Nícola Corradi .
Enero 2003

TEMA 3. DETERMINANTES

Determinante: Número asociado a una matriz **cuadrada.**

Propiedades:

1) $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^t|$

2) Si en un determinante tenemos una fila (o columna) que es combinación lineal de las restantes ➔ $|\mathbf{A}| = \mathbf{0}$

3) Si permutamos 2 filas (o columnas) el determinante cambia de signo.

4) Si en un determinante una fila (o columna) está multiplicada por un número, el determinante queda multiplicado por ese nº.

OJO: $|\lambda\mathbf{A}| = \lambda^n \cdot |\mathbf{A}| \neq \lambda \cdot |\mathbf{A}|$

5) $|A+B| \neq |A| + |B|$

6) $|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$

7) Si a una fila (o columna) le sumamos (o restamos) una combinación lineal de las restantes filas o columnas el determinante no cambia.

8) $|\mathbf{A}^{-1}| = \dfrac{1}{|\mathbf{A}|}$ **si** $|\mathbf{A}| \neq 0$

Menor complementario:

Se denomina **menor complementario** del elemento a_{ij} designándolo por Δ_{ij}, al determinante de orden *n -1* obtenido al suprimir la fila *i* y la columna *j* del determinante inicial.

Adjunto

Se denomina adjunto del elemento a_{ij} a $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \Delta_{ij}$

Cálculo práctico de determinantes

- Si n=2 ➔ Regla de **Sarrus**

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 7$$

- Si n=3 ➔ Regla de **Sarrus**

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 3 & 6 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 \cdot 5 + (-1) \cdot 4 \cdot 1 + 7 \cdot 3 \cdot (-2) - 7 \cdot 6 \cdot 1 - 4 \cdot (-2) \cdot 2 - 5 \cdot (-1) \cdot 3 = 3$$

<u>Nota</u>: Antes de aplicar la regla se puede intentar simplificar el determinante mediante combinaciones lineales.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 3 & 6 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 = F_1 - 2 \cdot F_3 \\ F_2 = F_2 - 3 \cdot F_3 \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 0 & 12 & -11 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 0 + (-33) + 0 - (-36) - 0 - 0 = 3$$

Aunque con n=3 no es lo más habitual, siempre podemos calcular el determinante de otra manera distinta a Sarrus. Este segundo método consiste en desarrollar por los elementos de una fila o de una columna.
Ejemplo:

↓ adjuntos de

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 3 & 6 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot A_{11} + 3 \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{31} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} +$$

$$+ 1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 38 + 3 \cdot (-1) \cdot 9 + 1 \cdot 1 \cdot (-46) = 76 - 27 - 46 = 3$$

<u>Nota</u>: También con este método podemos intentar simplificar previamente el determinante mediante combinaciones lineales.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 3 & 6 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 = F_1 - 2 \cdot F_3 \\ F_2 = F_2 - 3 \cdot F_3 \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 0 & 12 & -11 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{31} =$$

$$= 0 + 0 + 1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 12 & -11 \end{vmatrix} = -33 + 36 = 3$$

- Si n>3 ➔ **NO** regla de Sarrus, tenemos que desarrollar el determinante por los elementos de una fila o de una columna.
Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & 6 \\ -3 & 1 & 7 & -3 \\ 8 & 4 & 3 & 11 \end{vmatrix} = 2 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{21} - 3 \cdot A_{31} + 8 \cdot A_{41} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 1 & 7 & -3 \\ 4 & 3 & 11 \end{vmatrix} +$$

$$+ 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 7 & -3 \\ 4 & 3 & 11 \end{vmatrix} - 3 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 11 \end{vmatrix} + 8 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \\ 1 & 7 & -3 \end{vmatrix} = \cancel{11898}$$

-162

$= 2 \cdot (-414) - 1(-18) - 3(216) - 8(-162) = -828 + 18 - 648 + 1296 = -162$

Nota: Antes de aplicar la regla se puede intentar simplificar el determinante mediante combinaciones lineales.

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & 6 \\ -3 & 1 & 7 & -3 \\ 8 & 4 & 3 & 11 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 = F_1 - 2F_2 \\ F_3 = F_3 + 3F_2 \\ F_4 = F_4 - 8F_2 \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 6 & -3 & -9 \\ 1 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & -5 & 19 & 15 \\ 0 & 20 & -29 & -37 \end{vmatrix} = 0A_{11} + 1A_{21} + 0A_{31} + 0A_{41} =$$

$$= 1\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 6 & -3 & 9 \\ -5 & 19 & 15 \\ 20 & -29 & -37 \end{vmatrix} = -1\cdot 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 19 & 15 \\ 20 & -29 & -37 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 = F_2 + 19F_1 \\ F_3 = F_3 + 29F_1 \end{Bmatrix} =$$

comprobar

$$= -3\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 33 & 0 & 72 \\ 78 & 0 & 50 \end{vmatrix} = -3\cdot(-1)\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 33 & 72 \\ 78 & 50 \end{vmatrix} = -3\cdot(1650-5616) = 11898 \quad -162$$

HOMEWORK

Nota: A esta forma de simplificar se le llama regla de **CHIO** y al elemento a_{21} se le llama elemento **pivote**.

Nota2:Una vez reducido el determinante de n=4 a n=3 al aplicar una vez CHIO podemos terminar el determinante por Sarrus o podemos terminarlo como hemos hecho.

Determinante de Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (d-a)\cdot(d-b)\cdot(d-c)\cdot(c-a)\cdot(c-b)\cdot(b-a)$$

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^x & x & 2 & x^2 \\ e^{2x} & x^2 & 4 & x^4 \\ e^{3x} & x^3 & 8 & x^6 \end{vmatrix} = (x^2-e^x)\cdot(x^2-x)\cdot(x^2-2)\cdot(2-e^x)\cdot(2-x)\cdot(x-e^x)$$

RESUMEN:

n=2➔Sarrus
n=3➔Sarrus
n>3➔Desarrollar por los adjuntos de los elementos de una fila o columna.

Nota: Muy a menudo es conveniente simplificar haciendo ceros antes de nada.

PROBLEMAS DE DETERMINANTES

1 Si f, g y h son aplicaciones lineales, calcular el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} f(\lambda\bar{x}) & g(\lambda\bar{x}) & g(\lambda\bar{x}) \\ f(\mu\bar{x}) & g(\mu\bar{x}) & h(\mu\bar{x}) \\ f(\gamma\bar{x}) & g(\gamma\bar{x}) & g(\mu\bar{x})+h(\gamma\bar{x}) \end{vmatrix}$$

2 Consideramos una matriz cuadrada A, notamos el determinante de $A=|A|$, dicha matriz cumple $|A|=1$ $|2A|=8$ entonces:

a) El orden de A es 3.

\- b) No existe una matriz que cumpla esas condiciones.

c) El $|A|=2$ para cualquier orden de A.

3 Si $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \end{bmatrix}$ entonces:

a) $|A|=0$

b) $|A|$ es multiplo de 5

\- c) $|A|=12$

4 Consideramos una matriz cuadrada de orden 2, notamos el determinante de $A=|A|$, dicha matriz cumple $|2A|=8$ entonces:

a) $|A|=4$

b) $|A|=2$

c) $|A|=1$

5 Sea A una matriz cuadrada de orden n con $|A|=0$, entonces

a) $\text{Rang}(A)\neq n$

b) $\text{Rang}(A)=(n-1)$

c) $\text{Rang}(A')$ es $(n-2)$. (A' es la transpuesta de A)

d) A' tiene inversa.

6 Sea A una matriz cuadrada de orden n entonces

a) Si A es antisimétrica, $|A|=0$

b) Si A es antisimétrica y n es par, $|A|=0$

c) Si A es antisimétrica y n es impar, $|A|=0$.

7 Sea A una matriz cuadrada no singular. Sea S la suma de los productos de los elementos de una columna por los adjuntos de una paralela a ella multiplicados respectivamente por dos. Entonces

a.- S coincide con el determinante de A

b.- S es el doble del determinante de A

c.- $S = 0$

d.- Siendo $S \neq 0$, no tienen nada que ver S y determinante de A.

Respuesta.- Es correcta la

-----

8 Se dan las matrices A y B de $n \times n$, siempre se verifica las afirmaciones siguientes

1.- Si A es regular $\Rightarrow A^t$ es singular → Falsa $|A| = |A^t|$, no pueden ser singulares y regulares

2.- Si A es regular $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ cierta

3.- $|A+B| = |A| + |B|$. Falsa

4.- $|A.B| \neq |A|.|B|$ Falsa

5.- son todas falsas Falsa

6.- son todas ciertas Falsa

Respuesta.- Es correcta la

9 Dadas las matrices A, B, C de $n \times n$; se verifica

1.- $A.B = AC \Rightarrow B = C$ Falso

2.- $AB = AC \Rightarrow B = C$ siempre que A admite matriz inversa

3.- $AB = AC$ y B admite matriz inversa $\Rightarrow B = C$ Falso

4.- $AB = AC$ y B, C admiten matriz inversa $\Rightarrow B = C$ Falso

5.- son todas falsas Falso

6.- son todas verdaderas Falso

Respuesta.- Es correcta la

10 Sea D el determinante de orden n, $n>0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

Su valor sera:

1.- si n es impar, su valor es -1; y si es par, 1

2.- siempre vale 1

3.- siempre vale -1

4.- cualquier otro valor distinto de uno

5.- 0 verdadero C1 y C2 son iguales

6.- son todas falsas

Respuesta.- La correcta es la .-

11 Sea el conjunto de las matrices cuadradas $n \times n$ y sea A una matriz de dicho conjunto.

Multiplicamos dicha matriz por un escalar α, siendo $\alpha \neq 0$. Entonces el $|\alpha A|$ es:

1.- $n^{\alpha} |A|$ Falso

2.- $\alpha |A|$ Falso

3.- $\alpha^{n} |A|$ Verdadero

4.- $\alpha^{2} |A|$ Falso

5.- $n\alpha |A|$ Falso

6.- son todas falsas Falso

Respuesta.- Es correcta la

_ _ 3 _ _

12 Si A es una matriz cuadrada de determinante igual a 3 y B es otra matriz del mismo orden de determinante igual a 1, entonces B nunca puede ser la inversa de A. verdadero

$\boxed{1}$ Si f, g y h son aplicaciones lineales, calcular el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} f(\lambda\bar{x}) & g(\lambda\bar{x}) & g(\lambda\bar{x}) \\ f(\mu\bar{x}) & g(\mu\bar{x}) & h(\mu\bar{x}) \\ f(\gamma\bar{x}) & g(\gamma\bar{x}) & g(\mu\bar{x})+h(\gamma\bar{x}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda f(\bar{x}) & \lambda g(\bar{x}) & \lambda g(\bar{x}) \\ \mu f(\bar{x}) & \mu g(\bar{x}) & \mu h(\bar{x}) \\ \gamma f(\bar{x}) & \gamma g(\bar{x}) & \mu g(\bar{x})+\gamma h(\bar{x}) \end{vmatrix} = \lambda\mu \begin{vmatrix} f(\bar{x}) & g(\bar{x}) & g(\bar{x}) \\ f(\bar{x}) & g(\bar{x}) & h(\bar{x}) \\ \gamma f(\bar{x}) & \gamma g(\bar{x}) & \mu g(\bar{x})+\gamma h(\bar{x}) \end{vmatrix}$$

Si f es aplicación lineal (homomorfismo), verifica $f(\lambda\bar{x}+\mu\bar{y}) = \lambda f(\bar{x}) + \mu f(\bar{y})$

$$= \lambda\mu f(\bar{x})\, g(\bar{x}) \begin{vmatrix} 1 & 1 & g(\bar{x}) \\ 1 & 1 & h(\bar{x}) \\ \gamma & \gamma & \mu g(\bar{x})+\gamma h(\bar{x}) \end{vmatrix} \underset{C1=C2}{=} 0$$

$\boxed{2}$ Consideramos una matriz cuadrada A, notamos el determinante de $A=|A|$, dicha matriz cumple $|A|=1$ $|2A|=8$ entonces:

a) El orden de A es 3.

b) No existe una matriz que cumpla esas condiciones.

c) El $|A|=2$ para cualquier orden de A.

$|2A| = 2^n |A|$

$8 = 2^n \cdot 1 \rightarrow n=3$ (opción a)

$\boxed{3}$ $|A| = (5-4)(5-3)(5-2)(4-3)(4-2)(3-2) = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 1 = 12$ (opción c)

$\boxed{4}$ $|2A| = 2^2|A| \rightarrow 8 = 4|A| \rightarrow |A|=2$ (opción b)

$\boxed{5}$ d) Falsa, $|A^t| = |A| = 0 \rightarrow A^t$ no tiene inversa

b) Falsa, si $|A|=0$ sabemos que A tiene alguna (o varías) filas (o columnas) ld, pero no necesariamente 1

c) Falsa por lo comentado en b) y teniendo en cuenta que $R(A) = R(A^t)$

a) Verdadera, mejor aun si Rango $< n$

$\boxed{6}$ Si A es antisimétrica: $A^t = -A \rightarrow |A^t| = |-A|$

$|A| = (-1)^n |A|$

Si n impar:

$|A| = -|A|$

$2|A| = 0$

$|A| = 0$

$\boxed{9}$ 1) $AB = AC \rightarrow A^{-1}AB = A^{-1}AC \rightarrow IB = IC \rightarrow B = C$

$\boxed{12}$ $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{1}{3} \neq |B| = 1 \rightarrow B \neq A^{-1}$

$\boxed{7}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & 22 \end{vmatrix} = 66 - 36 = 30 \neq 0$$

$\boxed{C1}$ $S = 2(1A_{12} + 4A_{22} + 7A_{32}) = 2\left(1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} + 4(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} + 7(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}\right) = 2(46 + 4(-22) + 7 \cdot 6) = 0$

$S = 2(1A_{13} + 4A_{23} + 7A_{33}) = 2\left(1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} + 4(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} + 7(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}\right) = 2(-3 + 4(6) + 7(-3)) = 0$

$\boxed{C2}$ $S = 2(2A_{11} + 5A_{21} + 8A_{31}) = 2\left(2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} + 5(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} + 8(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}\right) = 2(2 \cdot (-53) + 5(26) + 8(-3)) = 0$

$S = 2(2A_{13} + 5A_{23} + 8A_{33}) = 2(2 \cdot (-3) + 5 \cdot 6 + 8(-3)) = 0$

$\boxed{C3}$ $S = 2(3A_{11} + 6A_{21} - 1A_{31}) = 2(3 \cdot (-53) + 6(26) - 1(-3)) = 0$

$S = 2(3A_{12} + 6A_{22} - 1A_{32}) = 2(3 \cdot 46 + 6(-22) - 1 \cdot (6)) = 0$