Conjuntos finitos e infinitos

Definición 1. *Decimos que dos conjuntos A, B son* **equipotentes** *si existe una función $f : A \to B$ que sea biyectiva, y se denotará $A \sim B$*

Proposición 1. *Sean A, B y C conjuntos. Entonces*

a) $A \sim A$

b) Si $A \sim B$, entonces $B \sim A$

c) Si $A \sim B$ y $B \sim C$ entonces $A \sim C$

Demostración. En este caso tenemos

a) La función $I_A : A \to A$ es biyectiva, por tanto $A \sim A$

b) Si $f : A \to B$ es biyectiva, entonces existe su inversa $f^{-1} : B \to A$ que es biyectiva.

c) Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son biyectivas, entonces $g \circ f : A \to C$ es biyectiva.

□

Ejemplo Sea $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ y $E = \{2, 4, 6, ...\}$. Entonces, $F : \mathbb{N} \to E$, definida por $f(x) = 2x$ es inyectiva y sobreyectiva; con lo que $\mathbb{N}$ es equipotente a E.

Ejemplo La función $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ definida por $\dfrac{x}{1 - |x|}$ es inyectiva y sobreyectiva, Así que el intervalo abierto $(-1, 1)$ es equipotente a $\mathbb{R}$, el conjnuto de números reales.

Ejemplo Demostrar que el intervalo $[0, 1]$ es equipotente al intarvalo $[0, 1)$

Demostración. Nótese que

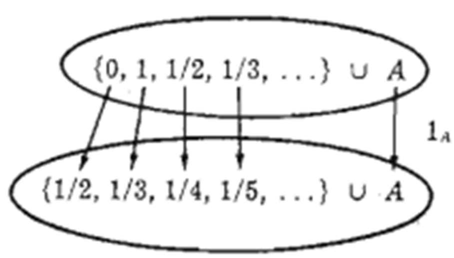
$$[0,1] = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\right\} \cup A$$

$$[0,1] = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\right\} \cup A$$

donde

$$A = [0,1] - \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\right\} = (0,1) - \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\right\}$$

considérese la función definida en el siguiente diagrama



Esto es

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & si \qquad x=0\\ \frac{1}{n+2} & si \qquad x=\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}\\ x & si \quad x\neq 0,\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N},\ ie.\ si\ x\in\ A\end{cases}$$

La función f es biyectiva. Por consiguiente, $[0,1]\sim(0,1)$ □

Ejemplo Con la función biyectiva $f(x)=1-x$, se tiene que $[0,1)\sim(0,1]$

Ejemplo Cada uno de los intervalos siguientes son equipotentes bajo la función biyectiva $f(x)=a+(b-a)x$

$$[0,1]\xrightarrow{f}[a,b],\quad [0,1)\xrightarrow{f}[a,b)\quad (0,1)\xrightarrow{f}(a,b)\quad (0,1]\xrightarrow{f}(a,b]$$

Los números naturales aparecen en principio como una herramienta para contar los elementos de algunos conjuntos, los finitos. Dichos conjuntos tienen asociado un número que es su cardinal.
Decimos que dos conjuntos A y B tienen el mismo cardinal si y sólo si $A\sim B$ (son equipotentes)

Definición 2. *Para cada $n\in\mathbb{N}$, definimos el segmento inicial con n elementos como el conjunto I_n tal que:*

$$I_n=\{x\in\mathbb{N}\mid 1\leq x\leq n\}=\{1,2,3,...,n\}$$

Por ejemplo

a) $I_1=\{1\}$

b) $I_2=\{1,2\}$

c) $I_3=\{1,2,3\}$

d) $I_4=\{1,2,3,4\}$

Cada uno de esto conjuntos I_n $(n\geq 1)$ tiene mínimo y máximo, que son 1 y n respectivamente

Definición 3. *Decimos que un conjunto A es finito si y sólo si existe $n\in\mathbb{N}$ y existe $f:I_n\to A$ tal que f es biyectiva.*

Un conjunto infinito es uno que no es finito.

Proposición 2. *Si A es un conjunto finito, entonces existe un único $n\in\mathbb{N}$ tal que hay una biyección entre I_n y A*

Demostración. Sea A un conjunto finito. Por definición de finito, existe $n\in\mathbb{N}$ y una función biyectiva $f:I_n\to A$.
Supongamos que para alguna $m\in\mathbb{N}$ existe una función biyectiva $g:I_m\to A$.
Tenemos que $f^{-1}:A\to I_n$ tambien es una función biyectiva. Por lo tanto $f^{-1}\circ g:I_m\to I_n$ sería una biyección, pues la composición de funciones biyectivas es biyectiva. Así $m=n$. □

Concluimos que para todo conjunto finito A, existe un único $n\in\mathbb{N}$ tal que hay una biyección entre I_n y A.

Definición 4. *Decimos que un conjunto finito tiene n elementos si y sólo si existe una biyección $f:I_n\to A$. En este caso escribimos $|A|=n$*

Definición 5. *La cardinalidad del conjunto vacio es 0, y si el conjunto $A \neq \emptyset$ es finito diremos que la cardinalidad de A es n si $A \sim I_n$. Si A es un conjunto infinito diremos que la cardinalidad es infinita.*

Se denotara $card(A)$ a la cardinalidad del conjunto

Teorema 1. *Sean A y B conjuntos finitos de cardinalidad n y m respectivamente y $f : A \to B$ una función.*

a) Si f es inyectiva, entonces $n \leq m$

b) Si f es suprayectiva, entonces $m \leq n$

c) Si f es biyectiva, entonces $m = n$

Demostración. a) Para probar esto, nótese que si $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, entonces el conjunto $\{f(a_1), f(a_2), ..., f(a_n)\}$ consiste de elementos distintos ya que f es inyectiva y como $\{f(a_1), f(a_2), ..., f(a_n)\} \subseteq B$ entonces $card\ (A) = n \leq m = card\ (B)$

b) Esto se cumple, ya que si $B = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$, como f es suprayectiva existen $a_1, a_2, ..., a_n \in A$ tales que $f(a_i) = b_i,\ i = 1, 2, 3, ..., m$ y además las a_i, son todas distintas, ya que f es función

c) Por (a) se tiene $n \leq m$ y por (b) se tiene $m \leq n$ en consecuencia $m = n$

□

Proposición 3. *´Sea $f : A \to B$ una función, donde A y B son finitos con la misma cardinalidad, entonces f es inyectiva si y sólo si f es suprayectiva*

Demostración. ⇒ Supongamos que f es inyectiva, esto implica que se tienen n imágenes distintas, es decir, todos los elementos de B estan en la imagen y por tanto $Im_f = B$ y f es suprayectiva.
⇒ Supongamos que f es suprayectiva y si f no fuera inyectiva entonces $Im_f < n$ pero esto contradice la hipótesis. □