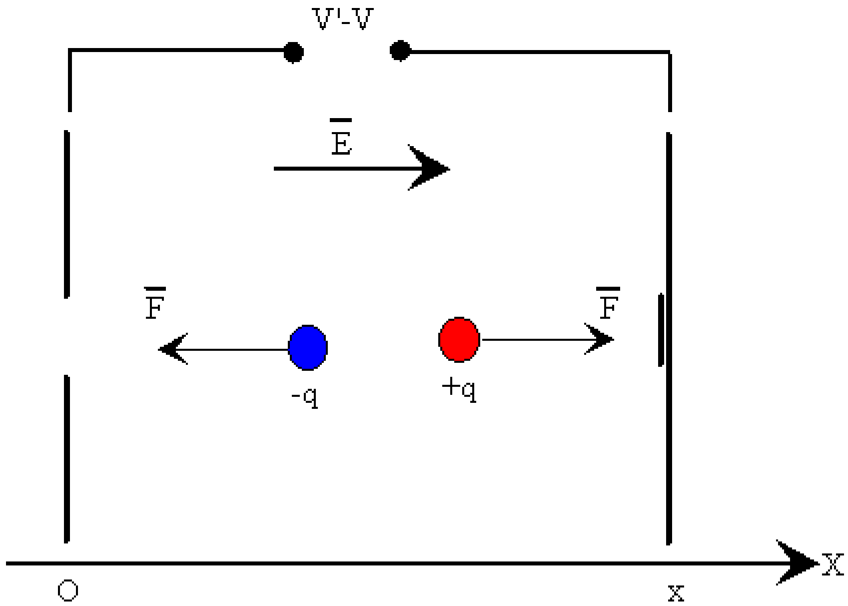
Movimiento en un campo eléctrico

Una partícula cargada que está en una región donde hay un campo eléctrico, experimenta una fuerza igual al producto de su carga por la intensidad del campo eléctrico $\mathbf{F}_e$=q·$\mathbf{E}$.

- Si la carga es positiva, experimenta una fuerza en el sentido del campo
- Si la carga es negativa, experimenta una fuerza en sentido contrario al campo



Si el campo es uniforme, la fuerza es constante y también lo es, la aceleración. Aplicando las ecuaciones del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, obtenemos la velocidad de la partícula en cualquier instante o después de haberse desplazado una determinada distancia

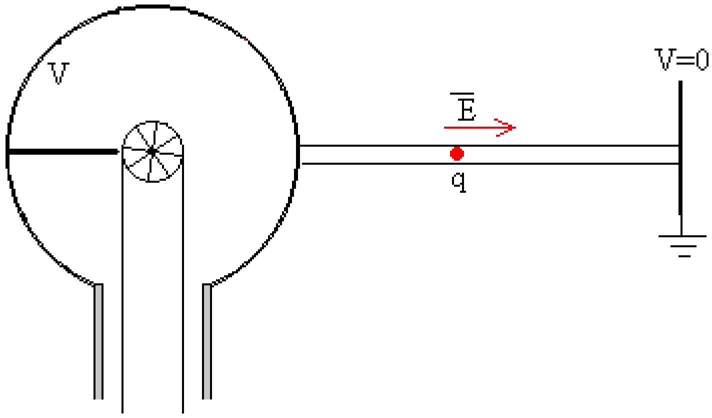
$$a = \frac{qE}{m} \qquad v = v_0 + at \qquad x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

De forma alternativa, podemos aplicar el principio de conservación de la energía, ya que el campo eléctrico es conservativo

La energía potencial *q*(*V'*-*V*) se transforma en energía cinética. Siendo *V'*-*V* la diferencia de potencial existente entre dos puntos distantes *x*. En un campo eléctrico uniforme *V'*-*V*=*Ex*.

$$q(V'-V) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

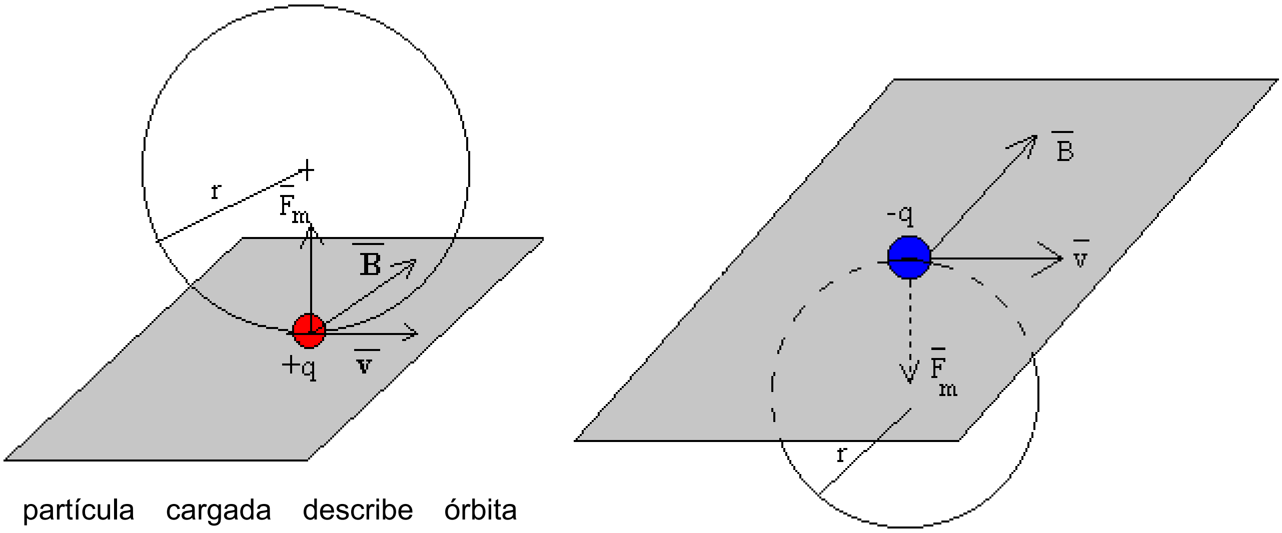
El generador de Van der Graaf se emplea para acelerar partículas. En el terminal esférico del generador se producen iones positivos que son acelerados a lo largo de un tubo en el que se ha hecho el vacío, por la diferencia de potencial existente entre la esfera cargada y tierra.



Movimiento en un campo magnético

Una partícula que se mueve en un campo magnético experimenta una fuerza $\mathbf{F}_m = q \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$. El resultado de un producto vectorial es un vector de

- módulo igual al producto de los módulos por el seno del ángulo comprendido qvB senΦ
- dirección perpendicular al plano formado por los vectores velocidad **v** y campo **B**.
- y el sentido se obtiene por la denominada regla del sacacorchos. Si la carga es positiva el sentido es el del producto vectorial $\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$, como en la figura izquierda. Si la carga es negativa el sentido de la fuerza es contrario al del producto vectorial $\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$, figura de la derecha



Una partícula cargada describe órbita

circular en un campo magnético uniforme. El radio de dicha órbita, se obtiene a partir de la ecuación de la dinámica del movimiento circular: fuerza igual a masa por aceleración normal.

$$F_m = m\frac{v^2}{r} \qquad qvB = m\frac{v^2}{r} \qquad r = \frac{mv}{qB}$$

Estudiaremos en esta página y las que siguen, varias situaciones en las que una partícula cargada positiva o negativa se mueve en una región donde existe un campo eléctrico, un campo magnético, o un campo eléctrico y magnéticos cruzados (perpendiculares entre sí).

Movimiento en un campo eléctrico y magnéticos cruzados

En este apartado, vamos a practicar con las fuerzas que ejercen un campo magnético y un campo eléctrico sobre partículas cargadas en movimiento.

El campo eléctrico está creado por las dos placas de un condensador plano-paralelo que distan *d* y tienen una longitud *L*, su sentido es de la placa positiva (color rojo) a la negativa (color azul).

El campo magnético es perpendicular al plano de la página, es positivo cuando apunta hacia dentro (color azul claro) y es negativo cuando apunta hacia fuera (color rosa).

1. **Desviación nula de la partícula**

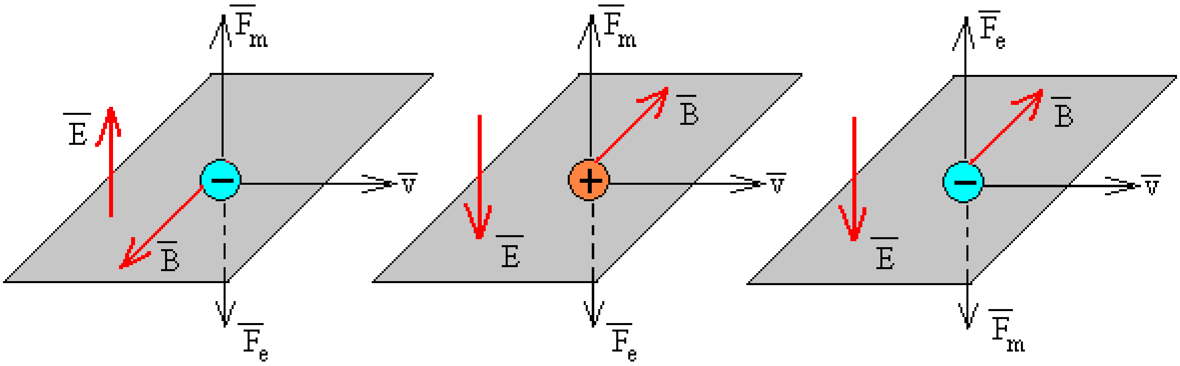
   Una carga eléctrica se mueve con velocidad v_0 desconocida a lo largo del eje horizontal X. Buscaremos las intensidades y los sentidos de los campos eléctrico y magnético que hacen que la partícula se mueva a lo largo del eje X sin desviarse.

   - El campo eléctrico ejerce una fuerza $\mathbf{F_e}=q\cdot\mathbf{E}$
   - El campo magnético ejerce una fuerza $\mathbf{F}_m=q\cdot\mathbf{v}\wedge\mathbf{B}$.

   Las partículas no se desvían si ambas fuerzas son iguales y de sentido contrario.

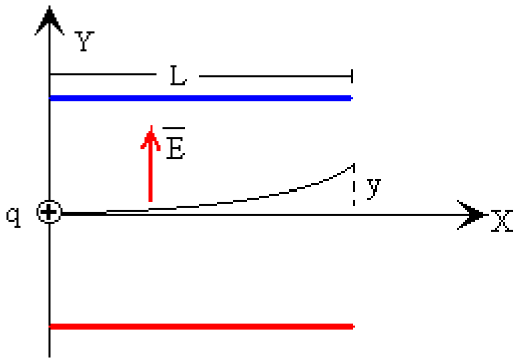
   Por tanto, no se desviarán aquellas partículas cuya velocidad sea igual cociente *E/B*.

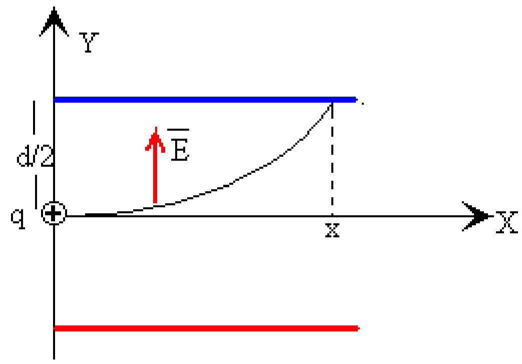
   En la figura, se muestran algunas configuraciones del campo eléctrico y magnético sobre cargas positivas o negativas que producen fuerzas en sentido contrario.


F̄m
Ē
B̄
v̄
F̄e
F̄m
B̄
v̄
Ē
F̄e
F̄e
B̄
v̄
Ē
F̄m

2. Movimiento bajo la acción del campo eléctrico

Cuando eliminamos el campo magnético, la partícula está bajo la acción de la fuerza eléctrica en la región del condensador. Como la fuerza eléctrica constante tiene dirección del eje Y, y la partícula se mueve inicialmente a lo largo del eje X, las ecuaciones del movimiento de la partícula serán semejantes a las del tiro parabólico (movimiento bajo la aceleración constante de la gravedad)





Si *L* es la longitud del condensador, la desviación vertical *y* de la partícula al salir de sus placas será

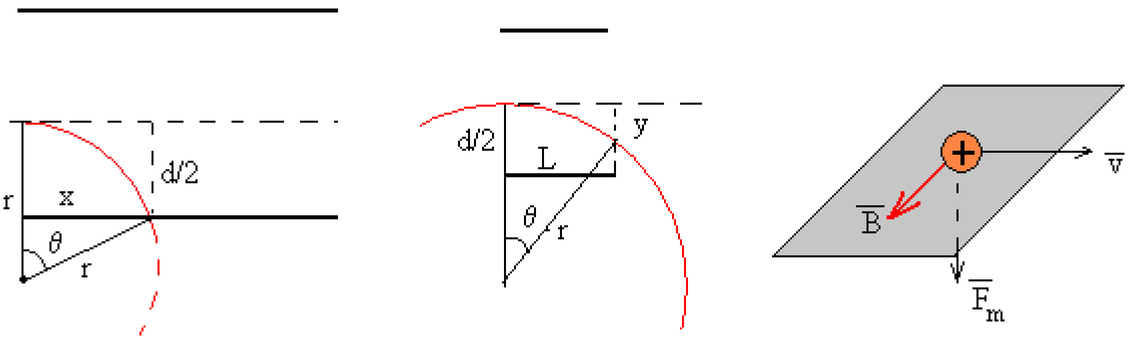
Puede ocurrir que la partícula choque con las placas del condensador. La posición *x* de impacto se calcula poniendo $y=d/2$, siendo *d* la distancia entre las placas del condensador.

3. Movimiento bajo la acción de un campo magnético

En esta región, la partícula experimenta una fuerza debida al campo magnético, cuya dirección y sentido viene dada por el producto vectorial $\mathbf{F}_m=q\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{B}$, y cuyo módulo es $F_m=q\cdot vB$.

Aplicando la ecuación de la dinámica del movimiento circular, calculamos el radio de la circunferencia que describe.

La partícula cargada describe un arco de una circunferencia hasta que choca con alguna de las placas del condensador.



Si *d* es la separación entre las placas. El punto de impacto *x,* tal como se aprecia en la figura, se calcula del siguiente modo

$r\text{-}d/2=r\cdot\cos\theta$
$x=r\cdot\text{sen}\theta$

Si el radio *r* es suficientemente grande, la partícula saldría entre las placas del condensador. Su desviación *y* se calcularía del siguiente modo

$y=r\text{-}r\cdot\cos\theta$
$L=r\cdot\text{sen}\theta$

1. ACELERADORES DE PARTÍCULAS: EL CICLOTRÓN

Una de las dificultades de los aceleradores electrostáticos de partículas cargadas la constituye su gran longitud, ya que la aceleración de las partículas depende de la diferencia de potencial total, y como E=V/d , si V es muy grande, también debe serlo "d" (para evitar campos eléctricos intensos que pueden producir el salto de chispas).
Estas dificultades pueden superarse consiguiendo que la trayectoria de la partícula cargada sea circular (utilizando un campo magnético) y diseñando aceleradores que funcionen cíclicamente. Este es el caso del CICLOTRÓN. Vamos a ver un problema relacionado con su funcionamiento.

En un determinado CICLOTRÓN, los protones describen una circunferencia de 0´40 m de radio poco antes de emerger. La frecuencia del potencial alterno entre las "des" es de 10^7 Hz. Despreciando los efectos relativistas, calcular : a) El campo magnético utilizado . b) La velocidad de los protones cuando salen del acelerador. c) La energía de los protones en J y en MeV. d) El número mínimo de vueltas completas de los protones si el máximo del potencial entre las "des" es de 20.000 V. e) Lo mismo para un deuterón de masa 2´014 uma.y para una partícula α de masa 4´003 uma.

Para acelerar una partícula cargada, necesitaremos un campo eléctrico lo suficientemente potente. Pero, si conseguimos hacer que las partículas pasen muchas veces a través del mismo campo eléctrico, conseguiremos aceleraciones sucesivas y, la energía de las partículas irá aumentando. Para desviar la partículas cargadas podremos utilizar un campo magnético. El campo magnético utilizado podemos pensar que, dependerá de la partícula acelerada y de las características del ciclotrón.

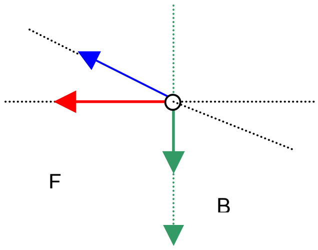
Cuando una partícula cargada entra en un espacio en el que existe un campo magnético uniforme de valor B, la fuerza que aparece sobre la misma viene dada por :

$\vec{F} = q\left[\vec{v} \times \vec{B}\right]$ por lo que su módulo será F = q.v.B sen β

Si penetra perpendicularmente a las líneas del campo magnético, la fuerza (perpendicular a v) valdrá :

F = q.v. B

Al ser una fuerza perpendicular a v, actúa como centrípeta y la partícula describe una trayectoria circular de radio R.



$$q.v.B = \frac{m.v^2}{R} \qquad R = \frac{m.v}{q.B} \quad \text{de donde} \quad v = \frac{R.q.B}{m}$$

la velocidad angular (o frecuencia angular) vendrá dada por :

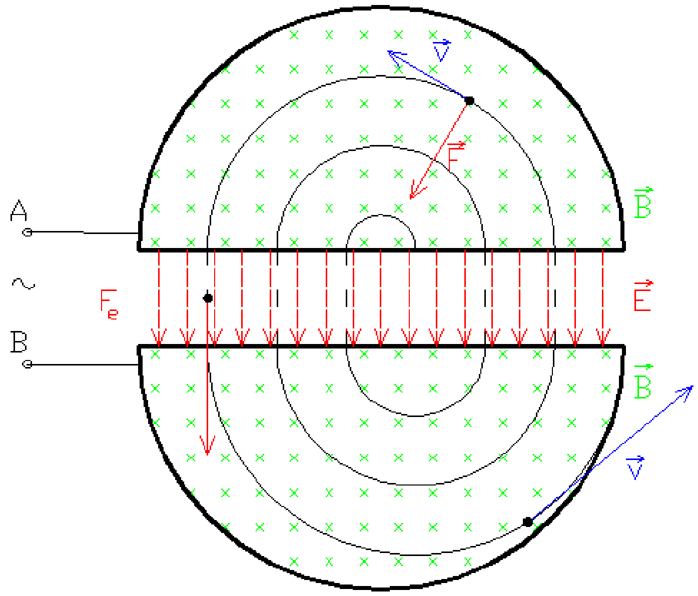
$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{q.B}{m}$$ como vemos independiente de v y de R.

En el ciclotrón recibe el nombre de "frecuencia ciclotrónica".

Si, cada media circunferencia conseguimos acelerar las partículas estableciendo una d.d.p. entre las dos "des" del ciclotrón, éstas entrarán en la otra "d" con una velocidad mayor por lo que describirán una semicircunferencia de mayor radio, pero con la misma frecuencia . Si en el intervalo correspondiente a medio ciclo, cambia la polaridad de las dos "des" del ciclotrón, cuando la partícula vaya a pasar a la otra "d" volverá de nuevo a ser acelerada por el campo eléctrico.

Si el proceso se repite muchas veces, la velocidad de las partículas irá siendo cada vez mayor, hasta que, para un determinado radio R_{max} emergen del ciclotrón con una gran velocidad.

$$R_{max} = \frac{m.v_{max}}{q.B} \qquad v_{max} = \frac{q}{m}.B.R_{max}$$



Para contestar a la pregunta a) del problema, pensemos que, como hemos visto, la frecuencia ciclotrónica depende de la carga, la masa y el campo magnético existente en las “des”.

$$\omega = 2\pi f = \frac{q.B}{m} \qquad\qquad B = \frac{2\pi f.m}{q} = \frac{2\pi.10^{7}.1'67.10^{-27}}{1'6.10^{-19}} = 0'656 Tesla$$

b) La velocidad máxima alcanzada por los protones cuando describen la última vuelta antes de salir del ciclotrón será :

$$v_{\max} = \frac{q}{m}B.R_{\max} = \frac{1'6.10^{-19}}{1'67.10^{-27}}0'656.0'4 = 2'51.10^{7}\, m/s$$

c) La energía de los protones en J y en MeV la calcularemos como su energía cinética (despreciando las desviaciones relativistas).

$$E_C = \frac{1}{2}m.v_{\max}^2 = \frac{1}{2}1'67.10^{-27}\left(2'51.10^{7}\right)^2 = 5'26.10^{-13}\,J = 3'29.10^{6}\,eV = 3'29\,MeV$$

d) El número de vueltas completas que deben dar los protones en el interior del ciclotrón lo calcularemos teniendo en cuenta que la energía la ganan cuando pasan de una “de” a la otra , al ser acelerados por el campo eléctrico existente entre ellas. Como en cada vuelta completa son acelerados dos veces, y la energía ganada en cada caso es V.q tendremos :

$q.V.2n = E_{Cmax}$ $1´6.10^{-19}.20000.2n = 5´26.\ 10^{-13}$
de donde
n = 82´18 vueltas ≈ 82 vueltas

Este será el nº mínimo de vueltas completas, correspondientes a las partículas que pasan entre las "des" cuando el campo eléctrico es máximo. Si cualquier otra partícula pasa entre las "des" con cualquier otro valor del campo eléctrico, el nº de vueltas completas será mayor hasta adquirir la misma energía cinética.

e) En el caso de los deuterones H_1^2 la relación q/m será distinta, por lo que debemos variar el campo magnético para adecuarlo a la frecuencia del ciclotrón. La masa del deuterón será :

m = 2´014 uma = 3´34 . 10^{-27} Kg y su carga q = 1´6 . 10^{-19} C.

Como $\omega = 2\pi f = \dfrac{q.B}{m}$ de donde, el campo magnético adecuado será :

$$B = \frac{2.\pi.10^7.3'34.10^{-27}}{1'6.10^{-19}} = 1'31 Tesla$$

La velocidad máxima alcanzada por los deuterones (cuando describan la circunferencia de radio máximo R=0´4m) será

$$v_{\max} = \frac{q}{m} B.R_{ciclo} = \frac{1'6.10^{-19}.1'31.0'4}{3'34.10^{-27}} = 2'51.10^7\, m/s$$

Siendo, la energía cinética con la que salen del ciclotrón :

$$E_C = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = 1'052.10^{-12} J = 6'58.10^6 eV = 6'58 MeV$$

Siendo el nº de vueltas que dan los deuterones en el interior del ciclotrón de:

$q.V.\ 2n = E_C$ $\qquad$ $2n\ .\ 1{'}6\ .\ 10^{-19}.\ 20000 = 1{'}052\ .\ 10^{-12}$

$n = 164{'}4$ vueltas ≈ 164

En el caso de las partículas α , la relación q/m es prácticamente la misma que la de los deuterones , por lo que, el campo magnético adecuado para las partículas α será el mismo que para los deuterones. La velocidad máxima de las partículas también será la misma que para los deuterones. No ocurrirá lo mismo con la energía cinética máxima (con la que "salen" del ciclotrón), ya que la masa es mayor.

$B = 1{'}31$ Tesla $\qquad$ $v_{max} = 2{'}51\ .\ 10^7$ m/s

$$E_C = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = \frac{4{'}003.\left(2{'}51.10^7\right)^2}{2.6{'}023.10^{26}} = 2{'}1.10^{-12}\, J = 13{'}1 MeV$$

Y el nº de vueltas que dan las partículas α , en el interior del ciclotrón será:

$2.\ 1{'}6.\ 10^{-19}.\ 20000.\ 2n = 2{'}1.10^{-12}$ de donde $n = 164.06$ vueltas ≈ 164 vueltas

En general, la energía con la que salen las partículas cargadas del acelerador vendrá dado por :

$$E_c = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{q.B.R_{\max}}{m} \right)^2$$