SÔBRE A LEBESGUE MENSURABILIDADE DOS CONJUNTOS DE REAIS

Dissertação de Mestrado

Iole de Freitas Druck

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

Abril 1971

I N T R O D U Ç Ã O

1. Fazemos aqui a exposição de artigos([4],[5],[8]) que tratam sôbre a Lebesgue-mensurabilidade dos conjuntos de reais do ponto de vista dos fundamentos da matemática. O trabalho se divide em duas partes. Na primeira mostraremos que a proposição "todo conjunto de reais é Lebesgue-mensurável" é consistente com os axiomas da teoria Zermelo-Fräenkel(ZF) de conjuntos + axioma da escôlha para famílias enumeráveis. Na segunda veremos que um axioma da teoria dos jogos, o axioma da determinação, implica a proposição acima.

A primeira parte se baseia sobretudo no artigo de Robert M. Solovay - "A model of set-theory in wich every set of reals is Lebesgue measurable", Ann. of Math. 92 nº1 (1970) pp1-55. A demonstração do teorema principal exige vários pré-requisitos. Supomos conhecida a teoria ZF de conjuntos, expondo aqui sòmente algumas noções importantes, das quais faremos uso especialmente, tais como forcing e construções de modêlos. Não entramos, porém, em todos os detalhes, sobretudo os técnicos. O material do artigo pròpriamente dito, êste sim é tratado extensivamente e em detalhe.

Esta parte discorre sôbre um tema bastante complexo, rico em pormenores e inserido no seio da teoria dos conjuntos. Nela demonstra-se um resultado específico mas esta demonstração exige muitos resultados importantes e gerais da teoria global. Na redação do trabalho tivemos como diretriz a preocupação de explicitar a intuição do que estava sendo feitoe, sempre que possível, usar uma linguagem simples. A idéia é a de que o maior número de interessados, independente da sua particular especialidade em matemática, pudesse ter acesso com relativa facilidade ao que aqui é dissertado. Nesta primeira parte, simplificar(mesmo a linguagem) não é tarefa fácil. Devido à complexidade referida, para chegar ao resultado final, o leitor não habituado teria de aprender, concomitantemente, muito sôbre teoria dos conjuntos.

Creio mesmo que a exposição completa, detalhada e com motivações do tema daria um bom livro de introdução à teoria dos conjuntos, dirigido à teoria de modêlos com aplicações à análise, o que fugiria ao espírito da presente dissertação de mestrado. Desta maneira a Parte I não é pròpriamente acessível ao leigo em teoria dos conjuntos, não apresentando porém, grandes dificuldades a quem tenha ao menos conhecimentos introdutórios do assunto.

O mesmo não acontece com a Parte II. Ali o tema é mais especializado e independente do escôpo da teoria. Foi-nos portanto possível dar a êle um tratamento "melhor" no sentido da diretriz de simplicidade exposta anteriormente. Achamos mesmo que a existência de um axioma que implica na Lebesgue-mensurabilidade dos conjuntos de reais despertaria interêsse maior aos não conjuntistas do que um problema de consistência relativa com os axiomas de ZF. É assim proposital a diferença de linguagem empregada nesta parte, que consideramos acessível a qualquer interessado.

O tema da segunda parte é desenvolvido a partir dos artigos:

Jan Mycielski, "On the axiom of determinateness", Fund. Math. LII (1964) pp 205-224.

___ and S. Świerczkowski : "on the Lebesguemeasurability and the axiom of determinateness", Fund. Math. LIV(1964) pp 67-71.

Resta-nos salientar ainda que as duas partes são independentes uma da outra.

2. Algumas palavras sôbre o Axioma da Determinação (A):

É um problema ainda aberto a consistência do axioma da determinação(ver pag. 60 para o seu enunciado) com os axiomas de ZF. Citando Jan Mycielski e H. Steinhaus em [6] : "our axiom can be considere as restriction of the classical notion of a set leading to a smaller universum, say of determined sets, which reflect some physical intuitions which are not fulfilled by the classical sets(e.g. paradoxical decompositions of the sphere are eliminated by (A)). Our axiom could be considered as an axiom added to the classical set theory claiming the existence of a class of sets satisfying (A) and the classical axioms without the axiom of choice).

São resultados já conhecidos(ver [4]) os seguintes, além do que vamos mostrar:

1) (A) $\longrightarrow$ "Todo subconjunto de um espaço métrico separável tem a propriedade de Baire".

(A) $\longrightarrow$ "Todo espaço métrico separável não enumerável contém um conjunto compacto perfeito."

(A) $\longrightarrow$ "Para tôda família de conjuntos F tal que $\emptyset \notin F$, $|F| \leq \aleph_0$ e $\left|\bigcup_{X \in F} X\right| \leq 2^{\aleph_0}$ existe função escôlha."

3. Por último, agradeço ao prof. Jacob Zimbarg Sobrinho, meu orientador para mestrado, pela disponibilidade e atenção que me dedicou, durante o preparo desta dissertação.

P A R T E I

Usaremos aqui as seguintes notações:

ZF para a teoria Zermelo-Fraenkel de conjuntos sem o axioma da escôlha

AE para o axioma da escôlha

ED para o princípio das escôlhas dependentes.

Será o objetivo desta parte demonstrar o seguinte teorema, ao qual nos referiremos como teorema principal:

TEOREMA: Se existe um modêlo transitivo enumerável de ZF + AE + "existe um cardinal fortemente inacessível" então existe um modêlo transitivo de ZF + ED onde vale que todo conjunto de reais é Lebesgue-mensurável.

Esta primeira parte está dividida em 5 seções.

Na seção I, a partir de um dado modêlo M(de base) transitivo enumerável de ZF+AE fazemos a descrição de um novo modêlo N(extensão) transitivo de ZF+AE tal que N $\supseteq$ M. O modêlo N é obtido por meio de uma linguagem ramificada que definiremos. Mostraremos que a noção de verdade em N está ligada à noção de forcing. O objetivo desta seção não é fazer um estudo completo e detalhado do assunto em pauta mas sim especificar e colocar em ordem algumas idéias fundamentais que a construção do modêlo do teorema principal envolvem. Assim sendo, muitos dos resultados citados não serão demonstrados. Tais resultados porém são bastante conhecidos e fàcilmente encontráveis na bibliografia dada.

Na seção II daremos a descrição das extensões do modêlo de base como serão usadas nas demais seções. A descrição não é construtiva, como na seção I, mas sim feita através de propriedades. Mostraremos a equivalência entre os dois processos de obter extensões, os das seções I e II.

A seção III se divide em três subseções. Em III.A se desenvolve alguns resultados de caráter instrumental sôbre filtros genéricos(definidos em II). Em III.B se dá a descrição de um modêlo importante, exten são do modêlo base. Em III.C se demonstra um teorema que permite ampliar o modêlo de base a um modêlo que contenha um real determinado. Êste é um dos passos cruciais da demonstração do teorema principal.

A seção IV se divide em duas subseções. Em IV.A veremos que os borelianos podem ser codificados por funções de ω em ω. Veremos também como os borelianos do modêlo de base se relacionam com os borelianos de extensões. Em IV.B daremos a noção de real aleatório e demonstraremos um teorema que relaciona borelianos de extensões com reais aleatórios sôbre o modêlo de base.

Na seção V, reunindo o material das seções III e IV demonstraremos um lema cujo resultado é bastante próximo ao resultado final pretendido. Faremos depois a descrição do modêlo final e demonstraremos o teorema principal.

1. Denotaremos por $\mathcal{L}$ a linguagem de ZF(com igualdade). É sabido que os únicos predicados de $\mathcal{L}$ são $\in$ e $=$, sendo os demais símbolos da linguagem os símbolos lógicos usuais.

Por noção entenderemos uma definição ou uma relação envolvendo conjuntos. Diz-se que uma noção N é formalizável em ZF se existe uma fórmula $\phi(x)$ de $\mathcal{L}$, com parâmetros que podem não pertencer a $\mathcal{L}$, tal que para todo o modêlo transitivo M de ZF se tem que

$$M \models \phi(\underline{a}) \longleftrightarrow a \text{ satisfaz a noção } N$$

onde $\underline{a} \in \mathcal{L}$ é o nome do conjunto a.

As duas definições a seguir são formalizáveis em ZF:

- A função $\underline{R}$ é tal que seu domínio é a classe dos ordinais (OR) e seu contradomínio o universo dos conjuntos, sendo que

$$R(o) = 0 \quad \text{e} \quad R(\alpha) = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{P}(R(\beta))$$

- Seja x conjunto. O pôsto de x ($\|x\|$) é o menor ordinal α tal que $x \in R(\alpha)$. (É conhecido que em presença do axioma da regularidade $V = \bigcup_{\alpha \in OR} R(\alpha)$.)

2. Descrição da linguagem ramificada.

Daqui para a frente M será um modêlo standard, transitivo e enumerável de ZF+AE.

Seja A um predicado unário ao qual está associado um ordinal ζ de M. A partir de A e do modêlo M define-se uma linguagem $\mathcal{L}_M(A)$ como segue. Os síbolos primitivos são:

- os conetivos $\neg$, $\vee$
- o quantificador $\exists$
- os predicados $\approx$, $\in$, A , onde $\approx$ e $\in$ são os usuais
- as variáveis v_i, $i \in \omega$
- para cada m $\in$ M temos um símbolo $\underline{m}$ (nome de m). Os $\underline{m}$ são as constantes.
- para cada $\alpha \in OR^M$ temos os símbolos $\exists^\alpha$ e λ_α (onde OR^M são os ordinais de M)

Como <u>símbolos definidos</u> poderão aparecer $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\forall$, $\forall^{\alpha}$ que têm as definições usuais. Usaremos o sinal = como igual metalinguístico para diferenciar de $\approx$.

Definimos simultâneamente <u>fórmula</u>, <u>fórmula limitada</u>, <u>têrmo de abstração</u> e <u>variável livre</u>:

(a) Se u e v são variáveis, constantes ou têrmos de abstração, então $u \in v$, $u \approx v$, $A(u)$ são fórmulas limitadas(atômicas).

(b) Se ϕ e Ψ são fórmulas limitadas então $\neg\phi$, $\phi \vee \Psi$ e $\exists^{\alpha} v_i \phi(v_i)$ $(\alpha \in OR^M)$ são fórmulas limitadas.

(c) Tôda fórmula limitada é fórmula. Se ϕ é fórmula então $\exists v_i \phi(v_i)$ é fórmula.

(d) Uma variável v_i que ocorre numa fórmula ϕ é ligada (em ϕ) se v_i <u>a</u>parece numa subfórmula do tipo $\exists^{\alpha} v_i \Psi(v_i)$ ou $\exists v_i \Psi(v_i)$.

(e) Se $\alpha \in OR^M$ e ϕ é uma fórmula limitada tal que

- ϕ só tem v_0 como variável livre
- se $\exists^{\beta} v_i \Psi(v_i)$ aparece em ϕ então $\beta \leq \alpha$

se $m \in M$ e $\underline{m}$ aparece em ϕ então $\|m\| < \alpha$

- se $\lambda_{\beta} v_i \Psi(v_i)$ aparece em ϕ então $\beta < \alpha$

então $\lambda_{\alpha} v_0 \phi(v_0)$ é um têrmo de abstração.

Uma <u>sentença(limitada)</u> é uma fórmula (limitada) sem variáveis livres.

Os <u>têrmos</u> da linguagem são as constantes e os têrmos de abstração.

Definimos a seguir <u>comprimento</u> de uma fórmula ou de uma fórmula limitada:

(a) Se ϕ é atômica então o comprimento de ϕ, $c(\phi) = 1$

(b) Se $\phi = \neg\Psi$ então $c(\phi) = c(\Psi) + 1$

(c) Se $\phi = \Psi \vee \chi$ então $c(\phi) = c(\Psi) + c(\chi) + 1$

(d) Se $\phi = \exists^{\alpha} v_i \Psi(v_i)$ então $c(\phi) = c(\Psi) + 1$

(e) Se $\phi = \exists v_i \Psi(v_i)$ então $c(\phi) = c(\Psi) + 1$

Seja u têrmo. Define-se <u>pôsto de u</u>, $\rho(u)$ como segue:

(a) Se $u = \underline{m}$, $m \in M$, então $\rho(u) = \|m\|$

(b) Se $u = \lambda_{\alpha} v_i \phi(v_i)$ então $\rho(u) = \alpha$

O <u>pôsto de uma sentença limitada</u> se define por indução no comprimento de ϕ:

(a) se $\phi = u \in v$ ou $\phi = u \approx v$ então pôsto ϕ = max $\{\rho(u), \rho(v)\}$.

(b) se $\phi = A(v)$ então pôsto ϕ = max $\{\zeta, \rho(v)\}$ (chamaremos ζ de pôsto de A, sendo o pôsto de $\in$ e $\approx$ igual a zero)

(c) se $\phi = \neg \psi$ então pôsto ϕ = pôsto ψ

(d) se $\phi = \psi \vee \chi$ então pôsto ϕ = max $\{$pôsto ψ, pôsto $\chi\}$

(e) se $\phi = \exists^{\alpha} v_i \psi(v_i)$ então pôsto ϕ = max $\{\alpha$, pôsto $\psi\}$

3. É sabido que é possível embutir $\mathcal{L}$ em M. Analogamente, como temos uma quantidade enumerável de símbolos em $\mathcal{L}_M(A)$, podemos associar a cada fórmula ϕ de $\mathcal{L}_M(A)$ um único conjunto: o número de Gödel de ϕ, anotado por $\ulcorner \phi \urcorner$. Assim fazemos $\mathcal{L}_M(A) \subseteq M$. É claro também que esta Gödelização pode ser feita de maneira a que tenhamos $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_M(A) \subseteq M$. A seguir faremos uso dêste fato para definir funções cujos domínios estão em $\mathcal{L}_M(A)$.

4. A função valorização.

Daqui para a frente, nesta seção, associaremos ao predicado A um conjunto a tal que $\|a\| = \zeta \in OR^M$. Desta maneira fica canônicamente associado ao predicado A o seu pôsto ζ.

Para cada $\alpha \in OR^M$ definiremos $\underline{T_\alpha}$, o conjunto dos têrmos de pôsto $< \alpha$ definíveis pela linguagem $\mathcal{L}_M(A)$:

$T_0 = \emptyset$ $\quad T_\alpha = \{t:$ t é têrmo de $\mathcal{L}_M(A) \wedge \rho(t) < \alpha\}$

Se ϕ é uma sentença limitada de $\mathcal{L}_M(A)$ então $\underline{or(\phi) = \langle \alpha, i \rangle}$ onde α é o pôsto de ϕ e i é o comprimento de ϕ ($\alpha \in OR$ e $i \in \omega$). Nos pares $\langle \alpha, i \rangle$ consideremos a seguinte relação $\leq$ de ordem:

$$\langle \alpha, i \rangle \leq \langle \beta, j \rangle \text{ se } \alpha < \beta \text{, ou, } \alpha = \beta \text{ e } i < j$$

A seguir definiremos a função val_A (valorização). Val_A tem para domínio o conjunto das sentenças limitadas de $\mathcal{L}_M(A)$ e para contradomínio o conjunto $\{0,1\}$. Vamos definir $val_A(\ulcorner \phi \urcorner)$ por indução em or(ϕ).

(a) Primeiro vamos definir $val_A(\ulcorner t_1 \in t_2 \urcorner)$ e $val_A(\ulcorner t_1 \approx t_2 \urcorner)$ simultâneamente, onde t_1 e t_2 são têrmos de $\mathcal{L}_M(A)$. Dividimos em três casos, segundo os postos dos têrmos:

(i) $\underline{\rho(t_1) < \rho(t_2) = \alpha}$

- se $t_2 = \underline{m}$ com $m \in M$ então

$$val_A(\ulcorner t_1 \in t_2 \urcorner) = \sup \{val_A(\ulcorner t_1 \approx \underline{n} \urcorner) : n \in m\}$$

(Nota: Se ϕ e Ψ são sentenças limitadas de $\mathcal{L}_M(A)$, usaremos a notação $val_A(\ulcorner \phi \leftrightarrow \Psi \urcorner)$ com o seguinte significado:

se $val_A(\ulcorner \phi \urcorner) + val_A(\ulcorner \Psi \urcorner) \equiv 0 (mod 2)$ então $val_A(\ulcorner \phi \leftrightarrow \Psi \urcorner) = 1$

se $val_A(\ulcorner \phi \urcorner) + val_A(\ulcorner \Psi \urcorner) \equiv 1 (mod 2)$ então $val_A(\ulcorner \phi \leftrightarrow \Psi \urcorner) = 0$

Preferimos usar aquela notação porque ela traduz melhor a maturalidade da definição. Cada vez que ela aparecer na definição que estamos dando, deve-se compreendê-la segundo esta nota, para que a indução fique legitimada.)

$$val_A(\ulcorner t_1 \approx t_2 \urcorner) = \inf \{val_A(\ulcorner u \in t_1 \leftrightarrow u \in t_2 \urcorner) : u \in T_\alpha\}$$

- se $t_2 = \lambda_\alpha v_i \Psi(v_i)$ então

$$val_A(\ulcorner t_1 \in t_2 \urcorner) = val_A(\ulcorner \Psi(t_1) \urcorner)$$

$$val_A(\ulcorner t_1 \approx t_2 \urcorner) = \inf \{val_A(\ulcorner u \in t_1 \leftrightarrow \Psi(u) \urcorner) : u \in T_\alpha\}$$

(ii) $\underline{\rho(t_1) = \rho(t_2) = \alpha}$

- se $t_2 = \underline{m}$ com $m \in M$ então

$$val_A(\ulcorner t_1 \in t_2 \urcorner) = \sup \{val_A(\ulcorner \underline{n} \approx t_1 \urcorner) : n \in m\}$$

$$val_A(\ulcorner t_1 \approx t_2 \urcorner) = \inf \{val_A(\ulcorner u \in t_1 \leftrightarrow u \in t_2 \urcorner) : u \in T_\alpha\}$$

- se $t_2 = \lambda_\alpha v_i \Psi(v_i)$ então

$$val_A(\ulcorner t_1 \in t_2 \urcorner) = \sup \{val_A(\ulcorner u \approx t_1 \wedge \Psi(u) \urcorner) : u \in T_\alpha\}$$

(onde $val_A(\ulcorner u \approx t_1 \wedge \Psi(u) \urcorner) = \min \{val_A(\ulcorner u \approx t_1 \urcorner), val_A(\ulcorner \Psi(u) \urcorner)\}$)

$$val_A(\ulcorner t_1 \approx t_2 \urcorner) = \inf \{val_A(\ulcorner u \in t_1 \leftrightarrow \Psi(u) \urcorner) : u \in T_\alpha\}$$

(iii) $\underline{\alpha = \rho(t_1) > \rho(t_2) = \beta}$

Nêste caso $val_A(\ulcorner t_1 \approx t_2 \urcorner) = val_A(\ulcorner t_2 \approx t_1 \urcorner)$ que já foi definido em (i). Para $t_1 \in t_2$ temos também dois casos a considerar:

- se $t_2 = \underline{m}$ com $m \in M$ então

$$val_A(\ulcorner t_1 \in t_2 \urcorner) = \sup \{val_A(\ulcorner t_1 \approx \underline{n} \urcorner) : n \in m\}$$

- se $t_2 = \lambda_\beta v_i \Psi(v_i)$ então

$$val_A(\ulcorner t_1 \in t_2 \urcorner) = \sup \{val_A(\ulcorner t_1 \approx u \wedge \Psi(u) \urcorner) : u \in T_\beta\}$$

(b) Definiremos agora $val_A(\ulcorner \bar{A}(t) \urcorner)$ onde t é têrmo de $\mathcal{L}_M(A)$.

- se $t = \underline{m}$ com $m \in M$ então

$$\mathrm{val}_A(\ulcorner A(\underline{m})\urcorner) = \begin{cases} 1 \text{ se } m \in a \\ 0 \text{ se } m \notin a \end{cases}$$

– se $t = \lambda_\alpha v_i\, \phi(v_i)$ então

$$\mathrm{val}_A(\ulcorner A(t)\urcorner) = \sup \{\mathrm{val}_A(\ulcorner t \approx \underline{n}\urcorner) : n \in a\}$$

Tendo definido val_A nas sentenças atômicas, continuemos a definição para as de comprimento maior do que 1 :

(c) $\mathrm{val}_A(\ulcorner \neg\phi \urcorner) = 1 - \mathrm{val}_A(\ulcorner \phi\urcorner)$

(d) $\mathrm{val}_A(\ulcorner \phi \vee \psi\urcorner) = \max \{\mathrm{val}_A(\ulcorner\phi\urcorner), \mathrm{val}_A(\ulcorner\psi\urcorner)\}$

(e) $\mathrm{val}_A(\ulcorner \exists^\alpha v_i\, \phi(v_i)\urcorner) = \sup\{\mathrm{val}_A(\ulcorner\phi(u)\urcorner) : u \in T_\alpha\}$

5. A funçaõ denotaçãoe o modêlo N

A função denotação D_A tem para domínio o conjunto dos têrmos de $\mathcal{L}_M(A)$, ou seja, a $\bigcup_{\alpha\in OR} {}^M T_\alpha$ e para contradomínio o universo. Definire D_A por indução nos postos dos têrmos. Suponhamos que os valôres de D_A são conhecidos para têrmos de pôsto $< \alpha$. Chamaremos $D_A(T_\beta)$ de V_β $(\beta < \alpha)$ Seja t têrmo de $\mathcal{L}_M(A)$ e $\rho(t) = \alpha$:

(a) se $t = \underline{m}$, $m \in M$ então $D_A(t) = m$

(b) se $t = \lambda_\alpha v_i\, \phi(v_i)$ então $D_A(t) = \{D_A(s) : s \in T_\alpha \wedge \mathrm{val}_A(\ulcorner\phi(s)\urcorner) = 1\}$

À imagem de um têrmo de $\mathcal{L}_M(A)$ por D_A chamaremos de <u>denotação do têrmo</u>.

Com estas notações temos tudo para definir N:

$$N = \bigcup_{\alpha\in OR} {}^M V_\alpha = \bigcup_{\alpha\in OR} {}^M D_A(T_\alpha)$$

Pela definição de D_A fica claro que $M \subseteq N$.

Não faremos a demonstração de que N é modêlo de ZF(ver [4] e [1])

A noção de verdade em N tem extreita relação com a função val_A. Vê-se fàcilmente que uma sentença limitada ϕ de $\mathcal{L}_M(A)$ é verdadeira em N se e só se $\mathrm{val}_A(\ulcorner\phi\urcorner) = 1$.

Mostraremos aqui, a título de exemplo, que o axioma da escôlha vale em N:

Seja $n \in N$, então existe t, têrmo de $\mathcal{L}_M(A)$ tal que $n = D_A(t)$. Seja $\alpha = \rho(t)$. É claro que $\{m \in M : m \in T_\alpha\} \in M$, $\{\ulcorner\lambda_\beta\urcorner : \beta \leq \alpha\} \in M$, $\{\ulcorner\exists^\beta\urcorner : \beta \leq \alpha\} \in M$, $\{\ulcorner v_i\urcorner : v_i \text{ variáveis}\} \in M$, $\{\ulcorner\in\urcorner, \ulcorner\approx\urcorner, \ulcorner\neg\urcorner, \ulcorner\vee\urcorner\} \in M$ e portanto o produto cartesiano dêstes conjuntos é elemento de M, bem como o conjunto F das partes finitas do produto cartesiano. É fácil ver que se pode adotar convenções tais que $\{\ulcorner t \urcorner : t \in T_\alpha\} \subseteq F$, e portanto, por separação teremos que $\{\ulcorner t \urcorner : t \in T_\alpha\} \in M$. Como AE vale em M êste conjunto possui uma boa ordem em M (em particular em N)

Observemos também que, como $\mathcal{L}_M(A)$ possui finitos predicados, a função val_A restrita a sentenças limitadas de pôsto menor ou igual a α pode ser descrita por meio de uma fórmula $\Psi(v_i)$ de $\mathcal{L}_M(A)$ de pôsto α com uma variável livre de tal modo que a denotação do têrmo $\lambda^\alpha v_i \Psi(v_i)$ é uma função de N(os v_i devem ser pensados como pares). Desta mesma forma e usando êste fato, a função D_A restrita a T_α é uma função do modêlo N.

Voltemos ao $n \in N$ inicial. Se $n \in M$ então n é bem ordenável trivialmente. Seja então $t = \lambda_\alpha v_i \phi(v_i)$. Logo

$$n = D_A(t) = \{D(s) : s \in T_\alpha \wedge val_A(\ulcorner \phi(s) \urcorner) = 1\}$$

Seja $N = \{\ulcorner s \urcorner : s \in T_\alpha \wedge val(\phi(s)) = 1\}$. D_A é uma função sobrejetôra de N em n. Em N consideremos a relação de equivalência $\equiv$ ($\in$ N) tal que $s \equiv s'$ se e só se $D_A(s) = D_a(s')$. N é bem ordenável em N pelas observações preliminares e portanto $N/\equiv$ também o é, e se consegue uma bijeção em N, de $N/\equiv$ sôbre n, da maneira natural. Logo existe uma boa ordem em N para n.

6. Forcing

Um conjunto de <u>condições</u> (de forcing) P é um $P \in M$ parcialmente ordenado por inclusão. A seguir definiremos a relação $\Vdash$ entre elementos de P e sentenças limitadas de $\mathcal{L}_M(A)$. Se $p \Vdash \phi$ diz-se que <u>p força ϕ</u>. A definição será feita por indução em $or(\phi)$.

(a) Primeiro faremos a definição simultânea de $p \Vdash t_1 \in t_2$ e $p \Vdash t_1 \approx t_2$ onde t_1 e t_2 são têrmos de $\mathcal{L}_M(A)$, dividindo em três casos segundo os postos dos têrmos:

(i) $\underline{\rho(t_1) < \rho(t_2) = \alpha}$

- se $t_2 = \underline{m}$, $m \in M$ então

$p \Vdash t_1 \in t_2$ se $p \Vdash t_1 \approx \underline{n}$ para algum $n \in m$

$p \Vdash t_1 \approx t_2$ se para todo $u \in T_\alpha$ $p \Vdash u \in t_1$ se e só se $p \Vdash u \in t_2$

– se $t_2 = \lambda_\alpha v_i\, \phi(v_i)$ então

$p \Vdash t_1 \in t_2$ se $p \Vdash \phi(t_1)$

$p \Vdash t_1 \approx t_2$ se para todo $u \in T_\alpha$ $p \Vdash u \in t_1$ se e só se $p \Vdash u \in t_2$

(ii) $\underline{\rho(t_1) = \rho(t_2) = \alpha}$

– se $t_2 = \underline{m}$, $m \in M$ então

$p \Vdash t_1 \in t_2$ se $p \Vdash \underline{n} \approx t_1$ para algum $n \in m$

$p \Vdash t_1 \approx t_2$ se para todo $u \in T_\alpha$ $p \Vdash u \in t_1$ se e só se $p \Vdash u \in t_2$

– se $t_2 = \lambda_\alpha v_i\, \phi(v_i)$ então

$p \Vdash t_1 \in t_2$ se $p \Vdash u \approx t_1$ e $p \Vdash \phi(u)$ para algum $u \in T_\alpha$

$p \Vdash t_1 \approx t_2$ se para todo $u \in T_\alpha$ $p \Vdash u \in t_1$ se e só se $p \Vdash \phi(u)$

(iii) $\underline{\rho(t_1) > \rho(t_2)}$

Neste caso $p \Vdash t_1 \approx t_2$ se $p \Vdash t_2 \approx t_1$ que foi definido em (i)

– se $t_2 = \underline{m}$, $m \in M$ então

$p \Vdash t_1 \in t_2$ se $p \Vdash t_1 \approx \underline{n}$ para algum $n \in m$

– se $t_2 = \lambda_\alpha v_i\, \phi(v_i)$ então

$p \Vdash t_1 \in t_2$ se para algum $u \in T_\alpha$ $p \Vdash u \approx t_1$ e $p \Vdash \phi(u)$

(b) Seja t têrmo de $\mathcal{L}_M(A)$. Definiremos agora $p \Vdash A(t)$:

– se $t = \underline{m}$, $m \in M$ então

$p \Vdash A(\underline{m})$ se $(\underline{m} \in \lambda_\gamma v_j A(v_j)) \in p$

– se $t = \lambda_\alpha v_j\, \phi(v_j)$ então

$p \Vdash A(t)$ se para algum $n \in M$, $\|n\| < \max\{\gamma, \alpha\}$ $p \Vdash \underline{n} \approx t$ e $p \Vdash A(\underline{n})$

Sejam ϕ e Ψ sentenças limitadas, então:

(c) $p \Vdash \neg\phi$ se para todo $p' \geqslant p$ não vale que $p' \Vdash \phi$

(d) $p \Vdash \phi \vee \Psi$ se $p \Vdash \phi$ ou $p \Vdash \Psi$.

(e) $p \Vdash \exists^\alpha v_i\, \phi(v_i)$ se $p \Vdash \phi(u)$ para algum têrmo $u \in T_\alpha$.

Assim está completa a definição da relação $\Vdash$.

Uma cadeia $\{p_n : n \in \omega\} \subset P$ é chamada sequência completa de condições se para tôda sentença $\phi \in \mathcal{L}_M(A)$, existe $n \in \omega$ tal que

$$p_n \Vdash \phi \quad \text{ou} \quad p_n \Vdash \neg\phi .$$

Os seguintes lemas estabelecem as propriedades mais importantes de condições e a relação entre forcing e a verdade do modêlo N. Não vamos demonstrar nenhum (ver [1]). Vamos sòmente dar indicações sôbre as demonstrações.

LEMA1: Se p é uma condição e ϕ uma sentença limitada de $\mathcal{L}_M(A)$, então não vale que $p \Vdash \phi$ e $p \Vdash \neg\phi$.

- Demonstração imediata da definição de $\Vdash$.

LEMA2: Se p e p' são condições, ϕ é uma sentença limitada de $\mathcal{L}_{M(A)}$ $p' \geqslant p$ e $p \Vdash \phi$ então $p' \Vdash \phi$.

- Demonstração por indução em $or(\phi)$.

LEMA3: Se p é condição e ϕ sentença limitada de $\mathcal{L}_M(A)$, então existe $p' \geqslant p$ tal que $p' \Vdash \phi$ ou $p' \Vdash \neg\phi$.

- Demonstração imediata da definição de $\Vdash$.

LEMA4: Existe uma sequência completa $(p_0, p_1, p_2, \ldots)$

- Na demonstração usa-se o fato de M ser enumerável. Enumera-se as sentenças limitadas de $\mathcal{L}_M(A)$ e procede-se por indução usando o lema anterior.

LEMA5: Uma sentença limitada $\phi \in \mathcal{L}_M(A)$ é verdadeira em N se e só se para algum $n \in \omega$ p_n força ϕ.

- Demonstração por indução em $or(\phi)$.

Observamos por último que tôdas as noções definidas nesta subseção são formalizáveis em ZF com parâmetros A e M.

II - Extensões do modêlo M : filtros genéricos

1. Como sempre M é um modêlo standard, transitivo e enumerável de ZF; $P \in M$, $P \neq \phi$ um conjunto parcialmente ordenado(aqui também os elementos de P são chamados de condições) com ordem reflexiva $\leqslant$ e $\leqslant \in M$. Daremos inicialmente algumas definições.

Duas condições são <u>compatíveis</u> se existe uma condição mais forte ($\geqslant$) que extenda ambas, ou seja, $p, q \in P$ são compatíveis se $\exists\, r \in P$ talque $p, q \leqslant r$. Se duas condições não são compatíveis diz-se que são <u>incompatíveis</u>.

Um conjunto $X \subseteq P$ é <u>denso</u> se

(1) $p \in X \wedge q \in P \wedge p \leqslant q \longrightarrow p \in X$

(2) $p \in P \longrightarrow \exists q \in X\ (p \leqslant q)$

Um conjunto $G \subseteq P$ é um <u>filtro M-genérico</u> se:

(1) $p, q \in G \longrightarrow \exists\, r \in G\ (p, q \leqslant r)$

(2) $p \in G \wedge p \in P \wedge p \leqslant q \longrightarrow p \in G$

(3) $X \subseteq P$, $X \in M$, X denso $\longrightarrow X \cap G \neq \phi$.

Como M é enumerável, para todo $p \in P$ existe um filtro M-genérico G tal que $p \in G$. Com efeito, seja $\{X_i : i \in \omega\}$ uma enumeração dos X densos em P, $X \in M$. Temos então que existe $p_1 \in X_1$ talque $p_1 \geqslant p$, existe $p_2 \in X_2$ com $p_2 \geqslant p_1$ e por indução se consegue uma sequência $p \leqslant p_1 \leqslant p_2 \leqslant \ldots$ $p_i \in X_i$. Fazemos $G = \{q \in P : \exists i \in \omega\ (q \leqslant p_i)\}$.

2. Seja G um filtro M-genérico em P. Então existe um modêlo $M[G]$ de ZF, standard e transitivo que se caracteriza pelas seguintes propriedades:

(1) $M \subseteq M[G]$

(2) $G \in M[G]$

(3) Se M' é um modêlo standard e transitivo de ZF tal que $M \subseteq M'$ e $G \in M'$ então $M[G] \subseteq M'$.

Mais adiante mostraremos que dada uma linguagem ramificada e uma extensão N de M construída através da linguagem, se consegue um filtro genérico G no conjunto de condições determinado pela linguagem ramificada tal que $N = M[G]$; e vice versa, dado G se constrói uma linguagem ramificada tal que o $N \supsetneq M$ construído por ela satisfaz $N = M[G]$. Assumindo, no momento, êste resultado é claro que $M[G]$ satisfaz as seguintes propriedades:

(4) O axioma da escôlha vale em $M[G]$

(5) Os ordinais de $M[G]$ são exatamente os ordinais de M.

M e G determinam e uma linguagem $\mathcal{L}_M(G) \supsetneq \mathcal{L}$. Passamos a descrever, brevemente, $\mathcal{L}_M(G)$.

Os símbolos primitivos são os de $\mathcal{L}$ mais um predicado unário S e as seguintes constantes: $\underline{G}$ (o nome de G) e para cada $m \in M$, $\underline{m} \in \mathcal{L}_M(G)$ (o nome de m).

As demais noções da linguagem têm a mesma definição como em $\mathcal{L}$, acrescentando-se, é claro, a fórmula atômica $S(x)$ (x variável ou constante de $\mathcal{L}_M(G)$).

As fórmulas envolvendo predicados de $\mathcal{L}$ são interpretadas em $M[G]$ da maneira óbvia. S é interpretado como segue:

$$M[G] \models S(x) \quad \text{se e só se} \quad x \in M$$

(A verdade no modêlo tem a definição usual)

De novo aqui podemos fazer corresponder a cada fórmula de $\mathcal{L}_M(G)$ um conjunto de M (seu nº de Gödel) e assim tôdas as propriedades sintáticas relevantes em $\mathcal{L}_M(G)$ são expressáveis em M.

4. Forcing.

Seja ϕ uma sentença de $\mathcal{L}_M(G)$ e $p \in P$. Dizemos que <u>p força ϕ</u>, em símbolos $p \Vdash \phi$ se existe um filtro M-genérico G tal que $p \in G$ e $M[G] \models \phi$. É claro que se G é um filtro M-genérico em P e $M[G] \models \phi$ então ϕ é forçado por algum $p \in G$.

Todos os lemas de forcing da seção I valem também aqui. Suponhamos que $\phi(v_1, \dots, v_n)$ é uma fórmula de $\mathcal{L}_{M(G)}$, então existe uma fórmula $\Psi(v_0, v_1, \dots, v_n)$ de $\mathcal{L}$ tal que

$$M \models \Psi(p, x_1, \dots, x_n) \quad \text{se é só se} \quad p \Vdash \phi(x_1, \dots, x_n)$$

Portanto a noção de forcing é expressável em M.

5. Equivalência dos processos de extender modêlos das seções I e II

Seja G filtro M-genérico. Vamos extender a linguagem $\mathcal{L}_M(G)$ a uma linguagem $\mathcal{L}'_M(G)$ que nos dará um modêlo $N \supseteq M$ pelo método desenvolvido na seção I. Mostraremos que $N = M[G]$.

$\mathcal{L}'_M(G)$ possui os mesmos predicados e constantes de $\mathcal{L}_M(G)$. Seus símbolos lógicos são os usuais mais os símbolos $\exists^\alpha$ e $\bigwedge_\alpha$ para cada $\alpha \in M$. Tôdas as demais noções são também as usuais para linguagens ramificadas. N é então o conjunto das denotações dos têrmos de $\mathcal{L}'_M(G)$. É claro que valem : (1) $M \subseteq N$ e (2) $G \in N$, portanto $M[G] \subseteq N$. A outra inclusão sai do fato que N também satisfaz uma condição de minimilidade igual à de $M[G]$, como mostraremos a seguir.

Seja N' modêlo transitivo de ZF tal que $M \subseteq N'$ e $G \in N'$, Demonstraremos por indução em α que $D(T_\alpha) \in N'$, $\forall \alpha$. Como

$$N = \bigcup_{\alpha \in OR^M} D(T_\alpha) \qquad \text{teremos que} \qquad N \subseteq N'.$$

(a) $\alpha = 0$. Neste caso $T_\alpha = \phi$ e trivialmente $D(T_0) \in N'$

(b) $D(T_{\alpha+1}) = D(T_\alpha) \cup \{x : x \in M \text{ e } \|x\| = \alpha\} \cup \{x : \exists$ uma fórmula com uma variável livre com parâmetros em $D(T_\alpha)$ tal que x é "descrito" por ela$\}$

Por indução $D(T_\alpha) \in N'$. É claro que $\{x : x \in M \text{ e } \|x\| = \alpha\} \in N'$. O conjunto dos números de Gödel das fórmulas com uma variável livre, com parâmetros em $D(T_\alpha)$, por raciocínio análogo ao da página 10 (para o conjunto dos números de Gödel dos $t \in T_\alpha$) pertence a N' ($D(T_\alpha) \in N'$ e N' é transitivo. Todos os outros componentes das fórmulas são embutíveis em $M \subseteq N'$). Por substituição, o último conjunto da união acima pertence a N'. Portanto $D(T_{\alpha+1}) \in N'$.

(c) Seja λ ordinal limite. Pelo visto na página 10, os T_α, $\alpha < \lambda$, podem ser considerados como elementos de M. Logo a função que associa α a T_α pertence a N'. Observando que $D(T_\lambda) = \bigcup_{\alpha < \lambda} D(T_\alpha)$ é fácil ver que $D(T_\alpha) \in N'$, $\forall \alpha < \lambda \longrightarrow D(T_\lambda) \in N'$.

Ora, mas $M[G]$ é tal que $M \subseteq M[G]$ e $G \in M[G]$, logo $N \subseteq M[G]$ e portanto $M[G] = N$.

Seja N extensão de M obtida a partir de uma linguagem ramificada $\mathcal{L}_M(A)$. Seja $P \in M$ conjunto de condições. Sejam $\{X_i : i \in \omega\}$ e $\{\phi_i : i \in \omega\}$ enumerações respectivas dos densos de P e das sentenças limitadas de $\mathcal{L}_M(A)$ (M é enumerável). Existe uma sequência completa de condições $(p_0, p_1, p_2, \dots)$ tal que $p_i \in X_i$. (escolhe-se $p_0 \in X_0$, p_0 decide ϕ_0, o que sempre é possível da definição de denso e dos lemas de forcing; depois escolhe-se $p_1' \geqslant p_0$ tal que p_1' decide ϕ_1; X_1 denso implica que existe $p_1 \geqslant p_1'$, $p_1 \in X_1$, e portanto p_1 decide ϕ_1, e assim por diante).

Seja $G = \{p \in P : \exists i \in \omega \ (p \leqslant p_i)\}$.

É fácil constatar que G é um filtro M-genérico. A sequência completa $(p_0, p_1, \dots) \in N$, logo $G \in N$. Então, pela minimalidade dos dois modêlos, N e $M[G]$ em relação às propriedades (1) $M \subseteq N, M[G]$ e (2) $G \in N, M[G]$, temos que $M[G] = N$.

6. Em $M[G]$ os valem os seguintes fatos, dos quais faremos uso nas próximas seções largamente, sem mais justificá-los ou explicitá-los necessàriamente.

(1) Seja u conjunto, $u \in M[G]$ se e só se é <u>descritível</u> em $\mathcal{L}_M(G)$, ou seja, se e só se existe uma fórmula $\phi \in \mathcal{L}_M(G)$ com uma só variável livre talque $M[G] \models \phi(x)$ se e só se $u = x$

(2) Se $A \in M[G]$ e $A \subseteq M$, através do método da seção I se pode construir uma extensão de M, M', que automàticamente satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $M \subseteq M'$

(b) $A \in M'$

(c) Se M'' é um modêlo standard e transitivo de ZF com $M' \subseteq M''$ então $A \in M''$ e $M' \subseteq M''$.

Usaremos a notação $M[A]$ para um tal M'. É claro que $M[A] \subseteq M[G]$.

(3) Existe uma fórmula $\phi(x,y,z)$ de $\mathcal{L}_M(G)$ tal que :

(a) $M[G] \models \phi(x,y,z) \rightarrow x \in M \wedge y \subseteq M$

(b) Se $M[G] \models \phi(x,y,z)$ e $M[G] \models \phi(x,y,z')$ então $z = z'$

(c) Seja $A \subseteq M$, $A \in M[G]$ então

$$M[G] \models \phi(x,A,z) \Longrightarrow z \in M[A]$$

(d) Seja A como em (c) e $z \in M[A]$. Então

$$M[G] \models \phi(x,A,z) \Longleftrightarrow M[A] \models \phi(x,A,z)$$

(e) $M[A] = \{z : \exists\, x \in M\ (M[G] \models \phi(x,A,z))\}$.

A - Alguns lemas sôbre filtros genéricos

Sejam $P_1, P_2 \in M$ conjuntos parcialmente ordenados por ordem reflexiva $\leq, \leq \in M$.

LEMA1: Seja $\Psi : P_1 \to P_2$ uma bijeção que preserva a ordem. Então $G \subseteq P_1$ é um filtro M-genérico em P_1 se e só se $\Psi(G)$ é um filtro M-genérico em P_2. Ainda mais $M[G] = M[\Psi(G)]$.

Dem: Os números $(1)_f$, $(2)_f$, $(3)_f$ abaixo se referem às condições da definição de filtro M-genérico. Seja $G \subseteq P_1$ filtro M-genérico em P_1. Mostraremos que $\Psi(G) \subseteq P_2$ é filtro M-genérico em P_2.

$$(1)_f\ \Psi(p_1), \Psi(p_2) \in \Psi(G) \to p_1, p_2 \in G \to \exists\, p_3 \in G (p_1, p_2 \leq p_3) \to \Psi(p_1), \Psi(p_2) \leq \Psi(p_3)$$

$$(2)_f\ \Psi(p_1) \leq \Psi(p_2) \in \Psi(G) \to p_1 \leq p_2 \in G \to p_1 \in G \to \Psi(p_1) \in \Psi(G)$$

Para $(3)_f$ mostraremos que $X \subseteq P_1$ é denso em $P_1 \leftrightarrow \Psi(X)$ é denso em P_2. Os números $(1)_d$, $(2)_d$ abaixo se referem às condições da definição de conjunto denso. Seja X denso em P_1:

$$(1)_d\ \Psi(p_1) \geq \Psi(p_2) \in \Psi(X) \to p_1 \geq p_2 \in X \to p_1 \in X \to \Psi(p_1) \in \Psi(X)$$

$$(2)_d\ \Psi(p_1) \in P_2 \to p_1 \in P_1 \to \exists\, p_2 \in X\ (p_1 \leq p_2) \to \Psi(p_2) \in \Psi(X) \text{ e } \Psi(p_1) \leq \Psi(p_2)$$

A recíproca é análoga.

$$(3)_f\ \Psi(X) \text{ denso em } P_2 \to X \text{ denso de } P_1 \to G \cap X \neq \emptyset \to \Psi(G) \cap \Psi(X) \neq \emptyset$$

A recíproca do lema é análoga. É fácil ver que $M[G] = M[\Psi(G)]$.

Definição: Suponhamos $P_1 \subseteq P_2$ e que a ordem de P_1 é a restrição da ordem de P_2. Nêste caso dizemos que P_1 é cofinal em P_2 se para todo $p \in P_2$ existe $q \in P_1$ tal que $p \leq q$.

LEMA2: Seja P_1 cofinal em P_2 e seja G um filtro M-genérico em P_2. Então $G \cap P_1$ é um filtro M-genérico em P_1. A função Ψ dada por $\Psi(G) = G \cap P_1$ é uma bijeção do conjunto dos filtros M-genéricos em P_2 com o conjunto dos filtros M-genéricos em P_1. Ainda mais $M[G] = M[\Psi(G)]$.

Dem: Demonstraremos abaixo que $G \cap P_1$ é um filtro M-genérico em P_1.

$(1)_f$ $p_1, p_2 \in G \cap P_1 \longrightarrow \exists p_3 \in G \; (p_1, p_2 \leq p_3)$

Como P_1 é cofinal em P_2 o conjunto X abaixo é denso em P_2:

$X = \{p \in P_2 : p$ é incompatível com p_3 ou existe $p' \in P_1 (p_3 \leq p' \leq p)\}$

Portanto $X \cap G \neq \emptyset \longrightarrow \exists p' \in G \cap P_1 \; (p_1, p_2 \leq p')$

$(2)_f$ $p_1 \leq p_2 \in G \cap P_1$, $p_1 \in P_1 \longrightarrow p_1 \in G \cap P_1$

$(3)_f$ Seja $X \subseteq P_1$ denso em P_1. Como P_1 é cofinal em P_2

$X' = \{p \in P_2 : \exists p' \in X \; (p' \leq p)\}$ é denso em P_2, logo $X' \cap G \neq \emptyset$.

Seja $p \in X' \cap G \longrightarrow \exists p' \in X (p' \leq p) \longrightarrow p' \in X \cap G$. Como $X \subseteq P_1$, então $p' \in X \cap (G \cap P_1)$.

Sejam G_1, G_2 filtros M-genéricos em P_2. Mostraremos que $\Psi(G_1) \neq \Psi(G_2)$. Seja $p \in G_1$, $p \notin G_2$ (se não existir faz-se o mesmo raciocínio para $p \in G_2$, $p \notin G_1$).

Fazemos $X_p = \{p' \in P_2 : p'$ é incompatível com p ou $p' \geq p\}$

$X_p \in M$ e é denso em P_2. Como P_1 é cofinal em P_2, $X_p \cap P_1$ é denso em P_1. Mas $G_2 \cap P_1$, como vimos acima, é filtro M-genérico em P_1. Seja $q \in (X_p \cap P_1) \cap (G_2 \cap P_1)$, Então $q \notin G_1$. Portanto $q \in G_2 \cap P_1$ e $q \notin G_1 \cap P_1$, ou seja, $\Psi(G_1) \neq \Psi(G_2)$. Mostramos assim que Ψ é injetora. Mostremos agora que Ψ é sobrejetora:

Seja H um filtro M-genérico em P_1. Façamos

$$G = \{p \in P_2 : \exists q \in H \; (p \leq q)\}$$

G é filtro M-genérico em P_2. (a única condição que não é de verificação direta é a terceira condição, onde usa-se o fato de que se X é denso em P_2 então $X \cap P_1$ é denso em P_1)

Como a ordem é reflexiva, $H \subseteq G \cap P_1$. Seja $p \in G \cap P_1$, então existe $q \in H$ tal que $p \leq q$, mas H é filtro e portanto $q \in H$. Ou seja $H = G \cap P_1 = \Psi(H)$ e Ψ é sobrejetora.

É trivial ver que $M[G] = M[\Psi(G)]$ (G e $\Psi(G)$ são equiconstrutíveis).

Seja $P = P_1 \times P_2$. P parcialmente ordenado como segue:

Se $\langle p_1, p_2 \rangle$, $\langle p_1', p_2' \rangle \in P$ então

$\langle p_1,p_2\rangle \leq \langle p_1',p_2'\rangle \iff p_1 \leq p_1'$ e $p_2 \leq p_2'$

LEMA3: Seja G um filtro M-genérico em P. Então $G = G_1 \times G_2$ onde G_1 um filtro M-genérico em P_1 e G_2 é um filtro $M[G_1]$-genérico em P_2 (ou s seja $M[G] = M[G_1][G_2]$). Reciprocamente, se G_1 é um filtro M-genérico em P_1 e G_2 é um filtro $M[G_1]$-genérico em P_2 então $G_1 \times G_2$ é um filtro $\underline{M}$ genérico em P.

Dem: $G_1 = \{p \in P_1 : \exists\, q \in P_2\ (\langle p,q\rangle \in G)\}$

$G_2 = \{q \in P_2 : \exists\, p \in P_1\ (\langle p,q\rangle \in G)\}$

Trivialmente $G \subseteq G_1 \times G_2$. Vejamos a recíproca:

Seja $\langle p,q\rangle \in G_1 \times G_2$. Então existem $q' \in P_2$, $p' \in P_1$ taisque $\langle p,q'\rangle \in G$ e $\langle p',q\rangle \in G$. G filtro implica que existe $\langle p'',q''\rangle \in G$ tal que $\langle p',q\rangle, \langle p,q'\rangle \leq \langle p'',q''\rangle$. Logo $\langle p,q\rangle \leq \langle p'',q''\rangle$ e portanto $\langle p,q\rangle \in G$.

Mostremos que G_1 é um filtro M-genérico em P_1. $(1)_f$ e $(2)_f$ são satisfeitas trivialmente. Seja X denso em P_1, $X \in M$. Então $X \times P_2$ é denso em P e portanto $G \cap X \times P_2 \neq \emptyset$, ou seja, $G_1 \cap X \neq \emptyset$ e a condição $(3)_f$ também é satisfeita.

Mostremos agora que G_2 é um filtro $M[G_1]$-genérico em P_2. Novamente $(1)_f$ e $(2)_f$ são satisfeitas trivialmente. Seja $X \in M[G_1]$ denso em P_2. Então existe uma fórmula $\phi(x)$ de $\mathcal{L}_M(G)$ tal que

$$M[G_1] \models \phi(x) \iff x = X$$

Pelas nossas hipóteses valem:

$$M[G_1] \models \exists!\, x\,\phi(x) \quad \text{e} \quad M[G_1] \models \forall x(\phi(x) \rightarrow x \text{ é denso em } P_2).$$

Seja portanto $p_1 \in G_1$ que força essas duas sentenças. Façamos

$$X' = \{\langle p,q\rangle \in P : p \text{ é incompatível com } p_1 \text{ ou } (p_1 \leq p \text{ e } p \Vdash q \in X)$$

X' é denso em P. Com efeito:

$(1)_d$ $\langle p',q'\rangle \geq \langle p,q\rangle \in X'$

(a) p incompatível com $p_1 \longrightarrow p'$ incompatível com p_1

(b) $p_1 \leq p \leq p' \longrightarrow p'$ força as seguintes sentenças:

(i) X é denso em P_2

(ii) $q \in X$

(iii) $q \leq q'$

e portanto $p' \Vdash q' \in X$. Logo $\langle p',q'\rangle \in X'$.

$(2)_d$ Seja $\langle p',q'\rangle \in P$. Se p' é incompatível com p_1 então $\langle p',q'\rangle \in X'$ e vale $(2)_d$. Suponhamos que existe p tal que $p_1, p' \leq p$. Então p força as seguintes sentenças:

(i) X é denso em P_2

(ii) $q' \in P_2$

(iii) $\exists q \in X\ (q' \leq q)$

formemos o par $\langle p,q\rangle$ tal que $q' \leq q$ e $q \in X$. Assim $p \Vdash q \in X$, $p_1 \leq p$, $\langle p',q'\rangle \leq \langle p,q\rangle$ e $\langle p,q\rangle \in X'$. Como forcing é expressável em M, $X' \in M$; mas G é um filtro M-genérico e portanto $G \cap X' \neq \emptyset$. Seja $\langle p,q\rangle \in G \cap X'$. Assim $p, p_1 \in G_1$ e portanto são compatíveis. Logo $p_1 \leq p$ e $p \Vdash q \in X$, ou seja $q \in G_2 \cap X$, o que termina de demonstrar a terceira condição para filtro.

Vejamos a recíproca. Seja G_1 filtro M-genérico em P_1 e G_2 filtro $M[G_1]$-genérico em P_2. Mostremos que $G_1 \times G_2$ é um filtro M-genérico em P.

As condições $(1)_f$ e $(2)_f$ são de verificação imediata. Seja $X \in M$ denso em P. Façamos

$$X' = \{q \in P_2 : \exists p \in G_1\ (\langle p,q\rangle \in X)\}.$$

Claramente $X' \in M[G_1]$. Mostremos que X' é denso em P_2.

$(1)_d$ $q' \geq q \in X' \longrightarrow \exists p \in G_1\ (\langle p,q\rangle \in X)$, mas $\langle p,q'\rangle \geq \langle p,q\rangle$, e X é denso e portanto $\langle p,q'\rangle \in X \longrightarrow q' \in X'$.

$(2)_d$ Seja $q \in P_2$. Façamos

$$X_q = \{p \in P_1 : \exists q' \in P_2\ (q \leq q' \wedge \langle p,q'\rangle \in X)\}.$$

$X_q \in M$ claramente. Mostremos que X_q é denso em P_1:

$(1)_d$ $p' \geq p \in X_q \longrightarrow p' \in X_q$ trivialmente

$(2)_d$ $p \in P_1 \longrightarrow \langle p,q\rangle \in P$, X denso em $P \longrightarrow \exists \langle p',q'\rangle \in X$ tal que $\langle p,q\rangle \leq \langle p',q'\rangle \longrightarrow p \leq p' \wedge p' \in X_q$.

Logo existe $p \in G_1 \cap X_q$. Seja $q' \in P_2$, $q \leq q'$ e $\langle p,q'\rangle \in X$. Então $q \leq q'$ e $q' \in X'$, o que termina de provar que X' é denso em P_2.

Seja $q \in X' \cap G_2$. Então existe $p \in G_1\ (\langle p,q\rangle \in X) \longrightarrow \langle p,q\rangle \in X \cap (G_1 \times G_2)$

Daqui para frente suporemos que P_1 e P_2 possuem um elemento mínimal: 0. Esta hipótese não tira a generalidade do que vimos fazendo pois se P é um conjunto parcialmente ordenado, P é cofinal em $P \cup \{0\}$ $(\forall p \in P, 0 \leq p)$.

O lema 2 diz que P e $P\cup\{0\}$ são equivalentes para o que nos interessa aqui.

LEMA 4: Sejam $P = P_1 \times P_2$, ϕ uma sentença e $p = \langle p_1, p_2\rangle \in P$. ($\phi$ é sentença de $\mathcal{L}_M(G)$ para algum $G = G_1 \times G_2$ tal que $p \in G$. É importante notar que êste G é livre, ou seja, não fixado)

Se $\langle p_1, p_2\rangle \Vdash$ "$M\ G_1 \Vdash \phi$" então $\langle p_1, 0\rangle \Vdash$ "$M[G_1] \models \phi$".

Dem: Suponhamos que não. Então existe $\langle p_1', p_2'\rangle \geqslant \langle p_1, 0\rangle$ tal que

(1) $\langle p_1', p_2'\rangle \Vdash$ "$M[G_1] \models \neg\phi$".

Seja G' filtro M-genérico em P tal que $\langle p_1', p_2'\rangle \in G'$. Temos então pelo lema 3 $G' = G_1' \times G_2'$ e vale $M[G_1'] \models \neg\phi$ (por (1)). Seja G_2'' um filtro $M[G_1']$-genérico em P_2 tal que $p_2 \in G_2''$. Pelo lema 3 $G_1' \times G_2''$ é M-genérico e $p \in G_1' \times G_2''$. Portanto, pela hipótese $M[G_1'] \models \phi$ e chegamos a uma contradição.

B - Funções colapsantes e descrição do modêlo

Seja $\lambda \neq 0$ um ordinal de M. Seja P_λ o conjunto das funções f tais que $\mathrm{dom} f \subseteq \omega$, com contradomínio λ e $|f|$ finito. P_λ é parcialmente ordenado por inclusão.

Seja G um filtro M-genérico em P_λ então $\bigcup G = F$ é uma função, $F : \omega \to \lambda$, sobrejetôra. Com efeito, provemos que $\mathrm{dom} F = \omega$. Seja $n \in \omega$ então o conjunto

$$X_n = \{ f \in P_\lambda : n \in \mathrm{dom} f \}$$

é denso em P_λ, portanto existe $f \in X_n \cap G$, ou seja, $n \in \mathrm{dom} F$.

Provemos que F é função: sejam $\langle n,\alpha\rangle, \langle n,\beta\rangle \in F$, então existem $f, g \in G$ tais que $\langle n,\alpha\rangle \in f$ e $\langle n,\beta\rangle \in g$. Como G é filtro, seja $h \geqslant f, g$ então $\langle n,\alpha\rangle \cup \langle n,\beta\rangle \subseteq h$. Como h é função temos que $\alpha = \beta$.

Provemos que F é sobrejetora: seja $\alpha \in \lambda$, então o conjunto

$$X_\alpha = \{ f \in P_\lambda : \exists\, n \in \omega\, (\langle n,\alpha\rangle \in h) \}$$

é denso em P_λ, logo $X_\alpha \cap G \neq \emptyset$, ou seja, existe $n \in \omega$ tal que $F(n) = \alpha$.

De $F : \omega \to \lambda$ ser sobrejetora segue que λ é enumerável em $M[G]$. Ainda mais, é possível obter F a partir de G como segue:

$$G = \{ f \in P_\lambda \ : \ f \subseteq F \}$$

Portanto $M[G] = M[F]$.

Definição: Dizemos que $F : \omega \to \lambda$ é uma função colapsante M-genérica se F provém de um filtro M-genérico em P_λ como descrito acima.

LEMA1: Seja $F : \omega \to \lambda$ uma função colapsante M-genérica. Então existe $s \subseteq \omega$, $s \in M[F]$ tal que $M[F] = M[s]$.

Dem: fazemos F codificar s pondo

$$s = \{ 2^n 3^m : F(n) \leq F(m) \} .$$

É claro que $s \in M[F]$. Mostremos agora que $F \in M[s]$. Vamos definir uma relação de equivalência $\sim$ em ω. Se $m, n \in \omega$, diremos que $m \sim n$ se e só se $2^n 3^m \in s$ e $2^m 3^n \in s$ (ou seja, se $F(n) = F(m)$). É claro que $\sim$ pertence a $M[s]$. Portanto o conjunto $A = \omega/\sim$ também pertence a $M[s]$. Consideremos em A a seguinte relação $<$ de ordem. Se $[m], [n] \in A$ ($[m]$ = classe de equivalência de m) então $[m] < [n]$ se e só se $2^n 3^m \notin s$ (se $F(m) < F(n)$). F induz uma função $F' : \langle A, < \rangle \to \langle \lambda, < \rangle$ que é bijetora e que preserva a ordem. Logo $\langle A, < \rangle$ é bem ordenado, e portanto bem ordenado em $M[s]$. Seja $F'' : A \to \alpha$ um isomorfismo de $\langle A, < \rangle$ com $\langle \alpha', < \rangle$, $F'' \in M[s]$. F'' existe porque $M[s]$ é modêlo de ZF+AE.

A função $F'' \circ (F')^{-1} : \lambda \to \alpha$ é claramente a identidade. Como a identidade pertence a $M[s]$ e $F'' \in M[s]$ temos que $F' \in M[s]$. Portanto $F \in M[s]$.

Observação: Se G é um filtro M-genérico em P_λ, $F = \bigcup G$ e $s \subseteq \omega$, $s \in M[F]$ como acima, temos as seguintes igualdades que serão importantes no decorrer do trabalho:

$$M[G] = M[F] = M[s] .$$

e queligam um "real"(s) a um filtro genérico.

Vamos definir o conjunto P^λ. P^λ é o conjunto das funções f tais que $\operatorname{dom} f \subseteq \lambda \times \omega$, contradomínio de f é λ, $|f|$ finito e $f(\langle \alpha, n \rangle) < \alpha$ (onde fizer sentido). Consideremos P^λ parcialmente ordenado por inclusão.

LEMA2: Seja G um filtro M-genérico em P^λ. Seja $0 < \alpha < \lambda$. Definimos $f_\alpha : \omega \to \alpha$ por $f_\alpha = \{ \langle n, \beta \rangle : \{ \langle \langle \alpha, n \rangle, \beta \rangle \} \in G \}$. Então f é sobre.

Dem: Análoga à das funções colapsantes genéricas feitas no início des ta subseção.

COROLÁRIO: Seja G um filtro M-genérico em P^{λ}. Então $\lambda \leq \aleph_1^{M[G]}$.

Dem: Para todo α, $0 < \alpha < \lambda$, $f_\alpha : \omega \to \alpha$ é sobrejetôra e $f_\alpha \in M[G]$. Portanto $|\alpha| = \aleph_0^{M[G]}$, $\forall \alpha \in \lambda$, $\alpha \neq 0$, de onde segue que $\lambda \leq \aleph_1^{M[G]}$.

No que segue M será um modêlo transitivo e enumerável de ZF + "Existe um cardinal fortemente inacessível".

(γ é fortemente inacessível se

(i) $A \subseteq \gamma$ e $|A| < |\gamma| \to \sup A < \gamma$

(ii) $\aleph < \gamma \to 2^{\aleph} < \gamma$)

Seja $\Omega \in M$ fortemente inacessível em M. Com a notação anterior, seja G um filtro M-genérico em P^{Ω}. Chamaremos $N = M[G]$. Vamos mostrar que $\Omega = \aleph_1^N$.

LEMA3: Seja $I \in M$, $I \subseteq P^{\Omega}$. Suponhamos que quaisquer dois elementos distintos de I são incompatíveis. Então, em M, I tem cardinalidade menor que Ω. Mais precisamente, existe um $\xi < \Omega$ tal que $I \subseteq P^{\xi}$.

Dem: Pelo lema de Zorn podemos assumir I maximal(em M vale o axioma da escôlha).

Definimos uma sequência de ordinais $\{\xi_i : i \in \omega\}$ fazendo o que segue: $\xi_0 = \omega$.

Suponhamos ξ_i definido e $\xi_i < \Omega$.

$P^{\xi_i} \subseteq \mathcal{P}_f(\xi_i \times \omega \times \xi_i)$ ($\mathcal{P}_f$ é partes finitas)

$\to |P^{\xi_i}| \leq \max(\omega, \xi_i) \to |P^{\xi_i}| < \Omega$.

Seja $h \in P^{\xi_i}$. Como I é maximal nas famílias dos subconjuntos de P cujos elementos são dois a dois incompatíveis, existe $f_h \in I$, f_h compatível com h.

$f_h \in P^{\Omega} \to \exists \lambda_h < \Omega$ tal que $h \cup f_h \in P^{\lambda_h}$. Então

$|\{\lambda_h : h \in P^{\xi_i}$ e λ_h é obtido como acima$\}| = |P^{\xi_i}| < \Omega$

Portanto o $\sup_{h \in P^{\xi_i}} \lambda_h < \Omega$ (Ω é inacessível).

Fazemos $\xi_{i+1} = \max(\sup_{h \in P^{\xi_i}} \lambda_h, \xi_i)$.

Assim é verdade que $h \in P^{\xi_i}$ implica em $f_h \in P^{\xi_{i+1}}$. Seja $\xi_\omega = \sup_{i \in \omega} \xi_i$.

Como Ω é inacessível, $\xi_\omega < \Omega$. Mostremos que $I \subseteq P^{\xi_\omega}$.

Suponhamos que não. Seja $g \in I$, $g \notin P^{\xi_\omega}$. Seja g' a restrição de g a $\xi_\omega \times \omega$. Como domínio de g é finito, $g' \in P^{\xi n}$ para algum n. Por construção existe um $g'' \in P^{\xi_{n+1}} \cap I$ compatível com g'. Mas g'' não é compatível com g $(g, g'' \in I)$. Então existe $\langle \alpha, n\rangle \in \text{dom}g \cap \text{dom}g''$ com $g(\langle\alpha,n\rangle) \neq g''(\langle\alpha,n\rangle)$. Como $\langle\alpha,n\rangle \in \text{dom}g''$, $\alpha < \xi_{n+1} < \xi_\omega$. Pela definição de g', $g(\langle\alpha,n\rangle) = g'(\langle\alpha,n\rangle) \neq g''(\langle\alpha,n\rangle)$. O que contradiz o fato de g' e g'' serem compatíveis. Logo $I \subseteq P^{\xi\omega}$.

COROLÁRIO: $\aleph_1^N = \Omega$

Dem: Como já sabemos que $\Omega \leq \aleph_1^N$ (corolário do lema 2), basta mostrar que se $f : \omega \to \Omega$, $f \in N$ então f não é sobrejetôra. Seja p_0 uma condição que força que $f : \omega \to \Omega$ é função. Seja $n \in \omega$. Consideremos o conjunto $C_n = \{p \in P^\Omega : p \geqslant p_0$ e p força algum valor para $f(n)\}$ Seja I_n uma subfamília de C_n maximal em relação à incompatiblidade dois a dois de seus elementos. Pelo lema $|I_n| < \Omega$. Seja

$\xi_n = \max(\sup\{f(n) : f(n)$ forçado por algum p de $I_n\}, \xi_{n-1})$

onde faz-se a convenção que $\xi_{-1} = 0$. Então, como Ω é inacessível $\xi_n < \Omega$. Desta maneira se consegue uma sequência $\xi_0 \leq \xi_1 \leq \ldots \leq \xi_n \leq \ldots$. De Ω inacessível segue que $\xi = \sup_{n\in\omega} \xi_n < \Omega$. Então existe α, $\xi < \alpha < \Omega$ que não é atingido pela f.

(para maior formalização confrontar com a demonstração do lema 4 abaixo)

Seja $G^\lambda = G \cap P^\lambda$. Claramente $P^\Omega \cong P^\lambda \times R^\lambda$ onde $R^\lambda = \{f \in P^\Omega : \text{dom}f \cap \alpha\times\omega = \emptyset\}$. Logo, pelo lema 3 da subseção A, $G = G^\lambda \times G'$ onde G^λ é filtro M-genérico em P^λ e G' é um filtro $M[G^\lambda]$-genérico em R^λ.

LEMA 4: Seja $f \in N$ uma função, $f : \omega \to \mathbf{OR}$. Então para algum $\xi < \Omega$, $f \in M[G^\xi]$.

Dem:

Seja $\phi(x,y)$ uma fórmula de $\mathcal{L}_M(G)$ tal que

$$f = \{\langle x,y\rangle : N \models \phi(x,y)\}.$$

Seja $p_0 \in G$ tal que $p_0 \Vdash$ "$\{\langle x,y\rangle : \phi(x,y)\}$ é função de ω em $\mathbf{OR}$"

Seja $n \in \omega$; dizemos que $p \geqslant p_0$ decide o valor de f(n) se para algum ordinal λ de M $p \Vdash \phi(\underline{n}, \underline{\lambda})$. Como p extende p_0 e p_0 força que f é função, o ordinal λ fica univocamente determinado por p e n. Mas $f \in N$.

$p_0 \in G$ e $OR^M = OR^N$, logo para todo $n \in \omega$, existe $p \in G$ que decide $f(n)$. Seja

$$C_n = \{ p \in P^{\Omega} : p \geq p_0 \text{ e } p \text{ decide } f(n) \}$$

Seja I_n uma subfamília de C_n maximal em relação à incompatibilidade dois a dois de sus elementos. Pelo lema3 existe $\xi_n < \Omega$ tal que $I_n \subseteq P^{\xi_n}$. Seja $\xi = \sup \xi_n$. Então $\forall n \in \omega$ $I_n \subseteq P^{\xi}$. Para todo $p \in I_n$, p extende p_0 e portanto $p_0 \in P^{\xi}$. Mostraremos que se $n \in \omega$ então existe $q \in G^{\xi}$ tal que q decide $f(n)$. De fato, seja $X_n \subseteq P^{\Omega}$ tal que $p \in X_n$ se e só se:

(1) p é incompatível com p_0

(2) Se p é compatível com p_0 então $p \geq p_0$

(3) Se $p \geq p_0$ então p decide $f(n)$

(4) Se $p \geq p_0$ então $p \geq q$ para algum $q \in I_n$

Veremos agora que X_n é denso em P^{Ω}:

$(1)_d$ $p' \geq p \in X_n \longrightarrow p' \in X_n$ trivialmente

$(2)_d$ Seja $p \in P^{\Omega}$. Se p é incompatível com p_0 então $p \in X_n$. Se p é compatível com p_0, seja $p_1 \geq p, p_0$. Como $p_1 \geq p_0$, existe $p_2 \geq p_1$ tal que p_2 decide $f(n)$, logo $p_2 \in C_n$. Da maximalidade de I_n sai que existe $p_3 \in I_n$ compatível com p_2. Seja $p_4 \geq p_3, p_2$. Então $p_4 \geq p_0$, $p_4 \geq p_2$, ou seja, p_4 decide $f(n)$, $p_4 \geq p_3 \in I_n$ e portanto $p_4 \in X_n$, $p_4 \geq p$.

Como $X_n \in M$ e G é um filtro M-genérico em P^{Ω}, existe $p \in G \cap X_n$. Como $p_0 \in G$, p e p_0 são compatíveis. Então (2) acarreta $p \geq p_0$. (4) acarreta que existe $q \in I_n$, $p \geq q$, e portanto $q \in G$. Como $I_n \subseteq P^{\xi}$ segue que $q \in G^{\xi}$ e por definição q decide $f(n)$. Ou seja, para todo n (determina-se I_n e X_n) existe um $q \in G^{\xi}$ tal que q decide $f(n)$. POrtanto temos que $f = \{ \langle n, \lambda \rangle : \exists q \in G^{\xi} \, (q \Vdash \phi(\underline{n}, \underline{\lambda})) \}$ ou seja, $f \in M[G^{\xi}]$.

COROLÁRIO: Seja $s \in N$ um subconjunto de ω. Então $s \in M[G^{\xi}]$ para algum $\xi < \Omega$

Dem: A função característica de s é equiconstrutível com s.

LEMA5: Sejam M um modêlo transitivo e enumerável, $P \in M$ um conjunto de condições. Seja $\Omega \in M$ tal que

$M \models$ "Ω é fortemente inacessível e a cardinalidade de P é menor que Ω"

Seja G um filtro M-genérico em P. Então Ω é fortemente inacessível em $M[G]$.

Dem: (i) $OR^M = OR^{M[G]}$. Logo se $A \subseteq \Omega$ em $M[G]$ então $A \subseteq \Omega$ em M.

Então o supA em $M[G]$ é o mesmo que em M e portanto menor do que Ω pois Ω é fortemente inacessível em M

(ii) Seja $\aleph_\lambda < \Omega$ em $M[G]$. Para que Ω seja fortemente inacessível em $M[G]$ é necessário que $(2^{\aleph_\lambda})^{M[G]} < \Omega$. Não faremos a demonstração completa. Daremos um esbôço da demonstração.

Pensemos em $\mathcal{P}(\aleph_\lambda)$ como um conjunto de denotações de têrmos(que expressam os subconjuntos de $\aleph_\lambda$).

Primeiro demonstra-se que se o pôsto de tais têrmos forem todos menores do que algum $\alpha < \Omega$ então $(2^{\aleph_\lambda})^{M[G]} < \Omega$ (aqui se usa inclusive o ítem (i)).

Depois, utilizando o teorema de Löwenheim-Skolem e o fato de que $|P| < \Omega$, demonstra-se que, para cada têrmos cuja denotação é um subconjunto de $\aleph_\lambda$ existe um têrmo, com mesma denotação, talque o seu pôsto é menor do que um certo $\alpha < \Omega$ (sendo que se encontra um α que limita o pôsto de todos os têrmos).

Isto, então, termina a demonstração.

COROLÁRIO: Seja $s \in N$ um subconjunto de ω. Então Ω é inacessível em $M[s]$. O conjunto $A_s = \{t \subseteq \omega : t \in M[s]\}$ é enumerável em N.

Dem: Pelo corolário do lema 4 existe $\xi < \Omega$ tal que $s \in M[G^\xi]$. Portanto $M[s] \subseteq M[G]$. Do lema (5), Ω é inacessível em $M[G^\xi]$, a fortiori Ω é inacessível em $M[s]$. Seja α a cardinalidade de A_s em $M[s]$. Ω inacessível e $\Omega = \aleph_1^N$ implica em que $\omega < \Omega$ e portanto $\alpha < \Omega$. Mas então α é enumerável em N;

Seja Π uma permutação de ω, $\Pi \in M$. Definamos $\Pi_* : P^\Omega \to P^\Omega$ por $\Pi_*(h)(\langle\alpha, n\rangle) = h(\langle\alpha, \Pi(n)\rangle)$.

Então Π_* é um automorfismo de P^Ω, $\Pi_* \in M$.

(de $\Pi_*(h) = \{\langle\alpha, \Pi^{-1}(n), \beta\rangle : \langle\alpha, n, \beta\rangle \in h\}$ é fácil ver que Π_* é bijetora e que preserva a ordem)

Assim, pelo lema 1-A, se G é um filtro M-genérico em P^Ω então $\Pi_*(G)$ também o é e $M[G] = M[\Pi_*(G)]$.

Seja ϕ uma fórmula de $\mathcal{L}_M(G)$ não envolvendo G. Mostraremos que $p \Vdash \phi$ se e só se $\Pi_*(p) \Vdash \phi$, resultado que fica claro a partir da seguinte cadeia de proposições equivalentes:

(1) $p \Vdash \phi$

(2) $\forall$ G filtro M-genérico em P^{Ω} com $p \in G$ tem-se $M[G] \models \phi$

(3) Como ϕ não envolve G e $M[G] = M[\Pi_*(G)]$ segue que $\forall$ G filtro M-genérico em P^{Ω} com $p \in G$ tem-se $M[\Pi_*(G)] \models \phi$

(4) Π_* é automorfismo, logo $\forall$ $\Pi_*(G)$ filtro M-genérico em P^{Ω} com $\Pi_*(p) \in \Pi_*(G)$ tem-se $M[\Pi_*(G)] \models \phi$

(5) $\Pi_*(p) \Vdash \phi$

(observe-se que G é filtro M-genérico se e só se $\Pi_*(G)$ o é, e que $p \in G$ se e só se $\Pi_*(p) \in \Pi_*(G)$)

LEMA6: Seja ϕ uma sentença de $\mathcal{L}_M(G)$ não envolvendo G. Seja O o elemento minimal de P^{Ω}. Então O decide ϕ.

Dem: Suponhamos que não. Então existem $p_1, p_2 \in P^{\Omega}$ tais que $p_1 \Vdash \phi$ e $p_2 \Vdash \neg\phi$. Podemo achar uma permutação Π de ω talque p_1 e $\Pi_*(p_2)$ tenham domínios disjuntos. Pelos visto antes, $p_2 \Vdash \neg\phi$ se e so se $\Pi_*(p_2) \Vdash \neg\phi$. Mas p_1 e $\Pi_*(p_2)$ são compatíveis pois têm domínios disjuntos e, como $p_1 \Vdash \phi$ e $\Pi_*(p_2) \Vdash \neg\phi$ temos também que p_1 e $\Pi_*(p_2)$ são incompatíveis. Esta contradição prova a tese.

C - Um teorema importante:

Será o objetivo desta subseção demonstrar o seguinte

TEOREMA1: Seja $f : \omega \to OR$, $f \in N$. Então existe um filtro $M[f]$-genérico G' em P^{Ω} tal que $N = M[f][G']$.

COROLÁRIO: Seja $s \subseteq \omega$, $s \in N$. Então existe um filtro $M[s]$-genérico G' em P talque $N = M[s][G']$.

Dem: s e a função característica de s são equiconstrutíveis.

Na verdade o que usaremos nos resultados finais é êste corolário. É êle que permite ampliar o modêlo de base a um modêlo que contém o real s.

LEMA2: Seja α um ordinal de M. Seja β o cardinal de α em M. Seja

$F : \omega \to \alpha$ uma função colapsante M-genérica. Então exite uma função colapsante M-genérica $G : \omega \to \beta$ tal que $M[F] = M[G]$. Vale a recíproca.

Dem: Seja $\Psi : \alpha \to \beta$ uma bijeção, $\Psi \in M$; façamos $\Psi^* : P_\alpha \to P_\beta$, $\Psi^*(f) = \{\langle n, \Psi(\lambda)\rangle : \langle n, \lambda\rangle \in f\}$. Ψ^* é uma bijeção que preserva a ordem. O lema segue agora do lema 1-A.

LEMA 3: Seja α um ordinal. Seja $F : \omega \to \alpha$ uma função colapsante M-genérica. Define-se $F_1, F_2 : \omega \to \alpha$ por:

$$F_1(n) = F(2n) \quad ; \quad F_2(n) = F(2n+1) .$$

Então F_1 e F_2 são funções colapsantes M-genérica e $M[F_1]$-genérica respectivamente. Recìprocamente, sejam $F_1, F_2 : \omega \to \alpha$ funções colapsantes M-genérica e $M[F_1]$-genérica respectivamente. Se definimos $F : \omega \to \alpha$ por

$$F(2n) = F_1(n) \quad ; \quad F(2n+1) = F_2(n)$$

então F é função colapsante M-genérica. Nos dois casos temos

$$M[F] = M[F_1, F_2] = M[F_1][F_2] .$$

Dem: Seja $\Psi : P_\alpha \to P_\alpha \times P_\alpha$ uma bijeção definida por

$$\Psi(h) = \langle h_1, h_2\rangle \quad \text{com} \quad h_1(n) = h(2n) \ \text{e} \ h_2(n) = h(2n+1) .$$

Seja G o filtro M-genérico em P_α associado a F. Então pelo lema 1-A, $\Psi(G)$ é um filtro M-genérico em $P_\alpha \times P_\alpha$. Pelo lema 3-A $\Psi(G) = G_1 \times G_2$ onde G_1 é um filtro M-genérico em P_α e G_2 é um filtro $M[G_1]$-genérico em P_α. Da definição de Ψ fica claro que

$$\bigcup G_1 = F_1 \quad \text{e} \quad \bigcup G_2 = F_2 .$$

Recìprocamente, sejam G_1 e G_2 associados a F_1 e F_2 respectivamente. Então pelo lema 3-A $G_1 \times G_2$ é M-genérico em $P_\alpha \times P_\alpha$. Definimos a bijeção $\varphi : P_\alpha \times P_\alpha \to P_\alpha$ por

$$\varphi(\langle h_1, h_2\rangle) = h , \quad \text{onde} \quad h(2n) = h_1(n) \ \text{e} \ h(2n+1) = h_2(n) .$$

Então $\varphi = \Psi^{-1}$ e $\varphi(G_1 \times G_2)$ é um filtro M-genérico em P_α. Novamente fica claro que $\bigcup \varphi(G_1\ G_2) = F$.

Como vimos F e $\langle F_1, F_2\rangle$ são equiconstrutíveis e portanto $M[F] = M[F_1, F_2]$. A última igualdade é decorrência do lema 3-A.

LEMA 4: Seja α um ordinal, $\alpha \geq \omega$, $\alpha \in M$. Seja G um filtro M-genérico em $P^{\alpha+1}$. Então existe uma função colapsante M-genérica $F : \omega \to \alpha$

tal que $M[G] = M[F]$. Reciprocamente, se $F : \omega \to \alpha$ é uma função colapsante M-genérica então existe um filtro M-genérico G em $P^{\alpha+1}$ tal que $M[G] = M[F]$.

Dem: Primeiramenteprovaremos o lema supondo que α é enumerável em M. Depois faremos o caso geral.

Sendo α enumerável existe uma bijeção $\Psi : \omega \to ((\alpha+1)-\{0\}) \times \omega$ $\Psi \in M$ e tal que $\Psi(2n) = \langle \alpha, n \rangle$. Seja $\varphi(n)$ a primeira componente de $\Psi(n)$. Então $\varphi : \omega \to (\alpha+1) - \{0\}$ e $\varphi(2n) = \alpha \ \forall n \in \omega$.

Seja P' a coleção de funções tais que $h \in P'$ se e só se $\mathrm{dom} f \subseteq \omega$, contradomínio de $h \subseteq \alpha$, $|h|$ é finito e $h(n) < \varphi(n)$ (onde fizer sentido) P' ordenado por inclusão.

Seja $f \in P^{\alpha+1}$; a função que estabelece a seguinte correspondência: $f \mapsto f \circ \Psi$, tem para contradomínio P'. Trivialmente esta função é injetora e preserva a ordem. Também é sobrejetora pois se $h \in P'$, $f = h \circ \Psi^{-1}$ é claramente a contraimagem de h.

Seja P" o seguinte subconjunto de P':

$h \in P''$ se e só se $h \in P'$ e $\forall n \in \omega (2n \in \mathrm{dom} h \to 2n+1 \in \mathrm{dom} h)$.

É claro que P" é cofinal em P'. Vamos estabelecer uma bijeção de P" com P_α em M. Para tanto, seja:

$$S = \{\langle \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \rangle : \gamma_2 < \gamma_1 \leq \alpha \ \text{ e } \ \gamma_3 < \alpha\}$$

Seja $\Psi' : S \to \alpha$, $\Psi' \in M$ tal que (1) $\langle \gamma_2, \gamma_3 \rangle \mapsto \Psi'(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ é uma bijeção de $\gamma_1 \times \alpha$ com α sempre que $0 < \gamma_1 \leq \alpha$. Definimos $\Psi'' : P'' \to P_\alpha$ por $\Psi''(h) : D \subseteq \omega \to \alpha$ onde $D = \{m \in \omega : 2m, 2m+1 \in \mathrm{dom} h\}$ e $\Psi''(h)(m) = \Psi'(\varphi(2m+1), h(2m+1), h(2m))$

Da bijeção (1) sai que Ψ'' é uma bijeção. Que Ψ'' preserva a ordem é fácil ver. Assim temos os seguintes resultados:

- Se G é um filtro M-genérico em $P^{\alpha+1}$, pelo lema 1-A e o visto acima, existe um filtro M-genérico em P' tal que $M[G] = M[G']$.
- P" é cofinal em P'. Portanto, pelo lema 2-A $M[G'] = M[G' \cap P'']$. Novamente pelo lema 1-A existe G" filtro M-genérico em P_α tal que $M[G' \cap P''] = M[G'']$.
- Tomando finalmente $F = \bigcup G''$ vemos que $M[G] = M[F]$, ou seja, fica demonstrado o lema para o caso α enumerável.

Passemos agora ao caso geral. Seja G um filtro M-genérico em $P^{\alpha+1}$.
$P^{\alpha+1} \subseteq {}^{(\alpha+1)\times\omega}\alpha$ (pois $\forall f \in P^{\alpha+1}$, $f(\langle\beta,n\rangle) < \beta$ onde fizer sentido), mas ${}^{(\alpha+1)\times\omega}\alpha \cong {}^{\alpha\times\omega+\{\alpha\}\times\omega}\alpha \cong {}^{\alpha\times\omega}\alpha \times {}^{\omega}\alpha$
(um isomorfismo natural levaria $f \in {}^{(\alpha+1)\times\omega}\alpha$ no par $\langle f|_{\alpha\times\omega}, g\rangle$ onde g é obtida de $f|_{\{\alpha\}\times\omega}$ da maneira natural, ouseja, $g(n) = f(\langle\alpha,n\rangle))$.

Assim temos um isomorfismo $P^{\alpha+1} \cong P_\alpha \times P^\alpha$. Pelo lema 3-A e pelo visto sôbre funções colapsantes genéricas, existe uma função colapsante M-genérica $F_1 : \omega \longrightarrow \alpha$ e um filtro $M[F_1]$-genérico G_1 em P^α tal que

$$M[G] = M[F_1][G_1]$$

Pelo lema 3-C existem $F_2, F_3 : \omega \longrightarrow \alpha$ funções colapsantes M e $M[F_2]$-genéricas respectivamente com

$$M[F_1] = M[F_2][F_3] \quad , \text{ ou seja}$$
$$M[G] = M[F_2][F_3][G_1]$$

Usando novamente o isomorfismo $P^{\alpha+1} \cong P_\alpha \times P^\alpha$ e o lema 3-A na recíproca, encontra-se um filtro $M[F_2]$-genérico G_2 em $P^{\alpha+1}$ e

$$M[G] = M[F_2][G_2] \quad .$$

F_2 é função colapsante e portanto α é enumerável em $M[F_2]$. Pelo caso particular visto antes existe uma função colapsante $M[F_2]$-genérica $F_4 : \omega \longrightarrow \alpha$ tal que

$$M[G] = M[F_2][G_2] = M[F_2][F_4] \quad .$$

Novamente o lema 3-C nos permite juntar F_2 e F_4 numa única função colapsante M-genérica $F : \omega \longrightarrow \alpha$ tal que

$$M[G] = M[F_2][F_4] = M[F]$$

A recíproca se prova anàlogamente.

LEMA5: Seja $\alpha \in M$, $\alpha \geq \omega$. Sejam $F_1, F_2 : \omega \longrightarrow \alpha$ funções colapsantes M e $M[F_1]$-genéricas respectivamente. Seja $s \subseteq \mathbf{OR}$, $s \in M[F_1]$. Então existe uma função colapsante $F : \omega \longrightarrow \alpha$ genérica sôbre $M[s]$ com $M[s][F] = M[F_1, F_2]$.

<u>Dem</u>: Começaremos descrevendo um certo subconjunto P_I cofinal em $P_\alpha \times P_\alpha$.
Definimos então:

$\langle h_1,h_2\rangle \in P_1$ se e só se $\mathrm{dom}\, h_1 = \mathrm{dom}\, h_2 = n$ para algum $n \in \omega$

Se $\langle h_1,h_2\rangle \in P_1$, chamaremos $l(\langle h_1,h_2\rangle) = \mathrm{dom}\, h_1$. Seja G' um filtro M-genérico em P_1. Então existe um par de funções $F_1', F_2' : \omega \to \alpha$ (que provém de filtros genéricos em P_α G'_1 e G'_2 tais que $G' = G'_1 \times G'_2$) com $G' = \{\langle F'_1|n, F'_2|n\rangle : n\}$

Fixemos da seguinte maneira uma definição de $s \in M[F_1]$:

$\lambda \in s \longleftrightarrow M[F_1] \models \phi(\underline{\lambda})$ onde ϕ é uma fórmula de $\mathcal{L}_M(F_1)$. Pelo lema 3-A F_1 e F_2 determinam um filtro M-genérico G_1 em $P_\alpha \times P_\alpha$. Seja $G = G_1 \cap P_1$. Pelo lema 2-A G é filtro M-genérico em P_1. Temos:

$$M[G] = M[G_1] = M[F_1][F_2] .$$

Seja Ψ uma fórmula de $\mathcal{L}_M(G)$ tal que

$$M[G] \models \Psi(\underline{\lambda}) \longleftrightarrow M[F_1] \models \phi(\underline{\lambda})$$

(note-se que $s \in M[F_1] \subseteq M[G]$ e portanto tal Ψ existe,; ainda, pode ser do tipo "$M[F_1] \models \phi$" pois F_1 é descritível a partir de G)

Pelo lema 4-A, se $\langle h_1,h_2\rangle, \langle h_1,h_3\rangle \in P_1$ então

$$\langle h_1,h_2\rangle \Vdash \Psi(\underline{\lambda}) \longleftrightarrow \langle h_1,h_3\rangle \Vdash \Psi(\underline{\lambda}) .$$

Trabalharemos em $M[s]$. Definiremos uma sequência de subconjuntos de P_1, $\{A_\alpha\}$ por indução transfinita. A idéia é reunir nos A_α tôdas as condições que, não pertencendo a G, "atrapalham" o fato de que $s = \{\lambda : M[G] \models \Psi(\lambda)\}$

(1) $p \in A_0$ se $p \Vdash \Psi(\underline{\lambda})$ e $\lambda \notin s$ ($\lambda \in \mathrm{On}^M$) ou

$p \Vdash \neg\Psi(\lambda)$ e $\lambda \in s$.

(2) Seja $\alpha = \beta + 1$. $p \in A_\alpha$ se para algum subconjunto denso X de P_1, $X \in M$, tôda extensão de p em X está em A_β.

(3(Seja α ordinal limite. Então $A_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$

Para os $\{A_\alpha\}$ valem os seguintes fatos:

(A1) Se $p \in A_\alpha$ e $p \leq q$ então $q \in A_\alpha$. A demonstração é por indução:

(1) $\alpha = 0$, é trivial

(2) $\alpha = \beta + 1$. Seja $X \subseteq P_1$, $X \in M$, X denso tal que tôda extensão de p em X está em A_β. Mas $q \geq p$ e tôda extensão de q também o é de p e portanto $q \in A_\alpha$.

(3) α ordinal limite. $p \in A_\alpha \to p \in A_\beta$ algum $\beta < \alpha$. Por indução, se $q \geq p$ então $q \in A_\beta \to q \in A_\alpha$.

(A2) Se $\beta < \alpha$ então $A_\beta \subseteq A_\alpha$.

Seja $\alpha = \beta + 1$. Seja $p \in A_\beta$, então por (A1) $\forall q \geq p \; (q \in A_\beta)$. Tomando para conjunto denso o próprio P_1 temos então que $p \in A_\alpha$.

No caso de α ser ordinal limite sai da própria definição de A_α

(A3) Seja $p = \langle h_1, h_2 \rangle$, $q = \langle h_1, h_3 \rangle$ e suponhamos $p, q \in P_1$. Então $p \in A_\alpha$ se e só se $q \in A_\alpha$.

A demonstração é por indução:

(1) $\alpha = 0$ é trivial

(2) $\alpha = \beta + 1$. Suponhamos $p \in A_\alpha$. Sja X um denso de P_1 tal que $\forall p' \geq p$, $p' \in X$ então $p' \in A_\beta$.

Façamos $X' = \{ \langle a,b \rangle \in P_1 : \langle a,b \rangle$ é incompatível com $\langle h_1, h_3 \rangle$ ou $\langle a,b \rangle$ é incompatível com $\langle h_1, h_2 \rangle$ ou $\langle a,b \rangle \geq \langle h_1, h_3 \rangle$ e $\exists \langle a,b' \rangle \in X (\langle a,b' \rangle \geq p)$

Mostramos a seguir que X' é denso em P_1:

$(1)_d$ Se $\langle a,b \rangle \in X'$ e $\langle a_1, b_1 \rangle \geq \langle a,b \rangle$ o único caso a examinar é $\langle a,b \rangle \geq \langle h_1, h_3 \rangle$. Neste caso $\langle a_1, b_1 \rangle \geq \langle h_1, h_3 \rangle$. Se $\langle a,b' \rangle \in X$ e $\langle a,b' \rangle \geq p$ então $\langle a_1, b' \rangle \geq \langle a,b' \rangle$ e portanto $\langle a_1, b' \rangle \in X$ e $\langle a_1, b' \rangle \geq p$. Logo $\langle a_1, b_1 \rangle \in X'$.

$(2)_d$ Seja $\langle a,b \rangle \in P_1$. Se $\langle a,b \rangle$ é incompatível com p ou q então $\langle a,b \rangle \in X'$. Suponhamos então que $\langle a,b \rangle$ é compatível com p e q. Portanto existe $\langle a_1, b_1 \rangle$ tal que $\langle a_1, b_1 \rangle \geq \langle a,b \rangle$, $\langle h_1, h_3 \rangle$ e existe b_2 tal que $\langle a_1, b_2 \rangle \geq \langle a,b \rangle$, $\langle h_1, h_2 \rangle$.

X é denso. Seja então $\langle a_1', b_2' \rangle \in X$ com $\langle a_1', b_2' \rangle \geq \langle a_1, b_2 \rangle$. É claro que $\langle a_1', b_1 \rangle \geq \langle h_1, h_3 \rangle$, $\langle a_1', b_2' \rangle \geq \langle h_1, h_2 \rangle$ e $\langle a_1', b_2' \rangle \in X$. Como $\langle a_1', b_1 \rangle \geq \langle a,b \rangle$ e $\langle a_1', b_1 \rangle \in X'$ vale também para X' a segunda condição de conjunto denso.

Seja agora $q' \geq q$, $q' \in X$, $q' = \langle a,b \rangle$. Então existe $\langle a,b' \rangle \in X$, $\langle a,b' \rangle \geq p$. Portanto por hipótese (ver (2) acima) $\langle a,b' \rangle \in A_\beta$. Por hipótese de indução temos que $\langle a,b' \rangle \in A_\beta \longleftrightarrow \langle a,b \rangle \in A_\beta$ ou seja, tôda extensão q' $(= \langle a,b \rangle)$ de q em X pertence a A . Mostramos assim que $q \in A_\alpha$.

A recíproca é igual.

Como P_1 é conjunto de M, $M[s]$ é modêlo de ZF e $OR^{M[s]}$ é classe em $M[s]$, existe um ordinal δ tal que $A_\delta = A_{\delta+1}$.

Por fim definiremos um conjunto Σ tal que $G \subset \Sigma$ e tal que nenhuma condição "má" em relação a s esteja em Σ:

$$\Sigma = P_1 - A_\delta$$

A seguir daremos algumas propriedades de Σ.

(Σ1) $G \subseteq \Sigma$

Suponhamos que não. Então existe $p \in G$, $p \in A_\beta$ para algum . Tomemos o menor β para o qual $\exists\, p \in G \cap A_\beta$. Claramente $\beta \neq 0$, pois em $M[G]$ $s = \{\lambda : \Psi(\lambda)\}$. Também é claro que β não é ordinal limite pois êste fato contradiria a sua minimalidade (λ ordinal limite $\longrightarrow A_\lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda} A_\gamma$). Então $\beta = \gamma + 1$. Se $p \in A_\beta$ existe $X \subseteq P_1$, $X \in M$, X denso e tal que $\forall\, p' \geqslant p$, $p' \in X$ se têm que $p' \in A_\gamma$. G é filtro M-genérico portanto existe $q \in G \cap X$. Logo p e q são compatíveis. Seja $p' \geqslant p,q$, $p' \in G$. Mas então $p' \in X$ de onde $p' \in A_\gamma$, o que contradiz a minimalidade de β.

(Σ2) Seja $p \in \Sigma$. Seja X denso de P_1, $X \in M$. Então existe p', $p' \in \Sigma \cap X$ com $p' \geqslant p$.

Como $p \notin A_{\delta+1}$, existe $p' \geqslant p$ tal que $p' \in X$ e $p' \notin A_\delta$ e portanto $p' \in \Sigma \cap X$.

(Σ3) Seja $p \in \Sigma$. Então existe em filtro M-genérico G' em P_1 tal que $p \in G'$ e $s = \{\lambda : M[G'] \models \Psi(\lambda)\}$

Como M é enumerável seja $\{X_i : i \in \omega\}$ uma enumeração dos densos de M. Construimos uma sequência crescente $(p_0, p_1, p_2, \ldots)$ de elementos de Σ tal que $p_0 = p$ e $p_i \in X_{i+1}$, o que é possível por (2).

Fazemos $G' = \{x \in P_1 : \exists\, n\, (x \leqslant p_n)\}$ e G' é filtro M-genérico que satisfaz a propriedade.

(Σ4) Seja $p \in \Sigma$. Seja $q \leqslant p$. Então $q \in \Sigma$

Se $q \notin \Sigma$ então existe α tal que $q \in A_\alpha$ e portanto, como $p \geqslant q$ por (A1) $p \in A_\alpha$.

(Σ5) G é um filtro $M[s]$-genérico em Σ.

Como G é um filtro M-genérico em P_1 e $G \subset \Sigma$, as cláusulas $(1)_f$

e $(2)_f$ da definção de filtro são trivialmente verificadas. Vejamos $(3)_f$
Seja X denso de Σ, $X \in M[s]$. Suponhamos por absurdo que $X \cap G = \emptyset$.

Fixemos uma fórmula de $\mathcal{L}_M(s)$, ϕ_1, que defina X em $M[s]$, ou seja, ϕ_1 tal que

$$M[s] \models \phi_1(x) \longleftrightarrow x = X .$$

Formemos uma Ψ_1 de $\mathcal{L}_M(G')$ (G' e Ψ_1 livres) talque para todo G' filtro M-genérico em P_I se tenha :

$M[G'] \models \Psi_1 \longleftrightarrow$ (1) Se $s' = \{ \lambda \in \mathbf{OR} : M[G'] \models \Psi(\lambda) \}$ então s' é conjnuto e $\exists ! X' \in M[s']$ tal que $\phi_1(X')$

(2) $X' \subseteq \Sigma'$ é denso, onde Σ' é obtido aplicando a definição de Σ dentro de $M[s']$.

(3) $X' \cap G' = \emptyset$.

Pelas nossas hipóteses $M[G] \models \Psi_1$. Seja $p \in G$ tal que $p \Vdash \Psi_1$.
Como $G \subseteq \Sigma$, $p \in \Sigma$. De X denso em Σ sai que existe $q \in X$, $q \geq p$ (logo $q \Vdash \Psi_1$). Seja G' (agora fixo) um filtro M-genérico em P_I tal que $q \in G'$ e

$$s' = \{ \lambda \in \mathbf{OR} : M[G'] \models \Psi(\lambda) \} = s \quad (G' \text{ existe por } (\Sigma 4)).$$

Como $s' = s$, na notação da descrição de Ψ_1 teremos $X' = X$ (pois $X' \in M[s']$, $X \in M[s]$, $M[s'] = M[s]$ e $\phi_1(X') \wedge \phi_1(X) \rightarrow X = X'$) e também $\Sigma' = \Sigma$.
Mas $q \in X \cap G' = X' \cap G' \neq \emptyset$ e portanto Ψ_1 é falso em $M[G']$. O que é absurdo pois já vimos que $q \in G'$ e $q \Vdash \Psi_1$.

Seja P'_α o seguinte subconjunto de P_α, cofinal em P_α :
$h \in P'_\alpha$ se e só se $h \in P_\alpha$ e $\text{dom} h = n$ para algum $n \in \omega$.

($\Sigma 6$) Em $M[s]$, Σ é isomorfo a P'_α.

Trabalharemos dentro de $M[s]$.

Lembramos que se $\langle h_1, h_2 \rangle \in P_1$ então $l(\langle h_1, h_2 \rangle) = \text{dom} h$. Sejam $p \in \Sigma$, $l(p) = k$, $p = \langle h_1, h_2 \rangle$ e

$$S_p = \{ \langle a, b \rangle \in \Sigma : \langle a, b \rangle \geq \langle h_1, h_2 \rangle \text{ e } \text{dom}\, a = k+1 \}$$

$\text{dom} h_1 = \text{dom} h_2$ e $\text{dom}\, a = \text{dom}\, b$, portanto se $\langle a, b \rangle \in S_p$ tem-se

$$a = h_1 \cup \{ \langle k, \beta \rangle \} \quad \text{algum} \quad \beta < \alpha$$
$$b = h_2 \cup \{ \langle k, \gamma \rangle \} \quad \text{algum} \quad \gamma < \alpha$$

Assim $|S_p| = |\alpha \times \alpha| = |\alpha|$ pois $\alpha \geq \omega$. Logo existe ψ_p bijeção de S_p sôbre α. Seja $p \in \Sigma$, $l(p) = n$. Podemos achar $p_i (= p|i \times i)$ $0 \leq i \leq n$ com $p_i \leq p$ e $l(p_i) = i$. Seja $\chi(p) : n \to \alpha$ tal que $\chi(p)(j) = \psi_{p_j}(p_{j+1})$. Desta maneira $\chi : \Sigma \to P'_\alpha$. Vê-se com facilidade que χ é bijetora e que preserva a ordem, o que demonstra $(\Sigma 6)$.

Podemos agora demonstrar o lema 5.

Seja $\chi(G)$ a imagem de G em P'_α. Por $(\Sigma 5)$, $(\Sigma 6)$ e lema 1-A, temos $M[G] = M[s][G] = M[s][\chi(G)]$. Ainda mais, $\chi(G)$ é um filtro $M[s]$-genérico em P'_α. Portanto, se $F = \bigcup \chi(G)$, então F é uma função colapsante $M[s]$-genérica de ω sôbre α. Como temos claramente que

$$M[s][F] = M[s][\chi(G)] = M[G] = M[F_1, F_2]$$

o lema 5 fica demonstrado.

Demonstração do teorema 1-C

TEOREMA1 : Seja $f : \omega \to OR$, $f \in N$. Então existe um filtro $M[f]$-genérico G' em P^Ω tal que $N = M[f][G']$.

Seja G um filtro M-genérico em P^Ω tal que $N = M[G]$. pelo lema 4-B $f \in M[G^\beta]$ para algum $\beta < \Omega$ $(G^\beta = G \cap P^\beta)$. Tomemos $\omega \leq \beta$. Seja $\alpha = \beta + 2$. Sendo $R^\alpha = \{f \in P^\Omega : \operatorname{dom} f \cap (\alpha \times \omega) = \emptyset\}$, temos claramente um isomorfismo $P^\Omega \cong P^\alpha \times R^\alpha$. Então, pelo lema 3-A, $N = M[G^\alpha][G_1]$ onde G^α é filtro M-genérico em P^α e G_1 é um filtro $M[G^\alpha]$-genérico em R^α. Vale também que $P^\alpha \cong P^{\beta+1} \times P_{\beta+1}$ e portanto $M[G^\alpha] = M[G^{\beta+1}][F']$ onde $F' : \omega \to \beta+1$ é função colapsante $M[G^{\beta+1}]$-genérica. Pelo lema 2-C, como $|\beta| = |\beta+1|$, existe $F_2 : \omega \to \beta$ colapsante $M[G^{\beta+1}]$-genérica tal que $M[G^{\beta+1}][F'] = M[G^{\beta+1}][F_2]$.

Do lema 4-C existe $F_1 : \omega \to \beta$ colapsante M-genérica tal que $M[G^{\beta+1}] = M[F_1]$. Logo $M[G^\alpha] = M[F_1][F_2]$, $F_1, F_2 : \omega \to \beta$ M e $M[F_1]$-genéricas respectivamente. Aplicando agora o lema 5-C com f no lugar de s encontra-se uma função colapsante $M[f]$-genérica $F_3 : \omega \to \beta$ tal que $M[f][F_3] = M[F_1][F_2] = M[G^\alpha]$

Pelo lema 4-C existe G'_2, filtro $M[f]$-genérico em $P^{\beta+1}$ tal que $M[f][F_3] = M[f][G'_2]$. Pelo lema 3-C existe G_2 filtro $M[f]$-genérico em P^α

tal que $M[f][G_2'] = M[f][G_2]$. Resumindo:

$$M[f][G_2] = M[f][F_3] = M[G^{\alpha}] \quad \text{e} \quad M[f][G_2][G_1] = N \ ,$$

G_2 $M[f]$- genérico em P^{α} e G_1 $M[G^{\alpha}]$ -genérico em R^{α} .

Pela recíproca do lema 3-A existe G' , filtro $M[f]$-genérico em P^{Ω} ($P^{\Omega} \cong P^{\alpha} \times R^{\alpha}$) tal que

$$M[f][G'] \cong M[f, G_2, G_1] = N$$ c.q.d.

IV - Codificação de borelianos e o conceito de real aleatório

A - Sôbre borelianos

Nesta seção iremos admitir o axioma da escôlha para famílias enumeráveis, bem como os demais axiomas de ZF.

Definição: Código para borelianos:

Seja $\{r_i : i \in \omega\}$ uma enumeração aritmética de $\mathbb{Q}$. Seja $J: \omega \times \omega \to \omega$ tal que $J(\langle a,b\rangle) = 2^a(2b+1)$. Os borelianos podem ser classificados segundo "níveis de complexidade" e desta maneira os colocamos em correspondência com uma sequência de ordinais:

- O nível zero é formado pelos intervalos fechados de extremidades racionais.
- O nível $\xi + 1$ é formado pelas uniões e complementos dos elementos do nível ξ $(\xi \in \mathrm{OR})$.
- Se λ é ordinal limite, o nível λ é união dos níveis precedentes.

Daremos uma definição para código de borelianos por indução no nível de complexidade dos borelianos.

Sendo α função, $\alpha : \omega \to \omega$, diremos que

(1) α codifica $[r_i, r_j]$ se $\alpha(0) \equiv 0(\mathrm{mod}3)$, $\alpha(1) = i$, $\alpha(2) = j$

(2) Suponhamos que α_i codifica B_i, $i \in \omega$; então α codifica a $\bigcup_{i\in\omega} B_i$ se $\alpha(0) \equiv 1(\mathrm{mod}3)$ e $\alpha(J(i,1)) = \alpha_i(1)$.

(3) Suponhamos que β codifica B, $\alpha(0) \equiv 2(\mathrm{mod}3)$ e $\alpha(n+1) = \beta(n)$. Então α codifica o complemento de B.

(4) α codifica B sòmente nas condições de (1) a (3).

Os três lemas abaixo se demonstram por indução nos níveis de complexidade dos borelianos:

LEMA1: Suponhamos que α codifica B_1 e B_2. Então $B_1 = B_2$

LEMA2: Todo boreliano é codificado por algum α.

LEMA3: Todo conjunto codificado por algum α é boreliano.

to de um boreliano B e $\phi(\alpha, m)(x+1) = \phi(\alpha, n)(x)$, ou seja, $\phi(\alpha, n)$ codifica o próprio B.

(continua-se a leitura na observação 1 da mesma página)

to s_0 é a sequência vazia). Definimos uma função $\phi : ({}^{\omega}\omega) \times \omega \longrightarrow {}^{\omega}\omega$

como segue:

(1) $n = 0$ então $\phi(\alpha, n) = \alpha$

(2) $n > 0$, então $s_n \neq \emptyset$. Digamos que o comprimento de s_n é k. Seja s_m o segmento inicial de s_n, de comprimento $k-1$, e seja $\underline{r}$ o último elemento de s_n (é claro que $m < n$).

(2.1) $\phi(\alpha, m)(0) \equiv 0 \pmod 3$. Então $\phi(\alpha, n)$ é a função identicamente nula.

(2.2) $\phi(\alpha, m)(0) \equiv 1 \pmod 3$. Então $\phi(\alpha, n)(x) = \phi(\alpha, m)(J(r, x))$ $(x \in \omega)$

(2.3) $\phi(\alpha, m)(0) \equiv 2 \pmod 3$. Então $\phi(\alpha, n)(x) = \phi(\alpha, m)(x+1)$ $(x \in \omega)$

LEMA 4: Se α codifica um boreliano então para todo n $\phi(\alpha, n)$ codifica um boreliano.

Dem: Por indução em n:

(1) $n = 0$ é trivial

(2) $n > 0$. Seja $m < n$ como na definição acima. Por hipótese de indução $\phi(\alpha, m)$ codifica um boreliano.

(a) Se $\phi(\alpha, m)(0) \equiv 0 \pmod 3$ então $\phi(\alpha, m)$ codifica um intervalo fechado de extremidades racionais e $\phi(\alpha, n) \equiv 0$ codifica o intervalo $[0,0]$.

(b) Se $\phi(\alpha, m)(0) \equiv 1 \pmod 3$ então $\phi(\alpha, m)$ codifica um boreliano do tipo $B = \bigcup_{i \in \omega} B_i$ e $\phi(\alpha, m)(J(r, x)) = \phi(\alpha, n)(x)$, ou seja, $\phi(\alpha, n)$ codifica [redacted] B_n.

Observação 1: no caso (b) os $\phi(\alpha, n)$ com $n \in A_m$ onde m é fixo e $A_m = \{ n \in \omega : \text{o segmento inicial de } s_n \text{ é } s_m \}$ (logo $m < n$), são códigos para todos os B_i tais que $\bigcup B_i$ é codificada por $\phi(\alpha, m)$, como

mostra o seguinte : $n \in A_m \longrightarrow s_n = s_m{}^\frown\langle r_n\rangle$ (s_m concatenado com r_n) para algum $r_n \in \omega$. Logo $\phi(\alpha,n)$ codifica o boreliano B_{r_n}.
E reciprocamente, para cada $i \in \omega$ existe $n_i \in A_m$ tal que $s_{n_i} = s_m{}^\frown\langle i\rangle$ e portanto $\phi(\alpha,n_i)$ codifica B_i.

No caso (c) os $\phi(\alpha,n)$, com $n \in A_m$ são todos iguais, pois independem do último elemento da sequência s_n.

Observação 2 : A observação 1 junto com o caso (a) nos mostram que $\phi(\alpha,.)$ nos permite recuperar os borelianos a partir dos quais B é construído, onde B é o boreliano codificado por α.

TEOREMA5: Existe um predicado Π^1_1, $A_1(\alpha)$ que é equiprovável com o conceito " α codifica um boreliano".

Dem. Seja $\beta : \omega \longrightarrow \omega$. Definimos uma função $\bar{\beta} : \omega \longrightarrow \omega$ por

$$s_{\bar{\beta}(n)} = \langle \beta(0),\ldots,\beta(n-1)\rangle$$

Seja $A_1(\alpha) \equiv (\forall\beta)\exists n\,(\phi(\alpha,\bar{\beta}(n)) = 0)$

Suponhamos que α codifica um borelianos de nível de complexidade ξ_0. Queremos demonstrar então $A_1(\alpha)$. Suponhamos por absurdo que exista $\beta:\omega\to\omega$ tal que $\forall n\in\omega\,(\phi(\alpha,\bar{\beta}(n))) \neq 0$. Da sua definição, vemos que $\bar{\beta}$ é uma função crescente e que se $\phi(\alpha,\bar{\beta}(n))$ codifica um boreliano de nível ξ, $\phi(\alpha,\bar{\beta}(m))$ codifica um boreliano de nível ξ' e $n < m$ então $\xi' < \xi$.

$\forall n \in \omega\,(\phi(\alpha,\bar{\beta}(n))) \neq 0$ significa que $\phi(\alpha,\bar{\beta}(n))$ não codifica intervalos de extremidades racionais (nível 0) para nenhum n. Mas então, se chamar-mos de ξ_n o índice do nível ao qual pertence o boreliano codificado por $\phi(\alpha,\bar{\beta}(n))$, conseguimos uma cadeia decrescente infinita $\xi_0 > \xi_1 > \xi_2 > \ldots$, o que é impossível em presença do axioma da regularidade.

Reciprocamente. Se α não codifica nenhum boreliano podemos construir uma função $\beta:\omega\to\omega$ tal que $\forall n\in\omega\,(\phi(\alpha,\bar{\beta}(n))$ não codifica nenhum boreliano). Definimos por indução:

$$\beta(0) = 0 \quad (\Longrightarrow \phi(\alpha,\bar{\beta}(0)) = \alpha)$$

Suponhamos β definido até n-1 e seja $\beta(n-1)$ tal que

$\phi(\alpha,\bar\beta(n))$ não codifica. Então $\phi(\alpha,\bar\beta(n)) \not\equiv 0(\mathrm{mod}3)$ (porque se não codificaria).

(a) se $\phi(\alpha,\bar\beta(n)) \equiv 1(\mathrm{mod}3)$ então para algum $r \in \omega$ devemos ter $\phi(\alpha,\bar\beta(n))(J(r,x))$, considerada com função em x, não codifica. Seja m tal que $\langle\beta(0),\ldots,\beta(n-1),r\rangle = s_m$. Definimos então β em n :

$\beta(n) = r$ (desta maneira $\bar\beta(n+1) = m$).

(b) se $\phi(\alpha,\bar\beta(n)) \equiv 2(\mathrm{mod}3)$, levando-se em conta o caso (c) da observação 1, basta, por exemplo, fazer $\beta(n) = 0$. (neste caso $\bar\beta(n+1) = m$ onde $s_m = \langle\beta(0),\beta(1),\ldots,\beta(n-1),0\rangle$)

Assim para a função $\beta:\omega\to\omega$ definida acima, $\forall n\in\omega$, $\phi(\alpha,\bar\beta(n))$ não codifica boreliano e portanto $\forall n\in\omega\ (\phi(\alpha,\bar\beta(n)) \neq 0)$ pois se não, para algum n $\phi(\alpha,\bar\beta(n))$ codificaria o intervalo $[0,0]$.

LEMA6 : Seja x um real. Existe um predicado aritmético $A_4(\alpha,\beta,x)$ tal que $A_4(\alpha,\beta,x)$ é verdadeiro se e só se

$\alpha:\omega\to\omega$ codifica um boreliano

$\beta:\omega\to\omega$ é tal que $\beta(n) = 1$ se e só se x pertence ao boreliano codificado por $\phi(\alpha,n)$, $\beta(n)=0$ se e só se x não pertence ao boreliano codificado por $\phi(\alpha,n)$.

<u>Dem</u>: Podemos descreve A_4 como segue:

(1) Suponhamos que $\phi(\alpha,n)(0) \equiv 0(\mathrm{mod}3)$. Seja $\phi(\alpha,n)(1) = i$, $\phi(\alpha,n)(2) = j$. Então $\beta(n) = 1$ se e só se $x \in [r_i,r_j]$

(2) Suponhamos que $\phi(\alpha,n)(0) \equiv 1(\mathrm{mod}3)$. Seja $\langle j\rangle$ a sequência de comprimento 1 cujo único elemento é j. Definimos $\varphi:\omega\to\omega$ por

$\varphi(n,j) = m$ se e só se

$s_m = s_n{}^\frown\langle j\rangle$. Então $\beta(n) = 1$ se e só se para algum j $\beta(\varphi(n,j)) = 1$. (note-se que $\varphi(n,j) > n$)

(3) Suponhamos que $\phi(\alpha,n)(0) \equiv 2(\mathrm{mod}3)$. Então $\beta(n) = 1$ se e só se $\beta(\varphi(n,0)) = 0$.

(4) $\beta(n) = 0$ ou 1 $(\forall n\in\omega)$

Fica claro que o predicado $A_4(\alpha,\beta,x,)$ é aritmético e que se $\gamma:\omega\to\omega$ satisfaz as condições do lema para β então $A_4(\alpha,\gamma,x)$ vale.

Suponhamos agora que x é real, α codifica um boreliano, γ como acima e $\gamma': \omega \to \omega$ é tal qu $A_4(\alpha, \gamma', x)$. Mostraremos que $\gamma' = \gamma$. Suponhamos que não. Então para algum n $\gamma'(n) \neq \gamma(n)$. Digamos que s_n tem comprimento r. Podemos definir uma função $\delta : \omega \to \omega$ com asseguintes propriedade:

(1) $\bar{\delta}(r) = n$

(2) Se $m \geqslant r$ então $\gamma(\bar{\delta}(m)) \neq \gamma'(\bar{\delta}(M))$.

O conhecimento de s_n, junto com o que impõe a condição (1) determina o valor de δ em $\{0,1,\dots,r-1\}$ (ou seja $\delta|\{0,1,\dots,r-1\}$ é tal que $s_n = \langle\delta(0), \delta(1),\dots, \delta(r-1)\rangle$). Definamos δ em $\{r, r+1,\dots\}$ por indução no m da condição (2).

Como para m = r, pelo visto acima, a condição (2) está satisfeita, seja $m \geqslant r$ tal que $\gamma(\bar{\delta}(m)) \neq \gamma'(\bar{\delta}(m))$. Então, em primeiro lugar $\phi(\alpha, \bar{\delta}(m))(0) \not\equiv 0 (\mathrm{mod} 3)$, porque se não, por (1) da definição de A_4 $\gamma(\bar{\delta}(m)) = \gamma'(\bar{\delta}(m))$.

Se $\phi(\alpha, \bar{\delta}(m))(0) \equiv 1(\mathrm{mod}3)$, para ao menos uma extensão s_k de $s_{\bar{\delta}(m)}$, de comprimento m+1 temos $\gamma(k) \neq \gamma'(k)$. Então escolhemos $\delta(m)$ tal que $\bar{\delta}(m+1) = k$ (ou seja, $\delta(m)$ é o último elemento da sequência s_k).

Se $\phi(\alpha, \bar{\delta}(m))(0) \equiv 2(\mathrm{mod}3)$ e $\gamma(\bar{\delta}(m)) \neq \gamma'(\bar{\delta}(m))$ então para tôda extensão de $s_{\bar{\delta}(m)}$, γ e γ' calculados no seu índice serão diferentes, em particular, na notação do último parágrafo, $\gamma(k) \not\equiv \gamma'(k)$ e a definição dada acima para $\delta(m)$ está boa. (ver observação 1, caso(c)).

Portanto $\delta: \omega \to \omega$ assim definida satisfaz (1) e (2) acima. Já vimos que $\gamma(\bar{\delta}(m)) \neq \gamma'(\bar{\delta}(m))$ $\forall m \geqslant r$ implica em $\phi(\alpha, \bar{\delta}(m))(0) \neq 0$ $\forall m \geqslant r$.

Se $\phi(\alpha, \bar{\delta}(m_0))(0) = 0$ para algum $m_0 < r$ então $\phi(\alpha, \bar{\delta}(m))$ seria a função nula para todo $m \geqslant m_0$ pela definição de ϕ. Logo $\forall n(\phi(\alpha, \bar{\delta}(n)) \neq 0)$, ou seja, $A_1(\alpha)$ é falso. Daí sai que α não codifica nenhum boreliano, o que contradiz nossa hipótese. Portanto $\gamma = \gamma'$.

TEOREMA7: Existem predicados Π^1_1 $A_2(\alpha, x)$ e $A_3(\alpha, x)$ que são equiprováveis com os seguintes conceitos:

(1) α codifica um boreliano e $x \in B_\alpha$ (onde B_α é o boreliano codificado por α)

(2) α codifica um boreliano e $x \notin B$.

Dem: Definimos $A_2(\alpha, x)$ como segue:

$$A_2(\alpha, x) \equiv (\forall\beta)(A_4(\alpha,\beta,x) \longrightarrow \beta(0) = 1) \wedge A_1(\alpha)$$

Claramente A_2 é Π^1_1. Sejam α o código de um boreliano, x um real e $\gamma : \omega \to \omega$ como no lema anterior. Então $A_2(\alpha, x)$ vale se e só se $\gamma(0) = 1$. Mas $\gamma(0) = 1$. Ainda mais $\gamma(0) = 1$ se e só se x pertence ao boreliano codificado por $\phi(\alpha, 0)$. Mas $\phi(\alpha, 0) = \alpha$. Portanto $A_2(\alpha, x)$ se e só se α codifica um boreliano e x pertence a êle.

Para A_3 se procede anàlogamente. Definimos:

$$A_3(\alpha, x) \equiv (\forall\beta)(\phi(\alpha,\beta,x) \longrightarrow \beta(0) = 0) \wedge A_1(\alpha).$$

COROLÁRIO: Existem predicados Π^1_1 $A_4(\alpha,\beta)$, $A_5(\alpha,\beta)$ que são equiprováveis aos seguintes conceitos:

(1) $B_\alpha \subseteq B_\beta$

(2) $B_\alpha = B_\beta$

LEMA8: Seja $\phi(\alpha)$ um predicado Π^1_1. Seja M um modêlo transitivo de ZF. Seja $\alpha : \omega \to \omega$ um elemento de M. Então $M \models \phi(\alpha)$ se e só se $\phi(\alpha)$ é um teorema de ZF.

Dem: $\phi(\alpha)$ é predicado Π^1_1 se e só se $\phi(\alpha) = \forall f \Psi(\alpha, f)$ onde as f são funções de ω em ω e Ψ é um predicado aritmético.

Queremos demonstrar assim que $\forall f \Psi(\alpha, f) \longleftrightarrow M \models \forall f \Psi(\alpha, f)$.

A implicação $\to$ é trivial. Para a recíproca basta mostrar que

(1) se $f \in {}^\omega\omega$ então $\chi(\alpha, f) \longrightarrow \exists f_1 \in M$, $M \models \chi(\alpha, f_1)$ (χ aritmético), Com efeito, suponhamos que exista $f \in {}^\omega\omega$ tal que $\neg\Psi(\alpha, f)$. Fazendo $\neg\Psi(\alpha, f) \equiv \chi(a, f)$ e usando o resultado acima se chega a $M \models \exists f \neg\Psi(\alpha, f)$, ou seja, $M \models \neg\forall f \Psi(\alpha, f)$, o que mostra a recíproca

(1) se demonstra por indução no comprimento de χ

Temos duas situações a considerar simultâneamente:

(a) M e N são modêlos transitivos de ZF+ED e $M \subseteq N$

(b) M é um modêlo transitivo de ZF+ED e N é o universo dos conjun -

tos (onde vale AE)

Nota: ED é abreviação para o princípio das escôlhas dependentes, sôbre o qual falaremos adiante. Em particular, um resultado que demonstraremos é que ED é equivalente ao axioma da escôlha para famílias enumeráveis.

TEOREMA9: Sejam M e N como em (a) ou (b) acima. Sejam $\alpha, \beta \in ({}^{\omega}\omega)^M$ e $x \in \mathbb{R}^M$. Então as seguintes proposições valem em M se valerem em N :

(1) α codifica um boreliano

(2) α codifica um boreliano B_α e $x \in B_\alpha$

(3) α, β codificam borelianos e $B_\alpha = B_\beta$

Dem: O caso (a) sai fàcilmente do caso (b). Caso (b) segue do lema 8 e dos teoremas 5 e 7.

Observações: O teorema 9 implica em que a correspondência $B_\alpha^M \longmapsto B_\alpha^N$ é biunívoca entre os borelianos de M e uma certa subcoleção dos borelianos em N (os que têm códigos em M). Esta correspondência possui a seguinte propriedade natural. Seja $M \subseteq N$ modêlos transitivos de ZF+ED. Seja V o universo dos conjuntos. Seja B boreliano em M e seja B_N, B_V os correspondentes borelianos em N e V respectivamente. Então B_V é o boreliano em V correspondente ao boreliano B_N de N.

Algumas vêzes identificaremos os borelianos de M com alguns borelianos de N através desta correspondência. Temporàriamente adotaremos a seguinte notação : se B é boreliano de M, escrevemos B^* para o boreliano correspondente em N.

Definição: Seja C boreliano em N. Dizemos que C é racional sôbre M se $C = B_\alpha^N$ para algum código $\alpha \in M$. Pela parte (2) do teorema 9 o boreliano em M correspondente a C é então $C \cap \mathbb{R}^M$.

A seguir verificaremos que algumas propriedadese operações são preservadas pela função $B \longmapsto B^*$.

LEMA10:

I - (1) As operações booleanas são preservadas.

(2) Seja $\{A_n\}$ uma o sequência de borelianos de M, com $\{A_n\} \in M$.
Então $(\bigcap_n A_n)^* = \bigcap_n A_n^*$, $(\bigcup_n A_n)^* = \bigcup_n A_n^*$

(3) A relação $A \subseteq B$ é preservada.

(4) A relação $A = \emptyset$ é preservada.

Dem: (1) Consideremos por exemplo a interseação. Dados A,B borelianos em M com códigos α e β respectivamente, se constrói fàcilmente de α e β um código γ para $A \cap B$ em M e $A^* \cap B^*$ em N. Logo

$$(A \cap B)^* = A^* \cap B^*$$

(2) Análogo ao (1).

(3) $A \subseteq B \longleftrightarrow A \cup B = B$. Pelo teorema 9 e (1) dêste lema temos (3).

(4) Claro do teorema 9.

II - As seguintes operações ou noções são preservadas:

(1) Interior $(\overset{\circ}{\cdot})$

(2) "Aberto

(3) Fêcho $(\bar{\cdot})$

(4) "Fechado"

(5) "Compacto"

Dem: (1) $A = \overset{\circ}{B} \longleftrightarrow A = \bigcup \{(r,s) : r,s \in Q$ e $(r,s) \subseteq B\}$

(2) A é aberto $\longleftrightarrow A = \overset{\circ}{A}$

(3) $\bar{A} = \mathbb{R} - \overset{\circ}{\overbrace{(\mathbb{R} - A)}}$

(4) A é fechado $\longleftrightarrow A = \bar{A}$

(5) A compacto $\longleftrightarrow A = \bar{A}$ e para algum $N \in \omega$ $A \subseteq [-N,N]$.

III - Sejam $r,s \in \mathbb{R}^M$. Então $(r,s)^* = (r,s)$; $[r,s]^* = [r,s]$;

$\{r\}^* = \{r\}$.

Dem: $(r,s) = \bigcup\{[t,u] : r < t \leq u < s ; t,u \in Q\}$

$[r,s] = \bigcap \{(r-1/n, s+1/n) : n \in \omega\}$

$\{r\} = [r,r]$.

(Note-se que do fato de que $\omega^M = \omega^N$ sai que $Q^M = Q^N$)

IV - Seja μ a medida de Lebesgue. Seja B um boreliano de M. Então $\mu_M(B) = \mu_N(B^*)$, ou seja, medida de Lebesgue em borelianos é uma noção absoluta.

CASO1: B é a união de um número finito de intervalos abertos disjuntos com extremidades racionais.

Digamos $r_1 < s_1 \leq r_2 < s_2 \leq \ldots \leq r_n < s_n$ e $B = \bigcup_{i=1}^{n} (r_i, s_i)$ tanto em M como em N. Então $\mu(B) = \sum_{i=1}^{n} (s_i - r_i)$ que é absoluta.

Claramente existem sòmente uma quantidade enumerável de conjuntos do tipo considerado no caso 1; Seja $\{W_n : n \in \omega\}$ uma enumeração dêstes em M.

CASO2: B compacto:

Temos que $\mu(B) = \inf \{\mu(W_n) : B \subseteq W_n\}$ o que prova que μ é absoluta neste caso.

CASO3: B aberto:

É claro de $\mu(B) = \sup \{\mu(W_n) : W_n \subseteq B\}$

CASO4: B qualquer:

$\mu_M(B) = \sup \{\mu(K) : K \text{ compacto}, K \subseteq B \text{ e } K \text{ racional sôbre } M\} \leq$

$\leq \sup \{\mu(K) : K \text{ compacto}, K \subseteq B^* \text{ e } K \text{ racional sôbre } N\} = \mu_N(B^*)$.

Por outro lado:

$\mu_M(B) = \inf \{\mu(U) : U \text{ aberto}, B \subseteq U \text{ e } U \text{ racional sôbre } M\} \geq$

$\geq \inf \{\mu(U) : U \text{ aberto}, B^* \subseteq U \text{ e } U \text{ racional sôbre } N\} = \mu_N(B^*)$.

Das duas desigualdades sai que $\mu_M(B) = \mu_N(B^*)$

COROLÁRIO: "Conjunto de medida nula" é uma noção absoluta.

B - A noção de real aleatório

Seja $B \in M$. Então é claro que B é uma álgebra de Boole em M se e só se B é uma álgebra de Boole no mundo real. Mas B pode ser completa em M sem ser completa no mundo real, pois podem haver subconjuntos $s \subseteq B$ tais que sups não esteja definido, mas $s \notin M$. Dizemos que B é M-completa se se só se $M \models B$ é completa.

Seja agora $B \in M$ uma álgebra de Boole e $h : B \to 2$ um homomorfismo (não necessàriamente $h \in M$). Dizemos que h é M-completamente aditivo se sempre que $s \subset B$, $s \in M$ e $\sup s$ existe em B então $H(\sup s) = \sup \{h(t) : t \in s\}$

Seja $B \in M$ álgebra de Boole. Seja $\leq$ a ordem usual em B :

$b_1 \leq b_2$ se e só se $b_1 \vee b_2 = b_2$. Seja P o conjunto dos elementos não nulos em B. Munimos P com a ordem $\preccurlyeq$ inversa a $\leq$: $b_1 \preccurlyeq b_2$ se e só se $b_2 \leq b_1$.

LEMA1: Seja $h : B \longrightarrow 2$ um homomorfismo M-completamente aditivo. Então $G = \{ b \in B : \quad h(b) = 1 \}$ é um filtro M-genérico em P. Reciprocamente, se G é um filtro M-genérico em P, existe único homomorfismo $h : B \longrightarrow 2$ tal que $G = \{ b \in B : h(b) = 1 \}$

Dem: Seja $h : B \longrightarrow 2$ um homomorfismo e $G = \{ b \in B : H(b) = 1 \}$. Demonstraremos que G é filtro M-genérico:

$(1)_f$ $b_1, b_2 \in G$ e $h(b_1 \wedge b_2) = h(b_1) \wedge h(b_2) \longrightarrow b_1 \wedge b_2 \in G$. Mas $b_1 \wedge b_2 \leq b_1, b_2 \longrightarrow b_1, b_2 \preccurlyeq b_1 \wedge b_2$.

$(2)_f$ $b_1 \preccurlyeq b_2 \in G \longrightarrow b_1 \geq b_2 \longrightarrow h(b_1) \geq h(b_2)$. Mas $h(b_2) = 1$ e portanto $h(b_1) = 1$.

$(3)_f$ Seja X denso em P, $X \in M$. Mostraremos que $\sup_B(X) = 1_b$.

Suponhamos que não. Então existe $b > 0$ tal que $x \wedge b = 0$, $\forall x \in X$. Mas X é denso, portanto existe $x_0 \in X$, $x_0 \not\succcurlyeq b$, ou seja, $x_0 \leq b$, ou seja $b \wedge x_0 = x_0 \neq 0$ $(0 \notin P)$

Como h é M-completamente aditivo temos $h(x) = 1$ para algum $x \in X$. Portanto $x \in G \cap X$.

Seja $G \subseteq P$ filtro M-genérico. Então, por satisfazer $(1)_f$ e $(2)_f$ da definição de filtro M-genérico, D, na terminologia usual da teoria de álgebras de Boole, é um filtro em B. É conhecido o seguinte fato, para B álgebra de Boole:

"Seja U filtro em B. Então U é ultrafiltro se e só se $\forall b \in B$ se tem que $b \in U$ ou $b^c \in U$."

Seja $b_0 \in B$. Então $X_{b_0} = \{ b \in P : b \leq b_0 \text{ ou } b \wedge b_0 = 0 \}$ é denso em P. Portanto $\forall b_0 \in B$, $X_{b_0} \cap G \neq \emptyset$, o que implica que $\forall b \in B$ $b \in G$ ou $b^c \in G$, ou seja, G é ultrafiltro em B.

Sendo G ultrafiltro, se $h : B \longrightarrow 2$ é a função característica de G então h é homomorfismo. Veremos que h é M-completamente aditivo. Seja $S \subseteq B$, $S \in N$, $\sup S = t_0$. Queremos mostrar que $h(t_0) = \sup \{ h(t) : t \in S \}$

Basta provar para $t_0 = 1_B$, por que se não fôr, substitui-se S por $S \vee \{1_B - t_o\}$. Neste caso temos:

$h(1_B) = h(t_o) \vee h(1_B - t_o) = \sup(\{h(t) : t \in S\} \cup \{h(1_B - t_o)\})$.

Como $\forall t \in S,\ t \leq t_o \longrightarrow h(t) \leq h(t_o)$, $h(1_B - t_o) = (h(t_o))^c$

temos que $\sup(\{h(t) : t \in S\} \cup \{h(1_B - t_o)\}) = \sup\{h(t) : t \in S\} \vee h(1_B - t_o)$

ou seja $h(t_o) \vee h(1_B - t_o) = \sup\{h(t) : t \in S\} \vee h(1_B - t_o)$ onde

$h(1_B - t_o) \wedge \sup\{h(t) : t \in S\} = 0$ $(h(t_o))^c = h(1_B - t_o)$

Logo $h(t_o) = \sup\{h(t) : t \in S\}$

Supomos então $t_o = 1_B$.

Seja $X = \{a \in P : a \leq b$ para algum $b \in S\}$. X é denso em P. Com efeito:

$(1)_d$ $a_2 \not> a_1 \in X \longrightarrow a_2 \leq a_1 \leq b$ algum $b \in S \longrightarrow a \in X$

$(2)_d$ Seja $x \in P$ $(x \neq 0)$. Como $\sup S = 1_B$, $x \wedge t \neq 0$ para algum $t \in S$. Então $x \wedge t \in X$ e $x \not< x \wedge t$.

Sendo X denso em P e $X \in M$ temos que $G \cap X \neq \emptyset$. Logo existe $a \in G$, $b \in S$ com $a \leq b$. Como $h(a) = 1$ temos que $h(b) = 1$. De $b \in S$ e $h(t_o) = 1$ sai que $h(t_o) = \sup\{h(t) : t \in S\}$.

No próximo lema supomos também que B é M-completa.

LEMA2: Seja ϕ uma sentença de $\mathcal{L}_M(G)$ (G livre). Então existe $b_o \in B$ tal que se G é um filtro M-genérico em P e $h : B \longrightarrow 2$ é o homomorfismo associado (lema 1) então $M[G] \models \phi$ se e só se $h(b_o) = 1$. Mais ainda, b_o é univocamente determinado por ϕ.

Dem: Seja $S = \{b \in P : b \Vdash \phi\}$. Como forcing é expressável em M, $S \in M$. Seja $b_o = \sup S$ (com a convenção de $\sup \emptyset = 0$). Se $S = \emptyset$ o lema é claro. Podemos portanto assumir $S \neq \emptyset$. Mostremos que $b_o \Vdash \phi$. Suponhamos que não; então existe $c \in P$ tal que $0 < c \leq b_o$ $(b_o \not< c)$ e $c \Vdash \neg\phi$. Como $b_o = \sup S$, existe $b_1 \in S$ com $b_1 \wedge c \neq \emptyset$. Mas então $c \not< b_1 \wedge c$ e portanto $b_1 \wedge c \Vdash \neg\phi$. Mas $b_1 \Vdash \phi$ pois $b_1 \in S$. Como $b_1 \not< b_1 \wedge c$ teremos também $b_1 \wedge c \Vdash \phi$. Esta contradição mostra que $b_o \Vdash \phi$.

Se $h(b_o) = 1$ então $b_o \in G$ e portanto, como $b_o \Vdash \phi$ temos $M[G] \models \phi$. Reciprocamente, se $M[G] \models \phi$, existe $b_1 \in S \wedge G$. Logo $h(b_1) = 1$ e portanto $h(b_o) = 1$

Mostremos agora a unicidade. Suponhamos que existe b_1 tal que $M[G] \models \phi \longleftrightarrow h(b_1) = 1$, queremos mostrar que $b_1 = b_0$. Se não, seja $b_2 = b_1 \Delta b_0 \neq 0$. Para todo G temos $h(b_0) = h(b_1) =$ valor verdade de ϕ em $M[G]$, portanto $h(b_2) = 0$. Mas $b_2 \neq 0$ implica que existe G filtro M-genérico com $b \in G$ e assim, para o h relativo a êste G teríamos $h(b_2) = 1$, o que é impossível. Logo $b_1 = b_0$.

<u>Definição:</u> Um <u>real</u> x é <u>aleatório sôbre M</u> se êle não pertence a nenhum boreliano de medida nula racional sôbre M.

Note-se que se x é aleatório sôbre M, então $x \notin M$ (Prova: $x \in M \longrightarrow \{x\}$ é boreliano de medida nula racional sôbre M e contendo x).

LEMA3: Quase todos os reais são aleatórios sôbre M. (Com efeito, os reais não aleatórios formam um boreliano de medida nula)

<u>Dem:</u> M enumerável $\longrightarrow (2^{\aleph_0})^M$ enumerável. Assimpodemos enumerar os borelianos de medida nula racionais sôbre M numa sequência $N_0, N_1, \ldots$. Então x é aleatório sôbre M se e só se $x \notin \bigcup_{i \in \omega} N_i$. Mas $\bigcup_{i \in \omega} N_i$ é um boreliano de medida nula.

Seja B_1 a álgebra dos borelianos de M módulo o ideal dos conjuntos de medida nula. Então B_1 é uma álgebra de Boole completa e satisfaz a condição da cadeia enumerável. Ver [2] para demonstrações.

Em B_1 considera-se o conjunto de condições $P = B_1 - \{0\}$. É claro que os elementos de B_1 são classes de equivalência. Dois conjuntos B_1 e B_2 são equivalentes se e só se $b_1 \Delta b_2$ tem medida nula. Se $[b] \in P$ ($[b]$ classe de equivalência de b), pensamos a condição b como dizendo $x \in b$.

A ordem em P é a natural a partir do que já vimos fazendo: $[b] \leq [b']$ se e só se $b' \subseteq b$ quase sempre (ouseja, $b' - b$ tem medida nula).

TEOREMA4: Existe uma correspondência biunívoca canônica entre os reais aleatórios sôbre M e os homomorfismos M-completamente aditivos de B_1.

<u>Dem:</u> Seja h um homomorfismo M-completamente aditivo, $h : B_1 \longrightarrow \{0,1\}$. Façamos:

$$x_h = x = \{ r \in Q : h((r, \infty)) = 1 \}$$

LEMA a : x é um corte de Dedekind à esquerda e irracional em Q.

Dem: (1) $x \neq \emptyset$: Como $h((-\infty,\infty)) = 1$ para algum $n \in \omega$ temos $h((-n,\infty)) = 1$ pois $(-\infty,\infty) = \sup\{(-n,\infty) : n \in \omega\}$. Logo $-n \in \omega$.

(2) $x \neq Q$: Como $h(\emptyset) = 0$ e $\emptyset = \inf\{(n,\infty) : n \in \omega\}$ temos que $h((n,\infty)) = 0$ para algum $n \in \omega$. Logo $n \notin x$.

(3) $r_2, r_1 \in Q$, $r_2 < r_1 \in x \longrightarrow r_2 \in x$: Como $(r_1,\infty) \subseteq (r_2,\infty)$, $h((r_1,\infty)) = 1 \longrightarrow h((r_2,\infty)) = 1$.

(4) x é irracional : Seja $r \in Q$, então $[\{r\}] = [\emptyset]$. Como $\{r\} = \inf\{(r-1/n, r+1/n), : n \in \omega\}$ e $h(\{r\}) = 0$, teremos, para algum $n \in \omega$, $h((r-1/n, r+1/n)) = 0$. Mas então $r - 1/n \in x \longleftrightarrow r + 1/n \in x$ Portanto x não é um corte de Dedekind centrado em r.

LEMA b : Seja A um boreliano racional sôbre M . Então $x \in A$ se e só se $h(A) = 1$.

Dem: Seja $C = \{\alpha : \omega \longrightarrow \omega : \alpha$ codifica algum boreliano $\}$. Seja $\lambda : C \longrightarrow OR$ definido como segue:

(1) Se α codifica pelo caso 1 então $\lambda(\alpha) = 0$

(2) Se α codifica pelo caso 2 então $\lambda(\alpha) = \sup\{\lambda(\alpha_i) + 1\}$

(3) Se α codifica pelo caso 3 então $\lambda(\alpha) = \lambda(\beta) + 1$

(onde usamos as notações que aparecem na definição de código)

Escrevemos λ^M para a relativização de λ a M.

Seja $\alpha \in M$ um código para A. Faremos a demonstração do lema por indução em $\lambda^M(\alpha)$. (Note-se que $\lambda^M(\alpha) \in OR^M \subseteq OR$, e assim a indução é legítima mesmo que $h \notin M$).

1) $\lambda^M(\alpha) = 0$ se e só se A é intervalo de extremidades racionais, digamos $A = [r_i, r_j]$. Então $x \in A \longleftrightarrow h((r_i,\infty)) = 1$ e $h((r_j,\infty)) = 0 \longleftrightarrow h([r_i, r_j]) = 1$.

2) Suponhamos que $A = \bigcup_i A_i$, A_i codificados por α_i. Então $x \in A$ se e só se $x \in A_i$ para algum i. Como $\lambda(\alpha) = \sup\{\lambda(\alpha_i) + 1\}$, por indução $x \in A_i \longleftrightarrow h(A_i) = 1 \longrightarrow h(A) = 1$. Reciprocamente, se $h(A) = 1$, para algum i teremos $h(A_i) = 1$ e então , pela cadeia de equivalências acima $x \in A$.

3) Se $A = B^c$, B codificado por β , temos que $x \in A \longleftrightarrow x \notin B$.

Como $\lambda(\alpha) = \lambda(\beta) + 1$, por indução temos que $x \notin B \Longleftrightarrow h(B) = 0$ $\Longleftrightarrow h(A) = 1$.

Mostremos agora que x é aleatório sôbre M. Seja N um conjunto de medida nula racional sôbre M. Então $x \in N$ se e só se $h([N]) = 1$. Mas $[N] = 0$ em B_1 e portanto $h([N]) = 0$.

Vejamos agora a recíproca do teorema. Seja x aleatório sôbre M. Define-se $h_x : B_1 \longrightarrow \{0,1\}$ por $h_x([A]) = 1$ se e só se $x \in A$ (A racional sôbre M). h_x está bem definido. Com efeito, sejam A_1, A_2 borelianos, racionais sôbre M tais que $[A_1] = [A_2]$. Então $\mu(A_1 \Delta A_2) = 0$, de onde $x \notin A_1 \Delta A_2$. Logo $x \in A_1 \Longleftrightarrow x \in A_2$.

h_x é M-enumeràvelmente aditiva :

$$h(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = 0 \Longleftrightarrow h(A_n) = 0 \ \forall n \Longleftrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} h(A_n) = 0$$

A demonstração de que h_x é M-completamente aditiva é baseada no seguinte lema ([2], pg. 61)

LEMA c : Seja B uma álgebra de Boole completa que satisfaz a condição da cadeia enumerável. Seja $S \subseteq B$. Então S tem um subconjunto enumerável S_0 tal que $\bigvee S = \bigvee S_0$.

Seja $S \subseteq B_1$, $S \in M$. Como h_x é finitamente aditiva $h_x(\bigvee S) \geqslant \bigvee\{h_x(t) : t \in S\}$. Para obter a outra desigualdade, aplicamos o lema c em M para B_1. Seja $S_0 \subseteq S$, S_0 enumerável em M tal que $\bigvee S_0 = \bigvee S$. Como h_x é M-enumeràvelmente aditiva

$$h_x(\bigvee S) = h_x(\bigvee S_0) = \bigvee\{h_x(t) : t \in S_0\} \leq \bigvee\{h_x(t) : t \in S\}$$

Portanto $h_x(\bigvee S) = \bigvee\{h_x(t) : t \in S\}$ e provamos que h_x é M-completamente aditiva.

Seja M, B_1 como até agora. Seja x real aleatório sôbre M e G o filtro associado a x (atravé de h_x) em B_1. É claro que $x \in M[G]$. Mais ainda, lembrando o lema 1-B e o lema b do teorema acima, é claro que se N é um modêlo transitivo de ZF+AE , com $x \in N$ e $M \subseteq N$, então $G \in M$, de onde $M[G] \subseteq N$. Escreveremos, como notação, $M[x]$ para $M[G]$. Então temos que $M[x]$ é o modêlo transitivo minimal de ZF+AE tal que $M[x] \supseteq M$ e $x \in M[x]$

TEOREMA 4: Seja ϕ uma sentença de $\mathcal{L}_M(x)$. Então existe um boreliano A, racional sôbre M tal que para todo x aleatório sôbre M temos:

$$M[x] \models \phi \longleftrightarrow x \in A .$$

<u>Dem</u>: Sejam $h_x : B_1 \longrightarrow 2$ e G_x, o homomorfismo e o filtro respectivamente determinados por x. Como $M[x] = M[G_x]$ e x é expressável em $M[x]$ a partir de B_1 e G_x, podemos achar uma sentença ϕ' de $\mathcal{L}_M(G_x)$ tal que para todo x aleatório sôbre M vale:

$$M[x] \models \phi \longleftrightarrow M[G_x] \models \phi'$$

Pelo lema 2-B existe um elemento $b_0 \in B_1$, não dependendo de x, tal que para todo x aleatório sôbre M vale:

$$M[G_x] \models \phi' \longleftrightarrow h_x(b_0) = 1$$

Seja $\alpha \in {}^{\omega}\omega$ um código para um boreliano em M cuja classe de equivalência é b_0. Seja A o boreliano codificado por α no mundo real. Então, pelo lema b do teorema 4-B

$$h_x(b_0) = 1 \longleftrightarrow x \in A \qquad \text{c.q.d.}$$

V - Demonstração do teoream principal

Seja M um modêlo transitivo enumerável de ZF+AE+"existe um cardinal inacessível". Seja Ω inacessível em M. Seja P^{Ω} como antes. Seja G um filtro M-genérico em P^{Ω}. Fazemos $N = M[G]$. Seja t um real de N.

LEMA1 : Quase todos os reais de N são aleatórios sôbre $M[t]$. Precisamente : existe $B \in N$ tal que

$N \models B$ é boreliano de medida nula e $x \in N \cap \mathbb{R}$ é aleatório sôbre M $\Longleftrightarrow x \notin B$.

Dem: Pelo corolário do lema 4 da seção III-B , $(2^{\aleph_0})^{M[t]}$ é enumerável em N. O resto da demonstração é análogo à demonstração do lema 3 da seção IV-B.

Definição: Um conjunto $x \in N$ é M-$\mathbb{R}$-definível se e só se existe um real $t \in N$, um elemento $y \in M$ e uma fórmula $\phi(v_1,v_2,v_3)$ de $\mathcal{L}_M(G)$ não envolvendo G tal que x é o único $z \in N$ para o qual $N \models \phi(t,y,z)$

LEMA2 : Seja U um conjunto de reais em N que é M-$\mathbb{R}$-definível. Então $N \models U$ é lebesgue-mensurável.

Dem: Fixemos uma fórmula $\phi_1(v_1,v_2,v_3)$, um elemento $x \in M$ e um real t de N tais que para $y \in N$ tenhamos $N \models \phi_1(x,t,y)$ se e só se $y = U$. Usando ϕ_1 construímos uma fórmula $\phi_2(v_1,v_2,v_3)$ tal que para $y \in N$ tenhamos $N \models \phi_2(x,t,y)$ se e só se $y \in U$.

Seja $M_1 = M[t]$. Pelo corolário do lema 5 de seção III-B, Ω é inacessível em M_1. Pelo teorema 1 da seção III-C, existe um filtro M_1-genérico G_1 em P^{Ω} tal que $N = M_1[G_1]$. Façamos $x_1 = \langle x,t\rangle$. Então $x_1 \in M_1$ e existe uma fórmula $\phi_3(v_1,v_2)$ de $\mathcal{L}_{M_1}(G_1)$ não envolvendo G_1 tal que para todo $y \in M$ vale :

$$(1) \qquad N \models \phi_3(x_1,y) \Longleftrightarrow y \in U$$

Todos os resultados (da seção III) que valem para o par $\langle N,M\rangle$ valema também para $\langle N,M_1\rangle$ pois as hipóteses feitas para $\langle N,M\rangle$ também são satisfeitas por $\langle N,M_1\rangle$.

Seja $t \in N$ aleatório sôbre M_1. Pelo teorema 1 de III-C existe um filtro $M_1[t]$-genérico G_t em P^{Ω} tal que:

$$N = M_1[t][G_t] .$$

Ainda pelo corolário do lema 5 de III-B, Ω é inacessível em $M_1[t]$. Pelo lema 6 de III-B, como $\phi_3(v_1,v_2)$ é uma sentença que não envolve G_t, e considerando que N é uma extensão de $M_1[t]$, temos:

$$(2) \qquad N \models \phi_3(x_1,t) \longleftrightarrow 0 \Vdash \phi_3(\underline{x_1},\underline{t})$$

Como forcing é expressável no modêlo de saída, existe uma fórmula $\phi_4(v_1,v_2)$ de $\mathcal{L}$ e um elemento x_2 (que pode ser tomado como $\langle x_1, \Omega\rangle$) tal que :

$$(3) \qquad 0 \Vdash \phi_3(\underline{x_1},\underline{t}) \longleftrightarrow M_1[t] \models \phi_4(x_2,t)$$

Pelo teorema 4 de IV-B existe um boreliano B, racional sôbre M_1 tal que para todo y aleatório sôbre M_1 temos:

$$M_1[y] \models \phi_4(x_2,y) \longleftrightarrow y \in B .$$

Seja B_1 o boreliano de N correspondente a B. Então $B_1 = B \cap N$.

Logo, se $t \in N$ é aleatório sôbre M_1 temos:

$$(4) \qquad M_1[t] \models \phi_4(x_2,t) \longleftrightarrow t \in B_1 .$$

Chamemos de (5) a equivalência $t \in U \longleftrightarrow t \in B_1$ ($\forall t \in N$ aleatório sôbre M_1). (5) é obtido de (1), (2), (3) e (4). Seja $U \Delta B_1$ a diferença simétrica de U e B_1. Então (5) diz que:

$$(6) \qquad U \Delta B_1 \subseteq \{t \in N : t \text{ não é aleatório sôbre } M_1\}$$

Pelo lema 1 desta seção o lado direito de (6) é um boreliano de medida nula. Isto significa que U é lebesgue-mensurável em N.

<u>Definição</u>: Dizemos que x é <u>definível a partir de uma sequência de ordinais</u> (em N) se existe uma $f : \omega \longrightarrow OR$, $f \in N$ e uma fórmula $\phi(v_1,v_2)$ de $\mathcal{L}$ tal que $\forall y \in N$

$$N \models \phi(y,f) \longleftrightarrow y = x .$$

Dizemos que x possui <u>hereditàriamente</u> uma propriedade P se cada membro do seu fêcho transitivo possui a propriedade P.

<u>DEfiniçãodo modêlo</u>: Seja N_1 o conjunto dos elementos hereditàriamente definíveis a partir de uma sequência de ordinais em N.(logo $N_1 \subseteq N$).Se x é hereditàriamente definível a partir de uma sequência de ordinais, diremos que x é HDSON.

LEMA3: N_1 é um modêlo transitivo de ZF. Existe uma fórmula $\phi_0(v_1,v_2)$

de $\mathcal{L}$ tal que para todo $x \in N_1$ existe $f \in N$, $f : \omega \to OR$ e x é o único $y \in N_1$ tal que $N \models \phi_0(y,f)$

Dem: É fácil demonstrar por indução no pôsto dos conjuntos que se x é um conjunto HDSON e $x \subseteq N_1$ então $x \in N_1$. Êste fato será usado abaixo.

Passemos à verificação dos axiomas:

(1) Extensionalidade : Extensionalidade vale em N. $N_1 \subseteq N$, N é transitivo e vale hereditariedade em N_1 logo extensionalidade vale em N_1.

(2) Substituição : formalmente, o esquema de substituição é dado por:

$$\forall x \exists! u \phi(x,y;c_1,\ldots,c_n) \to \forall m \exists! m' \forall y(y \in m' \leftrightarrow \exists x(x \in m \wedge \phi(x,y;c_1,\ldots,c_n)))$$

Seja $\phi(x,y;c_1,\ldots,c_n) \in \mathcal{L}_M(G)$, $m,c_1,\ldots,c_n \in N_1$. Seja

$$m' = \{y \in N_1 : \exists x(x \in m \wedge \phi^{N_1}(x,y;c_1,\ldots,c_n)\}$$

é claro que $m' \subseteq N_1$. Como todos os parâmetros que definem m' são HDSON segue que m' é HDSON. Logo $m' \in N_1$.

(3) Conjunto das Partes:

Seja $u \in N_1$. Então, por raciocínios análogos aos acima temos que

$$\mathcal{P}_u^{N_1} = \{x \in N_1 : x \subseteq u\} \subseteq N_1 \quad \text{e} \quad \mathcal{P}_u^{N_1} \text{ é HDSON , logo } \mathcal{P}_u^{N_1} \in N_1$$

(4) União :

Seja $u \in N_1$. Novamente $\bigcup u \subseteq N_1$, $\bigcup u$ é HDSON.

(5) Infinidade: $\omega \in N_1$

(6) Regularidade: a expressão formal dêste axioma é:

$$\forall x(\exists y(y \in x) \to \exists u(y \in x \wedge \neg\exists z(z \in y \wedge z \in x)))$$

Como $N_1 \subseteq N$ fica claro que se regularidade não valesse em N_1 não valeria em N, que é modêlo de ZF.

Mostraremos que a proposição "todo conjunto de reais é lebesgue mensurável" vale em N_1. Deste maneira teremos provado também que AE não vale em N_1.

N_1 e N são conjuntos e para todo $y \in N_1$ existe $f : \omega \to OR$ tal que y é definível a partir de f. Então é possível definir uma função de N_1 em N que a cada y associa uma f com acima. Seja $\phi_0(v_1,v_2) \in \mathcal{L}$ uma fórmula que descreva tal função. Em particular teremos que

$N \models \phi_0(y,f)$ se e só se $y \in N_1$, $f \in N$, $f : \omega \to OR$ e y é definível a partir de f.

LEMA4 : Todo real de N e tôda sequência de ordinais de N pertence a N_1.

Dem: O lema é bastante claro, não necessitando demonstração explícita.

LEMA5 : Seja $h : \omega \to N_1$, $h \in N$. Então $h \in N_1$.

Dem: Trabalhamos em N. Seja $x \in N_1$. Definimos a seguir a função $\gamma : N_1 \to OR$. Se $x \in N_1$ então $\gamma(x)$ é o menor ordinal λ tal que para algum $f : \omega \to \lambda$ x é o único y tal que $\phi_0(y,f)$.

Seja $\alpha = \sup\{\gamma(h(n)) : n \in \omega\}$. Consideremos uma boa ordem para o conjunto $\{f \in N : f : \omega \to \alpha\}$

Seja $f_n : \omega \to \alpha$ o menor f (com relaão à boa ordem) tal que h(n) é o único y tal que $\phi_0(y,f)$ (h(n) é definido por $\phi_0(f_n,y)$ e f_n é o menor que define h(n)).

Seja $g : \omega \to OR$ tal qeu $g(2^m 3^n) = f_m(n)$ e se $r \neq 2^m 3^n$ então $g(r) = 0$.

Claramente h é definível de $\{f_m : m \in \omega\}$, que por sua vez é definível de g. Logo h é definível de uma sequência de ordinais. Por hipótese $h \subseteq N_1$, logo $h \in N_1$.

LEMA6 : O AE para famílias enumeráveis é equivalente ao princípio ED.

Dem: Seja $X \neq \emptyset$ um conjunto, R uma relação binária em X tal que $(\forall x \in X)(\exists y \in X)(xRy)$. Suponhamos que AE vale. Definamos por indução uma função $h : \omega \to X$ tal que $\forall n \in \omega(h(n)Rh(n+1))$.

$X \neq \emptyset$ seja $x_0 \in X$. Fazemos $h(0) = x_0$.

Seja $X_0 = \{y \in X : x_0 R y\}$. escolhe-se $x_1 \in X_0$ e faz-se $h(1) = x_1$. Suponhamos h definido em $\{0,1,\dots,n\}$. Seja $X_n = \{y \in X : h(n)Ry\}$. Escolhe-se $x_{n+1} \in X_n$ e faz-se $h(n+1) = x_{n+1}$

É claro que h assim definida satisfaz o princípio ED.

Por outro lado sejam $X_0, X_1, \dots, X_n, \dots$ conjuntos não vazios e seja $X = \bigcup_{n \in \omega} X_n$. Suponhamos que vale ED. Definimos uma função escôlha para a família $\{X_n : n \in \omega\}$ através da seguinte relação binária R em X:

Se $x, y \in X$ então xRy se e só se para algum $n \in \omega$ $x \in X_n$ e

$y \in X_{n+1}$. É claro que R satisfaz $(\forall x \in X)(\exists y \in X)(xRy)$. Logo o princípio das escôlhas dependentes afirma a existência de função escôlha como queríamos.

LEMA7 : ED vale em N_1

Dem: Seja $X \neq \emptyset$ um conjunto de N_1 e $R \in N_1$ uma relação binária em X como no lema anterior. AE vale em N logo existe uma $h : \omega \to X$, $h \in N$ tal que $\forall x \in \omega(\langle h(n), h(n+1)\rangle \in R)$. Pelo lema 5 $h \in N_1$. Logo ED vale em N_1.

LEMA8 : Seja $A \in N_1$. Então, em N, A é M-R-definível.

Dem: Podemos supor A função $f : \omega \to OR$, pois se para tôdas tais funções valer o lema e se $A \in N_1$ fôr qualquer então êle é definível a partir de uma $f : \omega \to OR$, que é M-R-definível. Logo A também é M-R-definível.

Seja então $f : \omega \to OR$, $f \in N_1$. Pelo lema III-B-4, $f \in M[G^{\xi}]$ com $\omega \leq \xi < \Omega$ e $\xi = \xi' + 1$. Pelos lemas III-C-4 e III-B-1 existe s real tal que $f \in M[s]$, o que demonstra o lema.

LEMA9 : Em N_1, todo conjunto de reais é Lebesgue-mensurável.

Dem: Seja $A \subseteq \mathbb{R}^{N_1}$, $A \in N_1$. Pelo lema anterior A é M-R-definível em N. Pelo lema 2 desta seção A é lebesgue-mensurável em N. Portanto existem borelianos B e C em N, o último de medida nula, tais que

$$B \triangle A \subseteq C$$

Sejam α_1, α_2 códigos para B e C em N. Trivialmente $\alpha_1, \alpha_2 \in N_1$. Pelo lema 4 desta seção N e N_1 têm os mesmos reais. Pelo teorema IV-A-9 α_1 e α_2 codificam B e C em N_1 também. Claramente $B \triangle A \subseteq C$ vale em N_1. Do lema IV-A-10, C tem medida nula em N_1. Portanto A é lebesgue-mensurável em N_1.

Nesta parte, mostraremos que o axioma da determinação implica na Lebesgue-mensurabilidade de todos os subconjuntos da reta.

No que segue, como usual, ω denota o conjunto dos números naturais; se $n \in \omega$ então $n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$; $n^{\omega} = n \times n \times \ldots$ (produto enumerável).

Daremos, a seguir, várias definições.

Seja n natural e $P \subseteq n^{\omega}$. Chamaremos de $\underline{G_n(P)}$ o seguinte jôgo de dois jogadores I e II: I e II devem construir uma sequência $(x_1, x_2, \ldots)$ com $x_i \in n$, $i \in \omega$, escolhendo alternadamente têrmos consecutivos da sequência. I escolhe os têrmos de índice ímpar e II os de índice par. Cada jogador conhece P, $x_1, \ldots, x_{m-1}$ quando vai escolher x_m. I ganha se $(x_1, x_2, \ldots) \in P$. II ganha se $(x_1, x_2, \ldots) \notin P$.

Uma _estratégia_ para o jogador I no jôgo $G_n(P)$ é uma função φ tal que

$$\varphi : \bigcup_{m=0}^{\infty} \{(x_1, x_2, \ldots, x_{2m}) : x_i \in n\} \longrightarrow n$$

ou, em outra notação:

$$\varphi : \bigcup_{m=0}^{\infty} n^{2m} \longrightarrow n$$

onde fazemos a convenção de $m = 0$ denotar o conjunto vazio, a menos de menção expressa em contrário.

Intuitivamente é uma função que em cada "vez" de I jogar "escolhe" a sua jogada, ou seja, um elemento de n que será o próximo têrmo da sequência.

φ diz-se _estratégia vencedora_ para o jogador I se o jôgo, jogado por I através de φ faz com que a sequência final pertença a P, seja qual fôr a maneira de jogar de II.

É claro que valem definições análogas para estratégia e estratégia vencedora do jogador II em $G_n(P)$.

$G_n(P)$ diz-se _determinado_ se existe uma estratégia vencedora para algum dos jogadores.

Abreviaremos por $\mathcal{A}_n$ a seguinte sentença:

$\mathcal{A}_n$: "Para todo $P \subseteq n^\omega$, $G_n(P)$ é determinado".

Com esta notação $\mathcal{A}_2$ é o axioma da determinação (por extenso: "$\forall P \subseteq \{0,1\}^\omega$, $G_2(P)$ é determinado").

A demonstração do resultado principal proposto nesta parte envolverá um outro jôgo posicional infinito sôbre conjuntos no máximo enumeráveis que definimos a seguir.

Sejam:

(i) M um espaço topológico não vazio no máximo enumerável.

(ii) $S \subseteq M \times M \times \ldots = M^\omega$ não vazio, fechado na topologia produto chamaremos de sequência finita de ordem n permissível às $(m_1, m_2, \ldots m_n)$ com $m_i \in M$ para as quais existe $(s_1, s_2, \ldots) \in S$ tal que $s_1 = m_1$, $s_2 = m_2$, $\ldots$, $s_n = m_n$. Chamaremos de P_n o conjunto de tôdas as sequências permissíveis de ordem n.

Com esta notação, sejam ainda:

(iii) $J : \bigcup_{n=0}^{\omega} P_n \longrightarrow \{I, II\}$

(iv) $\phi : S \longrightarrow \mathbb{R}$.

A quádrupla (M,S,J,ϕ) determina um jôgo $G(\phi)$ de dois jogadores I e II como segue.

I e II devem construir uma sequência de S escolhendo consecutivamente $m_1, m_2, \ldots$ em M, a enésima escolha sendo feita por I se $J(m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}) = I$ e por II se $J(m_1, \ldots, m_{n-1}) = II$ (onde $(m_1, \ldots, m_{n-1})$ é o segmento já construído). O jôgo deve ser levado de maneira a que cada segmento finito construído seja uma sequência permissível. Assim, como S é fechado, a sequência final pertencerá a S. É claro que em cada etapa cada jogador conhece (M,S,J,ϕ) e o segmento construído. No final o jogador II paga ao jogador I o valor de ϕ calculada na sequência obtida no jôgo. É um jôgo mais geral que o anterior $G_n(P)$ (sendo êste um caso particular de $G(\phi)$ como mostraremos mais adiante). Por exemplo, o significado de vencer em $G(\phi)$ é bem diferente do de $G_n(P)$. Em $G(\phi)$ um mesmo jogador, em duas jogadas distintas, pode ganhar mais em uma do que em outra, podendo inclusive haver empate, tudo depende de ϕ e das convenções que forem feitas quanto ao pagamento (por exemplo, se $\phi(m_1,m_2,\ldots) < 0$ quem ganha é II, se $\phi(m_1,m_2,\ldots) > 0$ quem ganha é I. Portanto, apesar de o conceito de <u>estratégia</u> ser o mesmo já dado (simplesmente que J deve ser levado em conta na sua definição), o conceito de <u>determinação</u> de um jôgo $G(\phi)$ é diferente. Assim teremos, sendo

$$A = \left\{\alpha : \bigcup_{n=0}^{\infty} (m_1,\ldots,m_n) \in P_n : J(m_1,\ldots,m_n) = I\right\} \longrightarrow M$$

ou seja, A é o conjunto de estratégias do jogador I

$$B = \left\{\beta : \bigcup_{n=0}^{\infty} (m_1,\ldots,m_n) \in P_n : J(m_1,\ldots,m_n) = II\right\} \longrightarrow M$$

B é o conjunto das estratégias de II,

sendo $\Pi : A \times B \longrightarrow S$ tal que $\Pi(\alpha,\beta)$ é a sequência obtida pelo jôgo $G(\phi)$ onde I joga através de α e II através de β, e sendo ainda $v_\phi : A \times B \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $v_\phi = \phi \circ \Pi$, diremos que o jôgo $G(\phi)$ é <u>determinado</u> quando $\sup_{\alpha \in A} \inf_{\beta \in B} v_\phi(\alpha,\beta) = \inf_{\beta \in B} \sup_{\alpha \in A} v_\phi(\alpha,\beta)$

Para analisar intuitivamente a definição devemos observar que ínfimos para o jogador II e supremos para o jogador I correspondem às suas "melhores jogadas". O jôgo estar determinado significa então que a "melhor jogada" para ambos jogadores está bem determinada, independendo das "particularidades" de cada jôgo (que são levados em conta na mudança de ordem em que as "melhores" estratégias são examinadas).

Abreviaremos por $\mathcal{G}$ a seguinte sentença:

$\mathcal{G}$: "Todo jôgo $G(\phi)$ obtido de (M,S,J,ϕ) como acima é determinado".

Para chegar ao resultado proposto seguiremos o seguinte esquema de teoremas:

1) $\mathcal{A}_2 \longleftrightarrow \mathcal{A}_\omega$

2) $\mathcal{A}_\omega \longleftrightarrow \mathcal{G}$

3) Se existe sub-conjunto de $\mathbb{R}$ não Lebesgue-mensurável então existe $X \subseteq [0,1]$ com $\mu_*(X) = 0$ e $\mu_*(X^c) = 0$ (onde μ_* é a medida interior)

4) $\mathcal{G} \longrightarrow \forall X \subseteq [0,1]$ tem-se $\mu_*(X) > 0$ ou $\mu_*(X^c) > 0$

$\boxed{\leftarrow}$ seja $A \subseteq 2^{\omega}$, vou mostrar que existe $B \subseteq \omega^{\omega}$ tal que $G_{\omega}(B)$ ser determinado implica em $G_2(A)$ ser determinado, ou seja, que a tôda estratégia vencedora de $G_{\omega}(B)$ corresponde naturalmente uma estratégia vencedora de $G_2(A)$.

Seja

$$B = A \cup \{(s_1,s_2,s_3,\ldots) \in \omega^{\omega} : s_{2n} \geq 2 \text{ , } n=1,2,3,\ldots\}$$

$$(B^C)_{\omega} = (A^C)_2 \cup \{(s_1,s_2,s_3,\ldots) \in \omega^{\omega} : s_{2n-1} \geq 2, \ n=1,2,3,\ldots\}$$

onde $(.^C)_{\omega}$ é o $\longrightarrow$ complementar em ω e $(.^C)_2$ é complementar em 2. Como $G_{\omega}(B)$ é determinado, suponhamos que exista σ estratégia vencedora para o jogador I, então:

$$\sigma: \bigcup_{n=0}^{\infty} \{(s_1,s_2,s\ldots,s_{2n}) : s_i \in \omega\} \longrightarrow \omega$$

A partir de σ, teremos que $\sigma' = \sigma \Big| \bigcup_{n=0}^{\infty} \{(s_1,\ldots,s_{2n}) : s_i \in 2\}$ é estratégia vencedora para o jogador I no jôgo $G_2(A)$.

$\boxed{\longrightarrow}$ Seja $B \subseteq \omega^{\omega}$. Seguindo o mesmo princípio vamos determinar um $A \subseteq 2^{\omega}$ tal que $G_2(A)$ determinado $\longrightarrow G_{\omega}(B)$ determinado.

A idéia intuitiva para construir A, é usar os têrmos das sequências de B (que são números naturais) como índices "contadores" de números 1 das sequências de A. Assim devemos "excluir" das possibilidades de escôlha dos jogadores sequências de 2 com infinitos 1 pois só temos os naturais para "contar números 1". Para tanto colocaremos em A o conjunto:

$$P_0 = \{(s_1,s_2,\ldots) \in 2^{\omega} : \exists \text{ finitos } n \in \omega \text{ com } s_{2n} = 0\}$$

e colocaremos no $(A^C)_2$ o conjunto:

$$I_0 = \{(s_1,s_2,\ldots) \in 2^{\omega} : \exists \text{ finitos } n \in \omega \text{ com } s_{2n+1} = 0\}$$

Consideremos agora a função:

$$f: 2^{\omega} - (P_0 \cup I_0) \longrightarrow \omega^{\omega}$$

$$(s_1,s_2,\ldots) \longmapsto (m_1,m_2,\ldots)$$

onde

m_1 é o número de 1 consecutivos nas posições ímpares começando na primeira posição da sequência $(s_1, s_2, \ldots)$ (pensando no jôgo $G_2(A)$ a ser formado, é o número de escolhas 1 consecutivos feitas pelo jogador I).

m_2 é o número de 1 consecutivos nas posições pares a partir do ponto onde tenha aparecido o primeiro zero nas posições ímpares em $(s_1, s_2, \ldots)$

m_3 é o número de 1 consecutivos nas posições ímpares a partir da posição $2(m_1 + m_2) + 2$ que é uma posição correspondente a um zero (pela maneira como m_2 foi escolhido).

m_4 é o número de 1 consecutivos nas posições pares a partir da posição $2(m_1 + m_2 + m_3) + 3$ e assim por diante.

Façamos:

$A = f^{-1}(B) \cup P_0$ e teremos

$(A^C)_2 = f^{-1}((B^C)_\omega) \cup \mathcal{I}$.

seja $\sigma : \bigcup_{n=0}^{\infty} \{(s_1, s_2, \ldots, s_{2n}) : s_i \in 2\} \to 2$ uma estratégia vencedora para o jogador I no jôgo $G_2(A)$.

Teremos que a seguinte função σ' será estratégia vencedora para o jogador I no jôgo $G_\omega(B)$:

$$\sigma' : \bigcup_{n=0}^{\infty} \{(m_1, m_2, \ldots, m_{2n}) : m_i \in \omega\} \longrightarrow \omega$$

tal que $\sigma' = \alpha \circ \beta \circ \gamma$ onde

$$\gamma : \bigcup_{n=0}^{\infty} \{(m_1, m_2, \ldots, m_{2n}) : m_i \in \omega\} \longrightarrow \omega \times \omega^\omega$$

com $\gamma((m_1, \ldots, m_{2n})) = (m, S)$ onde $m = \sum_{i=1}^{2n} 2\, m_i + 2n$

e $S = (s_1', s_2', s_3', \ldots)$ é uma sequência de ω^ω que coincide até o têrmo de índice $2n$ com $(m_1, \ldots, m_{2n})$.

$$\beta : \operatorname{Im} \gamma \longrightarrow \bigcup_{n=0}^{\infty} \{(s_1, s_2, \ldots, s_{2n}) : s_i \in 2\}$$

com $\beta((m, s)) = f^{-1}(s)\big|_m$ onde, se $f^{-1}(s) = (s_1, s_2, s_3, \ldots)$, temos que $f^{-1}(s)\big|_m = (s_1, \ldots, s_m)$

$$\alpha : \operatorname{Im} \beta \longrightarrow \omega$$

$\alpha(f^{-1}(s)\big|_m) = k$ onde k é o menor número inteiro tal que $\sigma(f^{-1}(s)\big|_{m+2k}) = 0$, ou seja, k é o número de 1 consecutivos nas posições ímpares a partir da posição m.

Como σ é estratégia vencedora para o jogador I em $G_2(A)$, as sequências finitas que vão sendo estudadas para se determinar o valor de α calculado nelas, são tais que existe uma sequência de $f^{-1}(B)$ que coincide com elas no seu segmento inicial. Por outro lado α é tal que funciona à maneira de f em cada segmento inicial de uma sequência $f^{-1}(s)\big|_m$ e portanto a sequência final cairá em B, ou seja σ' é estratégia vencedora para o jogador I no jôgo $G_\omega(B)$.

Se $G_2(A)$ fôr tal que exista estratégia vencedora para o jogador II, raciocina-se anàlogamente.

TEOREMA 2 : $\mathcal{A}_\omega \longleftrightarrow \mathcal{G}$

$\boxed{\longleftarrow}$ Esta parte da demonstração é trivial porque $\forall\, P \subseteq \omega^\omega$, $G_\omega(P)$ é um jôgo $G(\phi)$ determinado por (M, S, J, ϕ) onde

$$M = \omega \quad , \quad S = \omega^\omega$$

$$J(s_1, \ldots, s_n) = \begin{cases} \text{I se n fôr par} \\ \text{II se n fôr ímpar} \end{cases}$$

e $\phi : S \longrightarrow \mathbb{R}$ é tal que

$$\phi(s_1, s_2, \ldots) = \begin{cases} 1 \text{ se } (s_1, s_2, \ldots) \in P \\ -1 \text{ se } (s_1, s_2, \ldots) \notin P \end{cases}$$

$\boxed{\longrightarrow}$ Seja dado (M, S, J, ϕ). Para mostrar que $\mathcal{A}_\omega$ implica em que êste jôgo é determinado, basta mostrar que o jôgo (M, S, J, ϕ_r) é determinado $\forall\, r \in \mathbb{R}$, onde ϕ_r é a função característica do conjunto $X_r = \{(s_1, s_2, \ldots) \in S : \phi(s_1, s_2, \ldots) \geq r\}$.

Com efeito, já vimos que o jôgo $G(\phi)$ é determinado se

(1) $\sup_{\alpha \in A} \inf_{\beta \in B} V_\phi(\alpha, \beta) = \inf_{\beta \in B} \sup_{\alpha \in A} V_\phi(\alpha, \beta)$

Temos também que $G(\phi_r)$ é determinado se

(2) $\sup_{\alpha \in A} \inf_{\beta \in B} V_{\phi_r}(\alpha, \beta) = \inf_{\beta \in B} \sup_{\alpha \in A} V_{\phi_r}(\alpha, \beta)$

onde A é o conjunto de estratégias de I, tanto em $G(\phi)$ como em $G(\phi_r)$ (Note-se que uma estratégia só depende de S e J que são os mesmos nos dois jogos)

B é o conjunto de estratégias de II.

Vou mostrar então que (2) $\longrightarrow$ (1).

Sejam $s \in S$, $\alpha \in A$ e $\beta \in B$, então temos que

$$\phi_r(s) = \begin{cases} 1 \text{ se } \phi(s) \geq r \\ 0 \text{ se } \phi(s) < r \end{cases} \qquad (\text{com } r \in \mathbb{R})$$

e

$$V_{\phi_r}(\alpha, \beta) = \phi_r(\pi(\alpha, \beta)) = \begin{cases} 1 \text{ se } \phi(\pi(\alpha, \beta)) = V_\phi(\alpha, \beta) \geq r \\ 0 \text{ se } \phi(\pi(\alpha, \beta)) = V_\phi(\alpha, \beta) < r \end{cases}$$

Portanto $\sup\limits_{\alpha \in A} \inf\limits_{\beta \in B} V_{\phi_r}(\alpha, \beta)$ e $\inf\limits_{\beta \in B} \sup\limits_{\alpha \in A} V_{\phi_r}(\alpha, \beta)$ valem 1 ou 0 $\forall r \in \mathbb{R}$. (3)

Notação: daqui para frente usaremos a seguinte notação:

$$SIr = \sup_{\alpha \in A} \inf_{\beta \in B} V_{\phi_r}(\alpha, \beta)$$

$$ISr = \inf_{\beta \in B} \sup_{\alpha \in A} V_{\phi_r}(\alpha, \beta)$$

$$SI = \sup_{\alpha \in A} \inf_{\beta \in B} V_\phi(\alpha, \beta)$$

$$IS = \inf_{\beta \in B} \sup_{\alpha \in A} V_\phi(\alpha, \beta)$$

Com esta notação, temos o seguinte

LEMA: (i) $SIr = 0 \Longleftrightarrow SI < r$

(ii) $r > k \longrightarrow V_{\phi_k}(\alpha, \beta) \geq V_{\phi_r}(\alpha, \beta) \quad \forall (\alpha, \beta) \in A \times B$

A demonstração é natural levando-se em conta (3).

COROLÁRIO: (i) $SIr = 1 \Longleftrightarrow SI \geq r$

(ii) $r > k \longrightarrow SIk \geq SIr$

e $ISk \geq ISr$

Observação: Anàlogamente vale que $ISr = 1 \Longleftrightarrow IS \geq r$ e $ISr = 0 \Longleftrightarrow IS < r$.

Demonstração de (2) $\longrightarrow$ (1):

Temos como hipótese : $SIr = ISr \quad \forall r \in \mathbb{R}$

Do corolário, parte (ii), segue que existem sòmente três possibilidades:

a) $SIr = 1 \quad \forall r \in \mathbb{R}$

b) $SIr = 0 \quad \forall r \in \mathbb{R}$

c) $\exists\ r_0 \in \mathbb{R}$ tal que $SIr = 1 \quad \forall r \leq r_0$

$$SIr = 0 \quad \forall r > r_0$$

Se a), pelo corolário parte (i) então $SI \geq r \quad \forall r \in \mathbb{R}$ e portanto $SI = +\infty$ e, analogamente, usando a observação $IS = +\infty$, ou seja, $SI = IS$.

Se b), pela parte (i) do corolário teremos $SI < r \quad \forall r \in \mathbb{R} \to SI = -\infty$ e, analogamente, $IS = -\infty \longrightarrow SI = IS$.

Se c), pela parte (i) do corolário teremos $SI \geq r \quad \forall r \geq r_0$ e $SI < r \quad \forall r > r_0$, ou simplesmente $SI \geq r_0$ e $SI \leq r_0$ e portanto $SI = r_0$. Analogamente, $IS = r_0$ e $SI = IS$

Mostremos agora que $\mathcal{A}_\omega \to G(\phi_r) \quad \forall r \in \mathbb{R}$.

Vamos assumir que $J(s_1, \ldots, s_n) = \begin{cases} I \text{ se } n \text{ fôr par} \\ II \text{ se } n \text{ fôr ímpar} \end{cases}$

pois se isso não fôr verdade podemos construir outro jôgo equivalente a $G(\phi_r)$ onde isso valha adicionado-se um elemento μ extra a M e fazendo-se modificações convenientes de S e X_r que forcem os jogadores a escolher μ sempre que não fôr a sua vez de jogar em $G(\phi_r)$.

Como M é no máximo enumerável, seja $f : M \to \omega$ biunívoca.

Seja $(s_1, \ldots, s_n)$ sequência finita permissível de elementos de M, chamaremos

$$T(s_1, \ldots, s_n) = \{ m \in M : \exists (m_1, m_2, \ldots) \in S \text{ com } s_1 = m_1, \ldots, s_n = m_n \text{ e } s_{n+1} = m \}$$

Dado $r \in \mathbb{R}$, vamos construir um $P \subseteq \omega^\omega$ tal que $G_\omega(P)$ determina do $\longrightarrow G(\phi_r)$ determinado.

$$P = \{ (x_1, x_2, \ldots) \in \omega^\omega : (f^{-1}(x_1), f^{-1}(x_2), \ldots) \in X_r \} \cup \{ (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots) \in \omega^\omega : k \text{ é par e } f^{-1}(x_k) \notin T(f^{-1}(x_1), \ldots, f^{-1}(x_{k-1})) \}$$

$$P^C = \{ (x_1, x_2, \ldots) \in \omega^\omega : (f^{-1}(x_1), f^{-1}(x_2), \ldots) \in S - X_r \} \cup \{ (x_1, \ldots, x_k, \ldots) \in \omega^\omega : k \text{ ímpar e } f^{-1}(x_k) \notin T(f^{-1}(x_1), \ldots, f^{-1}(x_{k-1})) \}$$

Como f é biunívoca, $\forall (s_1, s_2, \ldots) \in S$ existe único

$(x_1, x_2, \ldots) \in \omega^\omega$ tal que $(s_1, s_2, \ldots) = (f^{-1}(x_1), f^{-1}(x_2), \ldots)$.

Assim, uma estratégia τ, por exemplo, do jogador II em $G(\phi_r)$ é do tipo:

$$\tau : \bigcup_{n=0}^{\infty} \{(f^{-1}(x_1), \ldots, f^{-1}(x_{2n+1})) \text{ permissível} : x_i \in \omega\} \to M$$

tal que

$(f^{-1}(x_1), \ldots, f^{-1}(x_{2n+1}), \tau(f^{-1}(x_1), \ldots, f^{-1}(x_{2n+1}))$ é permissível e portanto a ela corresponde naturalmente uma estratégia τ' de II em $G_\omega(P)$ pela maneira como P foi determinado.

$$\tau' : \bigcup_{n=0}^{\infty} \{(x_1, \ldots, x_{2n+1}) : x_i \in \omega \text{ e } (f^{-1}(x_1), \ldots, f^{-1}(x_{2n+1})) \text{ permissível}\} \to \omega$$

$$\tau'(x_1, \ldots, x_{2n+1}) = f \circ \tau(f^{-1}(x_1), \ldots, f^{-1}(x_{2n+1}))$$

Note-se que a imposição de $(f^{-1}(x_1), \ldots, f^{-1}(x_{2n+1}))$ ser permissível não tira a generalidade de τ', pois podemos nos restringir às sequências finitas $(x_1, \ldots, x_{2n+1})$ que tenham sido obtidas dentro do jôgo $G_\omega(P)$. E neste caso, a maneira como foram construídos P e P^c exclui sequências $(x_1, \ldots, x_{2n+1})$ (ou mesmo de último índice par) que não sejam do tipo imposto.

Seja agora σ' estratégia vencedora para I em $G_\omega(P)$.

$$\sigma' : \bigcup_{n=0}^{\infty} \{(x_1, \ldots, x_{2n}) : x_i \in \omega\} \to \omega$$

Então, $\forall$ estratégia de II em $G_\omega(P)$, quando I joga através de σ' a sequência final obtida fica em P. A σ' corresponde naturalmente, de maneira análoga à feita anteriormente, uma estratégia σ de II em $G(\phi_r)$:

$$\sigma : \bigcup_{n=0}^{\infty} \{(f^{-1}(x_1), \ldots, f^{-1}(x_{2n})) \text{ permissível} : x_i \in \omega\} \to M$$

tal que $\sigma(f^{-1}(x_1), \ldots, f^{-1}(x_{2n})) = f^{-1} \circ \sigma'(x_1, \ldots, x_{2n})$

Novamente observamos que $f^{-1} \circ \sigma'(x_1, \ldots, x_{2n}) \in T(f^{-1}(x_1), \ldots, f^{-1}(x_{2n}))$ pelas mesmas razões já citadas anteriormente.

Assim, $\forall\ \tau$ estratégia de II em $G(\phi_r)$ se I joga através de σ chegarão ao final a uma sequência $(f^{-1}(x_1), f^{-1}(x_2), \ldots) \in S$ tal que

$(x_1, x_2, \ldots) \in P$ pois σ' é vencedora. E portanto a sequência $(f^{-1}(x_1), f^{-1}(x_2), \ldots) \in X_n$. Isto implica em

$V_\phi(\sigma, \tau) = 1 \quad \forall \tau \in B$ (conjunto de estratégias de II)

$$\longrightarrow \sup_{\alpha \in A} \inf_{\beta \in B} V_\phi(\alpha, \beta) = \inf_{\beta \in B} \sup_{\alpha \in A} V_\phi(\alpha, \beta) = 1$$

TEOREMA 3:

Não faremos aqui a demonstração por ser um resultado da análise.

TEOREMA 4:

$$\mathcal{G} \longrightarrow \forall X \subseteq [0,1] \text{ tem-se } \mu_*(X) > 0 \text{ ou } \mu_*(X^c) > 0.$$

Para demonstrar o teorema vamos construir um jôgo do tipo (M, S, J, ϕ) envolvendo $X \subseteq [0,1]$ de tal maneira que se fôr o jogador I quem vence então $\mu_*(X) > 0$ e se fôr o jogador II o vencedor então $\mu_*(X^c) > 0$.

Seja $(r_1, r_2, r_3, \ldots)$ sequência de números racionais tais que:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} r_n < \infty$ e $1/2 > r_1 > r_2 > \ldots > 0$

Seja B_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ o conjunto formado pelos sub-conjuntos S_k de $[0,1]$ tais que:

(a) S_k é união finita de intervalos fechados $[a,b]$ com a e b racionais.

(b) o diâmetro $\delta(S_k) \leq 1/2^k$

(c) $\mu(S_k) = r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_k$ onde μ indica a medida de Lebesgue

Temos ainda a seguinte convenção:

(d) $B_0 = \{ S_0 = [0,1] \}$

Diremos que uma sequência $S = (S_0, S_1, S_2, \ldots)$ é permissível se $S_i \in B_i$ e $S_{i+1} \subseteq S_i$. A sequência finita $(S_0, S_1, S_2, \ldots, S_k)$ obtida de uma sequência permissível chamaremos <u>sequência finita de ordem K permissível</u> e anotaremos abreviadamente por $S|_K$. O conjunto de tôdas as sequências $S|_K$ será anotado por P_K.

Consideremos o seguinte jôgo entre dois jogadores I e II determinado pelo conjunto $X \subseteq [0,1]$ dado:

II escolhe um conjunto $S_2 \in B_2$ com $S_2 \subsetneq S_1$

I escolhe um conjunto $S_3 \in B_3$ com $S_3 \subsetneq S_2$

e assim por diante até que os jogadores formem uma sequência permissível.

Se $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n \subseteq X$ então I ganha.

Se $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n \subseteq X^c$ então II ganha.

Note-se que por (b) $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ é unitário e portanto exatamente uma das duas inclusões acontece.

Êste é um jôgo do tipo (M, S, J, ϕ) onde

$M = \bigcup_{k=0}^{\infty} B_k$ que é no máximo enumerável por (a)

S é o conjunto de tôdas as sequências permissíveis.

$J(S|_k) = \begin{cases} \text{I} & \text{se } k \text{ é par} \\ \text{II} & \text{se } k \text{ é impar} \end{cases}$

$\phi : S \to \mathbb{R}$ é composta das seguintes funções:

$i : S \longrightarrow [0,1]$ tal que $i(S_0, S_1, \dots) = \bigcap_{k=0}^{\infty} S_k$

e $\chi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in X \\ -1 & \text{se } x \notin X. \end{cases}$

Assim $\mathcal{G}$ implica que I ou II tenha uma estratégia vencedora. Assim, em vista de (1), o teorema segue da seguinte proposição:

(i) Se I tem uma estratégia vencedora então

$$\mu_*(X) \geq r_1 \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2\, r_{2n})$$

(ii) Se II tem uma estratégia vencedora então

$$\mu_*(X^c) \geq \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2 r_{2n-1}).$$

Mesmo sabendo que algum dos jogadores tem uma estratégia vencedora as possibilidades de escôlha nas várias etapas do jôgo são, em princípio, demasiado complexas para se poder fazer afirmações a respeito de suas medidas. Por isso faremos, através de 3 lemas preliminares, restrições na árvore de possibilidades do jôgo. Nos restringiremos à escôlhas que possam ter suas medidas controladas de maneira a que tenhamos ao final em conjunto A tal que se I vence $A \subsetneq X$ e se II vence $A \subsetneq X^c$. Será através de A que poderemos fazer afirmações sôbre a medida de X ou do X^c.

<u>Lema 1</u> : Seja $(S_0, S_1, \dots, S_{n-1}) \in P_{n-1}$ e seja τ uma função de P_n em B_{n+1} tal que $\tau(R|_n) \subseteq R_n$ $\forall R|_n \in P_n$, onde $R|_n = (R_0, R_1, \dots, R_n)$ (em particular τ pode ser uma estratégia). Então $\exists$ uma sequência finita $S_n^1, \dots, S_n^m \in B_n$ com $S_n^i \subseteq S_{n-1}$ tal que

$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{m} \tau(S_0, \dots, S_{n-1}, S_n^i) \right) \geqslant$

$\geqslant \mu(S_{n-1})(1 - 2r_n)$ e mais ainda, os conjuntos

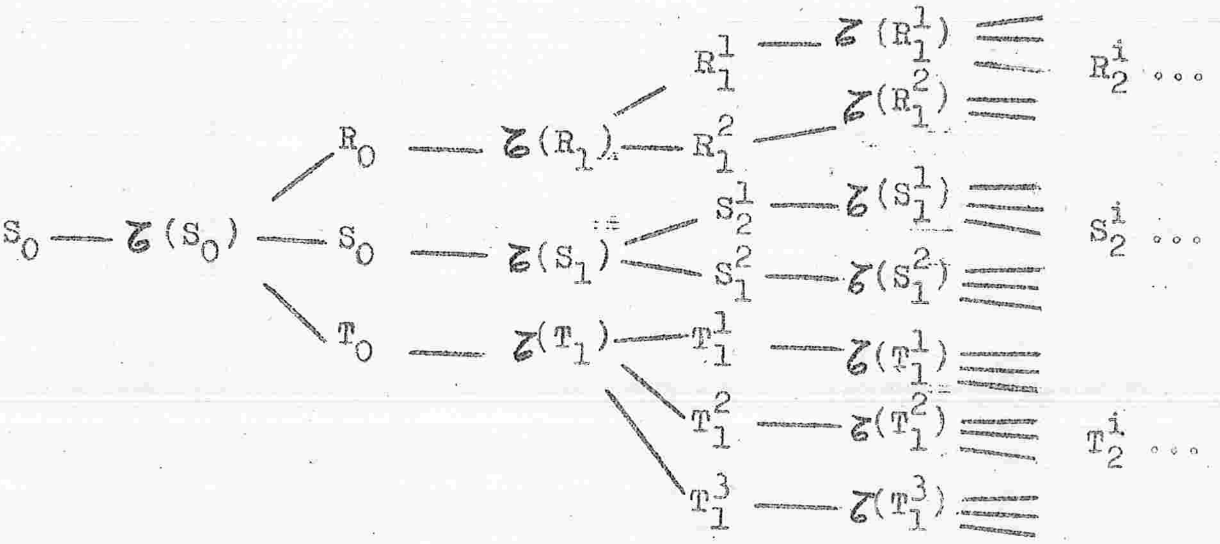
$\tau(S_0, \dots, S_{n-1}, S_n^i)$ são disjuntos.

(Faremos a demonstração ao final da demonstração do teorema 4).

Seja agora $\tau : \bigcup_{k=0}^{\infty} P_{2k} \longrightarrow \bigcup_{k=0}^{\infty} B_{2k+1}$ tal que $\tau(R_0, \dots, R_{2k}) \subseteq R_{2k}$ uma estratégia para o jogador I.

Imaginemos que cada vez que II joga êle faz sua escôlha entre as possibilidades dadas pelo lema 1 e que o jogador I joga segundo τ.

Teremos uma árvore de possibilidades de jôgo do seguinte tipo:



Chamaremos de $A_0 = \mathcal{Z}(S_0)$. A_1 será a união de $\mathcal{Z}$ calculado nas possíveis escôlhas de II (segundo o Lema 1) a partir de $\mathcal{Z}(S_0)$. No exemplo acima $A_1 = \bigcup_i \mathcal{Z}(R^i_1) \bigcup_i \mathcal{Z}(S^i_1) \bigcup_i \mathcal{Z}(T^i_1)$. A_2 será a união das escôlhas de I feitas na posição 5 a partir de tôdas as possibilidades de escôlha de II na posição 4. No exemplo acima $A_2 = \bigcup_i \mathcal{Z}(R^i_2) \bigcup_i \mathcal{Z}(S^i_2) \bigcup_i \mathcal{Z}(T^i_2)$. E assim por diante. Formalizando a notação teremos:

Seja: $\quad I_{\mathcal{Z}} : \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_{n-1} \longrightarrow \mathcal{P}(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n)$ tal que

$$I_{\mathcal{Z}}(S_0, S_1, \ldots, S_{n-1}) = \{(S_0, \ldots, S_{n-1}, S^i_n) : \quad i = 1, \ldots, m\}$$

onde a imagem é construida a partir do Lema 1 (ou seja

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{Z}(S_0, \ldots, S_{n-1}, S^i_n)\right) \geq \mu(S_{n-1})(1 - 2r_n) \quad \text{e os}$$

$\mathcal{Z}(S_0, \ldots, S_{n-1}, S^i_n)$ são disjuntos).

Definimos:

$$I^1_{\mathcal{Z}} = I_{\mathcal{Z}}(S_0, \mathcal{Z}(S_0))$$

$$I^n_{\mathcal{Z}} = \bigcup_{(S_0, \ldots, S_{2(n-1)}) \in I^{n-1}_{\mathcal{Z}}} I_{\mathcal{Z}}(S_0, \ldots, S_{2(n-1)}, \mathcal{Z}(S_0, \ldots, S_{2(n-1)}))$$

Assim

$$A_n = \bigcup_{(S_0, \ldots, S_{2n}) \in I^n_{\mathcal{Z}}} \mathcal{Z}(S_0, \ldots, S_{2n})$$

Com esta notação temos o

<u>Lema 2</u> :

(i) $\mu(A_n) \geq r_1 \cdot \prod\limits_{i=1}^{n} (1 - 2r_{2i})$

(ii) $A_{n+1} \subseteq A_n \qquad n = 1, 2, \ldots$

(Faremos a demosntração no fim do teorema 4).

<u>Lema 3</u> : $\forall p \in A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \; \exists$ estratégia σ_p para o jogador II tal que se I joga por meio de $\mathcal{Z}$ e II por meio de σ_p então $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} S_n = \{p\}$, onde $(S_1, S_2, \ldots)$ denotam as escôlhas sucessivas dos jogadores. (demonstração depois)

(a) Se ζ é uma estratégia vencedora para I então $\forall \sigma$ estratégia de II, $\{p\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$, onde S_n são as escôlhas sucessivas de I e II, feitas por ζ e σ, teremos que $p \in X$.

Portanto, pelo Lema 3

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq X.$$

Como pelo Lema 2 temos

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) \geq r_1 \cdot \prod_{i=1}^{\infty} (1 - 2r_{2i})$$

segue $\mu_*(X) \geq r_1 \prod_{i=1}^{\infty} (1 - 2r_{2i})$ c.q.d.

(b) Se ζ é estratégia vencedora para II então teremos o resultado $\mu_*(X^c) \geq \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2r_{2n-1})$ através de resultados análogos aos dos Lemas 2 e 3.

<u>Demonstração do Lema 1:</u>

Vamos definir os conjuntos S^i_n por indução.

Suponhamos que $S^1_n, \ldots, S^j_n$ $(j \geq 0)$ já estajam definidos. Consideremos o conjunto

$$R_j = S_{n-1} - \bigcup_{i=1}^{j} \zeta(S_0, \ldots, S_{n-1}, S^i_n) \quad (= \zeta(.*.))$$

Se $\mu(R_j) > 2 . \mu(S_{n-1}) . r_n$ então R_j contém um subconjunto P de diâmetro:

$$\delta(P) \leq \frac{\delta(R_j)}{2} = \frac{\delta\left(S_{n-1} - \bigcup_{i=1}^{j} \zeta(.*.)\right)}{2} \leq \frac{\delta(S_{n-1})}{2} \leq \frac{1}{2^n}$$

tal que $\mu(P) > \mu(S_{n-1}) . r_n$

Temos: 1) $\delta(P) \leq 1/2^n$

2) P pode ser tomado como união finita de intervalos de extremidades racionais.

3) $\mu(P) > r_1 . r_2 . \ldots . r_{n-1} . r_n$

Então $\exists$ um conjunto $S^{j+1}_n \subseteq P$ tal que $\mu(S^{j+1}_n) = r_1 . \ldots . r_n$ e que portanto pertence a B_n.

Desta maneira definimos consecutivamente os têrmos da sequência $S^1_n, S^2_n, \ldots$ até um S^m_n onde $\mu(R_m) \leq 2 \mu(S_{n-1}) . r_n$

$$\mu(R_m) = \mu(S_{n-1}) - \mu\left(\bigcup_{i=1}^{m} \tau(S_0, S_1, \ldots, S_{n-1}, S_n^i)\right) \leq$$
$$\leq 2.\, \mu(S_{n-1}).r_n$$
$$\Longrightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{m} \tau(S_0, \ldots, S_{n-1}, S_n^i)\right) \geq \mu(S_{n-1}).(1 - 2r_n)$$

Como para todo $j = 1, 2, \ldots, m-1$ temos

$$\tau(S_0, \ldots, S_{n-1}, S_n^{j+1}) \subseteq S_n^{j+1} \subseteq S_{n-1} - \bigcup_{i=1}^{j} \tau(S_0, \ldots, S_n^i)$$

segue que os conjuntos $\tau(S_0, \ldots, S_{n-1}, S_n^i)$ são disjuntos c.q.d.

Demonstração do Lema 2:

(ii) $A_{n+1} = \bigcup_{(S_0, \ldots, S_{2(n+1)}) \in I_\tau^{n+1}} \tau(S_0, \ldots, S_{2(n+1)}) \subseteq A_n$ é consequência

direta do Lema 1.

(i) Primeiro mostraremos que todos os conjuntos $\tau(S_0, \ldots, S_{2n})$ que aparecem em A_n são disjuntos (para um n fixo). Existem dois casos a considerar, dadas duas sequências $(S_0, \ldots, S_{2n})$ $(S_0', \ldots, S_{2n}')$ pertencentes a I_τ^n:

1. $S_0 = S_0', \ldots, S_{2n-1} = S_{2n-1}'$ e $S_{2n} \neq S_{2n}'$ sendo que êstes últimos são membros distintos do conjunto $I_\tau(S_0, \ldots, S_{2n-1})$ (lembremos que τ é estratégia para o jogador I e que portanto $S_{2n+1} = \tau(S_{2(n-1)})$. Nêste caso temos pelo Lema 1 diretamente que
$$(S_0, \ldots, S_{2n-1}, S_{2n}) \cap \tau(S_0, \ldots, S_{2n-1}, S_{2n}') = \phi.$$

2. Caso geral:

para êste caso procederemos por indução. Note-se que para $n = 1$ recai-se em (i).

Suponhamos por indução que

$$\tau(R_0, \ldots, R_{2(n-1)}) \cap \tau(R_0', \ldots, R_{2(n-1)}') = \phi$$
$$\forall (R_0, \ldots, R_{2(n-1)}), (R_0', \ldots, R_{2(n-1)}') \in I_\tau^{n-1}.$$

Sejam $(S_0, \ldots, S_{2n}), (S_0', \ldots, S_{2n}') \in I_\tau^n$

Do Lema 1 temos

$$\tau(S_0, \ldots, S_{2n}) \subseteq S_{2n} \subseteq \tau(S_0, \ldots, S_{2(n-1)}) \text{ e}$$
$$\tau(S_0', \ldots, S_{2n}') \subseteq S_{2n}' \subseteq \tau(S_0', \ldots, S_{2(n-1)}')$$

e portanto $\mathcal{C}(S_0,\dots,S_{2n}) \cap \mathcal{C}(S'_0,\dots,S'_{2n}) = \phi$

Provaremos agora a desigualdade do Lema 2 por indução também:

<u>n = 1</u> : Como vimos $I^1_{\mathcal{C}} = I_{\mathcal{C}}(S_0, \mathcal{C}(S_0))$

seja $I^1_{\mathcal{C}} = \left\{(S_0, \mathcal{C}(S_0), S^i_2) \; : \; i = 1,\dots, m\right\}$

chamaremos $S_1 = \mathcal{C}(S_0)$.

$$A_1 = \bigcup_{(S_0,S_1,S^i_2) \in I^1_{\mathcal{C}}} \mathcal{C}(S_0,S_1,S^i_2) = \bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{C}(S_0,S_1,S^i_2)$$

$$\mu(A_1) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{C}(S_0,S_1,S^i_2)\right) \geq \mu(S_1).(1 - 2r_2) = r_1.(1 - 2r_2)$$

pelo Lema 1, ou seja $\mu(A_1) = r_1.(1 - 2r_2)$.

Suponhamos por indução que $\mu(A_n) \geq r_1 \cdot \prod_{i=1}^{n} (1 - 2r_{2i})$

$$A_{n+1} = \bigcup_{(S_0,\dots,S_{2(n+1)}) \in I^{n+1}_{\mathcal{C}}} \mathcal{C}(S_0,\dots,S_{2(n+1)}).$$ Temos que

$$(S_0,\dots,S_{2(n+1)}) \in I^{n+1}_{\mathcal{C}} \longleftrightarrow (S_0,\dots,S_{2n}) \in I^n_{\mathcal{C}} \quad \text{e}$$

$$(S_0,\dots,S_{2(n+1)}) \in I_{\mathcal{C}}(S_0,\dots,S_{2n}, \mathcal{C}(S_0,\dots,S_{2n}))$$

Então:

$$A_{n+1} = \bigcup_{(S_0,\dots,S_{2n}) \in I^n_{\mathcal{C}}} \left[\bigcup_{(S_0,\dots,S_{2(n+1)}) \in I_{\mathcal{C}}(S_0,\dots,S_{2n}, \mathcal{C}(S_0,\dots,S_{2n}))} \mathcal{C}(S_0,\dots,S_{2(n+1)})\right.$$

Como os $\mathcal{C}(S_0,\dots,S_{2(n+1)})$ são disjuntos dois a dois temos que para $(S_0,\dots,S_{2n}) \neq (S'_0,\dots,S'_{2n}) \in I^n_{\mathcal{C}}$ as uniões correspondentes também serão disjuntas.

Portanto:

$$\mu(A_{n+1}) = \sum_{(S_0,\dots,S_{2n}) \in I^n_{\mathcal{C}}} \mu\left(\bigcup_{(S_0,\dots,S_{2(n+1)}) \in I_{\mathcal{C}}(S_0,\dots,S_{2n}, \mathcal{C}(S_0,\dots,S_{2n}))} \mathcal{C}(S_0,\dots,S_{2(n+1)})\right) = ($$

Vale também, pelo Lema 1 que:

$$\mu\left(\bigcup_{(S_0,\dots,S_{2(n+1)}) \in I_{\mathcal{C}}(S_0,\dots,S_{2n})} \mathcal{C}(S_0,\dots,S_{2(n+1)})\right) \geq \mu\left(\mathcal{C}(S_0,\dots,S_{2n})\right).(1 - 2r_{2(n+1)})$$

e assim

$$(a) \geq \sum_{(S_0,\ldots S_{2n}) \in I^n_{\tau}} \mu(\tau(S_0,\ldots,S_{2n})).(1-2r_{2(n+1)}) = (b) \text{ e como}$$

os $\tau(S_0,\ldots,S_{2n})$ são disjuntos

$$(b) = \mu\Big(\bigcup_{(S_0,\ldots,S_{2n}) \in I^n_{\tau}} \tau(S_0,\ldots,S_{2n})\Big) \cdot (1-2r_{2(n+1)}) =$$

$$= \mu(A_n)\cdot(1-2r_{2(n+1)}) \geq \Big[r_1 \prod_{i=1}^{n} (1-2r_{2i})\Big] \cdot (1-2r_{2(n+1)}) =$$

$$= r_1 \prod_{i=1}^{n+1} (1-2r_i) \qquad \text{c.q.d.}$$

<u>Demonstração do Lema 3</u>:

Seja $p \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Como os conjuntos $\tau(S_0,\ldots,S_{2n})$ (com $(S_0,\ldots,S_{2n}) \in$

$\in I^n_{\tau}$) são disjuntos para um n fixo, vamos chamar de $(S^p_0,\ldots,S^p_{2n})$ a única sequência de I^n_{τ} para a qual $p \in \tau((S^p_0, \ldots, S^p_{2n}))$.

Suponhamos que σ_p é uma estratégia para o jogador II tal que

$$\sigma_p((S^p_0,\ldots, S^p_{2(n-1)}), \tau(S^p_0,\ldots, S^p_{2(n-1)})) = S^p_{2n} \quad \text{para } n= 1,2,\ldots .$$

É claro que $p \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ se as escôlhas S_n são feitas por meio de τ e σ_p,

e como $\delta(S_n) \leq 1/2^n$ $\forall n$ temos $\{p\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$. c.q.d.

BIBLIOGRAFIA

[1] - Paul J. Cohen, Set Theory and the continuum Hypothesis, W. A. Benjamin, Inc. 1966.

[2] - P. R. Halmos, Lectures on Boolean Algebras, Van Nostrand, 1963

[3] - A. Levy, Definability in axiomatic set theory: I. Logic, Methodology and Philosophy of Science, in Proccedings of the 1964 International Congress (Ed. Y. Bar-Hillel), Amsterdam 1965, pp 1 - 151.

[4] - Jan Mycielski, On the axiom of determinateness, Fund. Math. 53 (1964), pp 2o5-224.

[5] - —— and S. Swierczkowski, on the Lebesgue measurability and the axiom of determinateness, Fund. Math. 54 (1964) pp 67-71.

[6] - —— and H. Steinhaus, A Mathematical Axiom contradicting the axiom of choice, Bull. Acad. Polon. Sci. Série math., astr. et phys, 10 (1962) pp 1-3.

[7] - J. Myhill and D. Scott - Ordinal definability (Lectures Notes prepared in connection with the Summer Institute on Axiomatic Set Theory held at U.C.L.A. - 1967).

[8] - Robert M. Solovay - A model of set - theory in wich every set of reals is Lebesgue measurable. Ann. of Math. 92 nº 1 (1970) pp 1-55.