SUMA Y SIGUE

MATEMÁTICA EN LÍNEA

MATERIAL PEDAGÓGICO COMPLEMENTARIO

fcfm
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

CMM
Centro de Modelamiento Matemático

Ministerio de Educación
Gobierno de Chile

MATERIAL PEDAGÓGICO COMPLEMENTARIO

FICHAS TALLER 4:
EL SISTEMA NUMÉRICO DE LOS NÚMEROS RACIONALES

INTRODUCCIÓN

En este taller se buscó integrar el conocimiento de fracciones y decimales en la noción de número racional, y se puso énfasis en la naturaleza abstracta de los números racionales y en su formalización como sistema numérico, abordando sus propiedades de orden y de las operaciones definidas en él. Se estudió la manera en la que el sistema numérico de los racionales extiende las propiedades de las operaciones del sistema de los números naturales. Se comprobó que pese a que los tos puntos en la recta numérica, no la completan y se mostró que hay infinitos puntos en la recta numérica que no se corresponden con un número racional.

Las fichas que conforman este apartado contemplan los siguientes contenidos:

- Números racionales como sistema numérico.
- Conmensurabilidad y propiedades de los números racionales.
- Noción de los números irracionales y reales.
- Propiedades de las operaciones de los números racionales.

SUMA Y SIGUE
MATEMÁTICA EN LÍNEA

TALLER 4: SISTEMA NUMÉRICOS DE LOS NÚMEROS RACIONALES

1. Los números racionales y su relación con los números decimales

Se denomina **números racionales** (Q) al conjunto de números que se pueden expresar de la forma $\frac{a}{b}$, con a y b números enteros y b ≠ 0.

Los números que cumplen con esta definición son las fracciones decimales y las fracciones no decimales. Por ejemplo:

$$\frac{12}{5} = 2,4$$

$$\frac{13}{6} = 2,166666\ldots = 2,1\overline{6}$$

Comentarios

- No todos los números decimales son racionales, pues existen números decimales que no pueden ser escritos como fracción. Por ejemplo:

$$\sqrt{2} = 1,414213562\ldots$$
$$\pi = 3,141592654...$$

- En educación básica se estudian algunas de las posibles notaciones de un número racional: fracciones, números decimales, porcentajes, razones y números enteros.
- Si bien las fracciones, números decimales, porcentajes y razones, y números enteros son números racionales, se suele hablar de números racionales cuando nos enfocamos más en sus propiedades que en sus significados, contextos y usos.
- Si bien la definición de números racionales involucra tanto números positivos como negativos, en este curso nos enfocamos en los positivos. En particular, en esta actividad desarrollamos la noción de fracción en un contexto de medida de longitudes, pues facilita su interpretación geométrica y permite caracterizar las propiedades del sistema numérico de los racionales en la recta numérica.

Ubicación: Módulo 1

Taller: El sistema numérico de los racionales.
Actividad: Construyendo los números racionales.

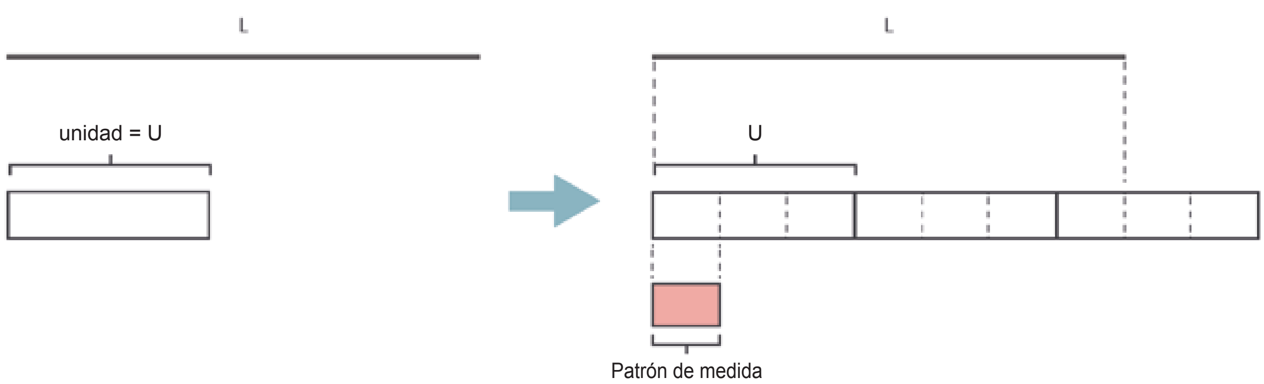
2. Relación entre los números racionales y la conmensurabilidad

Dos medidas se dicen **conmensurables** si existe un patrón de medida que esté contenido un número natural de veces en ambas.

Si desea medir la longitud **L** utilizando la unidad **U**, y si **L** y **U** son conmensurables, entonces existe un patrón de medida que está contenido ***a*** veces en **L** y ***b*** veces en **U**.

Luego, la medida de la cantidad **L** usando la cantidad **U** se expresa a traves del **número racional** $\boldsymbol{\frac{a}{b}}$.

En el siguiente ejemplo existe un patrón de medida que está contenido a = 7 veces en L y b = 3 veces en U. Luego L y U son conmensurables y la medida de L usando U como unidad es $\frac{7}{3}$ U.



Comentarios

- Dos medidas no siempre son conmensurables, por lo que, en estos casos, no es posible expresarlas a través de un número racional.
- Al trabajar números racionales en el aula a partir de situaciones relacionadas con contextos de medida, se debe asegurar que las medidas elegidas sean conmensurables.

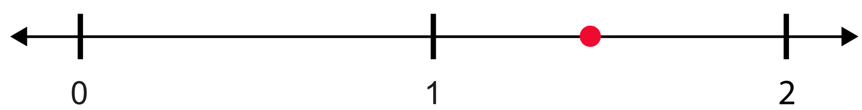
Ubicación: Módulo 1

Taller: El sistema numérico de los racionales.
Actividad: Construyendo los números racionales.

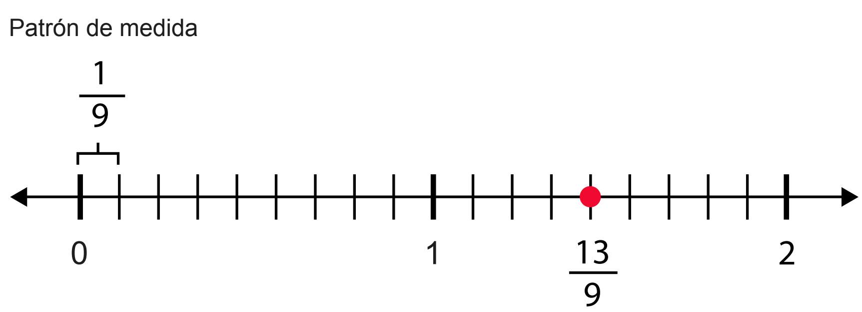
3. Los números racionales en la recta numérica

De acuerdo con la interpretación de medida, la longitud de un segmento se puede expresar como un número racional si su medida es conmensurable con la medida de la unidad.

Al llevar esta idea a la recta numérica, un punto en ella corresponde a un número racional si y solo si es posible subdividir la unidad (segmento de 0 a 1) y enontrar un patrón que esté contenido un número entero de veces tanto en la unidad como en el segmento del 0 al punto.



Por ejemplo, el hecho de que el punto rojo marcado en la recta corresponde a un número racional se desprende de que es posible encontrar un patrón que divide a la unidad en 9 partes iguales y al segmento del 0 al punto rojo en 13 partes iguales. Por tanto, el punto corresponde al número racional $\frac{13}{9}$.



Comentarios

- No todos los puntos en la recta determinan segmentos conmensurables con la unidad, por lo que en estos casos, la longitud de dichos segmentos no corresponden a números racionales.
- Si bien a partir de contextos que involucran comparación y reparto equitativo es posible construir la noción de número racional, en este curso hemos propuesto el contexto de medida de longitudes porque permite asociar de forma natural los números racionales a la recta numérica.

Ubicación: Módulo 1

Taller: El sistema numérico de los racionales.
Actividad: Construyendo los números racionales.

4. Igualdad de números racionales

Cada número racional tiene asociado un conjunto infinito de expresiones equivalentes de la forma $\frac{a}{b}$ (con a y b enteros y b ≠ 0), que corresponden al mismo punto en la recta numérica:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \ldots$$

Para representar un número racional se puede elegir cualquiera de sus expresiones equivalentes. Por lo general, se suele utilizar la fracción irreductible, es decir, aquella en que el numerador y denominador tienen solo el 1 como divisor común.

Comentarios

- Elegir y usar diversas expresiones equivalentes para los números racionales promueve el uso de distintas estrategias de cálculo, tanto mental como escrito.
- En este curso hemos abordado diferentes representaciones de los números racionales.

$\frac{13}{4}$	=	$3\frac{1}{4}$	=	$\frac{325}{100}$	=	3,25	=	$3{,}24\overline{9}$
Fracción		Núm. mixto		Fracción decimal		Expr. decimal		Expr. decimal infinita

$\frac{7}{6}$	=	$1\frac{1}{6}$	=	$1{,}1\overline{6}$
Fracción no decimal		Núm. mixto		Expr. decimal infinita

Ubicación: Módulo 1

Taller: El sistema numérico de los racionales.
Actividad: Construyendo los números racionales.

5. Densidad de los números racionales

El orden (<, >) de los números racionales es **denso** en el sentido que siempre es posible encontrar un número racional entre otros dos números racionales dados. En otras palabras, al elegir cualquier par de números racionales ***a*** y ***b*** de manera que ***a*** sea menor que ***b***, siempre se puede encontrar un número racional ***c*** entre ellos.

Una estrategia para ubicar un número racional entre otros dos dados es determinar el punto medio entre ellos. Es decir, si a y b son números racionales, entonces $\frac{a+b}{2}$ también es un racional y cumple que:

$$a < \frac{a+b}{2} < b$$

Comentarios

- El proceso antes descrito u otro, cuyo objetivo sea el de ubicar un número racional entre otros dos dados, se puede realizar una cantidad indefinida de veces.
- Gracias a esta propiedad, en la recta numérica se pueden situar dos números racionales tan cerca como se quiera. Esto podría hacernos creer que los números racionales completan la recta numérica, pero no es así.

Ubicación: Módulo 1

Taller: El sistema numérico de los racionales.
Actividad: Propiedades de los números racionales.

6. Densidad de los números racionales

Existen puntos de la recta numérica que **no** con números racionales, y que no se pueden expresar de la forma $\frac{p}{q}$, con p y q números enteros y $q \neq 0$. A estos números se les denomina **números irracionales** y son aquellos que tienen una expansión decimal **infinita no periódica**. Por ejemplo:

$$\sqrt{2} = 1{,}414213562\ldots$$
$$\pi = 3{,}141592654\ldots$$

Los números racionales junto con los irracionales completan la recta numérica y forman el conjunto de los **números reales**.

Comentarios

- Es importante destacar que hay infinitos números irracionales. Aún más, es posible probar que hay más números irracionales que racionales.
- No todos los números que se expresan en notación fraccionaria son racionales. Por ejemplo, $\frac{\sqrt{2}}{3}$ es irracional.
- A diferencia de los números irracionales, los números racionales tienen una expansión finita o periódica.
- Una estrategia para producir números irracionales es establecer una secuencia de cifras decimales cuya construcción asegure que los dígitos no se repetirán de forma periódica. Por ejemplo, el número formado por las cifras decimales a las que se les va agregando 10, 100, 1000, ... , indefinidamente, es un número irracional:

$$0{,}10100100010000\ldots$$

Ubicación: Módulo 1

Taller: El sistema numérico de los racionales.
Actividad: Propiedades de los números racionales.

7. El sistema numérico de los números racionales

Los **números racionales** con las operaciones de adición y multiplicación usuales, y con la relación de orden entre los elementos de dicho conjunto, conforman un **sistema numérico**, es decir, se caracterizan por tener una estructura algebraica y satisfacer propiedades de orden. Como sistema numérico, los números racionales cumplen con las siguientes propiedades:

1- La adición y la multiplicación tienen la propiedad de **clausura**.
2- La adición y multiplicación son **conmutativas** y **asociativas**.
3- Cumplen la propiedad **distributiva** de la multiplicación sobre la adición.
4- Existe elemento **neutro aditivo** y elemento **neutro multiplicativo**.
5- Tienen **inverso aditivo**. Todos los racionales, excepto el 0, tienen **inverso multiplicativo**.
6- Su **orden es denso**, esto es, hay infinitos racionales entre otros dos dados.
7- No completan la recta numérica; se requiere de los irracionales para completarla.

Una característica del sistema numérico de los números racionales es que mantiene todas las propiedades para la adición y multiplicación que se cumplen en los números naturales, a la vez que se distingue de ellos porque agrega la posibilidad de contar con inverso multiplicativo, lo que permite que la división sea cerrada en este conjunto. Otra característica que distingue a los números racionales de los naturales es que estos cumplen la propiedad de densidad.

Comentarios

- Al considerar el conjunto de los números racionales como un sistema numérico, el foco ya no está en el significado que adoptan estos números en sus distintos contextos, sino en las **propiedades algebraicas** y de **orden** que estos satisfacen.

- En la definición de números racionales como sistema numérico no se suelen mencionar específicamente ni la sustracción ni la división, dado que la sustracción se define a partir de la adición como la suma del primer término más el inverso aditivo del segundo, y la división a partir de la multiplicación como el producto del primer término con el inverso multiplicativo del segundo.

Ubicación: Módulo 1

Taller: El sistema numérico de los racionales.
Actividad: Propiedades de los números racionales.