(Vigesimoprimera clase: Más ejemplos de adjunciones)

La clase pasada vimos algunos ejemplos de adjunciones. Uno de ellos era que el adjunto a derecha de $\mathbf{C} \xrightarrow{!} \mathbf{1}$ es el funtor $U(*) = 1$ donde 1 es el objeto terminal de $\mathbf{C}$ (si existe):

$$Hom_{\mathbf{1}}(*, *) = Hom_{\mathbf{1}}(!(C), *) \cong Hom_{\mathbf{C}}(C, U(*))$$

Es decir, $! \dashv 1$. Ahora, el funtor !, ¿tiene adjunto a izquierda? Para responder la pregunta, hay que encontrar F tal que

$$Hom_{\mathbf{1}}(*, *) = Hom_{\mathbf{1}}(*, !(D)) \cong Hom_{\mathbf{1}}(F(*), D)$$

hay que elegir $F(*)$ tal que haya una única flecha de $F(*)$ en D. Tal objeto es el objeto inicial de $\mathbf{C}$: $F(*) = 0$. Es decir, $0 \dashv !$.

También vimos que si se define $\Delta : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C} \times \mathbf{C}$ como el funtor diagonal, $\Delta \dashv \times$:

$$\begin{array}{rcl} Hom_{\mathbf{C}\times\mathbf{C}}(\Delta(C), (X, Y)) & = & Hom_{\mathbf{C}\times\mathbf{C}}((C, C), (X, Y)) \\ & = & Hom_{\mathbf{C}}(C, X) \times Hom_{\mathbf{C}}(C, Y) \\ & = & Hom_{\mathbf{C}}(C, X \times Y) \end{array}$$

Es decir, $\Delta \dashv \times$.

De la misma manera se obtiene $+ \dashv \Delta$:

$$\begin{array}{rcl} Hom_{\mathbf{C}}(X + Y, C) & = & Hom_{\mathbf{C}}(X, C) \times Hom_{\mathbf{C}}(Y, C) \\ & = & Hom_{\mathbf{C}\times\mathbf{C}}((X, Y), (C, C)) \\ & = & Hom_{\mathbf{C}\times\mathbf{C}}((X, Y), \Delta(C)) \end{array}$$

Acabamos de obtener $+ \dashv \Delta \dashv \times$, donde $\Delta : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C} \times \mathbf{C} = \mathbf{C^2}$. Se puede generalizar:

Ejemplo 311. *Sea $\mathbf{J}$ una categoría y $\Delta : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C^J}$ el funtor diagonal definido por*

$$\begin{array}{rcl} \Delta(C)(j) & = & C \\ \Delta(C)(\alpha) & = & 1_C \\ \Delta(f)_j & = & f \end{array}$$

Entonces, el operador de límite y colímite son las adjunciones a derecha e izquierda respectivamente del funtor Δ:

$$\varinjlim \dashv \Delta \dashv \varprojlim$$

Revisando los ejemplos, podemos ver cuáles son las units y counits. En el caso de $! \dashv 1$, el unit es $\mu : 1_{\mathbf{C}} \longrightarrow 1\circ!$, o sea, $\mu_C : C \longrightarrow 1(!(C)) = 1(*) = 1$ es la única flecha al objeto terminal. El counit es $\epsilon : ! \circ 1 \longrightarrow 1_{\mathbf{1}}$, es decir, $\epsilon_* : * \longrightarrow *$ es la flecha 1_*, identidad de $*$.

En el caso de $0 \dashv !$, el unit es $\mu : 1_{\mathbf{1}} \longrightarrow ! \circ 0$, o sea, $\mu_* : * \longrightarrow *$, la identidad de $*$. El counit es $\epsilon : 0\circ! \longrightarrow 1_{\mathbf{C}}$, o sea, $\epsilon_C : 0 = 0(*) = 0(!(C)) \longrightarrow C$ es la única flecha desde el objeto inicial.

Para $\Delta \dashv \times$, el unit es $\mu : 1_{\mathbf{C}} \longrightarrow \times\circ\Delta$, es decir, $\mu_C : C \longrightarrow C \times C$, $\mu_C = \langle 1_C, 1_C \rangle$. El counit es $\epsilon : \Delta \circ \times \longrightarrow 1_{\mathbf{C}\times\mathbf{C}}$, es decir, $\epsilon_{(X,Y)} : (X \times Y, X \times Y) \longrightarrow (X, Y)$, o sea, las proyecciones $\epsilon_{(X,Y)} = (\pi_1^{X,Y}, \pi_2^{X,Y})$.

Ejercicio 312. *Hallar el unit y counit de la adjunción $+ \dashv \Delta$.*

Ejercicio 313. *Detallar*

$$\varinjlim \dashv \Delta \dashv \varprojlim$$

para el caso de ecualizadores y coecualizadores. Dar el unit y el counit.

Ejercicio 314. *¿Qué es en general el unit y el counit de la adjunción*

$$\varinjlim \dashv \Delta?$$

¿Qué es en general el unit y el counit de la adjunción

$$\Delta \dashv \varprojlim?$$

Ejemplo 315. *Sean P y Q conjuntos con preórdenes vistos como categorías, y sean $P \underset{U}{\overset{F}{\rightleftarrows}} Q$ dos funtores (funciones que preservan sus preórdenes) tales que $F \dashv U$. Entonces $Hom_Q(F(a), x) \cong Hom_P(a, U(x))$ equivale a $F(a) \leq x \Leftrightarrow a \leq U(x)$, que se escribe también con la regla bidireccional*

$$\frac{F(a) \leq x}{a \leq U(x)}$$

Se infiere que $F(p)$ es el menor de los x que satisfacen que $p \leq U(x)$. En efecto, leyendo la regla de abajo hacia arriba, $F(p) \leq x$ para todos tales x. Además, la unit dice que hay una flecha $p \leq U(F(p))$, por lo tanto $F(p)$ es un tal x. De la misma manera, se obtiene que $U(q)$ es el mayor de los y tales que $F(y) \leq q$.

Las adjunciones entre preórdenes se llaman conexiones de Galois.

Ejemplo 316. *Un ejemplo particular de conexión de Galois es la inclusión $U : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$. La función $\lceil \_ \rceil : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ es adjunto izquierdo de U, es decir, $\lceil \_ \rceil \dashv U$. El unit $\mu_x : x \leq U(\lceil x \rceil)$ expresa que $x \leq \lceil x \rceil$. El counit $\epsilon_i : \lceil U(i) \rceil \leq i$ expresa que $i \leq i$.*

Ejercicio 317. *¿Cuál es el adjunto derecho de U? ¿Cuál el unit? ¿y el counit?*

Ejemplo 318. *Dada una función $f : A \longrightarrow B$, hay una adjunción $im(f) \dashv f^{-1}$. Tenemos $\mathcal{P}(A) \underset{f^{-1}}{\overset{im(f)}{\rightleftarrows}} \mathcal{P}(B)$ definidos por:*

$$\begin{array}{rcl}
im(f)(X \in \mathcal{P}(A)) & = & \{f(x) \mid x \in X\} \in \mathcal{P}(B) \\
im(f)(X \subseteq X') & = & im(f)(X) \subseteq im(f)(X') \\
f^{-1}(Y \in \mathcal{P}(B)) & = & \{x \in A \mid f(x) \in Y\} \in \mathcal{P}(A) \\
f^{-1}(Y \subseteq Y') & = & f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(Y')
\end{array}$$

Debemos comprobar que $Hom_{\mathcal{P}(B)}(im(f)(X), Y) \cong Hom_{\mathcal{P}(A)}(X, f^{-1}(Y))$, es decir,

$$\frac{im(f)(X) \subseteq Y}{X \subseteq f^{-1}(Y)}$$

que vale claramente.

Ejemplo 319. *Dado un lenguaje de primer orden, sea $Form(x_1, \ldots, x_{n-1})$ el conjunto de fórmulas de la lógica de primer orden que a lo sumo tienen a $x_1, \ldots, x_{n-1}$ como variables libres. Este conjunto es una categoría con la relación de consecuencia lógica $\vdash$ entre fórmulas.*

Se puede definir la operación $* : Form(x_1, \ldots, x_{n-1}) \longrightarrow Form(x_1, \ldots, x_n)$ por

$$\begin{aligned} *(\phi) &= \phi \\ *(\phi \vdash \psi) &= \phi \vdash \psi \end{aligned}$$

es el funtor de inclusión, que surge de observar simplemente que si las variables libres de ϕ se encuentran en $x_1, \ldots, x_{n-1}$, también se encuentran en $x_1, \ldots, x_n$.

En el sentido opuesto, sea ahora $\phi \in Form(x_1, \ldots, x_n)$, si cuantificamos sobre x_n obtenemos fórmulas en $Form(x_1, \ldots, x_{n-1})$ ya que la variable x_n deja de estar libre: $\forall x_n.\phi, \exists x_n.\phi \in Form(x_1, \ldots, x_{n-1})$.

Las reglas lógicas para los cuantificadores son equivalentes a:

$$\frac{*\phi \vdash \psi \in Form(x_1, \ldots, x_n)}{\phi \vdash \forall x_n.\psi \in Form(x_1, \ldots, x_{n-1})}$$

y a:

$$\frac{\exists x_n.\phi \vdash \psi \in Form(x_1, \ldots, x_{n-1})}{\phi \vdash *\psi \in Form(x_1, \ldots, x_n)}$$

Estas equivalencias son adjunciones. Tenemos entonces $\exists \dashv * \dashv \forall$.

Ejercicio 320. *¿Qué expresan el unit y counit de $* \dashv \forall$? ¿Y los de $\exists \dashv *$?*

Así como tenemos las secuencia $\exists \dashv * \dashv \forall$, y $+ \dashv \Delta \dashv \times$, y $0 \dashv ! \dashv 1$, pueden existir secuencias de mayor longitud aún.

Ejemplo 321. *Se pueden definir cuatro funtores $\mathbf{Cat} \underset{F,R}{\overset{U,V}{\rightleftarrows}} \mathbf{Set}$ tales que $V \dashv F \dashv U \dashv R$, donde U es el funtor de olvido dado por*

$$\begin{aligned} U(\mathbf{C}) &= \mathbf{C}_0 \\ U((F_0, F_1)) &= F_0 \end{aligned}$$

Ejercicio 322. *Encontrar $R : \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Cat}$ tal que $U \dashv R$.*

Ejercicio 323. *Encontrar $F : \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Cat}$ tal que $F \dashv U$. Encontrar $V : \mathbf{Cat} \longrightarrow \mathbf{Set}$ tal que $V \dashv F$.*

¿Podemos estirar la secuencia $\ldots V \dashv F \dashv U \dashv R \ldots$? El siguiente resultado dice que no:

Prop 324. *Los adjuntos derechos preservan límites (RAPL = Right Adjoint Preserve Limits). Los adjuntos izquierdos preservan colímites.*

Sean $\mathbf{C} \underset{U}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathbf{D}$ tales que $F \dashv U$ y sea $D : \mathbf{J} \longrightarrow \mathbf{D}$ un diagrama tal que $\varprojlim_j D(j)$ existe en $\mathbf{D}$. Para todo $X \in \mathbf{C}$ tenemos:

$$\begin{aligned} Hom_{\mathbf{C}}(X, U(\varprojlim_j D(j))) &\cong Hom_{\mathbf{D}}(F(X), \varprojlim_j D(j)) \\ &\cong \varprojlim_j Hom_{\mathbf{D}}(F(X), D_j) \\ &\cong \varprojlim_j Hom_{\mathbf{C}}(X, U(D_j)) \\ &\cong Hom_{\mathbf{C}}(X, \varprojlim_j U(D_j)) \end{aligned}$$

de donde por Yoneda, $U(\varprojlim_j D(j)) \cong \varprojlim_j U(D_j)$.

Por dualidad, adjuntos a izquierda preserva colímites.

Volviendo a la pregunta anterior a la proposición, podría responderse negativamente la posibilidad de estirar la secuencia $\ldots V \dashv F \dashv U \dashv R \ldots$ si se comprueba que R no preserva colímites y V no preserva límites.