightarrow \vec{x}=\lambda_1 \cdot \vec{e}_1+\ldots+\lambda_p \cdot \vec{e}_p+\lambda_{p+1} \cdot \vec{e}_{p+1}+\ldots+\lambda_n \cdot \vec{e}_n$.

Luego:

$$\begin{aligned}
&\vec{z}=f(\vec{x})=f(\lambda_1 \cdot \vec{e}_1+\ldots+\lambda_p \cdot \vec{e}_p+\lambda_{p+1} \cdot \vec{e}_{p+1}+\ldots+\lambda_n \cdot \vec{e}_n)= \\
&=\lambda_1 \cdot \vec{0}_V+\ldots+\lambda_p \cdot \vec{0}_V+\lambda_{p+1} \cdot \vec{v}_{p+1}+\ldots+\lambda_n \cdot \vec{v}_n= \\
&=\lambda_{p+1} \cdot \vec{v}_{p+1}+\ldots+\lambda_n \cdot \vec{v}_n
\end{aligned}$$

Al ser $\left\{\vec{v}_{p+1}, \ldots, \vec{v}_n\right\}$ base de Im(f):

$$\begin{aligned}
&\dim[\operatorname{Im}(f)]=n-p=\dim U-\dim[N(f)] \rightarrow \dim[N(f)]+\dim[\operatorname{Im}(f)]= \\
&=\dim U
\end{aligned}$$

Isomorfía entre espacios

Ahora vamos a hacer una pequeña demostración. Consistirá en comprobar que la condición necesaria y suficiente para que dos espacios vectoriales, de dimensión finita y definidos sobre el mismo cuerpo, sean isomorfos es que tengan la **misma dimensión**.

Es decir: $U(K) \approx V(K) \Leftrightarrow \dim U(K) = \dim V(K)$

Primero lo demostraremos de izquierda a derecha ($\rightarrow$)

Sea $f : U(K) \rightarrow V(K)$ un isomorfismo.

Sea $\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n\}$ base de U. Se verá que $\{f(\vec{u}_1),\dots,f(\vec{u}_n)\}$ es base de V, lo que confirmará que dim U=dim V=n.

1. $\{f(\vec{u}_1),\dots,f(\vec{u}_n)\}$ es sistema libre en V.
Si $\lambda \cdot f(\vec{u}_1) = \vec{0}_V$ (utilizando el convenio de Einstein, con $i \in I_n$) $\rightarrow$
$\rightarrow f(\lambda \cdot \vec{u}_1) = \vec{0}_V \rightarrow \lambda \cdot \vec{u}_1 = \vec{0}_U$ (por ser f inyectivo) $\rightarrow \lambda_i = \vec{0} \quad \forall i \in I_n$ pues $\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n\}$ son sistema libre.

2. $\{f(\vec{u}_1),\dots,f(\vec{u}_n)\}$ generan V.
$\forall \vec{v} \in V \rightarrow \exists \vec{u} \in U / f(\vec{u}) = \vec{v}$ (por ser f sobreyectivo).
Como $\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n\}$ generan U $\rightarrow \vec{u} = \alpha_i \cdot \vec{u}_1 \quad i \in I_n \rightarrow \vec{v} = f(\vec{u}) = f(\alpha_i \cdot \vec{u}_1) = \alpha_i \cdot f(\vec{u}_1)$.

1/3

A continuación, lo demostraremos de derecha a izquierda ($\leftarrow$)

Sean dim U=dim V=n.

Sea $B_1 = \{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n\}$ y $B_2 = \{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n\}$ bases de U y V.

Se define la aplicación: $\begin{aligned} f : U(K) &\rightarrow V(K) \\ \vec{x} &\rightarrow f(\vec{x}) \end{aligned}$ de manera que si:

$\vec{x} = x^i \cdot \vec{u}_i \rightarrow f(\vec{x}) = x^i \cdot \vec{v}_i \quad i \in I_n$, vemos que f es un isomorfismo.

2/3

1. f morfismo:

$$\forall \vec{x},\vec{y} \in U \rightarrow \begin{cases} \vec{x} = x^i \cdot \vec{u}_i \\ \vec{y} = y^i \cdot \vec{u}_i \end{cases} \forall \lambda,\mu \in K \quad f(\lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{y}) = f\left[(\lambda \cdot x^i + \mu \cdot y^i) \vec{u}_i\right] = (\lambda \cdot x^i + \mu \cdot y^i) \cdot \vec{v}_i =$$

$$= \lambda \cdot (x^i \cdot \vec{v}_i) + \mu \cdot (y^i \cdot \vec{v}_i) = \lambda \cdot f(\vec{x}) + \mu \cdot f(\vec{y})$$

2. f inyectiva:

Dado que $\{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n\}$ es libre en V

$$\forall \vec{x},\vec{y} \in U \rightarrow \begin{cases} \vec{x} = x^i \cdot \vec{u}_i \\ \vec{y} = y^i \cdot \vec{u}_i \end{cases} \quad f(\vec{x}) = f(\vec{y}) \rightarrow x^i \, \vec{v}_i = y^i \, \vec{v}_i \rightarrow (x^i - y^i) \cdot \vec{v}_i = \vec{0}_V \rightarrow x^i = y^i \ \forall i \in I_n \ \rightarrow \vec{x} = \vec{y}$$

3. f sobreyectiva:

$\forall \vec{z} \in V \rightarrow \vec{z} = x^i \cdot \vec{v}_i \rightarrow \exists \vec{x} \in U \,/\, \vec{x} = x^i \cdot \vec{u}_i$ y se cumple que $f(\vec{x}) = \vec{z}$.

Luego g es un isomorfismo.

3/3

Resumen

Homomorfismos:

- Un homomorfismo es una aplicación: $f: V^n \to W^m$
- Que cumple: $\left.\begin{array}{l}\forall \vec{x}, \vec{y} \in V^n \\ \forall \lambda, \mu \in \Re\end{array}\right\} \Rightarrow f(\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}) = \lambda f(\vec{x}) + \mu f(\vec{y})$ con $f\left(\vec{0}_V\right) = \vec{0}_W$

El núcleo de un homomorfismo: $\ker(f) = \left\{\vec{x} \in U / f(\vec{x}) = \vec{0}\right\}$

- Si un homomorfismo es inyectivo, su núcleo está formado exclusivamente por el vector nulo: $\ker(f) = \left\{\vec{0}\right\} \quad \Rightarrow \quad \dim(\ker(f)) = 0$

La imagen de un homomorfismo: $\mathrm{Im}(f) = \{\vec{y} \in V / \exists \vec{x} \in U \ \rightarrow \quad f(\vec{x}) = \vec{y}\}$

- Si un homomorfismo es sobreyectivo, su imagen tiene igual dimensión que el espacio final, es decir, coincide con él: $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(V) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Im}(f) = V$

Dimensión del núcleo e imagen cumplen:

- dim$N(f)$+dim$Im(f)$=dimU