

## PROBLEMAS DE SISTEMAS DE EDOS NO LINEALES

1. (Diferencia entre órbita y trayectoria) Sea  $\mathbf{f} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función de clase  $C^1$ .
- ¿Qué relación existe entre las órbitas de los sistemas autónomos  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  y  $\mathbf{x}' = -\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ? ¿Y entre sus trayectorias?
  - ¿Qué relación existe entre las órbitas de los sistemas autónomos  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  y  $\mathbf{x}' = 2\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ? ¿Y entre sus trayectorias?

- Son las mismas, pero sus trayectorias las recorren en sentido contrario aunque a igual velocidad.*
- Son las mismas, pero sus trayectorias las recorren a distinta velocidad aunque en el mismo sentido.*

2. (Simetrías & reversores) Sea  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función de clase  $C^1$ . Sean  $S, R \in M_n(\mathbb{R})$ . Sea  $\mathbf{x}(t)$  una solución del SNLA  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  tal que  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ .
- Probar que si  $\mathbf{f}(S\mathbf{x}) = S\mathbf{f}(\mathbf{x})$ , entonces  $\tilde{\mathbf{x}}(t) = S\mathbf{x}(t)$  también es solución. Deducir que si, además,  $S\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0$ , entonces  $\mathbf{x}(t) = S\mathbf{x}(t)$ .
  - Probar que si  $\mathbf{f}(R\mathbf{x}) = -R\mathbf{f}(\mathbf{x})$ , entonces  $\hat{\mathbf{x}}(t) = R\mathbf{x}(-t)$  también es solución. Deducir que si, además,  $R\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0$ , entonces  $\mathbf{x}(t) = R\mathbf{x}(-t)$ .
  - Ejemplo de aplicación: Sea  $(x(t), y(t), z(t))$  la solución del PVI

$$\begin{cases} x' = -yz, & x(0) = 1 \\ y' = xz, & y(0) = 0 \\ z' = -xy, & z(0) = 1. \end{cases}$$

Deducir del primer apartado que  $z(t) = x(t)$ . Deducir del segundo apartado que  $x(t)$  y  $z(t)$  son pares, pero  $y(t)$  es impar.

- $\tilde{\mathbf{x}}'(t) = S\mathbf{x}'(t) = S\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{f}(S\mathbf{x}(t)) = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}(t))$ . La segunda parte es consecuencia de la unicidad de soluciones:  $\mathbf{x}(t) = \tilde{\mathbf{x}}(t) = S\mathbf{x}(t)$ , pues  $\tilde{\mathbf{x}}(0) = S\mathbf{x}(0) = S\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ .
- $\hat{\mathbf{x}}'(t) = -R\mathbf{x}'(-t) = -R\mathbf{f}(\mathbf{x}(-t)) = \mathbf{f}(R\mathbf{x}(-t)) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(t))$ . La segunda parte es consecuencia de la unicidad de soluciones:  $\mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{x}}(t) = R\mathbf{x}(-t)$ , pues  $\hat{\mathbf{x}}(0) = R\mathbf{x}(0) = R\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ .
- Basta aplicar los dos primeros apartados con

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -yz \\ xz \\ -xy \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La simetría  $S$  permuta las componentes primera y tercera. El reversor  $R$  cambia el signo de la segunda.

3. (Retrato de fases 1D) Dibujar el retrato de fases de la EDO de primer orden autónoma

$$x' = \sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Calcular todos sus puntos de equilibrio y decir si son atractores o repulsores.
  - ¿Existe alguna solución que escape a más o menos infinito? Razonar la respuesta.
  - ¿Existe alguna solución periódica no constante? Razonar la respuesta.
- Los puntos de equilibrio cumplen  $\sin x = 0$ , luego son los múltiplos enteros de  $\pi$ . La solución crece cuando  $x' = \sin x > 0$  y decrece cuando  $x' = \sin x < 0$ . Por tanto, si notamos por  $x_n = n\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , a los puntos de equilibrio y por  $I_n = (x_n, x_{n+1})$  a los intervalos que delimitan, vemos que la solución  $x(t)$  crece cuando está contenida en  $I_n$  con  $n$  par, pero decrece si  $n$  es impar. Entonces los puntos de equilibrio  $x_n$  son repulsores si  $n$  es par y atractores si  $n$  es impar.
  - No, pues cualquier solución no constante está confinada entre dos puntos de equilibrio.
  - No, pues cualquier solución no constante está confinada entre dos puntos de equilibrio, tendiendo a uno de ellos cuando  $t \rightarrow +\infty$  y al otro cuando  $t \rightarrow -\infty$ .

4. (Retrato de fases 1D + parámetro) Dibujar el retrato de fases de la EDO de primer orden autónoma

$$x' = ax + x^3$$

en función del parámetro  $a \in \mathbb{R}$ . Representar todos los retratos simultáneamente en el plano de bifurcaciones  $(x, a)$ . ¿Para qué valor de  $a$  se produce un cambio cualitativo?

Si  $a \geq 0$ , entonces  $x_0 = 0$  es el único equilibrio y es repulsor. Si  $a < 0$ , entonces hay tres puntos de equilibrio:  $x_{\pm} = \pm\sqrt{-a}$ , que son repulsores; y  $x_0 = 0$ , que es un punto atractor cuya cuenca de atracción es el intervalo  $(x_-, x_+)$ . La bifurcación se produce cuando  $a = 0$ . Para ver el diagrama de bifurcaciones en el plano  $(x, a)$ , consultar el applet <http://mathlets.org/mathlets/phase-lines/>, aunque hay que escoger la EDO  $y' = ay + y^3$  y activar el diagrama de bifurcación. En el applet se representa el diagrama de bifurcaciones en el plano  $(a, y)$ , en vez del plano  $(x, a)$ .

5. (Pesca en un banco de atunes) Sea  $x(t)$  la población de un banco de atunes en el día  $t$ . Modelamos la evolución de la población mediante la ecuación logística  $x' = kx(1 - x/m)$ , donde  $k > 0$  denota la razón de crecimiento de la población y  $m > 0$  es el máximo número de atunes que el ecosistema puede sostener. Sin embargo, si suponemos que cada día se pesca un número constante  $p \geq 0$  de atunes, hemos de modificar la ecuación logística y trabajar con la EDO de primer orden autónoma

$$x' = f_p(x) := kx(1 - x/m) - p.$$

- a) Estudiar los puntos de equilibrio de la EDO en función del parámetro  $p$ . Calcular el valor crítico  $p = p_*$  donde se produce un cambio en el número de puntos de equilibrio. Esbozar los retratos de fases de la EDO para  $0 < p < p_*$ ,  $p = p_*$  y  $p > p_*$  en la semirecta  $\{x \geq 0\}$ .
- b) ¿Cuál es el mayor nivel de pesca sostenible? ¿Se necesita alguna condición sobre el tamaño inicial del banco de atunes para poder implementar el nivel de pesca óptimo? ¿A qué tiende la población de atunes en ese caso óptimo? ¿Qué relación hay entre los tamaños del banco de atunes en los casos de pesca óptima y pesca nula?

- a) La gráfica de  $f(x) = kx(1 - x/m)$  es una parábola invertida que corta al eje horizontal en  $x_- = 0$  y  $x_+ = m$ . El vértice de la parábola es  $x_* = m/2$  y el valor que toma la función en ese punto es

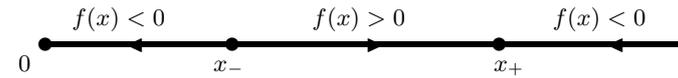
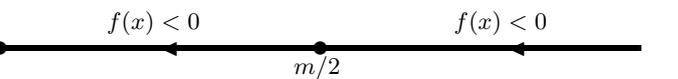
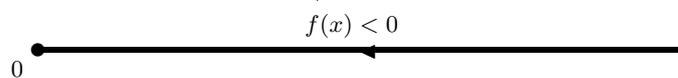
$$p_* = f(x_*) = f(m/2) = km/4 > 0.$$

La función  $f_p(x)$  se obtiene restando el término constante  $p$  a la función  $f(x)$ , lo cual significa que la parábola se mueve hacia abajo cuando aumentamos  $p$ . Por tanto, tenemos tres posibles casos:

- Si  $0 < p < p_*$ , la ecuación  $f_p(x) = 0$  sigue teniendo dos soluciones reales diferentes  $x_-$  y  $x_+$  tales que  $0 < x_- < m/2 < x_+ < m$ ,  $f_p(x) > 0$  si  $x \in (x_-, x_+)$  y  $f_p(x) < 0$  si  $x < x_-$  o  $x > x_+$ .
- Si  $p = p_*$ , la ecuación  $f_p(x) = 0$  tiene una única solución:  $x = m/2$  y  $f_p(x) < 0$  si  $x \neq m/2$ .
- Si  $p > p_*$ , entonces  $f_p(x) < 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  y no hay ningún punto de equilibrio.

Además  $\lim_{p \rightarrow 0^+} x_- = 0$ ,  $\lim_{p \rightarrow 0^+} x_+ = m$  y  $\lim_{p \rightarrow p_*^-} x_{\pm} = m/2$ .

Por tanto, tenemos tres tipos de retratos de fases en función del valor de  $p$ :

- Si  $0 < p < p_*$ , entonces:
 
- Si  $p = p_*$ , entonces:
 
- Si  $p > p_*$ , entonces:
 

- b) El nivel de pesca óptimo es  $p = p_*$ . Si pescamos más, la EDO no tiene ningún punto de equilibrio y todas sus soluciones tienden a  $-\infty$  cuando el tiempo avanza; es decir, agotamos el banco de pesca. Si pescamos al nivel óptimo e inicialmente el banco de atunes es suficientemente grande:  $x(0) > m/2$ , entonces la población de atunes tiende a al punto de equilibrio  $m/2$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ . Es decir, si el nivel de pesca es óptimo, entonces el tamaño del banco de atunes tiende a la mitad del tamaño que tendría sin pesca.

6. (Ecuación logística modificada) Consideramos la EDO autónoma de primer orden

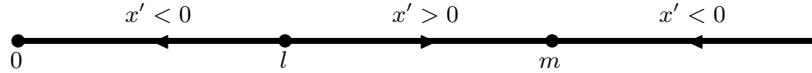
$$x' = kx(x/l - 1)(1 - x/m), \quad x \geq 0,$$

donde  $k$ ,  $m$  y  $l$  son parámetros positivos tales que  $l < m$ .

- a) Dibujar el retrato de fases en la semirecta positiva  $\{x \geq 0\}$ . Expresar  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$  en función de la condición inicial  $x(0) = x_0 \geq 0$ .

b) Dar una interpretación biológica de los parámetros  $k$ ,  $l$  y  $m$  suponiendo que la EDO modela la evolución de una población, siendo  $x(t)$  el tamaño de la población en el instante  $t$ . Comparar este modelo con el modelo de la ecuación logística.

a) Tenemos tres puntos de equilibrio:  $x = 0$ ,  $x = l$  y  $x = m$ . El retrato de fases es



Si  $x(t)$  es la solución que corresponde a la condición inicial  $x(0) = x_0 \geq 0$ , entonces

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } x_0 < l \\ l, & \text{si } x_0 = l \\ m, & \text{si } x_0 > l. \end{cases}$$

b) El parámetro  $k$  cuantifica la velocidad de reproducción,  $m$  es la población máxima (es decir, la capacidad de carga) que es sostenible con los recursos del ecosistema y  $l$  es la población mínima necesaria (es decir, la masa crítica) para garantizar la supervivencia de la especie.

La diferencia con la ecuación logística radica en el factor  $(x/l - 1)$  que modela que ciertas poblaciones requieren un mínimo número de individuos para ser capaces de sobrevivir. Por ejemplo, poblaciones que necesitan una masa crítica para poder defenderse de forma cooperativa de depredadores, para poder cazar o alimentarse de manera cooperativa o para poder encontrar pareja reproductiva.

7. (Ecuación del paracaidista) Un paracaidista con una masa de  $m$  kilogramos cae experimentando una aceleración gravitatoria constante de  $g$  metros por segundo cuadrado. Suponemos que la fuerza de fricción que frena la caída al abrirse el paracaídas es proporcional al cuadrado de la velocidad, siendo  $k > 0$  la constante de proporcionalidad. Sea  $v(t)$  la velocidad de caída (en metros por segundo y nunca negativa pues el paracaidista está cayendo) en el instante  $t$ . La ecuación que modela la velocidad de caída es la EDO de primer orden autónoma

$$v' = f(v), \quad v \geq 0,$$

donde  $f(v) = g - kv^2/m$ . Dibujar el retrato de fases de la ecuación  $v' = f(v)$  en la semirecta  $v \geq 0$ . Calcular su único punto de equilibrio  $v_* > 0$ , llamado *velocidad terminal*. ¿Es un equilibrio atractor o repulsor?

La velocidad terminal es  $v_* = \sqrt{mg/k}$ , que es atractor pues el retrato de fases es



8. (Sistema desacoplado 2D) Dibujar el retrato de fases del sistema

$$\begin{cases} x' &= -x + 3x^2 - 2x^3 \\ y' &= -2y. \end{cases}$$

Determinar la cuenca de atracción de los puntos de equilibrio atractores y la separatriz del sistema. Probar que el retrato de fases es simétrico respecto al eje horizontal y respecto a la separatriz.

Hay tres puntos de equilibrio:  $(0, 0)$ ,  $(1/2, 0)$  y  $(1, 0)$ . El segundo es inestable (pero no repulsor), los otros son atractores. Las ecuaciones están desacopladas, luego se estudian por separado. Por ejemplo,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} y_0 e^{-2t} = 0$  para cualquier condición inicial  $y_0$ . La ecuación de la componente  $x(t)$  se estudia como la ecuación logística. Las cuencas de atracción de los puntos  $(0, 0)$  y  $(1, 0)$  son los semiplanos  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 1/2\}$  y  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1/2\}$ , respectivamente. Los puntos situados sobre la separatriz  $\{x = 1/2\}$  son los únicos que tienden al punto de equilibrio intermedio. El retrato de fases está representado en la figura 1, obtenida mediante el fichero-M de MATLAB *Croquis\_SNLA2D\_desacoplado.m* publicado en la página web de la asignatura. Para probar la simetría respecto al eje horizontal basta ver que si  $y(t)$  es una solución de la segunda EDO  $y' = -2y$ , entonces  $\tilde{y}(t) = -y(t)$  también lo es:

$$\tilde{y}'(t) = -y'(t) = 2y(t) = -2\tilde{y}(t).$$

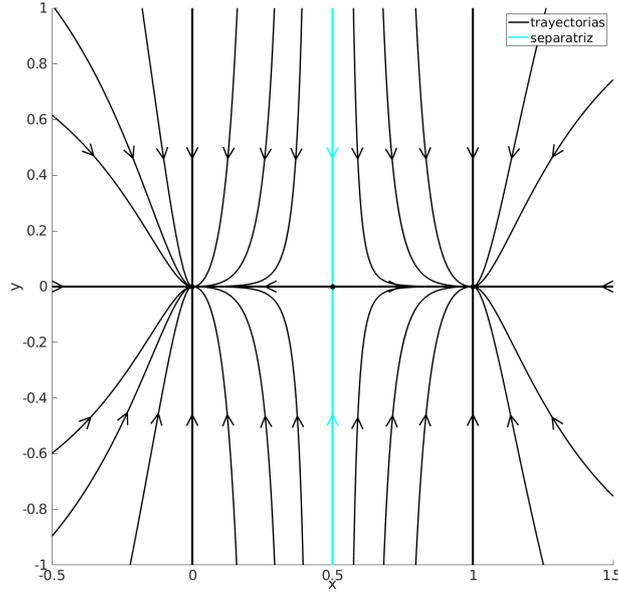


FIGURA 1. Retrato de fases del SNLA 2D desacoplado del problema 8.

Para probar la simetría respecto a la separatriz, basta ver que si  $x(t)$  es una solución de la primera EDO  $x' = -x + 3x^2 - 2x^3$ , entonces  $\tilde{x}(t) = 1 - x(t)$  también lo es:

$$\begin{aligned}\tilde{x}'(t) &= -x'(t) = x(t) - 3(x(t))^2 + 2(x(t))^3 \\ &= 1 - \tilde{x}(t) - 3(1 - \tilde{x}(t))^2 + 2(1 - \tilde{x}(t))^3 \\ &= (1 - 3 + 2) + (-1 + 6 - 6)\tilde{x}(t) + (6 - 3)(\tilde{x}(t))^2 - 2(\tilde{x}(t))^3 \\ &= -\tilde{x}(t) + 3(\tilde{x}(t))^2 - 2(\tilde{x}(t))^3.\end{aligned}$$

*Observación:* Sean  $f(x) = -x + 3x^2 - 2x^3$  y  $g(y) = -2y$ . Como  $g'(0) < f'(0) < 0$ , las trayectorias del sistema se acercan al origen tangentes al eje horizontal  $Ox$ , salvo las contenidas en la curva invariante estable rápida (o sea, en el eje vertical  $Oy$ ) del origen. Análogamente, como  $g'(0) < f'(1) < 0$ , las trayectorias del sistema también se acercan al nodo propio atractor  $(1,0)$  tangentes al eje horizontal, salvo las contenidas en la curva invariante estable rápida (o sea, en la recta  $\{x = 1\}$ ) de  $(1,0)$ .

9. (Retrato de fases 2D) En la figura 2 se muestra el retrato de fases de un SNLA 2D con tres puntos de equilibrio y un ciclo límite.

- Clasificar los tres puntos de equilibrio.
- ¿Existe algún punto de equilibrio que sea atractor? En caso afirmativo, decir cuál y señalar su cuenca de atracción en la figura.
- ¿Existe algún punto de equilibrio que sea repulsor? En caso afirmativo, decir cuál y explicar si las trayectorias que empiezan cerca de él pueden aproximarse a los otros dos puntos de equilibrio.
- ¿El ciclo límite es atractor o repulsor?

- $A$  es un foco atractor,  $B$  es una silla y  $C$  es un foco repulsor.
- $A$  es el único punto de equilibrio atractor. Su cuenca de atracción es la región a la izquierda de la curva invariante estable del punto de silla.
- El punto de silla no es un repulsor, pues existen trayectorias que tienden a él cuando  $t \rightarrow +\infty$ . Por tanto,  $C$  es el único repulsor. Debido al teorema de existencia y unicidad, las trayectorias que empiezan cerca de  $C$  no pueden salir de la región-trampa delimitada por el ciclo límite. Por tanto, las trayectorias que empiezan cerca de  $C$  no pueden aproximarse ni a  $A$  ni a  $B$ .
- La línea gruesa es el único ciclo límite que aparece en la figura. Es atractor.

10. (Linealización en SNLAs 2D) Calcular los puntos de equilibrio de los sistemas cuadráticos

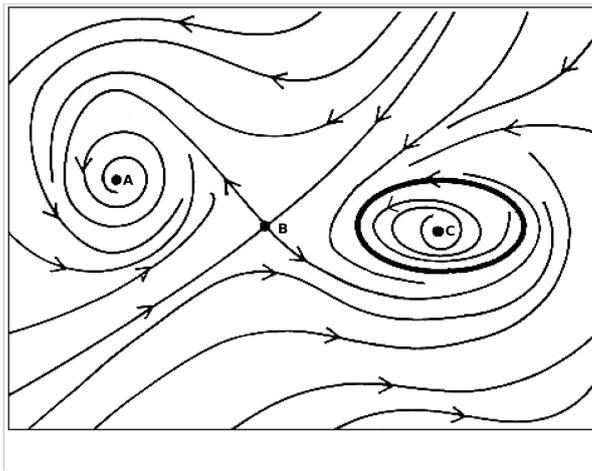


FIGURA 2. Retrato de fases de un SNLA 2D con tres puntos de equilibrio y un ciclo límite.

- a)  $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2 - x^2 - y^2 \end{cases}$   
 b)  $\begin{cases} x' = xy + 12 \\ y' = x^2 + y^2 - 25 \end{cases}$

Estudiar por el método de linealización la estabilidad de estos sistemas en cada punto de equilibrio. ¿En qué zonas del plano  $(x, y)$  se expanden áreas? ¿Y en cuales se contraen? ¿Qué se puede decir de las trayectorias del primer sistema cuando están lejos del origen?

- a) Los dos puntos de equilibrio son  $P = (1, 1)$  y  $Q = (-1, -1)$ . La matriz del sistema linealizado en el punto de equilibrio  $(x_*, y_*)$  es igual a

$$A(x_*, y_*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x}(x_*, y_*) & \frac{\partial x'}{\partial y}(x_*, y_*) \\ \frac{\partial y'}{\partial x}(x_*, y_*) & \frac{\partial y'}{\partial y}(x_*, y_*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2x_* & -2y_* \end{pmatrix}.$$

El PEQ  $P$  es una silla y el PEQ  $Q$  es un foco repulsor. La divergencia del sistema es  $\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial y} = 1 - 2x$ , luego las áreas se expanden en el semiplano izquierdo  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1/2\}$  y se contraen en el semiplano derecho  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 1/2\}$ . El croquis de este SNLA está representado en la figura 3. Notamos que si  $(x, y)$  está muy lejos del origen, entonces  $y' \ll |x'| \leq 0$ , luego la dirección vertical con sentido negativo es la dominante en el infinito.

- b) Los cuatro puntos de equilibrio son  $(3, -4)$ ,  $(4, -3)$ ,  $(-3, 4)$  y  $(-4, 3)$ . La matriz del sistema linealizado en el punto de equilibrio  $(x_*, y_*)$  es igual a

$$A(x_*, y_*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x}(x_*, y_*) & \frac{\partial x'}{\partial y}(x_*, y_*) \\ \frac{\partial y'}{\partial x}(x_*, y_*) & \frac{\partial y'}{\partial y}(x_*, y_*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_* & x_* \\ 2x_* & 2y_* \end{pmatrix}.$$

El sistema es inestable en los puntos  $(-3, 4)$  y  $(3, 4)$ ; atractor en el punto  $(4, -3)$  y repulsor en el punto  $(-4, 3)$ . La divergencia del sistema es  $\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial y} = 3y$ , luego las áreas se expanden en el semiplano superior  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$  y se contraen en el semiplano inferior  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}$ .

11. (Liapunov en SNLAs 2D) Usando la función  $V(x, y) = (x^2 + y^2)/2$ , estudiar la estabilidad entorno al origen de los siguientes sistemas:

- a)  $\begin{cases} x' = y - 3x^3 \\ y' = -x - 7y^3 \end{cases}$   
 b)  $\begin{cases} x' = -x + (x + y)^2 x \\ y' = -y^3 + (x + y)^2 y^3 \end{cases}$   
 c)  $\begin{cases} x' = -x^3 + 4xy^2 \\ y' = -4y^3 \end{cases}$   
 d)  $\begin{cases} x' = 2x^3 - 2y^3 \\ y' = 2xy^2 + 4x^2y + 2y^3 \end{cases}$

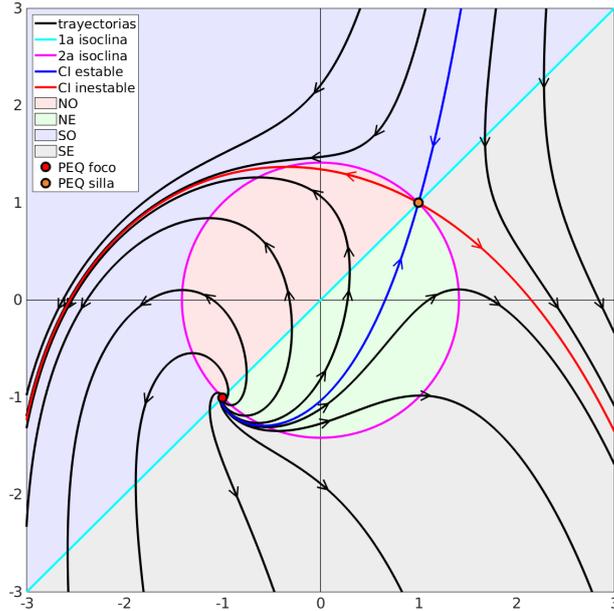


FIGURA 3. Croquis del SNLA 2D del apartado a) del problema 10.

¿Se puede determinar por linealización la estabilidad entorno al origen en algún apartado?

*La linealización no decide la estabilidad en ningún caso: el primer sistema linealizado es un centro, mientras que los otros son sistemas lineales degenerados sin VAPs positivos. De hecho, en los últimos dos casos la matriz del sistema linealizado es la matriz cero.*

*La derivada temporal de  $V(x, y) = (x^2 + y^2)/2$  es  $W(x, y) = xx' + yy'$ . Operando se obtiene que:*

- Atractor, pues  $W(x, y) = -3x^4 - 7y^4$  es definida negativa en el origen.*
- Atractor, pues  $W(x, y) = ((x + y)^2 - 1)(x^2 + y^4)$  es definida negativa en el origen.*
- Atractor, pues  $W(x, y) = -(x^2 - 2y^2)^2$  es semi-definida negativa en el origen y, además, el campo de vectores es transversal a las rectas  $\{y = \pm x/\sqrt{2}\}$  que forman las curvas de nivel cero de  $W(x, y)$ .*
- Repulsor, pues  $W(x, y) = 2(x^2 + y^2)^2$  es definida positiva en el origen.*

**12.** (Ajustando la función de Liapunov en un SNLA 2D) Estudiar la estabilidad entorno al origen de

$$\begin{cases} x' &= xy^2 + \mu x^3 \\ y' &= -2x^2y + \mu y^3 \end{cases} .$$

Indicación: Usar una función del tipo  $V(x, y) = ax^2 + by^2$ .

*La derivada temporal de  $V(x, y) = ax^2 + by^2$  es  $W(x, y) = (2a - 4b)x^2y^2 + 2\mu(ax^4 + by^4)$ . Si tomamos  $a = 2$  y  $b = 1$ , queda  $W(x, y) = 2\mu(ax^4 + by^4)$ , luego: Si  $\mu > 0$ ,  $W(x, y)$  es definida positiva y el origen es repulsor; si  $\mu < 0$ ,  $W(x, y)$  es definida negativa y el origen es atractor; y si  $\mu = 0$ ,  $W(x, y) \equiv 0$  y el origen es estable pero no atractor, pues  $W(x, y)$  es una cantidad conservada del sistema. Aquí tampoco se puede aplicar el método de linealización, pues la matriz del sistema linealizado es nula.*

**13.** (Linealización + Liapunov en un SNLA 2D) El origen es un punto de equilibrio del sistema

$$\begin{cases} x' &= y + \alpha x^3 \\ y' &= -x/4 + \mu y + 2\alpha y^5 \end{cases} .$$

- Calcular y clasificar el sistema linealizado entorno al origen en función de los parámetros.
- Estudiar, cuando  $\mu \neq 0$ , la estabilidad del sistema no lineal por el método de linealización.
- Estudiar, suponiendo  $\mu = 0$ , la estabilidad del sistema no lineal por el método de Liapunov usando una función de la forma  $V(x, y) = ax^2 + by^2$ .

- a) La matriz del sistema linealizado en el origen es  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/4 & \mu \end{pmatrix}$ . Como  $T = \text{traza}[A] = \mu$ ,  $D = \det[A] = 1/4$  y  $\Delta = T^2 - 4D = \mu^2 - 1$ , obtenemos el diagrama de bifurcación de la figura 4. Los valores  $\mu = \pm 1$  corresponden a nodos impropios. El color azul/verde/rojo denota un sistema linealizado atractor/estable/repulsor.

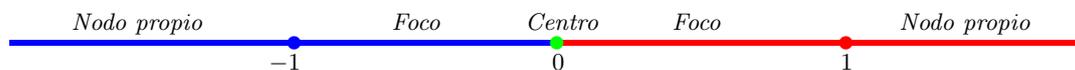


FIGURA 4. Diagrama de bifurcación del sistema linealizado del problema 13 en  $\mu \in \mathbb{R}$ .

- b) El sistema no lineal es atractor/repulsor en el origen cuando el parámetro  $\mu$  es negativo/positivo, sin importar el valor de  $\alpha$ . La linealización no decide la estabilidad cuando  $\mu = 0$ .  
 c) Si  $\mu = 0$ , la derivada temporal de la función  $V(x, y)$  es  $W(x, y) = (2a - b/2)xy + 2\alpha(ax^4 + by^6)$ . Si tomamos  $a = 1$  y  $b = 4$ , queda  $W(x, y) = 2\alpha(x^4 + 4y^6)$ , luego: Si  $\alpha > 0$ ,  $W(x, y)$  es definida positiva y el origen es repulsor; si  $\alpha < 0$ ,  $W(x, y)$  es definida negativa y el origen es atractor; y si  $\alpha = 0$ ,  $W(x, y) \equiv 0$  y el origen es un centro no lineal, estable pero no atractor.

14. (Estabilidad de una EDO de segundo orden autónoma) Consideramos la ecuación

$$x'' + (\mu + 3x^2)x' + x = 0, \quad \mu \geq 0.$$

- a) Probar que si definimos  $y = x' + \mu x + x^3$ , entonces la ecuación se transforma en el SNLA

$$\begin{cases} x' &= y - \mu x - x^3 \\ y' &= -x \end{cases}.$$

- b) Determinar, cuando sea posible, la estabilidad del sistema en el origen por linealización.  
 c) Usando la función  $V(x, y) = (x^2 + y^2)/2$ , estudiar la estabilidad del sistema en el origen por el método de Liapunov para  $\mu = 0$ .  
 d) ¿Qué se puede deducir sobre la ecuación original?

- a) La primera ecuación del sistema se obtiene despejando  $x'$  de la definición de  $y$ . La segunda ecuación es  $y' = x'' + (\mu + 3x^2)x' = -x$ .  
 b) La matriz del sistema linealizado en el origen es  $A = \begin{pmatrix} -\mu & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Como  $T = \text{traza}[A] = -\mu$ ,  $D = \det[A] = 1$  y  $\Delta = T^2 - 4D = \mu^2 - 4$ , obtenemos el diagrama de bifurcación de la figura 5. Los valores  $\mu = \pm 2$  corresponden a nodos impropios. El color azul/verde/rojo denota un sistema linealizado atractor/estable/repulsor. Por tanto, el origen es un punto de equilibrio repulsor/atractor cuando el parámetro  $\mu$  es negativo/positivo. La linealización no decide la estabilidad cuando  $\mu = 0$ .

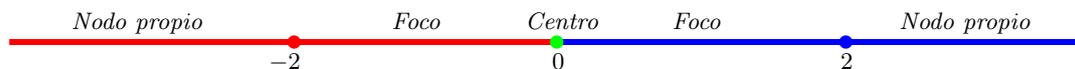


FIGURA 5. Diagrama de bifurcación del sistema linealizado del problema 14 en  $\mu \in \mathbb{R}$ .

- c) La derivada temporal de  $v(x, y) = (x^2 + y^2)/2$  es  $W(x, y) = -\mu x^2 - x^4$ . Si  $\mu \geq 0$ ,  $W(x, y)$  es semidefinida negativa y el origen es atractor; si  $\mu < 0$ ,  $W(x, y)$  es semidefinida positiva y el origen es repulsor. Aquí, hemos usado que el campo de vectores es transversal a la recta  $\{y = 0\}$  donde se anula  $W(x, y)$ .  
 d) Si  $\mu \geq 0$ , entonces el origen del sistema 2D es atractor y  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t), y(t)) = (0, 0)$  para toda trayectoria que empiece suficientemente cerca del origen, luego  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$  y podemos decir que la ecuación original también es atractor. Un razonamiento análogo se aplica en el caso  $\mu < 0$ .

15. (Un SNLA 2D con tres rectas invariantes) Consideramos el SNLA 2D

$$\begin{cases} x' &= x - 2y - x^2 + 2xy - y^2 \\ y' &= -y. \end{cases}$$

- a) Calcular sus puntos de equilibrio, estudiar la estabilidad de cada uno por linealización y describir cómo son las trayectorias del sistema cerca de cada punto de equilibrio.

b) Probar que las tres rectas

$$r \equiv y = 0, \quad s \equiv y = x, \quad t \equiv y = x - 1$$

son invariantes. ¿Cuáles son las curvas invariantes estable e inestable de la silla no lineal?

- c) Sea  $(x(t), y(t))$  una solución arbitraria del sistema. ¿Qué se puede decir de  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$ ?  
 d) Dibujar el retrato de fases completo del sistema, marcando con flechas el sentido de las trayectorias. ¿Cuál es la cuenca de atracción del punto de equilibrio atractor?

a) Hay dos puntos de equilibrio:  $(0, 0)$  y  $(1, 0)$ . La matriz del sistema linealizado en el punto  $(x_0, y_0)$  es

$$A = \begin{pmatrix} 1 - 2x_0 + 2y_0 & -2 + 2x_0 - 2y_0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ , entonces  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  es una matriz triangular superior cuyos VAPs son  $\lambda_1 = 1 > 0$  y  $\lambda_2 = -1 < 0$  y cuyos VEPs son  $\mathbf{v}_1 = (1, 0)$  y  $\mathbf{v}_2 = (1, 1)$ . Por tanto, el sistema linealizado es una silla y el origen es una silla no lineal (inestable, no repulsora) en el sistema no lineal.

Si  $(x_0, y_0) = (1, 0)$ , entonces  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  es una matriz diagonal con VAP doble  $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$  y VEPs  $\mathbf{v}_1 = (1, 0)$  y  $\mathbf{v}_2 = (0, 1)$ . Por tanto, el sistema linealizado es un nodo propio atractor y el punto de equilibrio  $(1, 0)$  es atractor en el sistema no lineal.

b) La velocidad en un punto de la forma  $(x, y) = (x, 0) \in r$  es tangente a la propia recta  $r$ :

$$(x', y') = (x(1-x), 0) = x(1-x) \cdot (1, 0) \parallel r.$$

La velocidad en un punto de la forma  $(x, y) = (x, x) \in s$  es tangente a la propia recta  $s$ :

$$(x', y') = (x - 2x - x^2 + 2x^2 - x^2, -x) = (-x, -x) = (-x) \cdot (1, 1) \parallel s.$$

La velocidad en un punto de la forma  $(x, y) = (x, x-1) \in t$  es tangente a la propia recta  $t$ :

$$(x', y') = (x - 2x + 2 - x^2 + 2x^2 - 2x - x^2 + 2x - 1, 1 - x) = (1 - x, 1 - x) = (1 - x) \cdot (1, 1) \parallel t.$$

Es decir, en este sistema no lineal la curva invariante estable/inestable del origen no solo es tangente a la dirección estable/inestable en el origen, si no que es una recta.

- c) La solución de la EDO lineal homogénea  $y' = -y$  es  $y(t) = y_0 e^{-t}$ , donde  $y(0) = y_0$  es la condición inicial. Por tanto,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = y_0 \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = 0$ , para toda  $y_0 \in \mathbb{R}$ .  
 d) Ver el dibujo al final de las soluciones del examen de junio de 2017. La cuenca de atracción del punto de equilibrio atractor es el semiplano  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < x - 1\}$ .

16. (Polares en un SNLA 2D) Consideramos el SNLA 2D de primer orden en coordenadas cartesianas

$$\begin{cases} x' = 2x(1-r) - y(1-x/r) \\ y' = 2y(1-r) + x(1-x/r) \end{cases}, \quad r \neq 0,$$

donde  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  es el radio en coordenadas polares  $(r, \theta) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi]$ . Por continuidad, imponemos que el origen sea un punto de equilibrio. Es decir, decimos que  $(x', y') = (0, 0)$  cuando  $(x, y) = (0, 0)$  o  $r = 0$ .

a) El sistema anterior se desacopla en coordenadas polares, pues es de la forma

$$\begin{cases} r' = \alpha r(1-r) \\ \theta' = \beta(1 - \cos \theta) \end{cases}$$

para algunas constantes  $\alpha, \beta > 0$ . Calcular  $\alpha$  y  $\beta$ .

b) Calcular los puntos de equilibrio y dibujar el retrato de fases de la EDO

$$r' = \alpha r(1-r), \quad r \in [0, +\infty).$$

c) Calcular los puntos de equilibrio y dibujar el retrato de fases de la EDO

$$\theta' = \beta(1 - \cos \theta), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

d) Dibujar el croquis del sistema desacoplado en coordenadas polares  $(r, \theta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi]$ .

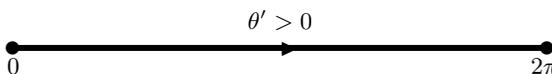
e) Dibujar el croquis del sistema original en coordenadas cartesianas  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

a)  $\alpha = 2$  y  $\beta = 1$ .

b) Hay dos puntos de equilibrio:  $r = 1$  (atractor) y  $r = 0$  (repulsor). El retrato de fases es



c) La EDO  $\theta' = 1 - \cos \theta$  está definida en el intervalo cerrado  $[0, 2\pi]$ , ya que  $\theta$  es un ángulo. Hay dos puntos de equilibrio:  $\theta = 0$  y  $\theta = 2\pi$ . El retrato de fases es



d) El retrato de fases del sistema desacoplado en coordenadas polares  $(r, \theta)$  se obtiene representando horizontalmente la dinámica de la variable radial  $r$  y verticalmente la dinámica de la variable angular  $\theta$ . Ese sistema tiene cuatro puntos de equilibrio:  $(r, \theta) = (0, 0), (0, 2\pi), (1, 0), (1, 2\pi)$ ; dos rectas invariantes horizontales:  $\{\theta = 0\}$  y  $\{\theta = 2\pi\}$ ; y dos rectas invariantes verticales:  $\{r = 0\}$  y  $\{r = 1\}$ . En cada recta invariante reproducimos los sentidos representados en los dibujos anteriores, aunque ahora la variable  $\theta$  pasa a ser una coordenada vertical. Ver el croquis izquierdo de la figura 6.

e) El retrato de fases en coordenadas cartesianas  $(x, y)$  se obtiene recordando que

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Tenemos las siguientes relaciones entre coordenadas polares y cartesianas:

- El punto de equilibrio  $(r, \theta) = (0, 0)$  pasa a ser el punto de equilibrio  $(x, y) = (0, 0)$ ;
- El punto de equilibrio  $(r, \theta) = (1, 0)$  pasa a ser el punto de equilibrio  $(x, y) = (1, 0)$ ;
- La recta invariante  $\{\theta = 0\}$  pasa a ser la semirecta invariante  $s \equiv \{x \geq 0, y = 0\}$ , el sentido de las trayectorias sobre  $s$  es el dibujado en el retrato de fases de la EDO  $r' = r(1 - r)$ ;
- La recta invariante  $\{\theta = 2\pi\}$  también pasa a ser la semirecta  $s$ , pues  $\theta$  es una variable angular;
- Todas las trayectorias no contenidas en la semirecta invariante  $s$  giran en sentido antihorario pues en tal caso  $\theta' > 0$ , pero nunca llegan a completar una vuelta entera pues no pueden tocar a la semirecta  $s$ ;
- La recta invariante  $\{r = 0\}$  pasa a ser el punto de equilibrio  $(x, y) = (0, 0)$ ;
- La recta invariante  $\{r = 1\}$  pasa a ser la circunferencia invariante  $C \equiv \{x^2 + y^2 = 1\}$ , recorrida en sentido antihorario excepto en el punto  $(1, 0)$  donde hay un punto de equilibrio;
- Todas las trayectorias contenidas en el interior de  $C$  pero fuera de  $s$  tienden al punto de equilibrio  $(x, y) = (1, 0) \in C$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ , tienden al punto de equilibrio  $(x, y) = (0, 0)$  cuando  $t \rightarrow -\infty$  y dan un único giro sin tocar  $s$ , pues

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} r(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \theta(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = 2\pi.$$

- Todas las trayectorias contenidas en el exterior de  $C$  pero fuera de  $s$  tienden al punto de equilibrio  $(x, y) = (1, 0) \in C$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ , vienen del “infinito” cuando el tiempo retrocede y dan menos de una vuelta, pues

$$\lim_{t \rightarrow \omega_-} r(t) = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow \omega_-} \theta(t) \in (0, 2\pi), \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = 2\pi.$$

Ver el croquis derecho de la figura 6.

17. (Sistema de Lorenz: Wikipedia y Youtube) Consideramos el sistema de Lorenz

$$\begin{cases} x'_1 &= \sigma(x_2 - x_1) \\ x'_2 &= x_1(\rho - x_3) - x_2 \\ x'_3 &= x_1x_2 - \beta x_3 \end{cases}$$

donde  $\sigma, \rho, \beta > 0$  son parámetros del sistema. Para simplificar, supondremos que  $\rho > 1$ .

- Calcular sus tres puntos de equilibrio.
- Estudiar la estabilidad del sistema de Lorenz entorno al origen.
- ¿Qué aspecto tienen sus trayectorias cerca del origen?
- Este sistema, ¿expande o contrae volúmenes?

- Los tres puntos críticos son el origen y  $(\pm a, \pm a, b)$ , con  $a = \sqrt{\beta(\rho - 1)}$  y  $b = \rho - 1$ .
- La matriz del sistema linealizado entorno al origen es

$$A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix},$$

cuyos tres VAPs son

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(\sigma + 1) \pm \sqrt{(\sigma + 1)^2 + 4\sigma(\rho - 1)}}{2}, \quad \lambda_3 = -\beta.$$

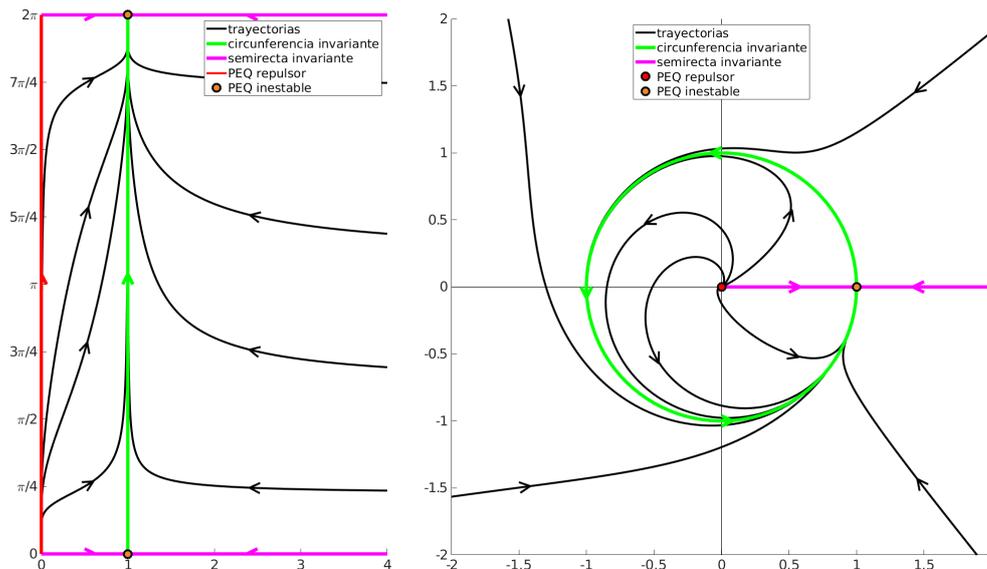


FIGURA 6. Croquis del SNLA del problema 16. Izquierda: En coordenadas polares  $(r, \theta)$ . Derecha: En coordenadas cartesianas  $(x, y)$ .

Como  $\lambda_1 > 0$  y  $\lambda_2, \lambda_3 < 0$ , el origen es inestable pero no repulsor.

- c) El origen es una silla, con una dimensión inestable (de salida) y dos dimensiones estables (de entrada). El eje vertical es una recta invariante de entrada. Las trayectorias cerca del origen no giran, pues todos los VAPs son reales.
- d) La divergencia del campo vectorial es siempre negativa, luego contrae volúmenes.

18. (Sistema de Rössler: Wikipedia y Youtube) Consideramos el sistema de Rössler

$$\begin{cases} x_1' &= -x_2 - x_3 \\ x_2' &= x_1 + ax_2 \\ x_3' &= (x_1 - b)x_3 + c \end{cases} .$$

Es un sistema no lineal 3D que depende de tres parámetros reales  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

- a) Calcular los puntos de equilibrio del sistema cuando  $a \neq 0$ .
- b) Calcular el único punto de equilibrio del sistema cuando  $a = c = 0$  y  $b \neq 0$ . Estudiar, para los valores de  $b \neq 0$  en que sea posible, su estabilidad por el método de linealización.
- c) Calcular los puntos de equilibrio del sistema cuando  $a = b = c = 0$ . Estudiar la estabilidad por el método de linealización en todos los puntos de equilibrio donde sea posible.
- d) Supongamos que  $a > 0$  y  $b = c$ . Si una trayectoria parte de un punto del plano  $x_1 = b$  tal que  $x_2 \neq 0$ , ¿inicialmente se acerca o aleja del origen?
- a) Las puntos de equilibrio cumplen  $x_1 = -ax_2$ ,  $x_3 = -x_2$  y  $a(x_2)^2 + bx_2 + c = 0$ .
- b) Cuando  $a = c = 0$  y  $b \neq 0$ , el origen es el único punto de equilibrio y el polinomio característico de su matriz linealizada es  $Q_A(\lambda) = -(\lambda + b)(\lambda^2 + 1)$ . Si  $b < 0$ , existe un VAP positivo y dos VAPs complejos conjugados de parte real nula, luego el sistema es inestable en el origen; pero si  $b \geq 0$ , la linealización no decide la estabilidad del sistema en el origen.
- c) Cuando  $a = b = c = 0$ , existen infinitos puntos de equilibrio:  $(0, x_2, -x_2)$ ,  $x_2$  libre. El polinomio característico de la matriz del sistema linealizado es  $Q_A(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 + 1 - x_2)$ . Por tanto, si  $x_2 > 1$ , existe un VAP positivo, un VAP negativo y un VAP nulo, luego el sistema es inestable pero no repulsor en  $(0, x_2, -x_2)$ . De lo contrario, la linealización no decide la estabilidad del sistema.
- d) La función  $V(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2/2 = ((x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2)/2$  cuantifica la distancia al origen. Como  $x_1 = b = c$  vemos que la derivada temporal de esta función es positiva:

$$W(\mathbf{x}) = x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3' = a(x_2)^2 + (c - x_1)x_3 + (x_1 - b)(x_3)^2 = a(x_2)^2 > 0,$$

luego la trayectoria se aleja del origen.

19. (Linealización + Liapunov en un SNLA 3D) El origen es un punto de equilibrio del sistema

$$\begin{cases} x'_1 &= \mu x_1^3 - 2x_2 + x_2x_3 \\ x'_2 &= \mu x_2^3 + x_1 - x_1x_3 \\ x'_3 &= \mu x_3^3 + x_1x_2 \end{cases}$$

siendo  $\mu$  un parámetro real.

- Estudiar, si es posible, la estabilidad del origen por el método de linealización.
- Estudiar la estabilidad del origen por Liapunov usando una función de la forma

$$V(\mathbf{x}) = \frac{c_1x_1^2 + c_2x_2^2 + c_3x_3^2}{2},$$

para algunos valores apropiados de  $c_1$ ,  $c_2$  y  $c_3$ .

- Sea  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$  la solución que se obtiene con la condición inicial

$$x_1(0) = -1, \quad x_2(0) = 2, \quad x_3(0) = 1.$$

¿Para qué valores de  $\mu$  es decreciente la función  $x_2(t)$  en  $t = 0$ ? ¿Y para cuáles es creciente?  
¿Para qué valores de  $\mu$  tiene un mínimo local estricto la función  $x_2(t)$  en  $t = 0$ ? ¿Y para cuáles tiene un máximo local estricto?

- Dibujar un croquis aproximado de las trayectorias del sistema no lineal cerca del origen cuando  $\mu = 0$ . Indicación: Buscar todos los posibles valores de  $b_1, b_2, b_3, d \in \mathbb{R}$  tales que la función

$$H(\mathbf{x}) = \frac{b_1x_1^2 + b_2x_2^2 + b_3(x_3 - d)^2}{2}$$

es una cantidad conservada del sistema cuando  $\mu = 0$ .

- Los VAPs de la matriz del sistema linealizado son  $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}i$  y  $\lambda_3 = 0$ . Por tanto, la linealización no decide la estabilidad del sistema no lineal en el origen, pues todos los VAPs tienen parte real nula.
- Tomando  $c_2 = 2c_1$ ,  $c_3 = c_1$  y  $c_1 > 0$  arbitrario, la derivada temporal  $W(\mathbf{x}) = \mu c_1(x_1^4 + 2x_2^4 + x_3^4)$  es definida positiva si  $\mu > 0$ , definida negativa si  $\mu < 0$ , e idénticamente nula si  $\mu = 0$ . Por tanto, el origen es un repulsor si  $\mu > 0$ , un atractor si  $\mu < 0$  y estable pero no atractor si  $\mu = 0$ .
- Como  $x'_2(0) = \mu x_2^3(0) + x_1(0) - x_1(0)x_3(0) = 8\mu$ , distinguimos tres casos.
  - $\mu > 0 \Rightarrow x'_2(0) > 0 \Rightarrow x_2(t)$  es creciente en  $t = 0$ ;
  - $\mu < 0 \Rightarrow x'_2(0) < 0 \Rightarrow x_2(t)$  es decreciente en  $t = 0$ ; y
  - $\mu = 0 \Rightarrow x'_2(0) = 0$ , luego necesitamos más derivadas:

$$\begin{aligned} x'_1(0) &= -2x_2(0) + x_2(0)x_3(0) = -2 \\ x'_3(0) &= x_1(0)x_2(0) = -2 \\ x''_2(0) &= x'_1(0) - x'_1(0)x_3(0) - x_1(0)x'_3(0) = -2. \end{aligned}$$

Como  $x''_2(0) < 0$ , resulta que  $x_2(t)$  tiene un máximo local estricto en  $t = 0$ .

- Si  $b_1 = 1 - d$ ,  $b_2 = 2 - d$ ,  $b_3 = 1$  y  $d \in \mathbb{R}$  queda libre, entonces  $H(\mathbf{x})$  es una cantidad conservada. Las superficies de nivel de  $H(\mathbf{x})$  son elipsoides centrados en el origen si  $d = 0$ ; cilindros circulares de eje  $\{(x_1, 0, 1) : x_1 \in \mathbb{R}\}$  si  $d = 1$ ; y cilindros hiperbólicos de eje  $\{(0, x_2, 2) : x_2 \in \mathbb{R}\}$  si  $d = 2$ . Por tanto, las trayectorias del sistema están contenidas en las intersecciones de estas superficies de nivel. Por ejemplo, cada pequeño elipsoide centrado en el origen está foliado por sus intersecciones con los cilindros circulares y esas intersecciones parecen "paralelos" recorridos en sentido antihorario cuando se miran desde "arriba", ya que  $x'_1 = -2x_2$  y  $x'_2 = x_1$  en el plano horizontal  $x_3 = 0$ .

20. (Un SNLA 3D con dos cantidades conservadas) Consideramos el sistema no lineal 3D dado por

$$\begin{cases} x' &= yz \\ y' &= -xz \\ z' &= -xy. \end{cases}$$

- Encontrar todos los puntos de equilibrio y estudiar su estabilidad por linealización.
- Calcular la derivada temporal de las funciones

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2, \quad G(x, y, z) = x^2 + z^2, \quad H(x, y, z) = y^2 + z^2.$$

- Probar, usando el apartado anterior, que todos los puntos de equilibrio donde el método de linealización no decide la estabilidad son estables pero no atractores.

d) Probar que si  $(x(t), y(t), z(t))$  es una solución del sistema, entonces las funciones  $(x(t), z(t), y(t))$  y  $(-x(-t), y(-t), z(-t))$  también lo son.

a) Los tres ejes de coordenadas están formados por puntos de equilibrio. La matriz del sistema linealizado en el punto de equilibrio  $(x_0, y_0, z_0)$  es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & z_0 & y_0 \\ -z_0 & 0 & -x_0 \\ -y_0 & -x_0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A continuación, distinguimos cuatro casos:

- Caso  $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ : En este caso  $A = 0$ , luego  $\lambda = 0$  es un VAP triple. Por tanto, el método de linealización no decide la estabilidad del origen.
- Caso  $y_0 = z_0 = 0$ , pero  $x_0 \neq 0$ : En este caso la matriz del sistema linealizado es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_0 \\ 0 & -x_0 & 0 \end{pmatrix},$$

luego su polinomio característico es  $Q_A(\lambda) = -\lambda^3 + x_0^2 \lambda^2 = -\lambda(\lambda^2 - x_0^2)$  y sus VAPs son  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = |x_0| > 0$  y  $\lambda_3 = -|x_0| < 0$ . Por tanto, el punto de equilibrio es inestable.

- Caso  $x_0 = z_0 = 0$ , pero  $y_0 \neq 0$ : En este caso la matriz del sistema linealizado es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & y_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -y_0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

luego su polinomio característico es  $Q_A(\lambda) = -\lambda^3 - y_0^2 \lambda^2 = -\lambda(\lambda^2 + y_0^2)$  y sus VAPs son  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = |y_0|i$  y  $\lambda_3 = -|y_0|i$ . Por tanto, el método de linealización no decide la estabilidad.

- Caso  $x_0 = y_0 = 0$ , pero  $z_0 \neq 0$ : En este caso la matriz del sistema linealizado es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & z_0 & 0 \\ -z_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

luego su polinomio característico es  $Q_A(\lambda) = -\lambda^3 - z_0^2 \lambda^2 = -\lambda(\lambda^2 + z_0^2)$  y sus VAPs son  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = |z_0|i$  y  $\lambda_3 = -|z_0|i$ . Por tanto, el método de linealización no decide la estabilidad.

b)  $\frac{dF}{dt} \equiv 0$ ,  $\frac{dG}{dt} \equiv 0$  y  $\frac{dH}{dt} = -4xyz$ .

c) El truco es mirar las intersecciones de las superficies de nivel de las dos cantidades conservadas.

Sea  $(0, 0, z_0)$  un punto de equilibrio situado sobre el eje  $z$  pero diferente del origen:  $z_0 \neq 0$ . Queremos saber si una trayectoria  $(x(t), y(t), z(t))$  que empieza en un punto cercano al punto de equilibrio se acerca, se aleja o revolotea alrededor de  $(0, 0, z_0)$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ . Supondremos que  $(x(0), y(0), z(0))$  no está sobre el eje  $z$ , pues en tal caso sería un punto de equilibrio y no se movería.

En primer lugar, observamos que la trayectoria está contenida en el cilindro vertical

$$x^2 + y^2 = r^2$$

donde  $r = \sqrt{(x(0))^2 + (y(0))^2}$  es la distancia del punto  $(x(0), y(0), z(0))$  al eje  $z$ . En segundo lugar, observamos que la trayectoria está contenida en el cilindro horizontal

$$x^2 + z^2 = \rho^2$$

donde  $\rho = \sqrt{(x(0))^2 + (z(0))^2}$  es la distancia de  $(x(0), y(0), z(0))$  al eje  $y$ . Si  $(x(0), y(0), z(0))$  está suficientemente cerca del punto  $(0, 0, z_0)$ , entonces  $0 < r < \rho$ , luego la intersección de los dos cilindros es la unión de dos pequeñas curvas cerradas, una cercana al punto  $(0, 0, z_0)$  y otra cercana al punto  $(0, 0, -z_0)$ . Esto implica que la trayectoria está contenida en la primera de tales curvas. Por tanto, el punto  $(0, 0, z_0)$  es estable pero no atractor, ya que la trayectoria ni se acerca a él ni se aleja de él.

El razonamiento para los puntos de equilibrio de la forma  $(0, y_0, 0)$ ,  $y_0 \neq 0$ , es similar.

d) Basta aplicar los dos primeros apartados del problema 2 con

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} yz \\ -xz \\ -xy \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La simetría  $S$  permuta las componentes segunda y tercera. El reversor  $R$  cambia el signo de la primera.

21. (Campos de fuerza conservativos con un grado de libertad) Dibujar el retrato de fases de los campos de fuerza

$$x'' = F(x), \quad F(x) = -\frac{dU}{dx}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

provenientes de los siguientes potenciales:

- a)  $U(x) = (x^2 - 1)^2$ .
- b)  $U(x) = x^3/3 - x^2/2$ .
- c)  $U(x) = -(x^2 - 1)^2$ .

En cada caso, ¿puede escapar la partícula a más o menos infinito? ¿para qué valores de la energía existen soluciones acotadas? Escribir la fórmula del periodo  $T(E_0)$  de las soluciones periódicas de energía  $E_0 = 1/4$  en el primer potencial, pero no intentéis calcular la correspondiente integral. Responder, justificando las respuestas, las siguientes preguntas en el caso del tercer potencial:

- i) ¿Qué energía tienen los centros?
- ii) ¿Qué energía tienen las sillas?
- iii) ¿En qué nivel de energía está la separatriz?
- iv) ¿Qué energías tienen las partículas que oscilan?
- v) ¿Qué energías tienen las partículas que nunca cambian de sentido?
- vi) ¿Qué energías tienen las partículas que cambian de sentido una única vez?
- vii) Si la partícula  $x(t)$  parte de la posición inicial  $x(0) = 0$  con velocidad inicial  $x'(0) = v_0$ , ¿qué valor de  $v_0$  hace que  $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = -1$  y  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 1$ ?
- viii) Sea  $x(t)$  una partícula con energía  $E = -1/4$ . Si parte de la posición  $x(0) = 0$ , ¿en qué intervalo  $[a, b]$  oscila? Y si parte de la posición  $x(0) = 2$ , ¿en qué intervalo  $[c, +\infty)$  se mueve?

- a) El potencial  $U(x) = (x^2 - 1)^2$  tiene mínimos globales en  $x = \pm 1$ , un máximo local estricto en  $x = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} U(x) = +\infty$ . Además,  $U(0) = 1$  y  $U(\pm 1) = 0$ . Por tanto, el sistema tiene tres puntos de equilibrio:  $(\pm 1, 0)$  que son dos centros no lineales y  $(0, 0)$  que es una silla no lineal.

La partícula nunca puede escapar a más o menos infinito, pues ninguna curva de nivel lo hace. Es decir, todas las soluciones son acotadas. El periodo de energía  $E_0 = 1/4$  es

$$T(E_0) = 2 \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{2(E_0 - U(x))}} = 2 \int_{\sqrt{1/2}}^{\sqrt{3/2}} \frac{dx}{\sqrt{1/2 - 2(x^2 - 1)^2}} = \sqrt{2} \int_{\sqrt{1/2}}^{\sqrt{3/2}} \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - x^4 - 3/4}},$$

pues las cuatro soluciones de la ecuación  $U(x) = E_0 = 1/4$  son  $x = \pm\sqrt{1/2}, \pm\sqrt{3/2}$ . Hemos de trabajar en el intervalo  $[a, b] = [\sqrt{1/2}, \sqrt{3/2}]$  pues necesitamos que  $U(x) < E_0$  en ese intervalo.

- b) El potencial  $U(x) = x^3/3 - x^2/2$  tiene un mínimo local estricto en  $x = 1$ , un máximo local estricto en  $x = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} U(x) = \pm\infty$ . Además,  $U(0) = 0$  y  $U(1) = -1/6$ . Por tanto, el sistema tiene dos puntos de equilibrio:  $(0, 0)$  que es una silla no lineal y  $(1, 0)$  que es un centro no lineal. Finalmente, existe alguna solución acotada de energía  $E_0$  si y solo si la correspondiente curva de nivel contiene alguna curva cerrada. Es decir, si y solo si  $-1/6 \leq E_0 \leq 0$ .

- c) El potencial  $U(x) = -(x^2 - 1)^2$  tiene máximos globales en  $x = \pm 1$ , un mínimo local estricto en  $x = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} U(x) = -\infty$ . Además,  $U(0) = -1$  y  $U(\pm 1) = 0$ . Por tanto, el sistema tiene tres puntos de equilibrio:  $(\pm 1, 0)$  que son dos sillas no lineales y  $(0, 0)$  que es un centro no lineal. Todo esto nos permite dibujar la gráfica del potencial (arriba) y el croquis del sistema (abajo) en la figura 7. Los tres puntos de equilibrio están marcados en negro. La separatriz está dibujada en rojo. Todas las curvas de nivel son simétricas respecto el eje de abscisas, pues la energía  $E(x, v)$  es una función par en la velocidad  $v$ . Las trayectorias se mueven hacia la derecha ( $x' > 0$ ) en el semiplano superior  $\{v > 0\}$  y hacia la izquierda ( $x' < 0$ ) en el semiplano inferior  $\{v < 0\}$ .

La partícula puede escapar a más o menos infinito, pues algunas curvas de nivel lo hacen. Y existe alguna solución acotada de energía  $E$  si y solo si la correspondiente curva de nivel contiene alguna curva cerrada. Es decir, si y solo si  $-1 \leq E \leq 0$ .

El croquis del apartado anterior nos permite deducir las respuestas:

- i) La energía del centro  $(0, 0)$  es  $E(0, 0) = 0^2/2 + U(0) = -1$ .
- ii) La energía de las dos sillas es  $E(\pm 1, 0) = 0^2/2 + U(\pm 1) = 0$ .
- iii) La separatriz está contenida en el mismo nivel de energía que las dos sillas, luego tiene energía  $E = 0$ .
- iv) Las partículas que oscilan tienen energías  $-1 < E < 0$ , pues son los únicos valores de  $E$  con curvas de nivel cerradas.
- v) Las partículas que nunca cambian de sentido tienen energías  $E \geq 0$ , pues son los únicos valores de  $E$  con curvas de nivel que no cortan al eje  $\{v = 0\}$ .

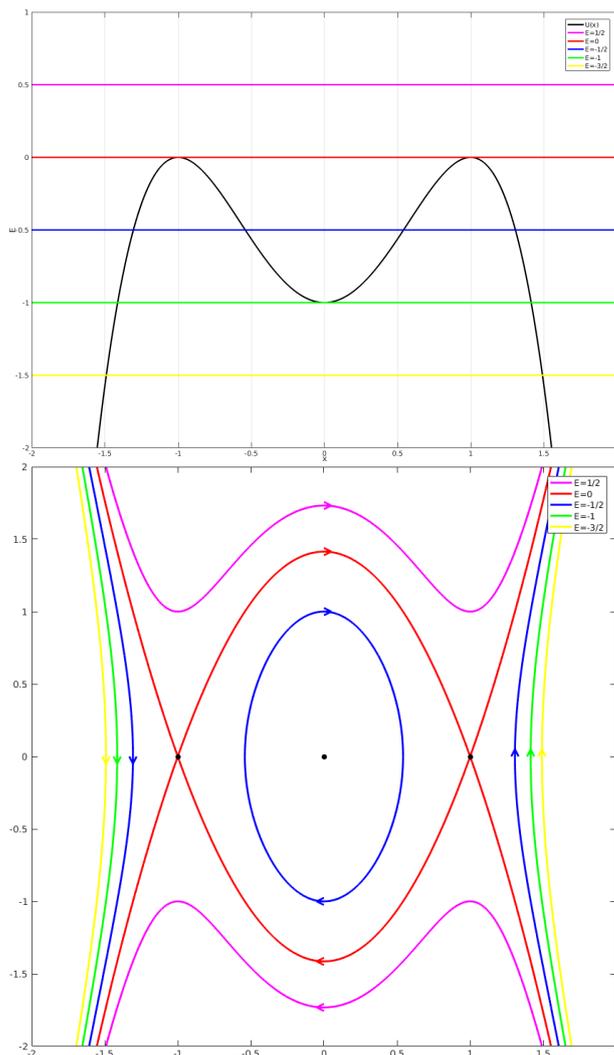


FIGURA 7. Gráfica del potencial (arriba) y retrato de fases del campo de fuerza conservativo asociado al potencial (abajo) del problema 21 c).

- vi) Las partículas que cambian de sentido una única vez tienen energías  $E < 0$ , pues son las únicas valores de  $E$  con curvas de nivel que cortan al eje  $\{v = 0\}$  en un único punto.
- vii) Las únicas partículas que tienden a las posiciones  $x = \pm 1$  son aquellas cuyo par  $(x, v)$  está situado sobre la separatriz, luego si la posición inicial es  $x(0) = 0$ , necesitamos que la velocidad inicial  $x'(0) = v_0$  cumpla que:

$$(v_0)^2/2 - 1 = (v_0)^2/2 + U(0) = E(0, v_0) = 0 \Leftrightarrow (v_0)^2 = 2 \Leftrightarrow v_0 = \pm\sqrt{2}.$$

Nos quedamos con el valor positivo  $v_0 = \sqrt{2}$ , pues la partícula va desde  $x = -1$  hasta  $x = 1$ ; es decir, se desplaza hacia la derecha.

- viii) Como la energía cinética siempre es positiva, una partícula con energía  $E = -1/4$  solo puede estar en posiciones  $x$  tales que

$$U(x) \leq -1/4 \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 \geq 1/4 \Leftrightarrow |x^2 - 1| \geq 1/2 \Leftrightarrow x^2 \notin (1/2, 3/2).$$

Es decir, solo puede moverse en tres intervalos:

$$(-\infty, d] = \left(-\infty, -\sqrt{3/2}\right], \quad [a, b] = \left[-\sqrt{1/2}, \sqrt{1/2}\right], \quad [c, +\infty) = \left[\sqrt{3/2}, +\infty\right).$$

Se moverá en el segundo intervalo cuando  $x(0) = 0$  y en el tercero cuando  $x(0) = 2$ .

22. (Sistemas Hamiltonianos con un grado de libertad) Dada una función  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , que llamaremos *Hamiltoniano* y supondremos de clase  $C^2$ , su *sistema Hamiltoniano* asociado es el sistema 2D

$$\begin{cases} x' &= \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \\ y' &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y). \end{cases}$$

- a) Probar que todo sistema Hamiltoniano preserva áreas.
- b) Probar que el Hamiltoniano es una cantidad conservada del sistema Hamiltoniano.
- c) Los campos de fuerza del problema 21 se pueden escribir como sistemas Hamiltonianos. Dar la relación entre el potencial  $U(x)$  y el Hamiltoniano  $H(x, y)$ .
- d) Probar que si el determinante de la matriz del sistema linealizado de un punto de equilibrio de un sistema Hamiltoniano es negativo/positivo, entonces el punto de equilibrio es una silla/un centro no lineal.
- e) Consideramos el Hamiltoniano  $H(x, y) = x^2y + xy^2 - 3xy$ .
  - i) Calcular los puntos de equilibrio del sistema y decir si son sillas o centros no lineales.
  - ii) Dar una descripción lo más detallada posible de las trayectorias del sistema cerca de cada punto de equilibrio. Es decir, dar las direcciones estable e inestable para cada silla no lineal y el sentido de giro y el periodo límite para cada centro no lineal.
  - iii) Demostrar que cada una de las rectas que pasan por un par sillas no lineales es una recta invariante. ¿Cuáles son las curvas invariantes estable e inestable de cada silla no lineal?
  - iv) Dibujar el retrato de fases del sistema, marcando con flechas el sentido de las trayectorias.
  - v) ¿Para qué valores del Hamiltoniano existen soluciones acotadas?
- f) Ídem con el Hamiltoniano  $H(x, y) = (x^2 - y^2)/2 + (y^3 - x^3)/3$ .

a) *Todo sistema Hamiltoniano tiene divergencia nula:*  $\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial y} = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} \equiv 0$ .

b)  $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x}x' + \frac{\partial H}{\partial y}y' = \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial x} \equiv 0$ .

c)  $H(x, y) = y^2/2 + U(x) =$  *energía mecánica total.*

d) *Si el determinante es negativo, el sistema linealizado es un silla y, por el Teorema de Hartman-Grobman, el punto de equilibrio es una silla no lineal. Si el determinante es positivo, el sistema linealizado es un centro y la linealización no decide la estabilidad, pero como el sistema tiene una cantidad conservada, sabemos que el punto de equilibrio es un centro no lineal.*

e) i) *Hay cuatro puntos de equilibrio: (0, 0), (3, 0), (0, 3) y (1, 1). Los tres primeros son sillas no lineales. El último es un centro no lineal.*

ii) *La matriz del sistema linealizado en (0, 0) es  $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  con VAPs  $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 3$  y VEPs  $\mathbf{v}_1 = (1, 0), \mathbf{v}_2 = (0, 1)$ . Por tanto, la dirección horizontal/vertical es la dirección estable/inestable.*

*La matriz del sistema linealizado en (3, 0) es  $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$  con VAPs  $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -3$  y VEPs  $\mathbf{v}_1 = (1, 0), \mathbf{v}_2 = (1, -1)$ . Por tanto, la dirección horizontal es la dirección inestable y la dirección (1, -1) es la dirección estable.*

*La matriz del sistema linealizado en (0, 3) es  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$  con VAPs  $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -3$  y VEPs  $\mathbf{v}_1 = (1, -1), \mathbf{v}_2 = (0, 1)$ . Por tanto, la dirección vertical es la dirección estable y la dirección (1, -1) es la dirección inestable.*

*La matriz del sistema linealizado en el punto (1, 1) es  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ . Sus VAPs son  $\lambda_{\pm} = \pm\sqrt{3}i$ . Por tanto, el periodo límite del centro no lineal es  $p = 2\pi/\sqrt{3}$ . Además, el sentido de giro entorno al centro no lineal es horario, pues  $c < 0$ .*

iii) *El eje horizontal es invariante ya que la velocidad en un punto de la forma (x, 0) es horizontal:  $(x', y') = (x(x - 3), 0)$ . El eje vertical también es invariante ya que la velocidad en un punto de la forma (0, y) es vertical:  $(x', y') = (0, y(3 - y))$ . La recta  $y = 3 - x$  también es invariante ya que la velocidad en un punto de la forma  $(x, y) = (x, 3 - x)$  tiene la misma dirección que la susodicha recta:*

$$(x', y') = (x(3 - x), (3 - x)(-x)) \parallel (1, -1).$$

*Por tanto, la conclusión es que en este sistema no lineal, las curvas invariantes estables e inestables de todos las sillas no lineales son rectas. Por ejemplo, el eje horizontal/vertical contiene la curva invariante estable/inestable del origen.*

iv) *Ver el dibujo al final de las soluciones del examen de junio de 2016.*

v) *Para  $-1 = H(1, 1) \leq H(x, y) \leq H(0, 0) = H(3, 0) = H(0, 3) = 0$ .*

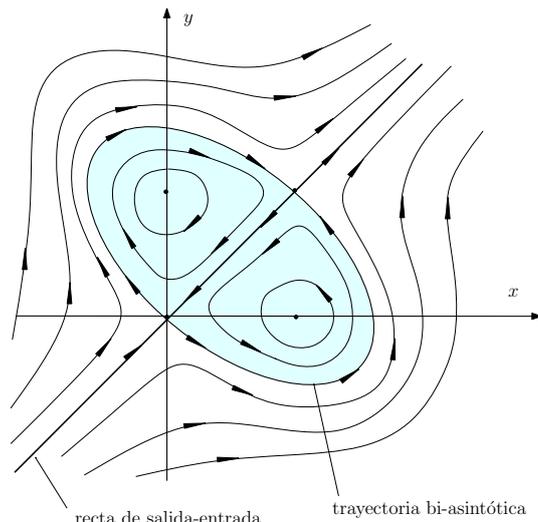


FIGURA 8. Retrato de fases del sistema Hamiltoniano del problema 22 f).

- f) i) Hay cuatro puntos de equilibrio:  $(0,0)$ ,  $(1,1)$ ,  $(1,0)$  y  $(0,1)$ . Los dos primeros son sillas no lineales. Los dos últimos son centros no lineales.
- ii) La matriz del sistema linealizado en  $(0,0)$  es  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , con VAPs  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 1$  y VEPs  $\mathbf{v}_1 = (1,1)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (1,-1)$ . Por tanto,  $(1,1)/(1,-1)$  es la dirección estable/inestable. La matriz del sistema linealizado en el punto  $(1,1)$  es  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , con VAPs  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -1$  y VEPs  $\mathbf{v}_1 = (1,1)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (1,-1)$ . Por tanto,  $(1,1)/(1,-1)$  es la dirección inestable/estable. La matriz del sistema linealizado en el punto  $(1,0)$  es  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Sus VAPs y VEPs son  $\lambda_{\pm} = \pm i$ . Por tanto, el periodo límite del centro no lineal es  $p = 2\pi$ . Además, el sentido de giro entorno al centro no lineal es antihorario, pues  $c > 0$ . La matriz del sistema linealizado en el punto  $(0,1)$  es  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Sus VAPs son  $\lambda_{\pm} = \pm i$ . Por tanto, el periodo límite del centro no lineal es  $p = 2\pi$ . Además, el sentido de giro entorno al centro no lineal es horario, pues  $c < 0$ .
- iii) La recta  $y = x$  es invariante, pues la velocidad en un punto de la forma  $(x, x)$  tiene la dirección de la susodicha recta:

$$(x', y') = (x(x-1), x(x-1)) \parallel (1, 1).$$

Por tanto, la recta  $y = x$  es la "curva" invariante estable del  $(0,0)$  e inestable del  $(1,1)$ .

iv) Ver la figura 8.

v) Para  $-1/6 = H(0,1) \leq H(x,y) \leq H(1,0) = 1/6$ .

23. (Brusselator: Wikipedia y región-trampa) Consideramos el sistema no lineal 2D que modela ciertas reacciones químicas autocatalíticas dado por

$$\begin{cases} x' &= 1 - (b+1)x + ax^2y \\ y' &= bx - ax^2y \end{cases}$$

donde  $a$  y  $b$  son parámetros positivos. Como  $x$  e  $y$  son las concentraciones de ciertos productos de la reacción, solo estudiamos el sistema en el primer cuadrante  $C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x,y > 0\}$ .

- a) Calcular el único punto de equilibrio del sistema y estudiar su estabilidad por linealización.  
b) Calcular y dibujar con precisión en el primer cuadrante las isoclinas

$$J = \{(x,y) \in C_1 : x' = 0\}, \quad K = \{(x,y) \in C_1 : y' = 0\}.$$

¿En qué punto se intersecan? Estas isoclinas dividen el primer cuadrante en cuatro regiones que debéis etiquetar como NE, NO, SE y SO.

- c) Probar que si el punto de equilibrio es repulsor, entonces existen unos valores  $\alpha, \beta > 0$  tales que el pentágono de vértices

$$A = (1/(b+1), 0), \quad B = (\alpha, 0), \quad C = (\alpha, \beta), \quad D = (2, b(b+1)/a), \quad E = (1/(b+1), b(b+1)/a)$$

es una *región-trampa*; es decir, ninguna trayectoria que empieza en su interior, sale cuando el tiempo avanza. Indicación: Basta escoger  $\alpha > 1$ ,  $C \in I$  y que la recta que une  $C$  y  $D$  tenga pendiente igual a menos uno.

- a) El único PEQ es  $P = (1, b/a)$  y la matriz de su sistema linealizado es  $M = \begin{pmatrix} b-1 & a \\ -b & -a \end{pmatrix}$ , que ya estudiamos en el problema 24 del tema de SLs. Por tanto,  $P$  es atractor/repulsor si  $b$  es menor/mayor que  $a+1$  y la linealización no decide la estabilidad cuando  $b = a+1$ .
- b)  $J = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = g(x)\}$  y  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = h(x)\}$ , donde  $g(x) = \frac{(b+1)x-1}{ax^2}$  y  $h(x) = \frac{b}{ax}$ . Se intersecan en el PEQ  $P$ . La figura 9 muestra las isoclinas:  $J$  en cian y  $K$  en magenta. El PEQ  $P$  está marcado con un círculo rojo.

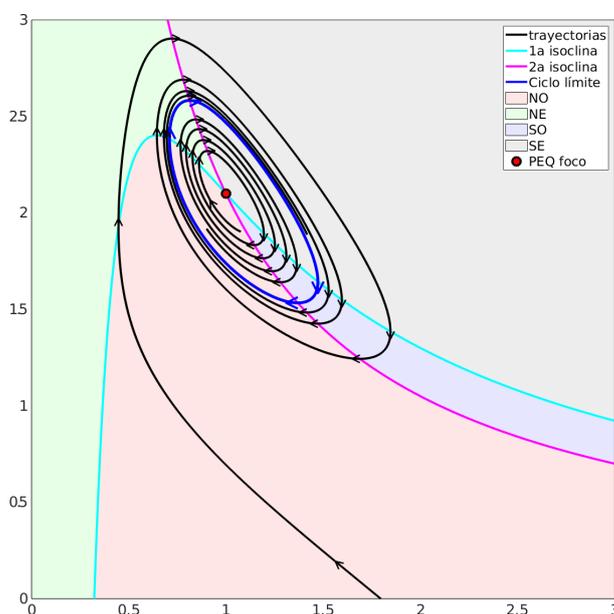


FIGURA 9. Croquis del SNLA 2D del problema 23 con  $a = 1$  y  $b = 2.1$ .

- c) Ver la figura 5 del documento PDF arriba enlazado.

24. (Modelo depredador-presa o Lotka-Volterra) Sean  $x(t)$  e  $y(t)$  las densidades de población de dos especies aisladas de presas y depredadores. Suponemos que las interrelaciones entre estas especies cumplen los siguientes principios:

- Si no hay depredadores, la población de presas crece exponencialmente (Malthus).
- Si no hay presas, la población de depredadores decrece exponencialmente.
- El número de encuentros entre un depredador y una presa es proporcional al producto de las dos densidades.
- Cada encuentro entre depredador y presa incrementa la población de depredadores y disminuye la población de presas.

Entonces, el modelo que estamos considerando es el sistema no lineal 2D

$$\begin{cases} x' &= x(a - by) \\ y' &= y(dx - c) \end{cases}$$

con parámetros  $a, b, c, d > 0$ .

- a) Probar que tanto los ejes de coordenadas, como los cuatro cuadrantes son invariantes.

- b) Calcular las isoclinas  $J = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x' = 0\}$  y  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y' = 0\}$ . Estas isoclinas dividen el primer cuadrante en cuatro regiones. Dibujar y etiquetar (NE, NO, SE y SO) esas regiones.
- c) Calcular los dos puntos de equilibrio del sistema. Calcular, clasificar y dibujar un croquis del sistema linealizado entorno a cada uno ellos.
- d) Consideramos la función

$$V(x, y) = \gamma \ln x + \alpha \ln y - \delta x - \beta y$$

definida en el primer cuadrante, donde las cantidades  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  y  $\delta$  son parámetros estrictamente positivos. Hallar los valores que deben tomar estos parámetros (en función de  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$ ) para que  $V(x, y)$  sea una cantidad conservada del sistema.

- e) Determinar la estabilidad de los puntos de equilibrio.
- f) Dibujar el retrato de fases del sistema en el primer cuadrante.
- a) El eje horizontal es invariante, pues  $y' = 0$  sobre él. El eje vertical también, pues  $x' = 0$  sobre él. Por tanto, no es posible cambiar de cuadrante debido al teorema de existencia y unicidad de soluciones.
- b)  $J = \{x = 0\} \cup \{y = a/b\}$  y  $K = \{y = 0\} \cup \{x = c/d\}$ .
- c) Los dos puntos de equilibrio son  $O = (0, 0)$  y  $A = (c/d, a/b)$ . Las matrices de los sistemas linealizados son

$$M_O = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}, \quad M_A = \begin{pmatrix} 0 & -bc/d \\ da/b & 0 \end{pmatrix}.$$

Los VAPs de  $M_O$  son  $\lambda_1 = a > 0$  y  $\lambda_2 = -c < 0$ , luego el punto  $O$  es una silla (inestable) y su dirección de entrada/salida es el eje vertical/horizontal. Los VAPs de  $M_A$  son  $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{ac}i$ , luego  $A$  es un centro de periodo  $2\pi/\sqrt{ac}$  y sentido de giro antihorario.

- d) Una posible elección es  $\alpha = a$ ,  $\beta = b$ ,  $\gamma = c$  y  $\delta = d$ .
- e) El punto  $O$  es una silla no lineal (inestable, no repulsor) por linealización. El punto  $A$  es un centro no lineal (estable, no atractor) de periodo límite  $2\pi/\sqrt{ac}$ , pues el sistema no lineal tiene una cantidad conservada.
- f) Todas las trayectorias del primer cuadrante están contenidas en las curvas de nivel de  $V(x, y)$ , que son curvas cerradas alrededor de  $(c/d, a/b)$ . Estas curvas se recorren en sentido antihorario con un periodo que tiende a  $2\pi/\sqrt{ac}$  cuando nos acercamos al centro no lineal  $(c/d, a/b)$ . La figura 10 muestra las isoclinas:  $J$  en cyan y  $K$  en magenta. Los PEQs  $O$  y  $A$  están marcados con círculos naranja y verde, respectivamente.

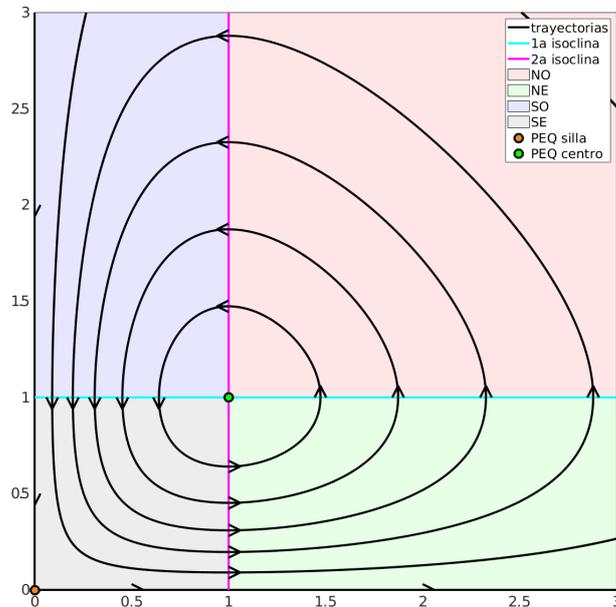


FIGURA 10. Croquis del SNLA 2D del problema 24 con  $a = b = c = d = 1$ .

25. (Dos especies competitivas: Modelo y Principio de exclusión) Sean  $x(t)$  e  $y(t)$  las densidades de población de dos especies que interactúan en un ecosistema aislado. Modelamos la evolución de las poblaciones mediante el sistema no lineal 2D

$$\begin{cases} x' = kx(1 - x/m - \alpha y) \\ y' = ly(1 - \beta x - y/n) \end{cases},$$

donde  $k$  y  $l$  son las tasas inherentes de crecimiento de las dos especies, mientras que  $m$  y  $n$  son las poblaciones máximas de cada especie que puede sostener el ecosistema.

- a) ¿Es posible que una trayectoria que empieza en el primer cuadrante (el único con sentido biológico), salte a otro cuadrante? Justificar la respuesta.  
 b) Decir si los otros dos parámetros,  $\alpha$  y  $\beta$ , son positivos, negativos o nulos en cada una de las siguientes interacciones. Justificar las respuestas.

**Interacción nula:** Ninguna de las especies se ve afectada por la otra.

**Mutualismo:** Ambas especies extraen un beneficio de la presencia de la otra.

**Competición:** Ambas especies son perjudicadas por la presencia de la otra.

**Parasitismo:**  $x$  extrae un beneficio de  $y$ ;  $y$  es perjudicada por  $x$ .

**Comensalismo:**  $x$  extrae un beneficio de  $y$ ;  $y$  no es afectada por  $x$ .

**Amensalismo:**  $x$  es perjudicada por  $y$ ;  $y$  no es afectada por  $x$ .

En el resto del problema supondremos que la interacción es competitiva y presentaremos el principio de exclusión competitiva.

- c) Suponemos que  $k = m = \alpha = 1$ ,  $l = 1/2$ ,  $\beta = 3/2$  y  $n = 2$ , luego el sistema es

$$\begin{cases} x' = x(1 - x - y) \\ y' = y(2 - 3x - y)/4 \end{cases}.$$

- i) Calcular los cuatro puntos de equilibrio del sistema, clasificar los sistemas linealizados en cada uno y estudiar, si es posible, su estabilidad por el método de linealización.  
 ii) Calcular las isoclinas  $J = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x' = 0\}$  y  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y' = 0\}$ . Estas isoclinas dividen el primer cuadrante en cuatro regiones. Dibujar y etiquetar (NE, NO, SE y SO) esas regiones.  
 iii) Esbozar el retrato de fases del sistema. Deducir que, bajo casi cualquier condición inicial, solo sobrevive una de las dos especies.  
 d) Repetir todo el proceso con los valores  $k = m = \alpha = 1$ ,  $l = \beta = 1/2$  y  $n = 2$ . Comprobar que en este segundo caso hay tres puntos de equilibrio, tres regiones en el primer cuadrante y siempre gana la misma especie. ¿Cuál?

- a) El eje horizontal es invariante, pues  $y' = 0$  sobre él. El eje vertical también, pues  $x' = 0$  sobre él. Por tanto, no es posible salir del primer cuadrante debido al teorema de existencia y unicidad de soluciones.  
 b) Interacción nula:  $\alpha = \beta = 0$ . Mutualismo:  $\alpha, \beta < 0$ . Competición:  $\alpha, \beta > 0$ . Parasitismo:  $\alpha < 0$  y  $\beta > 0$ . Comensalismo:  $\alpha < 0$  y  $\beta = 0$ . Amensalismo:  $\alpha > 0$  y  $\beta = 0$ .  
 c) i) Los cuatro puntos de equilibrio son  $O = (0, 0)$ ,  $A = (1, 0)$ ,  $B = (0, 2)$  y  $C = (1/2, 1/2)$ . Las matrices de los sistemas linealizados en cada uno de estos puntos son

$$M_O = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad M_A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1/4 \end{pmatrix}, \quad M_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad M_C = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -3/8 & -1/8 \end{pmatrix}.$$

Los VAPs de  $M_O$  son  $\lambda_1 = 1$  y  $\lambda_2 = 1/2$ , luego el punto  $O$  es un nodo propio repulsor. Los VAPs de  $M_A$  son  $\lambda_1 = -1$  y  $\lambda_2 = -1/4$ , mientras que los VAPs de  $M_B$  son  $\lambda_1 = -1$  y  $\lambda_2 = -1/2$ , luego  $A$  y  $B$  son nodos propios atractores. Finalmente, los VAPs de  $M_C$  son  $\lambda_{1,2} = (-5 \pm \sqrt{57})/16$ , luego el punto  $C$  es una silla (inestable). La linealización decide la estabilidad en los cuatro casos.

- ii)  $J = \{x = 0\} \cup r$  y  $K = \{y = 0\} \cup s$ , donde  $r$  y  $s$  son las rectas  $r \equiv \{y = 1 - x\}$  y  $s \equiv \{y = 2 - 3x\}$ . La recta  $r$  pasa por los puntos  $A = (1, 0)$  y  $D = (0, 1)$ ; la recta  $s$  pasa por los puntos  $E = (2/3, 0)$  y  $B = (0, 2)$ ; ambas rectas se intersecan en el punto  $C = (1/2, 1/2)$ . En la región cuadrangular de vértices  $O$ ,  $A$ ,  $B$  y  $C$  tenemos que  $x', y' > 0$ , luego ambas poblaciones crecen. En la región triangular de vértices  $B$ ,  $D$  y  $C$  tenemos que  $x' < 0$  e  $y' > 0$ , luego la segunda especie gana la competición. En la región triangular de vértices  $A$ ,  $E$  y  $C$  tenemos que  $x' > 0$  e  $y' < 0$ , luego la primera especie gana la competición. Finalmente,  $x', y' < 0$  en la región no acotada que hay por encima de las rectas  $r$  y  $s$ , luego ambas poblaciones decrecen.  
 iii) El croquis izquierdo de la figura 11 muestra los principales elementos. Las isoclinas  $r$  en cyan y  $s$  en magenta. Los PEQs  $O$ ,  $A$ ,  $B$  y  $C$  están marcados con círculos rojo, azul, azul y naranja, respectivamente. La CI estable e inestable del punto de silla  $C$  están dibujadas en azul y rojo,

respectivamente. Vemos que la CI estable divide al primer cuadrante en dos partes. Si empezamos en la inferior gana la primera especie. Si empezamos en la superior gana la segunda. Y si empezamos justo sobre la curva tendemos a un equilibrio inestable:  $C$ . Es decir, la CI estable de  $C$  es la separatriz del sistema.

- d) i) Los tres puntos de equilibrio son  $O = (0, 0)$ ,  $A = (1, 0)$  y  $B = (0, 2)$ . Las matrices de los sistemas linealizados en cada uno de estos puntos son

$$M_O = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad M_A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}, \quad M_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Los VAPs de  $M_O$  son  $\lambda_1 = 1$  y  $\lambda_2 = 1/2$ , luego el punto  $O$  es un nodo propio repulsor. Los VAPs de  $M_A$  son  $\lambda_1 = -1$  y  $\lambda_2 = 1/4$ , luego  $A$  es una silla (inestable). Los VAPs de  $M_B$  son  $\lambda_1 = -1$  y  $\lambda_2 = -1/2$ , luego  $B$  es un nodo propio atractor. La linealización decide la estabilidad en los tres casos.

- ii) Las rectas son paralelas:  $r \equiv \{x + y = 1\}$  y  $s \equiv \{x + y = 2\}$ . La recta  $r$  pasa por los puntos  $A = (1, 0)$  y  $D = (0, 1)$ . La recta  $s$  pasa por los puntos  $E = (2, 0)$  y  $B = (0, 2)$ . En la región triangular de vértices  $O$ ,  $A$  y  $D$  tenemos que  $x', y' > 0$ , luego ambas poblaciones crecen. En la región cuadrangular de vértices  $O$ ,  $A$ ,  $D$ ,  $B$  y  $E$  tenemos que  $x' < 0$  e  $y' > 0$ , luego la segunda especie gana la competición. Finalmente,  $x', y' < 0$  en la región no acotada que hay por encima de la recta  $s$ , luego ambas poblaciones decrecen.
- iii) El croquis derecho de la figura 11 muestra los principales elementos. Las isoclinas  $J$  en cian y  $K$  en magenta. Los PEQs  $O$ ,  $A$  y  $B$  están marcados con círculos rojo, naranja y azul, respectivamente. La CI inestable del punto de silla  $A$  está dibujada en rojo. Vemos que si  $y > 0$ , entonces gana la segunda especie.

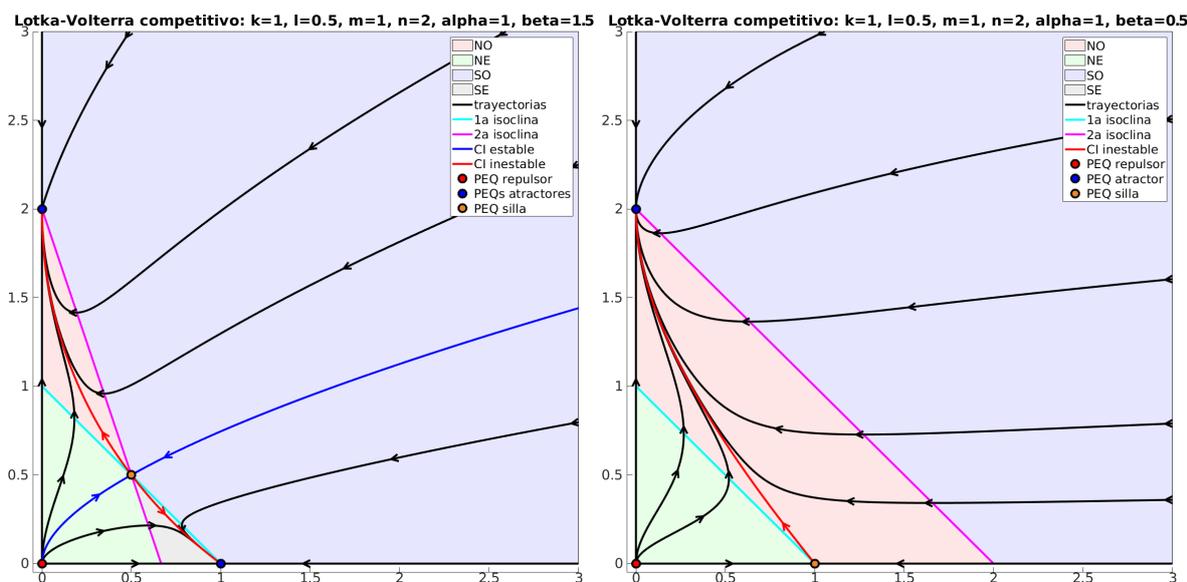


FIGURA 11. Croquis del SNLA 2D del problema 25.

26. (Pescando platelmintos) Tenemos una muestra de líquido en la que pululan varias especies diferentes de platelmintos fototrópicos que siempre nadan en dirección a la luz más cercana. Cada especie nada a una velocidad diferente. Para aislar y extraer la especie que nada a velocidad  $v$ , colocamos el líquido en un recipiente cilíndrico (una cuba) transparente de radio  $r$ . A continuación, ponemos a girar el recipiente con velocidad angular  $\omega$  situándolo frente a una única fuente luminosa. Los platelmintos nadan en dirección a la luz, en contra del sentido de giro de la cuba. El objetivo del problema es comprobar que todos los platelmintos de la misma especie se acumulan en un solo punto. Situamos el centro de la cuba en el origen y la fuente luminosa en el punto  $(r, 0)$ . Trabajamos en coordenadas cartesianas  $(x, y)$ .

- a) ¿Qué condición debemos imponer para que los platelmintos no puedan alcanzar la luz? Modelar las trayectorias de los platelmintos mediante un sistema no lineal autónomo 2D.
- b) Encontrar el único punto de equilibrio del sistema y probar que es un atractor.

- c) Probar que el sistema no tiene ninguna solución periódica no constante.  
 d) ¿En qué posiciones iniciales  $(x, y) \neq (r, 0)$  se alejan los platelmintos del centro de la cuba? ¿Y en cuáles se acercan?

a) La condición  $v < \omega r$ . El sistema no lineal es

$$\begin{cases} x' &= -\omega y + \frac{v(r-x)}{\sqrt{(r-x)^2+y^2}} \\ y' &= \omega x - \frac{vy}{\sqrt{(r-x)^2+y^2}} \end{cases}.$$

El término  $(-\omega y, \omega x)$  proviene de la rotación de la cuba. El término  $\frac{v(r-x, -y)}{\sqrt{(r-x)^2+y^2}}$  representa el avance de los platelmintos hacia el punto luminoso.

b) El único punto de equilibrio es  $(x_0, y_0)$  con  $x_0 = v^2/\omega^2 r$ ,  $y_0 = v\sqrt{\omega^2 r^2 - v^2}/\omega^2 r$ . La traza, el determinante y el discriminante de la matriz del sistema linealizado en  $(x_0, y_0)$  son:

$$T = -\frac{v\omega}{\sqrt{\omega^2 r^2 - v^2}} < 0, \quad D = \omega^2 > 0, \quad \Delta = \frac{(5v^2 - 4\omega^2 r^2)\omega^2}{\omega^2 r^2 - v^2}.$$

El discriminante pasa de negativo a positivo cuando  $v$  cruza el valor  $v_* = 2\omega r/\sqrt{5}$ . Por tanto, el sistema linealizado es un foco atractor cuando  $0 < v < v_*$ , un nodo impropio atractor cuando  $v = v_*$  y un nodo propio atractor cuando  $v_* < v < \omega r$ , luego el punto de equilibrio siempre es atractor.

c) La divergencia del sistema no lineal siempre es negativa:

$$\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial y} = \frac{-y^2 v}{((r-x)^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{-(r-x)^2 v}{((r-x)^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{-v}{\sqrt{(r-x)^2 + y^2}} < 0,$$

luego el sistema contrae áreas y no puede tener órbitas periódicas.

d) La función  $V(x, y) = (x^2 + y^2)/2$  cuantifica la distancia al centro de la cuba y su derivada temporal es

$$W(x, y) = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{x^2 + y^2}{2} \right\} = xx' + yy' = \frac{v(x(r-x) - y^2)}{\sqrt{(r-x)^2 + y^2}} = \frac{v(r^2/4 - (r/2 - x)^2 - y^2)}{\sqrt{(r-x)^2 + y^2}}.$$

Por tanto, los platelmintos se acercan/alejan si y solo si están fuera/dentro de la circunferencia de radio  $r/2$  centrada en  $(r/2, 0)$ .

27. (Espiral de caracoles) Tenemos unos caracoles situados en los vértices de un polígono regular de  $n$  lados y radio  $r_0$  centrado en el origen. Cada caracol persigue, con velocidad  $\epsilon$ , al caracol situado en el siguiente vértice en sentido anti-horario. Introducimos las notaciones

$$c_n = \cos(2\pi/n), \quad s_n = \sin(2\pi/n), \quad \sigma_n = \sin(\pi/n) = \sqrt{\frac{1 - c_n}{2}}.$$

a) Probar que la trayectoria de cada caracol es la solución del PVI

$$\begin{cases} x' &= -\frac{\epsilon}{2\sigma_n} \frac{(1 - c_n)x + s_n y}{r}, & x(0) = x_0, \\ y' &= \frac{\epsilon}{2\sigma_n} \frac{s_n x - (1 - c_n)y}{r}, & y(0) = y_0, \end{cases}$$

donde  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  es la distancia al origen y  $(x_0, y_0)$  es la posición inicial.

b) El sistema anterior en coordenadas polares es de la forma

$$\begin{cases} r' &= -\epsilon a_n, & r(0) = r_0, \\ \theta' &= \epsilon b_n/r, & \theta(0) = \theta_0, \end{cases}$$

para algunas constantes  $a_n, b_n > 0$ . Calcular  $a_n$  y  $b_n$ .

c) Calcular el tiempo  $t_n$  que tardan los caracoles en reunirse en el origen. Calcular la distancia  $d_n$  que recorren en ese tiempo. Calcular  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n$ .

d) Sea  $n \geq 3$ . Resolver el PVI

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{a_n}{b_n} r, \quad r(\theta_0) = r_0,$$

asociado a la ecuación de las órbitas del sistema anterior. ¿Cuántas vueltas dan los caracoles antes de llegar al origen cuando  $n \geq 3$ ?

e) ¿Cuántas vueltas dan los caracoles antes de llegar al origen cuando  $n = 2$ ?

a) Si un caracol está en la posición  $(x, y)$ , el siguiente está en la posición

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_n & -s_n \\ s_n & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_n x - s_n y \\ c_n y + s_n x \end{pmatrix}.$$

La velocidad de este caracol es igual al vector que va de  $(x, y)$  a  $(x_1, y_1)$ , pero normalizado y multiplicado por  $\epsilon$ . Es decir,

$$\begin{cases} x' = \epsilon \frac{x_1 - x}{\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}} = \epsilon \frac{(c_n - 1)x - s_n y}{\sqrt{((c_n - 1)^2 + s_n^2)(x^2 + y^2)}} = -\frac{\epsilon}{\sqrt{2(1 - c_n)}} \frac{(1 - c_n)x + s_n y}{r} = -\frac{\epsilon}{2\sigma_n} \frac{(1 - c_n)x + s_n y}{r}, \\ y' = \epsilon \frac{y_1 - y}{\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}} = \epsilon \frac{(c_n - 1)y + s_n x}{\sqrt{((c_n - 1)^2 + s_n^2)(x^2 + y^2)}} = \frac{\epsilon}{\sqrt{2(1 - c_n)}} \frac{(c_n - 1)y + s_n x}{r} = \frac{\epsilon}{2\sigma_n} \frac{s_n x - (1 - c_n)y}{r}. \end{cases}$$

b)  $a_n = \sigma_n$ ,  $b_n = s_n/2\sigma_n$  y  $a_n/b_n = 2(\sigma_n)^2/s_n = (1 - c_n)/s_n$ .

c)  $t_n = \frac{r_0}{\epsilon a_n} = \frac{r_0}{\epsilon \sin(\pi/n)}$ ,  $d_n = \epsilon t_n = \frac{r_0}{\sin(\pi/n)}$  y  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = +\infty$ .

d) Si  $n \geq 3$ , entonces  $\mu_n := a_n/b_n = (1 - c_n)/s_n > 0$  y  $r(\theta) = r_0 e^{-\mu_n(\theta - \theta_0)}$ , luego cada caracol da un número infinito vueltas antes de llegar al origen, ya que:  $r(\theta) \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow \theta \rightarrow +\infty$ .

e) Si  $n = 2$ , entonces  $b_n = b_2 = s_2/2\sigma_2 = 0$ , luego  $\theta' = 0$ . Es decir, los dos caracoles se mueven en línea recta y no dan ninguna vuelta. En particular,  $d_2 = r_0$ .

28. (Misil tierra-aire) Un avión vuela en línea recta manteniendo una altura de crucero  $h$  y una velocidad de crucero  $v$ . En el instante inicial  $t = 0$  pasa por encima de una batería de misiles que dispara un misil que avanza a velocidad constante  $w$  y apunta permanentemente hacia el avión. El movimiento del avión y del misil tienen lugar sobre un plano de coordenadas  $(x, y)$ , cuyo origen de coordenadas es la batería de misiles, siendo  $x$  e  $y$  la coordenada horizontal y la altura, respectivamente. Plantear el sistema no lineal y no autónomo 2D que modela la trayectoria  $(x(t), y(t))$  del misil.

La trayectoria del avión es  $(x_0(t), y_0(t)) = (vt, h)$  pues su velocidad y altura son constantes y en el instante  $t = 0$  está situado en el punto  $(0, h)$ . La velocidad del misil en cada instante debe ser igual al vector que va del misil al avión, pero normalizado y multiplicado por  $w$ . Es decir,

$$\begin{cases} x' = w \frac{x_0 - x}{\sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2}} = w \frac{vt - x}{\sqrt{(vt - x)^2 + (h - y)^2}}, \\ y' = w \frac{y_0 - y}{\sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2}} = w \frac{h - y}{\sqrt{(vt - x)^2 + (h - y)^2}}. \end{cases}$$

29. (Plaga de gusanos) Estudiamos un modelo de una plaga de gusanos invadiendo un bosque extraído de la §7.3 del libro *Mathematics for Dynamic Modeling* de Edward A. Beltrami. Consideramos el SNLA 2D dado por

$$\begin{cases} x' = x(1 - x - \alpha x/y) \\ y' = y(1 - y/x) \end{cases} \quad 0 < \alpha < 1.$$

Aquí,  $x = x(t)$  denota la proporción (en tanto por uno) de ramas sanas (sin infección), mientras que  $y = y(t)$  denota el tamaño del bosque. Solo estudiamos el sistema en el primer cuadrante  $C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}$ , para evitar las singularidades  $x = 0$  e  $y = 0$ .

a) Calcular el único punto de equilibrio del SNLA en  $C_1$ .

b) Estudiar la estabilidad del SNLA en ese punto de equilibrio por el método de linealización.

c) Calcular y dibujar con precisión en el primer cuadrante las isoclinas

$$J = \{(x, y) \in C_1 : x' = 0\}, \quad K = \{(x, y) \in C_2 : y' = 0\}.$$

¿En qué punto se intersecan?

d) Las isoclinas dividen el primer cuadrante en las regiones NE, NO, SE y SO. Marcar cada región con su correspondiente etiqueta. Justificar que las regiones NE y SO son regiones-trampa y que toda trayectoria contenida en ellas tiende a un punto. ¿A cuál? Esbozar el croquis global del SNLA.

(a) Para buscar el único punto de equilibrio en  $C_1$ , resolvemos las ecuaciones

$$x' = x(1 - x - \alpha x/y) = 0, \quad y' = y(1 - y/x) = 0$$

recordando que  $x, y \neq 0$ , pues estamos en  $C_1$ . La primera ecuación implica que el punto que buscamos está sobre la curva

$$J = \{(x, y) \in C_1 : (1 - x)y = \alpha x\} = \left\{ (x, y) \in C_1 : y = \frac{\alpha x}{1 - x} \right\}.$$

La segunda ecuación implica que el punto que buscamos está sobre la recta

$$K = \{(x, y) \in C_1 : y = x\}.$$

La intersección  $J \cap K = \{(1 - \alpha, 1 - \alpha)\}$  es el único punto de equilibrio en  $C_1$ .

(b) La matriz del sistema linealizado en un punto  $(x, y) = (1 - \alpha, 1 - \alpha)$  es

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2x - 2\alpha x/y & \alpha x^2/y^2 \\ y^2/x^2 & 1 - 2y/x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \alpha \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

que ya estudiamos en el problema 22 del tema de SLs. Por tanto, ya sabemos que el sistema linealizado es un nodo propio atractor cuando  $0 < \alpha < 1$ . Entonces, el teorema de linealización implica que el punto de equilibrio  $(1 - \alpha, 1 - \alpha)$  es atractor.

(c) Hemos calculado las dos isoclinas y su intersección en el subapartado b.i). La primera isoclina es la gráfica de la función  $y = f(x) = \alpha x/(1 - x)$ , con  $0 < x < 1$ . La restricción  $0 < x < 1$  es necesaria para que la gráfica esté contenida en el primer cuadrante. Observamos que  $f(x) = x$  si y solo si  $x = 1 - \alpha$ . Además,  $f'(0) = \alpha < 1$  y  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$ . Por tanto, la primera isoclina está por debajo de la segunda en el intervalo  $(0, 1 - \alpha)$  y por encima en el intervalo  $(1 - \alpha, 1)$ . La figura 12 muestra las isoclinas:  $J$  en cyan y  $K$  en magenta. El punto de equilibrio (es decir, la intersección de las dos isoclinas) está marcado con un círculo azul.

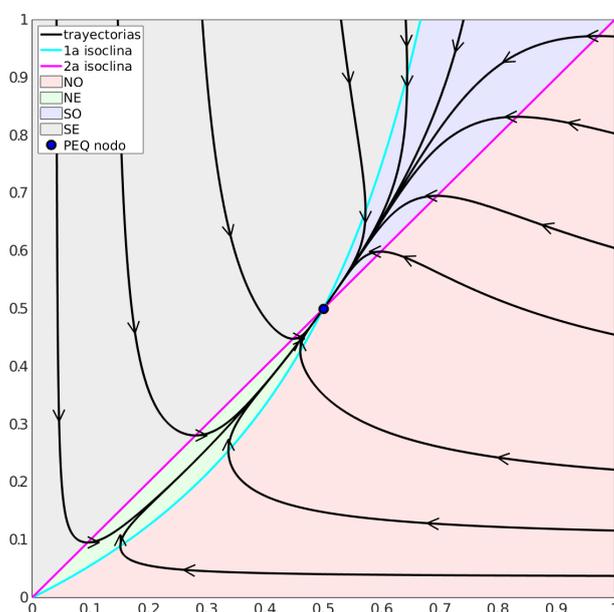


FIGURA 12. Retrato de fases del SNLA 2D del problema 29 con  $\alpha = 1/2$ .

(d) Hemos marcado las regiones NE, NO, SE y SO en la figura 12. Por ejemplo,

$$NE = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1 - \alpha, \frac{\alpha x}{1 - x} < y < x \right\},$$

$$SO = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - \alpha < x < 1, x < y < \frac{\alpha x}{1 - x} \right\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x \geq 1\}.$$

El campo de velocidades apunta en dirección NorEste (arriba y derecha) en NE y en dirección SurOeste (abajo e izquierda) en SO. Las trayectorias entran a NE y SO horizontalmente (respectivamente, verticalmente) por la segunda (respectivamente, primera). Por tanto, toda trayectoria que empieza en NE (respectivamente, SO) se mantiene dentro de NE (respectivamente, SO) mientras tiende al punto de equilibrio.

El croquis global del SNLA en el primer cuadrante (único con sentido biológico) está esbozado en la figura. El único punto de equilibrio del primer cuadrante es un atractor global.

30. (Péndulo con fricción) Tenemos un péndulo de longitud  $l$  del que cuelga una masa  $m$  bajo un campo gravitatorio de intensidad  $g$ . Sea  $k$  el coeficiente de fricción proporcional a la velocidad.

- a) Justificar que la ecuación que modela el movimiento del péndulo es

$$\theta'' + m^{-1}k\theta' + l^{-1}g \sin \theta = 0,$$

donde  $\theta(t)$  es el ángulo formado por el péndulo con la vertical inferior. ¿Qué datos se necesitan para tener un PVI?

- b) Escribir esta ecuación como un sistema no lineal 2D de primer orden, introduciendo la velocidad angular  $\omega = \theta'$ .  
 c) Estudiar, si es posible, la estabilidad de las dos posiciones de equilibrio del péndulo por el método de linealización.  
 d) Comprobar que la energía mecánica total

$$V(\theta, \omega) = \frac{m}{2}l^2\omega^2 + mgl(1 - \cos \theta)$$

no crece a lo largo de las trayectorias. ¿A lo largo de qué trayectorias se mantiene constante la energía?

- e) Probar que el péndulo con fricción no tiene ninguna trayectoria periódica no constante.  
 f) Conectarse al applet <http://mathlets.org/mathlets/vector-fields/>, escoger el sistema del péndulo con fricción (es la última opción) y dibujar algunas trayectorias en el plano  $(\theta, \omega)$  para diferentes valores de  $a$  y  $b$ . (Nota: Las coordenadas son  $(x, y)$  en ese applet.)

- a) Es una consecuencia de la segunda ley de Newton. El ángulo inicial  $\theta_0 = \theta(0)$  y la velocidad inicial  $\omega_0 = \theta'(0)$ .  
 b) Introduciendo la velocidad angular  $\omega = \theta'$ , reescribimos la EDO anterior como el sistema no lineal 2D autónomo de primer orden

$$\begin{cases} \theta' &= \omega \\ \omega' &= -a \sin \theta - b\omega \end{cases},$$

donde  $b = k/m$  y  $a = g/l$ .

- c) Buscamos los puntos de equilibrio del sistema:

$$\left. \begin{array}{l} \theta' = \omega = 0 \\ \omega' = -a \sin \theta - b\omega = 0 \end{array} \right\} \implies (\theta, \omega) = (n\pi, 0), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Estos puntos de equilibrio corresponden a las posiciones de equilibrio inferior (si  $n$  es par) y superior (si  $n$  es impar) del péndulo. La matriz del sistema linealizado en el punto de equilibrio  $(\theta, \omega) = (n\pi, 0)$  es igual a

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a \cos \theta & -b \end{pmatrix}_{(\theta, \omega) = (n\pi, 0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^{n+1}a & -b \end{pmatrix}.$$

Si  $n$  es impar,  $\det A_n = (-1)^n a = -a < 0$  y el sistema linealizado es una silla, luego el péndulo con fricción es inestable en la posición de equilibrio superior. En cambio, si  $n$  es par, entonces  $\det A_n = (-1)^n a = a > 0$  y traza  $A_n = -b < 0$ . Por tanto, el péndulo con fricción es atractor en la posición de equilibrio inferior.

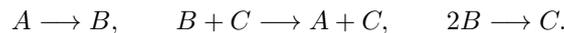
- d) La derivada temporal de la energía mecánica total es

$$W(\theta, \omega) = \frac{\partial V}{\partial \theta}(\theta, \omega)\theta' + \frac{\partial V}{\partial \omega}(\theta, \omega)\omega' = mgl\omega \sin \theta - ml^2 a \omega \sin \theta - ml^2 b \omega^2 = -kl^2 \omega^2 \leq 0,$$

donde hemos usado que  $a = g/l$ ,  $b = k/m$  y  $k > 0$ . Esta derivada temporal es nula si y solo si  $\omega = 0$ . Por tanto, la energía se mantiene constante tan solo en las posiciones de equilibrio.

- e) Usamos el criterio de Bendixson. La divergencia del campo vectorial asociado al sistema 2D es siempre negativa:  $\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} + \frac{\partial \omega'}{\partial \omega} = -b < 0$ , luego el sistema contrae áreas y no puede tener órbitas periódicas.

- 31. (Reacción química triple)** En una reacción química con tres productos  $A$ ,  $B$  y  $C$  tienen lugar simultáneamente los procesos



Supondremos que la *tasa de reacción* de cada proceso es proporcional al producto de las concentraciones (en moles por litro) de los productos necesarios para que se lleve a cabo ese proceso concreto. Sean  $k_1$ ,  $k_2$  y  $k_3$  las tres constantes de proporcionalidad. Plantear el sistema de ecuaciones diferenciales que cumplen las concentraciones  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  y  $x_3(t)$ . ¿Cuál es la concentración de cada producto en el *equilibrio químico*? ¿Es estable?

(En las páginas 190–192 del libro “An Introduction to Mathematical Modeling” de E.A. Bender se presenta un modelo mejor, aunque más complicado.)

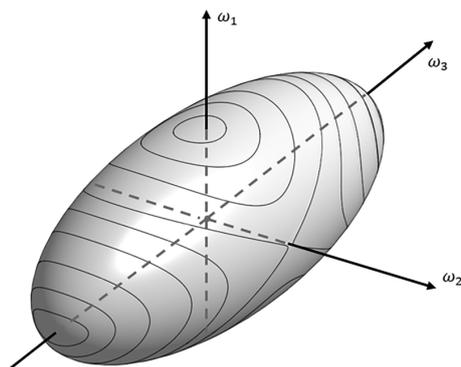


FIGURA 13. Trayectorias de las ecuaciones de Euler sobre un elipsoide de inercia.

Las concentraciones cumplen el sistema no lineal autónomo 3D

$$\begin{cases} x_1' &= -k_1x_1 + k_2x_2x_3 \\ x_2' &= k_1x_1 - k_2x_2x_3 - k_3x_2^2 \\ x_3' &= k_3x_2^2 \end{cases} .$$

En el equilibrio solo hay producto  $C$  y es un equilibrio estable ya que  $(x_1 + x_2 + x_3)' = 0$  (la cantidad total de los tres productos no varía), pero en cambio  $x_3' = k_3x_2^2 \geq 0$  (la cantidad de producto  $C$  nunca desciende). Reto: Intentar aplicar el método de linealización.

- 32.** (El teorema de la raqueta de tenis: Wikipedia & Video NASA) Consideramos el movimiento de un sólido rígido no sometido a torsión (fuerzas externas) ni fricción. Sean  $I_1, I_2, I_3$  sus momentos de inercia principales y sean  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  sus velocidades angulares alrededor de los tres ejes principales. Supondremos que  $I_1 > I_2 > I_3$ , luego el sólido no tiene ninguna simetría de revolución. El teorema de la raqueta de tenis afirma que las rotaciones del sólido alrededor de los ejes de inercia mayor y menor son estables, pero la rotación alrededor del eje de inercia intermedio es inestable.

El movimiento del sólido está modelado por un SNLA 3D formado por las *ecuaciones de Euler*

$$\begin{cases} I_1\omega_1' = (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 \\ I_2\omega_2' = (I_3 - I_1)\omega_1\omega_3 \\ I_3\omega_3' = (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2. \end{cases}$$

- a) Probar que si  $\omega(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t))$  es una solución de las ecuaciones de Euler, entonces

$$\widehat{\omega}(t) = (\widehat{\omega}_1(t), \widehat{\omega}_2(t), \widehat{\omega}_3(t)) = (-\omega_1(-t), -\omega_2(-t), -\omega_3(-t)) = -\omega(-t),$$

también lo es, luego el movimiento de un sólido rígido no sometido a torsión o fricción es reversible.

- b) Encontrar todas las velocidades de equilibrio del sistema e interpretarlas físicamente.  
 c) Estudiar la estabilidad de las velocidades de equilibrio por linealización.  
 d) Sea  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  el *vector de velocidades angulares*. Sea  $\mathbf{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$  el *tensor de momentos de inercia* (es una matriz diagonal). Sea  $\mathbf{L} = (L_1, L_2, L_3) = \mathbf{I}\omega = (I_1\omega_1, I_2\omega_2, I_3\omega_3)$  el *vector momento angular*. Rescribir las ecuaciones de Euler en términos de  $\mathbf{L}$ .  
 e) Calcular la derivada temporal de la *energía cinética angular*

$$T = \frac{I_1(\omega_1)^2 + I_2(\omega_2)^2 + I_3(\omega_3)^2}{2} = \frac{(L_1)^2}{2I_1} + \frac{(L_2)^2}{2I_2} + \frac{(L_3)^2}{2I_3}$$

y del cuadrado del *momento angular total*

$$L^2 = \|\mathbf{L}\|^2 = (L_1)^2 + (L_2)^2 + (L_3)^2 = (I_1\omega_1)^2 + (I_2\omega_2)^2 + (I_3\omega_3)^2.$$

- f) Las superficies de nivel  $\{\mathbf{L} \in \mathbb{R}^3 : T(\mathbf{L}) \equiv \text{cte}\}$  se denominan *elipsoides de inercia*. Dibujar las intersecciones de un elipsoide de inercia con las esferas  $\{L^2 \equiv \text{cte}\}$  tras ver esta animación. Probar el teorema de la raqueta de tenis. Relacionar el resultado con el comportamiento observado en el video de la NASA.

- a) Basta observar que  $\widehat{\omega}_i'(t) = \omega_i'(-t)$  y  $\widehat{\omega}_j(t)\widehat{\omega}_k(t) = \omega_j(-t)\omega_k(-t)$ , para todo  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ .

b) En primer lugar, como  $\omega_j$  es una velocidad angular, no una posición, hablamos de velocidades de equilibrio en vez de puntos de equilibrio. Los tres ejes de coordenadas están formados por velocidades de equilibrio. Interpretación: El sólido rígido

- No efectúa ningún tipo de giro cuando  $\omega = (0, 0, 0)$ ;
- Gira con velocidad angular constante  $\omega_1$  alrededor del mayor eje de inercia si  $\omega = (\omega_1, 0, 0)$ ;
- Gira con velocidad angular constante  $\omega_2$  alrededor del eje de inercia intermedio si  $\omega = (0, \omega_2, 0)$ ;
- Gira con velocidad angular constante  $\omega_3$  alrededor del menor eje de inercia si  $\omega = (0, 0, \omega_3)$ .

c) La matriz del sistema linealizado en la velocidad de equilibrio  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{23}\omega_3 & \alpha_{23}\omega_2 \\ -\alpha_{13}\omega_3 & 0 & -\alpha_{13}\omega_1 \\ \alpha_{12}\omega_2 & \alpha_{12}\omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde  $\alpha_{12} = (I_1 - I_2)/I_3$ ,  $\alpha_{13} = (I_1 - I_3)/I_2$  y  $\alpha_{23} = (I_2 - I_3)/I_1$  son cantidades positivas.

- Si  $\omega = (0, 0, 0)$ ,  $A = 0$  y  $\lambda = 0$  es VAP triple, luego la linealización no decide la estabilidad.
- Si  $\omega = (\omega_1, 0, 0)$  con  $\omega_1 \neq 0$ , entonces los VAPs de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_{13}\omega_1 \\ 0 & \alpha_{12}\omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

son  $\lambda_1 = 0$  y  $\lambda_{2,3} = \pm\sqrt{\alpha_{12}\alpha_{13}}|\omega_1|i$ , luego la linealización no decide la estabilidad.

- Si  $\omega = (0, \omega_2, 0)$  con  $\omega_2 \neq 0$ , entonces los VAPs de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{23}\omega_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{12}\omega_2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

son  $\lambda_1 = 0$  y  $\lambda_{2,3} = \pm\sqrt{\alpha_{12}\alpha_{23}}|\omega_2|i$ , luego la velocidad de equilibrio es inestable.

- Si  $\omega = (0, 0, \omega_3)$  con  $\omega_3 \neq 0$ , entonces los VAPs de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{23}\omega_3 & 0 \\ -\alpha_{13}\omega_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

son  $\lambda_1 = 0$  y  $\lambda_{2,3} = \pm\sqrt{\alpha_{13}\alpha_{23}}|\omega_3|i$ , luego la linealización no decide la estabilidad.

d) Tras realizar el cambio de variables  $\mathbf{L} = \mathbf{I}\omega$ , las ecuaciones de Euler quedan

$$\begin{cases} L'_1 = \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_2}\right) L_2 L_3 \\ L'_2 = \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_3}\right) L_1 L_3 \\ L'_3 = \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1}\right) L_1 L_2. \end{cases}$$

e) Ambas son cantidades conservadas:  $\frac{dT}{dt} \equiv 0$  y  $\frac{dL^2}{dt} \equiv 0$ .

f) Ver la figura 13. En esa figura se usa el vector de velocidades  $\omega$  como coordenadas, en vez del vector de momentos  $\mathbf{L}$ , lo cual hace que el elipsoide de inercia tenga su eje más corto en la dirección  $\omega_1$ . Efectivamente, vemos que las velocidades de equilibrio situadas en los ejes  $\omega_1$  y  $\omega_3$  son estables (son centros no lineales), mientras que la situada en el eje  $\omega_2$  es inestable (es una silla no lineal).

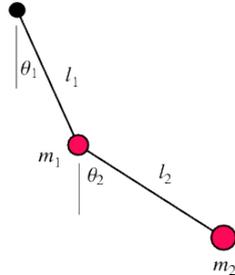


FIGURA 14. Péndulo doble.

33. (Péndulo doble sin fricción: Wikipedia, Youtube & simulación) Consideramos el péndulo doble sin fricción de longitudes  $l_1$  y  $l_2$  y masas  $m_1$  y  $m_2$  bajo un campo gravitatorio de intensidad  $g$ . Sean

$\theta_1(t)$  y  $\theta_2(t)$  las desplazamientos de los péndulos respecto la vertical inferior. Ver la figura 14. Las funciones  $\theta_1(t)$  y  $\theta_2(t)$  cumplen el sistema de EDOs de segundo orden

$$\begin{cases} \mu l_1 \theta_1'' + l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \theta_2'' + l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) (\theta_2')^2 + \mu g \sin \theta_1 = 0 \\ l_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \theta_1'' + l_2 \theta_2'' - l_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) (\theta_1')^2 + g \sin \theta_2 = 0 \end{cases}$$

donde  $\mu = (m_1 + m_2)/m_2$  es un parámetro adimensional. Notamos que  $\mu > 1$ .

a) Probar que si  $\boldsymbol{\theta}(t) = (\theta_1(t), \theta_2(t))$  es una solución del péndulo doble, entonces

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}(t) = (\widehat{\theta}_1(t), \widehat{\theta}_2(t)) = (\theta_1(-t), \theta_2(-t)) = \boldsymbol{\theta}(-t),$$

también lo es. Es decir, el péndulo doble sin fricción es reversible.

b) Escribir estas dos EDOs de segundo orden como un SNLA 4D de primer orden, introduciendo las velocidades angulares  $\omega_1 = \theta_1'$  y  $\omega_2 = \theta_2'$ .

c) Calcular las cuatro posiciones de equilibrio del péndulo doble.

d) La matriz del sistema linealizado correspondiente a cada equilibrio tiene la forma

$$M = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \text{Id} \\ A & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  depende del equilibrio considerado. Calcular esas cuatro matrices.

e) Estudiar la estabilidad de cada equilibrio por linealización. Indicación:  $Q_M(\lambda) = Q_A(\lambda^2)$ .

a) Basta observar que las primeras derivadas sí cambian de signo, pero las segundas derivadas no.

b) El SNLA 4D es

$$\begin{cases} \theta_1' = \omega_1 \\ \theta_2' = \omega_2 \\ \omega_1' = \frac{g(\sin \theta_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \mu \sin \theta_1) - (l_2 \omega_2^2 + l_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \omega_1^2) \sin(\theta_1 - \theta_2)}{l_1(\mu - \cos^2(\theta_1 - \theta_2))} \\ \omega_2' = \frac{g\mu(\sin \theta_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \sin \theta_2) - (\mu l_1 \omega_1^2 + l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \omega_2^2) \sin(\theta_1 - \theta_2)}{l_2(\mu - \cos^2(\theta_1 - \theta_2))} \end{cases}$$

c) Las cuatro posiciones de equilibrio son

- Inferior-inferior:  $(\theta_1, \theta_2, \omega_1, \omega_2) = (0, 0, 0, 0)$ ;
- Inferior-superior:  $(\theta_1, \theta_2, \omega_1, \omega_2) = (0, \pi, 0, 0)$ ;
- Superior-inferior:  $(\theta_1, \theta_2, \omega_1, \omega_2) = (\pi, 0, 0, 0)$ ; y
- Superior-superior:  $(\theta_1, \theta_2, \omega_1, \omega_2) = (\pi, \pi, 0, 0)$ .

d) Si  $\alpha_1 = g\mu/(\mu - 1)l_1$  y  $\alpha_2 = g\mu/(\mu - 1)l_2$ , entonces las cuatro matrices son

$$A_{ii} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & \alpha_1/\mu \\ \alpha_2 & -\alpha_2 \end{pmatrix}, \quad A_{is} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_1/\mu \\ -\alpha_2 & \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad A_{si} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\alpha_1/\mu \\ -\alpha_2 & -\alpha_2 \end{pmatrix}, \quad A_{ss} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_1/\mu \\ \alpha_2 & \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

e) Si  $Q_M(\lambda) = Q_A(\lambda^2)$ , entonces cada VAP positivo/negativo de  $A$  se corresponde con un par de VAPs reales de signos diferentes/imaginarios puros de  $M$ . Por tanto, el sistema linealizado del equilibrio

- Superior-superior es una silla×silla (inestable), pues los dos VAPs de  $A_{ss}$  son positivos;
- Inferior-superior (o superior-inferior) es una silla×centro (inestable), pues  $A_{is}$  y  $A_{si}$  tienen VAPs reales de signos diferentes;
- Inferior-inferior es un centro×centro (la linealización no decide la estabilidad), pues los dos VAPs de  $A_{ii}$  son negativos.

