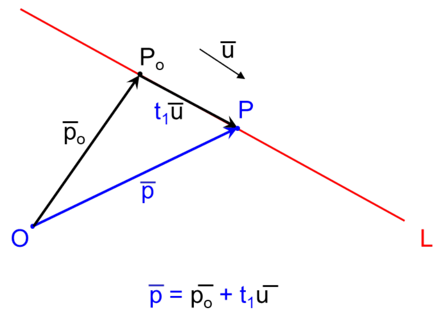
Ecuaciones Cartesianas y Paramétricas de la Recta

Distintas formas de la ecuación de la recta En $\mathbb{R}^2$

1. Definimos una recta de $\mathbb{R}^2$ eligiendo un vector no nulo (o dirección) $\overline{u} \in \mathbb{R}^2$ fijo, y un punto de apoyo $\overline{P_0}$, como el conjunto

$$\mathcal{L}_{P_0\overline{u}} = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid P = \overline{P_0} + t_1\overline{u},\ con\ P_0,\ \overline{u} \in \mathbb{R}^2\ fijos\ ,\ \overline{u} \neq \overline{0}\ y\ t_1 \in \mathbb{R}\}$$



La ecuación

$$P = \overline{P_0} + t_1\overline{u}$$

se denomina **forma vectorial de la recta**.

2. A partir de la forma vectorial de la recta $P = \overline{P_0} + t_1\overline{u}$ se tiene

$$P - \overline{P_0} = t_1\overline{u}$$

Lo que nos dice la expresión anterior es que para cada uno de los puntos P de la recta, el vector de P_0 a P es paralelo al vector $\overline{u}$.
En consecuencia, $P - \overline{P}_0$ es perpendicular a cualquier vector $(A.B)$ perpendicular a $\overline{u}$. Pero si (A, B) es perpendicular a $\overline{u}$ entonces

$$(A, B) \cdot \overline{u} = 0 \ \Rightarrow\ (A, B) \cdot t_1\overline{u} = 0$$

De lo anterior obtenemos

$$(P - P_0) \cdot (A, B) = 0$$

haciendo $P = (x, y)$, $P_0 = (x_0, y_0)$ y sustituyendo en la expresión anterior se tiene

$$(x - x_0, y - y_0) \cdot (A, B) = 0 \ \Rightarrow\ A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \ \Rightarrow\ Ax + By - Ax_0 - By_0 = 0$$

haciendo $C = -Ax_0 - By_0$ y sustituyendo en la expresión anterio se tiene

$$Ax + By + C = 0$$

Esta ecuación recibe el nombre de **ecuación general de la recta en el plano**

3. A partir de la **ecuación general de la recta en el plano** tenemos que

$$Ax + By + C = 0 \Rightarrow y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

Esta ecuación puede darse si $B \neq 0$, pues entonces podemos despejar y que suele escribirse

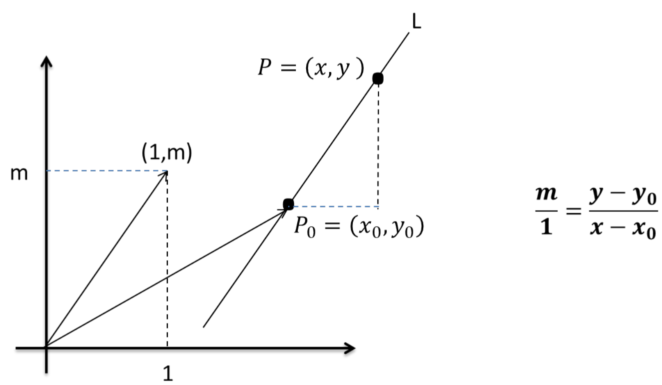
$$y = mx + b$$

Esta ecuación recibe el nombre de **pendiente ordenada al origen**

4. En la expresión

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

el coeficiente $m = -\frac{A}{B}$ del término en x es precisamente la pendiente de la recta, pues m es la tangente del ángulo θ, cuando se conoce la pendiente m (y por tanto, la dirección (1,m)) y un punto de apoyo $P_0 = (x_0, y_0)$. Entonces, un punto genérico $P = (x, y)$ de la recta determina con $P_0 = (x_0, y_0)$ un vector paralelo a $(1, m)$ y, en consecuencia



se tiene

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{m}{1}$$

lo cual se suele escribir

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

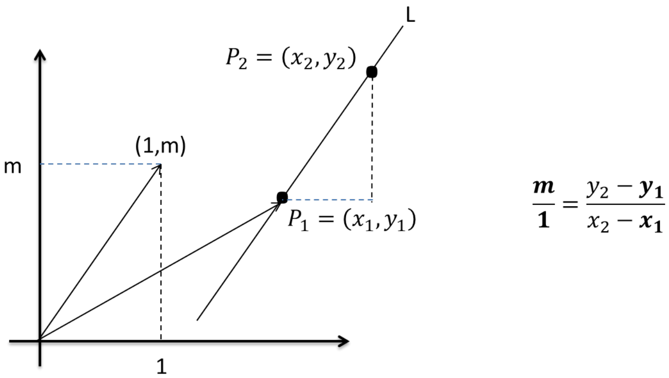
Esta ecuación recibe el nombre de **punto y pendiente**

5. Con la misma idea del caso anterior, si se dan dos puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ sobre la recta, en la expresión

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{m}{1}$$

sustituimos el valor de m por el cociente

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{m}{1}$$



y por tanto la ecuación toma la forma

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Esta ecuación recibe el nombre de **recta por dos puntos**

6. A partir de la forma vectorial

$$P = \overline{P_0} + t_1\overline{u}$$

y hacemos $P = (x, y)$, $P_0 = (x_0, y_0)$ y $u = (u_1, u_2)$ para obtener la ecuación

$$(x, y) = (x_0, y_0) + t_1(u_1, u_2)$$

Si escribimos la igualdad entre las coordenadas del vector de la izquierda y el de la derecha (se acostumbra escribir t en vez de t_1) obtenemos:

$$x = x_0 + tu_1, \quad y = y_0 + tu_2$$

donde t puede tomar cualquier valor real.
Esta ecuación recibe el nombre de **forma paremétrica de la recta**

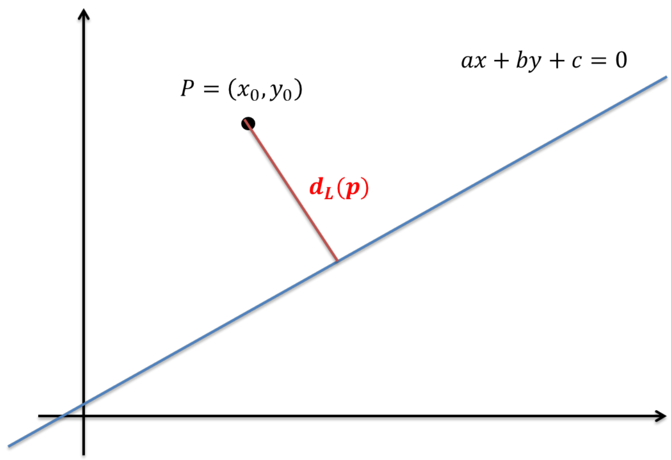
7. A partir de la forma paramétrica de la recta despejamos t e igualamos las expresiones obtenidas

$$\begin{array}{ccccc} x = x_0 + tu_1 & & \frac{x-x_0}{u_1} = t & & \\ & \Rightarrow & & \Rightarrow & \dfrac{x - x_0}{u_1} = \dfrac{y - y_0}{u_2} \\ y = y_0 + tu_2 & & \frac{y-y_0}{u_2} = t & & \end{array}$$

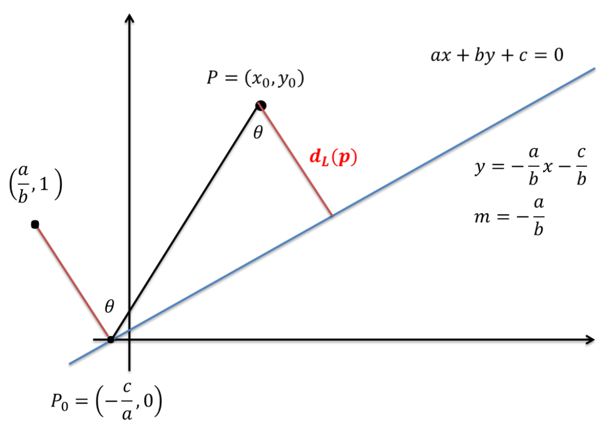
Esta ecuación recibe el nombre de **forma normal de la recta**

Estas son todas las formas de la ecuación de la recta en $\mathbb{R}^2$. Como son ecuaciones de lugares geométricos, "están todos los que son y son todos los que están", es decir un punto pertenece a la recta si y sólo si satisface alguna de las formas de la ecuación de la recta.

Distancia de un punto a una recta La distancia entre un punto y una recta es la perpendicular entre el punto y el pie de la perpendicular que llega a la recta desde el punto



Procedimiento vectorial Se traza una perpendicular a la recta que pase por P



1. Se toma un punto sobre L, en particular $y = 0$ para obtener

$$P_0 = \left(-\frac{c}{a}, 0\right)$$

2. En el triángulo rectángulo que se forma

$$\cos\ \theta = \frac{d(P, L)}{\|P - P_0\|}$$

Por otro lado

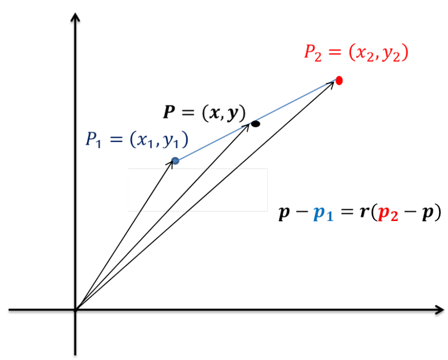
$$\cos\ \theta = \frac{(P - P_0) \cdot \left(\frac{a}{b}, 1\right)}{\|(P - P_0)\|\ \|\left(\frac{a}{b}, 1\right)\|}$$

3. Por tanto
$$\frac{\left|(P-P_0)\cdot\left(\frac{a}{b},1\right)\right|}{\|(P-P_0)\|\,\|\left(\frac{a}{b},1\right)\|}=\frac{d(P,L)}{\|P-P_0\|}$$
en consecuencia
$$\begin{aligned}d(P,L)&=\frac{\left|(P-P_0)\cdot\left(\frac{a}{b},1\right)\right|}{\|\left(\frac{a}{b},1\right)\|}\\&=\frac{|(x,y)-\left(-\frac{c}{a},0\right)\cdot\left(\frac{a}{b},1\right)|}{\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2+1}}\\&=\frac{\left|\frac{a}{b}(x+\frac{c}{a})+y\right|}{\frac{1}{b}\sqrt{a^2+b^2}}\\&=\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{aligned}$$

Por lo tanto la distancia de un punto $P=(x_0,y_0)$ a la recta $ax+by+c=0$ es $d_L(P)=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

División de un Segmento en una Razón Dada Si $P_1=(x_1,y_1)$ y $P_2=(x_2,y_2)$ son los extremos de un segmento P_1P_2, las coordenadas (x,y) de un punto P que divide a este segmento en la razón dada r son
$$x=\frac{rx_2+x_1}{1+r}\quad y\quad y=\frac{ry_2+y_1}{1+r}$$

Demostración. Dado un vector que va de P_1 a P es $P-P_1$ y otro que va de P a P_2 es P_2-P



por ser vectores paralelos se tiene
$$(x-x_1,y-y_1)=r(x_2-x,y_2-y)$$

Igualando coordenadas

$$\begin{aligned}
x - x_1 = r(x_2 - x) &\Rightarrow x - x_1 = r(x_2 - x)\\
&\Rightarrow\ x - x_1 = rx_2 - rx\\
&\Rightarrow\ rx + x = rx_2 + x_1\\
&\Rightarrow\ x(r+1) = rx_2 + x_1\\
&\Rightarrow\ x = \frac{rx_2 + x_1}{r+1}
\end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned}
y - y_1 = r(y_2 - y) &\Rightarrow y - y_1 = r(y_2 - y)\\
&\Rightarrow\ y - y_1 = ry_2 - ry\\
&\Rightarrow\ ry + y = ry_2 + y_1\\
&\Rightarrow\ y(r+1) = ry_2 + y_1\\
&\Rightarrow\ y = \frac{ry_2 + y_1}{r+1}
\end{aligned}$$

□

Si la razon $r = 1$ se tienen las fórmulas del punto medio

$$x = \frac{x_2 + x_1}{2} \quad y \quad y = \frac{y_2 + y_1}{2}$$

Semiplanos Si en la ecuación general de la recta sustituimos las coordenadas de un punto $Q^*(x^*, y^*)$ que no pertenece a la recta, por la propiedad de tricotomía de los números reales tenemos dos posibilidades para el número $Ax^* + By^* + C$:

$$Ax^* + By^* + C > 0 \quad ó \quad Ax^* + By^* + C < 0$$

cuya validez depende de que el punto esté de un lado de la recta o del otro.

Definición 1. *Llamamos semiplano a cada una de las regiones del plano delimitadas por una recta.*

Lema 1. *Cualquier semiplano es el lugar geométrico correspondiente a una de las desigualdades lineales*

$$Ax^* + By^* + C > 0 \quad ó \quad Ax^* + By^* + C < 0$$