

FACULTAD DE CIENCIAS
GRADO EN MATEMÁTICAS
TRABAJO FIN DE GRADO
CURSO ACADÉMICO [2015-2016]

TÍTULO:

Cálculo de órbitas periódicas en sistemas de Lotka-Volterra

AUTOR:

Rubén Poveda Martínez

Resumen

En la vida real existen ecosistemas en los que dos o más especies interactúan por su supervivencia ya sean por ser depredador y presa o compitan por el mismo alimento, el cálculo de las densidades de población de estas especies es muy importante en el sentido biológico para su estudio. En especial, son de gran interés encontrar ecosistemas donde las densidades de población, a través del tiempo, repitan ciertos patrones cíclicos. En este trabajo vamos a estudiar diversos sistemas de Lotka-Volterra (tanto lineales como no lineales) en los que interactúan dos o tres especies y nos centraremos en los sistemas que contengan soluciones periódicas o ciclos límites. Después explicaremos el método perturbado de Poincaré-Lindstedt para el cálculo de soluciones periódicas y lo aplicaremos a algunos sistemas ya analizados que contengan soluciones periódicas para poder obtener dichas soluciones y ver que el método funciona.

Abstract

In real life there are ecosystems in which two or more species interact for their survival either by being predator and prey or compete for the same food, calculating the densities of these species is very important in the biological sense for their study. In particular, It is of great interest the ecosystems where population densities, over time, repeat certain cyclical patterns. In this work we will study various systems of Lotka-Volterra (both linear and non-linear) in which two or three species interact and we will focus on the systems that contain cycles limits or periodic solutions. We will then explain the disturbed Poincaré-Lindstedt method for the calculation of periodic solutions and apply it to some already tested systems that contain periodic solutions in order to obtain these solutions and see that the method works.

Índice

1. Introducción	5
2. Modelos de Lotka-Volterra clásicos con dos especies	7
2.1. Modelo depredador-presa de Lotka-Volterra	7
2.2. Modelo depredador-presa con competencia intraespecie	8
2.3. Modelo competitivo de Lotka-Volterra	12
2.4. Modelo cooperativo de Lotka-Volterra	15
3. Modelos no lineales de ecuaciones ecológicas	17
3.1. Modelo general	17
3.2. Bifurcación de Hopf	21
3.3. Modelo depredador-presa de Gause	23
3.4. Respuestas funcionales de Holling	26
4. Modelos de Lotka-Volterra para más de dos especies	32
4.1. Modelo de Lotka-Volterra con cadenas tróficas	32
5. El método de Poincaré-Lindstedt	38
5.1. Metodo de Poincaré-Lindstedt en sistemas de orden 3	41
5.2. Algoritmo para el método de Poincaré-Lindstedt para 3 especies . . .	48
A. Método de Poincaré-Lindstedt para tres dimensiones en Maple	53
Referencias	57

1. Introducción

En la vida real existen ecosistemas en los que conviven e interactúan dos o más especies. Esta interacción entre las especies conlleva una variación de la densidad de población en cada una de ellas. Estas variaciones de las densidades de población a través del tiempo pueden modelizarse mediante sistemas dinámicos cuyas soluciones describen la variación de las densidades de población a través del tiempo.

Los principales modelos de interacción interespecie para dos especies son los siguientes:

- Interacción **depredador-presa**, en la cual la supervivencia de la especie depredadora depende de la especie que sirve de presa.
- Interacción **competitiva**, en la cual las dos especies compiten por un mismo recurso que las alimenta (no hay depredación).
- Interacción **cooperativa**, en la cual las especies se favorecen de la existencia de las otras.

Aparte de la interacción interespecie también existe interacción intraespecie, que analizaremos posteriormente.

Antes de comenzar con la descripción del modelo daremos unas definiciones básicas a modo de recordatorio.

Definición 1.1 *Un sistema de ecuaciones lineales de primer orden se dice que es un sistema autónomo si se puede escribir como*

$$\dot{x} = f(x), \tag{1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ y $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, es decir, f no depende explícitamente del tiempo.

Definición 1.2 *Una solución del sistema (1) es una aplicación diferenciable $t \rightarrow x(t)$ de un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ en \mathbb{R}^n la cual satisface $\dot{x}(t) = f(x(t))$.*

Definición 1.3 *Una condición inicial es la especificación del valor de $x(t)$ en un instante determinado, normalmente $t = 0$. La condición inicial se describe por medio de la ecuación $x(0) = x_0$.*

Definición 1.4 *Un punto crítico del sistema (1) es un vector x_1 tal que $f(x_1) = 0$. En este caso se ve fácilmente que $x(t) = x_1$ es solución del sistema.*

Definición 1.5 *Denominamos espacio de fase al espacio \mathbb{R}^n en el cual se representan las coordenadas del vector $x(t)$, si $n = 2$ entonces lo denominamos plano de fase. Una trayectoria o órbita es la proyección de una solución $\{t, x(t)\} \in \mathbb{R}^{n+1}$ en el espacio de fases. El conjunto de todas proyecciones de las trayectorias en el espacio de fase se denomina mapa de fase.*

Definición 1.6 Decimos que un punto crítico z del sistema (1) es estable (y también Lyapunov-estable) si para cada entorno U de z , existe un entorno W tal que toda trayectoria que parte de W está contenida en U , es decir, si $x_0 \in W$ entonces $x(t) \in U$ para todo $t \geq 0$.

Además decimos que un punto es asintóticamente estable si es estable y además toda órbita que parte de W converge a z , es decir, $x(t) \rightarrow z$ cuando $t \rightarrow \infty$ para todo $x_0 \in W$.

Definición 1.7 Dado un punto crítico asintóticamente estable el conjunto de puntos x_0 tales que $x(t) \rightarrow z$ se llama cuenca de atracción de z . La cuenca de atracción de z es un conjunto abierto, ya que si fuera cerrado dado x_0 en la cuenca de atracción y W un entorno de z , entonces existe un entorno de x_0, U , tal que si $y \in U$ entonces la solución $y(t)$ con $y(0) = y_0$ tiende a un punto $w \in W$; y además es invariante, si una solución $x(t)$ corta a la cuenca de atracción en un punto y_0 para un instante t_0 , basta tomar la solución trasladada $y(t) = x(t + t_0)$ tal que $y(0) = y_0$, y entonces $y(t) \rightarrow z$ cuando $t \rightarrow \infty$, que es lo mismo que decir que $x(t) \rightarrow z$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Definición 1.8 Un punto crítico se dice globalmente estable si su cuenca de atracción es el espacio de fase completo (o al menos su interior):

Definición 1.9 Sea $\dot{x} = f(x)$ una ecuación diferencial autónoma en \mathbb{R}^n y sea $x(t)$ solución de la ecuación con condición inicial $x(0) = x_0$. Definimos el ω -límite como el conjunto de todos los puntos de acumulación de $x(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$:

$$\omega(x_0) = \{y \in \mathbb{R}^n : x(t_k) \rightarrow y \text{ para alguna sucesión } t_k \rightarrow \infty\}.$$

2. Modelos de Lotka-Volterra clásicos con dos especies

2.1. Modelo depredador-presa de Lotka-Volterra

Si consideramos un ecosistema donde conviven dos especies, una presa de la otra, el modelo propuesto por Volterra fue el siguiente

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(a - by), \\ \dot{y} &= y(-c + dx),\end{aligned}\tag{2.1}$$

donde a, b, c, d son constantes positivas. El modelo anterior tiene la siguiente explicación:

- En ausencia de depredadores, $y = 0$, la ecuación de la presa queda como $\dot{x} = ax$, que tiene como solución $x(t) = x_0 e^{at}$. Esta función presenta un crecimiento exponencial. Por tanto, en ausencia de depredadores, la población de presas crece indefinidamente.
- En ausencia de presas, $x = 0$, la ecuación del depredador se queda como $\dot{y} = -cy$, cuya solución es $y(t) = y_0 e^{-ct}$. Esto indica que en caso de no haber presas, la población de depredadores tenderá a desaparecer.
- La constante $b > 0$, que corresponde al término cruzado $-bxy$, indica la tasa de decrecimiento de las presas por la depredación.
- La constante $d > 0$, que corresponde al término cruzado dxy , indica la tasa de crecimiento de los depredadores por la depredación.

En general, los modelos de interacción entre dos o más especies, sólo tienen sentido físico si x e y son funciones no negativas a través del tiempo. Por ello, a partir de ahora, nos centraremos en calcular las órbitas del espacio de fase sólo en el primer cuadrante.

Vamos a probar que el primer cuadrante es un conjunto invariante para el sistema (2.1). En efecto, la solución trivial $x(t) = 0, y(t) = y_0 e^{-ct}, y_0 > 0$, corresponde con el semieje vertical positivo. Análogamente, la solución trivial $x(t) = x_0 e^{at}, y(t) = 0$, corresponde con el semieje horizontal positivo, y las dos soluciones anteriores junto a la solución trivial $x(t) = 0, y(t) = 0$ forman una frontera en el primer cuadrante del plano de fases: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$.

Además, como sabemos que en un sistema autónomo dos soluciones no se pueden cortar, ya que contradeciría el teorema de existencia y unicidad, toda solución que parta del primer cuadrante no puede salir de éste y, por tanto, el interior del primer cuadrante $C_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ es un conjunto invariante.

El único punto crítico de (2.1) en C_1 es:

$$\begin{aligned} x(a - by) = 0 &\Rightarrow y = \frac{a}{b}, \\ y(-c + dx) = 0 &\Rightarrow x = \frac{c}{d}, \end{aligned}$$

y lo denotaremos por $F(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$. Si linealizamos el sistema (2.1) en torno al punto crítico F , obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{-bc}{d}y, \\ \dot{y} &= \frac{ad}{b}x. \end{aligned}$$

Este sistema tiene soluciones periódicas de periodo $T = \frac{2\pi}{\frac{ac}{bc}}$. Así, el sistema (2.1) tiene la misma estructura en torno al punto crítico. En la Figura 1 representamos las órbitas del sistema (2.1) en el plano de fase con diversas condiciones iniciales.

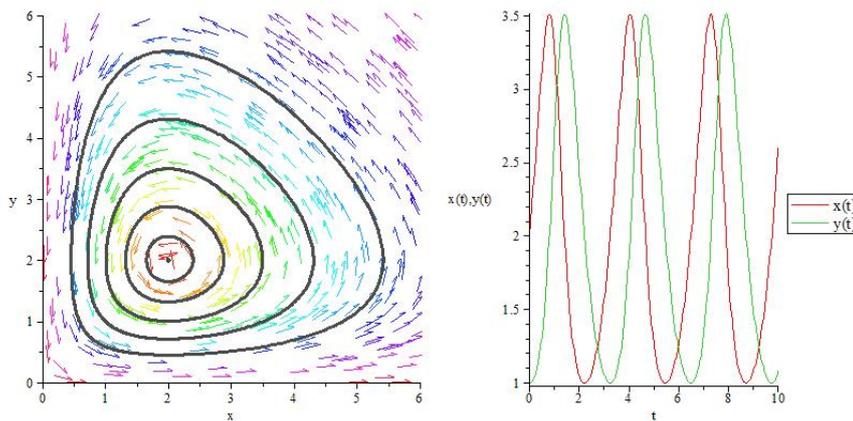


Figura 1: Plano de fases del modelo de Lotka-Volterra clásico. Soluciones con condiciones iniciales dadas

La Figura 1 demuestra que este modelo tiene órbitas cerradas en el plano de fase y por tanto tiene soluciones periódicas $x(t), y(t)$ en torno al punto crítico F .

2.2. Modelo depredador-presa con competencia intraespecie

Como se ha visto en el apartado anterior, la ecuación (2.1) presenta una explosión de la población de presas en el caso de que no hubieran depredadores. Para corregir este comportamiento, añadiremos un término logístico en la primera ecuación para describir la competencia intraespecie y añadiremos también un término logístico a la segunda ecuación. El modelo quedaría como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(a - by - ex), \\ \dot{y} &= y(-c + dx - fy), \end{aligned} \tag{2.2}$$

con $e > 0$ y $f \geq 0$. Vamos a probar que $C_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ también es un conjunto invariante en (2.2).

Es fácil ver que $x(t) = y(t) = 0$ es solución trivial del sistema. Supongamos que $x(t) = 0$, la segunda ecuación quedaría como:

$$\dot{y} = y(-c - fy) = -c \left(1 + \frac{y}{K}\right) y,$$

con $K = \frac{-c}{f}$. Esta ecuación tiene como solución:

$$y(t) = \frac{Ky_0}{(K - y_0)e^{ct} + y_0},$$

que toma el valor $y(0) = y_0$ y después tiende a 0 cuando $t \rightarrow \infty$. Así pues, dado que estamos en un sistema autónomo, ninguna trayectoria puede cortar al eje y .

Si $y(t) = 0$, tenemos que la primera ecuación toma la forma

$$\dot{x} = x(a - ex) = a \left(1 + \frac{x}{K}\right) x,$$

con $K = \frac{a}{e}$, con solución

$$x(t) = \frac{Kx_0}{(K - x_0)e^{at} + x_0}.$$

Esta solución se divide en tres intervalos: si $0 < x_0 < K$, la solución tenderá asintóticamente a $x = K = \frac{a}{e}$, si $x_0 = K$ da lugar a una solución estacionaria y si $x_0 > K$ la solución comienza en $x(0) = x_0$ y tenderá asintóticamente a $x = K = \frac{a}{e}$.

Por tanto, como las soluciones anteriores forman la frontera de C_1 tendremos que toda solución que empiece en C_1 no podrá salir de C_1 , con lo cual queda demostrado que C_1 es invariante.

Para estudiar cualitativamente el sistema (2.2) vamos a centrarnos en las **isoclinas**, o curvas de misma pendiente. La x -isoclina es la curva formada por los puntos en los que $\dot{x} = 0$. En nuestro caso, la ecuación de la x -isoclina es

$$a - by - ex = 0 \Rightarrow y = \frac{a}{b} - \frac{e}{b}x.$$

Análogamente, la y -isoclina es la curva formada por los puntos en los que $\dot{y} = 0$. En nuestro caso, tomando $f \neq 0$, resulta

$$-c + dx - fy = 0 \Rightarrow y = \frac{-c}{f} + \frac{d}{f}x.$$

Como la x -isoclina tiene pendiente negativa y la y -isoclina tiene pendiente positiva, las dos rectas se cortarán en un punto $F(\bar{x}, \bar{y})$. Distinguiremos dos casos: si $F \in C_1$ o si $F \notin C_1$.

Caso 1 ($F \notin C_1$)

En este caso, las isoclinas dividen a C_1 en tres regiones, que llamaremos I, II y III, de acuerdo con el gráfico dado en la Figura 2.

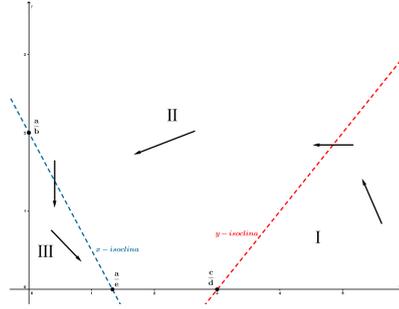


Figura 2: Isoclinas del Caso 1

Las trayectorias cortan a la x -isocline con pendiente vertical y a la y -isocline con pendiente horizontal. Estudiaremos las pendientes en las regiones I, II y III.

Como la y -isocline corta al eje x en el punto $(\frac{c}{d}, 0)$, el punto $P_1(\frac{2c}{d}, \frac{c}{2f})$ está en la región I, y se tiene que

$$\dot{x}(P_1) = \frac{2c}{f} \left(a - e \frac{2c}{d} - b \frac{c}{2f} \right) = \frac{2ce}{f} \left(\frac{a}{e} - \frac{2c}{d} - b \frac{c}{2ef} \right),$$

y, dado que $\frac{a}{e} - \frac{2c}{d} < 0$, ya que $\frac{a}{e} < \frac{c}{d}$, tenemos que $\dot{x}(P_1) < 0$. Por otro lado,

$$\dot{y}(P_1) = \frac{c}{2f} \left(-c + d \frac{2c}{d} - f \frac{c}{2f} \right) = \frac{c}{2f} \left(-c + 2c - \frac{c}{2} \right) = \frac{c}{2f} \frac{c}{2} > 0.$$

Así que, en la región I, se tiene que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} < 0,$$

es decir, las trayectorias tienen pendiente negativa.

De manera análoga a la anterior se puede ver que las trayectorias tienen pendiente positiva en la región II y negativa en la región III, lo cual queda reflejado en el gráfico de la Figura 2.

Por tanto la única posibilidad es que toda trayectoria tienda asintóticamente hacia el punto $P(\frac{a}{e}, 0)$, es decir, se producirá una extinción de los depredadores y la estabilización de las presas. Esto se muestra en la Figura 3:

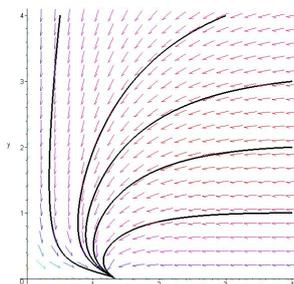


Figura 3: Trayectorias del Caso 1

Caso 2 ($F \in C_1$)

En este caso las isoclinas se cortan en el punto F de coordenadas

$$\bar{x} = \frac{bc + af}{bd + ef}, \quad \bar{y} = \frac{ad - ce}{bd + ef},$$

punto crítico del sistema (2.2). Las isoclinas dividen C_1 en 4 regiones: I, II, III y IV. Si realizamos un análisis de las pendientes como en el caso anterior obtendremos que en las regiones I y III las trayectorias tienen pendiente negativa y en las regiones II y IV tienen pendiente positiva. Pero este análisis sólo determina que las trayectorias giran en sentido contrario a las agujas del reloj en torno a F , sin saber si tienden a F o son órbitas periódicas.

Si linealizamos el sistema (2.2) en torno al punto F y simplificamos, la matriz asociada queda como:

$$J = \begin{pmatrix} -e \frac{af + 3bc}{bd + ef} & -b \frac{bc + af}{bd + ef} \\ d \frac{ad - ce}{bd + ef} & -f \frac{ad - ce}{bd + ef} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A & -B \\ C & -D \end{pmatrix},$$

con $A = e \frac{af + 3bc}{bd + ef} > 0$, $B = b \frac{bc + af}{bd + ef} > 0$, $C = d \frac{ad - ce}{bd + ef} > 0$ y $D = f \frac{ad - ce}{bd + ef} > 0$ dado que $F \in C_1$. Si calculamos los autovalores de J obtenemos que

$$\lambda_{1,2} = -\frac{D}{2} - \frac{A}{2} \pm \frac{\sqrt{D^2 - 2AD + A^2 - 4BC}}{2},$$

y como tenemos que

$$\frac{\sqrt{D^2 - 2AD + A^2 - 4BC}}{2} < \frac{\sqrt{D^2 + A^2}}{2} < \frac{D}{2} + \frac{A}{2},$$

entonces los autovalores son negativos los dos y por tanto F es un nodo estable. En la Figura 4 se muestran varias órbitas con distintas condiciones iniciales para este modelo y vemos que las órbitas tienden hacia el punto crítico F .

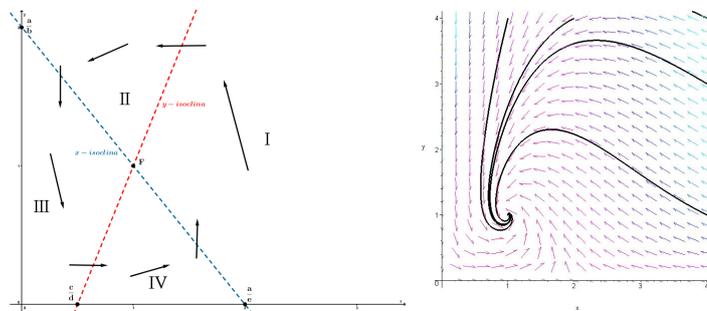


Figura 4: Punto crítico interior. Isoclinas y trayectorias del Caso 2

2.3. Modelo competitivo de Lotka-Volterra

Consideramos ahora dos especies x, y que habitan un ecosistema y compiten por los recursos del mismo. En este caso, cada una de las especies se ve desfavorecida por la presencia de la otra. Además de la competencia interespecie suponemos que también hay una competencia intraespecie de tipo logístico. Obtenemos por tanto el modelo

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(a - bx - cy), \\ \dot{y} &= y(d - ex - fy),\end{aligned}\tag{2.3}$$

donde todas las constantes son positivas.

Por un razonamiento análogo al de la sección anterior, tenemos que el conjunto C_1 es un conjunto invariante de \mathbb{R}^2 . Las ecuaciones de isoclinas del modelo (2.3) vienen dadas por:

$$\begin{aligned}x\text{-isoclina: } y &= \frac{a}{c} - \frac{b}{c}x, \\ y\text{-isoclina: } y &= \frac{d}{f} - \frac{e}{f}x.\end{aligned}$$

Recordemos que en los puntos de la x -isoclina las trayectorias tienen pendiente vertical y en la y -isoclina tienen pendiente horizontal. En este modelo podemos encontrar 3 casos:

Caso 1 (Las isoclinas no se cortan en C_1)

Este caso incluye el caso en que las isoclinas sean paralelas. Supongamos en primer lugar que la y -isoclina está por encima de la x -isoclina, esto divide al primer cuadrante en tres regiones: I, II y III, como se muestra en la Figura 5.

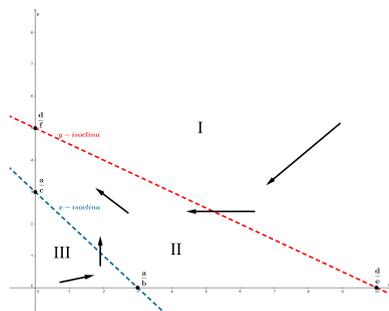


Figura 5: Isoclinas y campo de pendientes del Caso 1

Si estudiamos las pendientes en cada región como en el apartado anterior, obtenemos que en la región I las trayectorias tienen pendiente positiva y la orientación es de derecha a izquierda, en la y -isoclina se tiene que $\dot{x} < 0$ y, por tanto, las trayectorias van hacia la izquierda. En la región II las trayectorias tienen pendiente negativa y la orientación es de derecha a izquierda, en la x -isoclina se tiene que $\dot{x} > 0$ y, por tanto, las trayectorias van hacia arriba. Y en la región III las trayectorias tienen pendiente positiva y la orientación es de izquierda a derecha.

Por tanto, la única posibilidad es que todas las trayectorias tiendan hacia el punto $\left(0, \frac{d}{f}\right)$. Este hecho se ve con la gráfica de la Figura 6 con valores $a = 3, b = c = e = 1, d = 10, f = 2$.

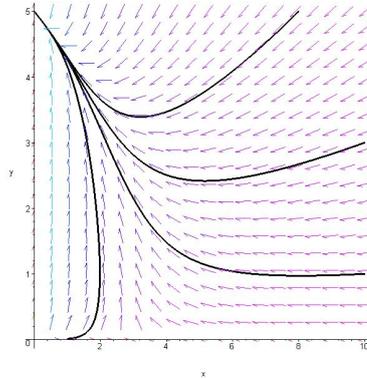


Figura 6: Trayectorias del Caso 1

Si en cambio lo que tenemos es que la x -isoclina esta por encima de la y -isoclina, el estudio es análogo pero ahora las trayectorias tenderán hacia el punto $\left(\frac{a}{b}, 0\right)$. Esto se ve en el gráfico de las isoclinas y en el de las trayectorias de la Figura 7.

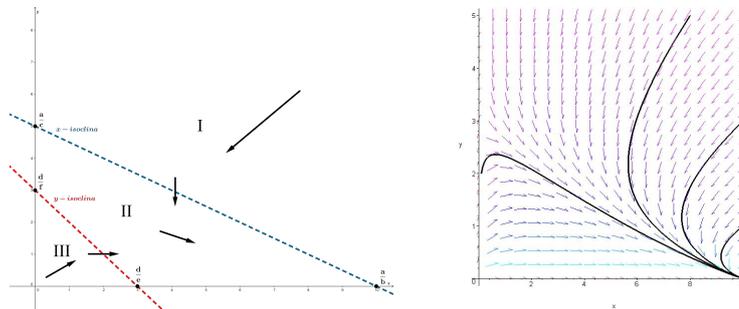


Figura 7: Isoclinas y trayectorias

Caso 2 (Las isoclinas coinciden)

La ecuación de ambas isoclinas es de la forma $y = n - mx$, siendo

$$n = \frac{a}{c} = \frac{d}{f}, \quad m = \frac{b}{c} = \frac{e}{f}.$$

En este caso, las isoclinas dividen el plano de fase en dos regiones: I y II.

Si realizamos un análisis de las pendientes como en el apartado anterior obtenemos que en la región I las pendientes son positivas y su orientación es de derecha a izquierda. Todos los puntos de la isoclina son puntos críticos, ya que se cumple al mismo tiempo $\dot{x} = 0 = \dot{y}$, y en la región II las pendientes son positivas y su orientación es de izquierda a derecha. Visualizamos estos resultados en la Figura 8.

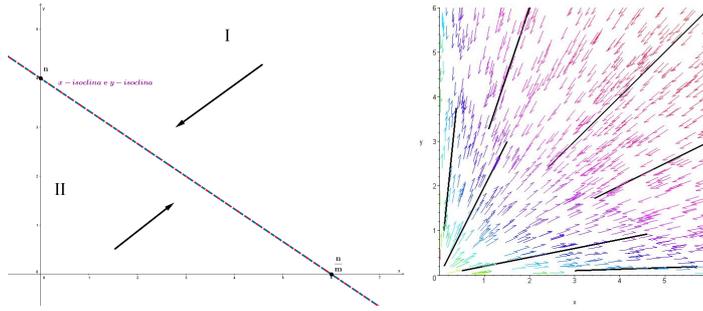


Figura 8: Isoclinas y trayectorias del Caso 2

Caso 3 (Las isoclinas se cortan en C_1)

El punto de corte de las isoclinas, $F(\bar{x}, \bar{y})$, es un punto de equilibrio de (2.3)

$$\bar{x} = \frac{af - cd}{bf - ce}, \quad \bar{y} = \frac{bd - ae}{bf - ce}.$$

Para estudiar este caso vamos a linealizar el sistema (2.3) en torno a F . La matriz jacobiana en F es

$$J(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} a - 2b\bar{x} - c\bar{y} & -c\bar{x} \\ -e\bar{x} & d - e\bar{x} - 2f\bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b\bar{x} & -c\bar{x} \\ -e\bar{x} & -f\bar{y} \end{pmatrix}.$$

Los autovalores de J en F son:

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(-b\bar{x} - f\bar{y} \pm \sqrt{(b\bar{x} + f\bar{y})^2 - 4\bar{x}\bar{y}(bf - ce)} \right).$$

Se tiene que $\lambda_- < 0$, pero para λ_+ tenemos dos casos:

- Si $bf - ce > 0$, entonces $\lambda_+ < 0$. Ambos autovalores son negativos y, por tanto, las trayectorias tienden hacia F por ser un nodo estable.
- Si $bf - ce < 0$ entonces $\lambda_+ > 0$. Como hay un autovalor de cada signo, F es un punto de silla. Realizando un estudio de las regiones que crean las isoclinas: I, II, III y IV, se obtiene que existen dos trayectorias que son separatrices que tienden al punto F , y el resto de las trayectorias tenderán al punto $F_1 \left(\frac{a}{e}, 0 \right)$ si están bajo las separatrices, o al punto $F_2 \left(0, \frac{d}{f} \right)$ si están por encima de las separatrices.

Estos dos casos quedan reflejados en los gráficos de las Figuras 9 y 10.

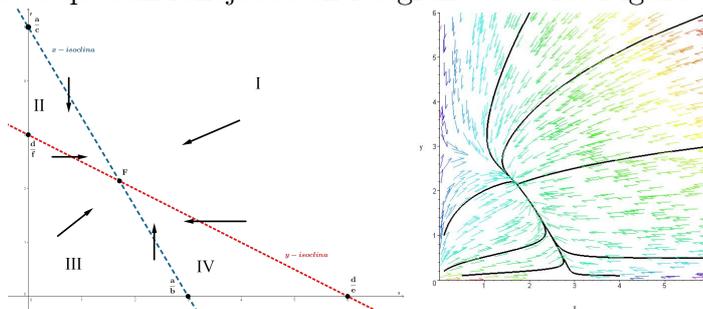


Figura 9: Isoclinas y trayectorias cuando $bf - ce > 0$

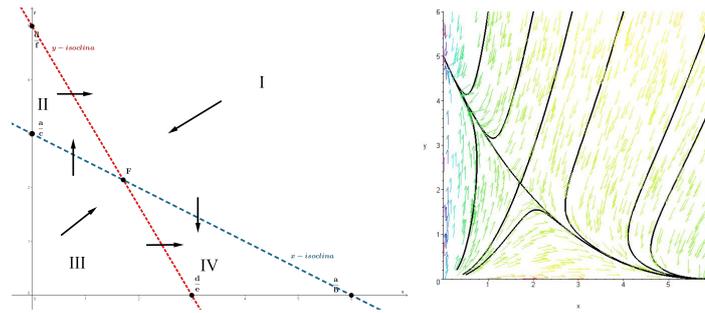


Figura 10: Isoclinas y trayectorias cuando $bf - ce < 0$

2.4. Modelo cooperativo de Lotka-Volterra

Las ecuaciones para este modelo son las siguientes:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(a - bx + cy), \\ \dot{y} &= y(d + ex - fy), \end{aligned} \tag{2.4}$$

donde seguimos incluyendo una competencia intraespecie de tipo logístico. Las ecuaciones de las isoclinas son

$$\begin{aligned} x - \text{isoclina: } y &= -\frac{a}{c} + \frac{b}{c}x, \\ y - \text{isoclina: } y &= \frac{d}{f} + \frac{e}{f}x. \end{aligned}$$

Es decir, ambas isoclinas tienen pendiente positiva. Por tanto tenemos dos casos, dependiendo si se cortan en C_1 o no.

Caso 1 (Las isoclinas no se cortan en C_1)

En este caso, las isoclinas dividen a C_1 en tres regiones: I, II y III. Un estudio de las isoclinas conduce a que las trayectorias entrarán en la región II y tenderán hacia el infinito. Esto se muestra en la Figura 11.

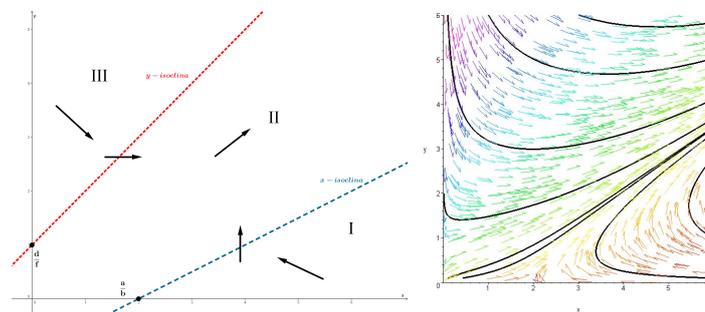


Figura 11: Caso 1: Isoclinas y trayectorias

Caso 2 (Las isoclinas se cortan en C_1)

El punto de corte $F(\bar{x}, \bar{y})$ es un punto de equilibrio de (2.4), con coordenadas

$$\bar{x} = \frac{af + cd}{bf - ce}, \quad \bar{y} = \frac{bd + ae}{bf - ce}.$$

Del análisis de las pendientes en las regiones formadas por las isoclinas obtenemos que las trayectorias convergen al punto crítico F , es decir es un punto crítico estable. Esto se ve en la Figura 12.

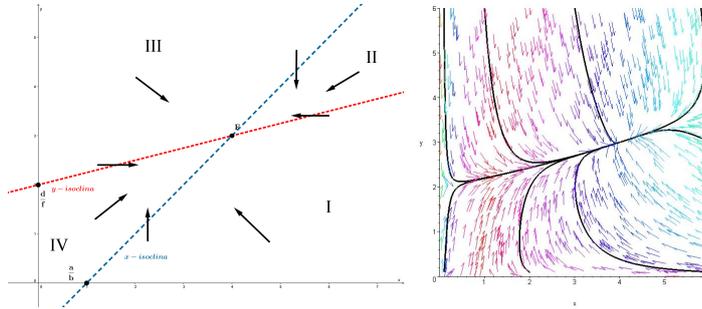


Figura 12: Caso 2: Isoclinas y trayectorias

Conclusion: Por tanto podemos concluir que en los modelos clásicos de Lotka-Volterra sólo existen órbitas periódicas en el modelo básico de depredador-presa.

El teorema de Poincaré-Bendixson

El teorema de Poincaré-Bendixson es uno de los resultados más potentes de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales en dimensión 2. Su aplicación se extiende a ecuaciones de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_1(x, y), \\ \dot{y} &= f_2(x, y).\end{aligned}\tag{2.5}$$

Utilizaremos este teorema para completar la caracterización de los sistemas de Lotka-Volterra en 2 dimensiones.

Teorema 2.1 (Poincaré-Bendixson) *Sea $\dot{x} = f(x)$ una ecuación diferencial en dimensión 2, definida en un abierto $G \subset \mathbb{R}^2$. Sea $\omega(x_0)$ el ω -límite correspondiente a la solución $x(t)$ con $x(0) = x_0$. Supongamos que $\omega(x_0)$ es no vacío y acotado (por tanto compacto, pues el ω -límite siempre es cerrado). Si $\omega(x_0)$ no tiene ningún punto crítico, entonces debe ser una órbita periódica.*

Teorema 2.2 (Bendixson-Dulac) *Sea $\dot{x} = f(x)$ una ecuación diferencial en dimensión 2, definida en un abierto $G \subset \mathbb{R}^2$ simplemente convexo. Sea $\text{div} f$ el operador divergencia dado por:*

$$\text{div} f(x) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x),$$

que coincide con la traza de la matriz jacobiana. Si $\text{div} f$ no se anula ni cambia de signo en G , es decir que $\text{div} f < 0$ o bien $\text{div} f > 0$ para todo $x \in G$, entonces la ecuación diferencial no tiene soluciones periódicas.

3. Modelos no lineales de ecuaciones ecológicas

En la sección anterior se han estudiado los modelos de Lotka-Volterra para dos especies de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(a - bx + cy), \\ \dot{y} &= y(d + ex - fy),\end{aligned}$$

donde a, b, c, d, e, f son números reales.

En esta sección, extenderemos el estudio a modelos más generales en los que los términos de interacción son funciones arbitrarias. Este modelo recibe el nombre de **ecuación ecológica para dos especies**,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_1(x, y), \\ \dot{y} &= f_2(x, y),\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde $f_1(x, y)$ y $f_2(x, y)$ deben cumplir condiciones que analizaremos seguidamente.

3.1. Modelo general

Vamos a caracterizar un modelo de depredador-presa para dos especies lo más realista posible.

En primer lugar, en ausencia de depredadores, parece razonable suponer que la población de presas tienda a estabilizarse en un determinado valor K , que denominaremos capacidad de soporte. Así,

$$\dot{x} = xg(x) \quad \text{si } y = 0,$$

donde la función g debe cumplir:

- $g(x) > 0$ si $x < K$.
- $g(x) = 0$ si $x = K$.
- $g(x) < 0$ si $x > K$, lo cual significa que $g'(K) < 0$.

Estas condiciones garantizan que $x = 0$ es un punto de equilibrio inestable y que $x = K$ es globalmente estable.

Por otro lado, en ausencia de presas, los depredadores experimentan un decaimiento exponencial en su número que conduce a su extinción, es decir,

$$\dot{y} = -dy, \quad \text{si } x = 0,$$

siendo d una constante positiva.

Analizaremos ahora las interacciones entre ambas especies. Está claro que la presencia de depredadores influye negativamente en el crecimiento de las presas.

Denotaremos por $\phi(x, y)$ la tasa de disminución per cápita de las presas debida a la depredación. De esta forma la ecuación de las presas queda como

$$\dot{x} = x(g(x) - \phi(x, y)).$$

Las condiciones que debe cumplir la función ϕ son:

- $\phi(x, 0) = 0$ para todo $x \geq 0$: sin depredadores no puede haber depredación.
- $\frac{\partial \phi}{\partial y} > 0$: cuantas más depredadores haya, más depredación habrá.
- $\frac{\partial \phi}{\partial x} \leq 0$: cuantas más presas haya, menos probabilidad de que una de ellas muera por depredación.

Para los depredadores, la presencia de presas significa un crecimiento en su número, cuya tasa per cápita denotaremos por $q(x)$. Así, la ecuación para los depredadores es

$$\dot{y} = y(-d + q(x)).$$

Las condiciones para q son las siguientes:

- $q(0) = 0$: en ausencia de presas, no hay depredación.
- $\frac{dq}{dx} > 0$ para todo $x > 0$: a mayor número de presas, mayor depredación. Esta condición se puede dividir en dos casos: si el crecimiento de $q(x)$ es ilimitado, o que $q(x)$ tienda asintóticamente hacia una cota superior q_∞ . En este segundo caso se habla de respuesta saturada.

El sistema así modelado es la **ecuación ecológica depredador-presa**, y toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(g(x) - \phi(x, y)), \\ \dot{y} &= y(-d + q(x)), \end{aligned} \tag{3.2}$$

donde g , ϕ y q reciben el nombre de funciones de respuesta. Vamos a proceder al estudio de los puntos críticos del sistema.

El origen $(0, 0)$ y el punto $P(K, 0)$ son puntos críticos de (3.2). Si x e y son distintos de cero, estudiamos la existencia de puntos críticos en C_1 . Para ello, se deben cumplir las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} g(x) - \phi(x, y) &= 0, \\ -d + q(x) &= 0. \end{aligned}$$

Como $q(0) = 0$ y $q'(x) > 0$, existirá a lo sumo un valor de x , que denotaremos por \bar{x} , tal que $q(\bar{x}) = d$. Si $q(x)$ presenta un crecimiento saturado con $q_\infty \leq d$ entonces la ecuación $q(x) = d$ no tiene solución. Si $q(x)$ presenta un crecimiento ilimitado, o si presenta un crecimiento saturado con $q_\infty > d$, entonces \bar{x} existe y es único. Esto nos lleva a resolver la primera ecuación cuando $x = \bar{x}$, es decir, a encontrar un valor de y , que denotaremos por \bar{y} , que satisfaga

$$g(\bar{x}) = \phi(\bar{x}, \bar{y}).$$

Dado que ϕ es una función no negativa debe ser $g(\bar{x}) > 0 \Rightarrow \bar{x} < K$. Ya que $q(\bar{x}) = d$ y q es monótona creciente y, por tanto, invertible, podemos poner $\bar{x} = q^{-1}(d)$, de forma que $q^{-1}(d) < K \Rightarrow d < q(K)$. Esto nos impone una condición necesaria de existencia más restrictiva que la condición $d < q_\infty$ que acabamos de deducir.

Por otro lado, fijado un valor de x , sabemos que $\phi(x, 0) = 0$ y que $\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} > 0$. En particular, $\phi(\bar{x}, 0) = 0$ y que $\frac{\partial \phi(\bar{x}, y)}{\partial y} > 0$, es decir que $\phi(\bar{x}, y)$ como función de y , es monótona creciente partiendo de cero. Al igual que ocurría con $q(x)$, el crecimiento puede ser ilimitado o saturarse en un valor ϕ_∞ . Si $\phi_\infty \leq g(\bar{x})$, no existe punto crítico en C_1 , pero si el crecimiento es ilimitado o si $\phi_\infty > g(\bar{x})$, entonces existe un único valor positivo de y , que denotaremos por \bar{y} , tal que

$$g(\bar{x}) = \phi(\bar{x}, \bar{y}).$$

El punto crítico interior así hallado se denota por $F(\bar{x}, \bar{y}) \in C_1$.

A continuación, supuesta la existencia de F , vamos a estudiar las isoclinas de (3.2). Para la y -isoclina tenemos

$$q(x) = d \Rightarrow x = \bar{x} = q^{-1}(d),$$

que es la recta vertical de abscisa $x = \bar{x}$. Para la x -isoclina tenemos:

$$g(x) = \phi(x, y),$$

que es una curva definida de forma implícita en el plano (x, y) . Puesto que los puntos $(0, g(0))$ y $(K, 0)$ están sobre la curva, y $K > \bar{x}$, es claro que la curva $g(x) = \phi(x, y)$ corta a la recta vertical $x = \bar{x}$ en el punto $F(\bar{x}, \bar{y}) \in C_1$.

Por tanto, las isoclinas dividen al primer cuadrante en 4 regiones que denominaremos I, II, III y IV. Para estudiar la pendiente de las trayectorias en cada una de las 4 regiones observamos que $q(x)$ es una función creciente tal que $q(0) = 0$, así que $q(x) > d$ si $x > \bar{x}$ (regiones I y III) y $q(x) < d$ si $x < \bar{x}$ (regiones II y IV).

Por otro lado, a la izquierda de la curva $g(x) = \phi(x, y)$, p.e. en el origen, se tiene que $g(0) > 0$ y $\phi(0, 0) = 0$, así que $g(x) > \phi(x, y)$ (regiones I y IV). Sin embargo,

a la derecha de la curva, p.e. en los puntos con $x > K$, se tiene que $g(x) < 0$ y $\phi(x, y) \geq 0$, así que $g(x) < \phi(x, y)$ (regiones II y III).

De este modo, tenemos para las distintas regiones:

- Región I: $\dot{x} > 0$ y $\dot{y} > 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} > 0$ (trayectorias con pendiente positiva).
- Región II: $\dot{x} < 0$ y $\dot{y} > 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} < 0$ (trayectorias con pendiente negativa).
- Región III: $\dot{x} < 0$ y $\dot{y} < 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} > 0$ (trayectorias con pendiente positiva).
- Región IV: $\dot{x} > 0$ y $\dot{y} < 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} < 0$ (trayectorias con pendiente negativa).

A partir de este análisis, sabemos que las trayectorias rodean al punto crítico F en sentido contrario a las agujas del reloj, pero no sabemos si las trayectorias son periódicas (ciclos límite) o espirales.

Para obtener más información, vamos a linealizar (3.2). La matriz jacobiana es

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(x) - \phi(x, y) + xg'(x) - x\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x} & -x\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial y} \\ yq'(x) & q(x) - d \end{pmatrix}.$$

Particularizamos la matriz jacobiana para cada uno de los puntos críticos.

En el origen $(0, 0)$ se tiene que $\phi(0, 0) = 0$ y $q(0) = 0$, así que

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} g(0) & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix},$$

y como hay un autovalor de cada signo, el origen es un punto de silla del sistema linealizado y también de (3.2). La variedad estable del sistema (3.2) es el eje y y la inestable es el eje x .

En el punto $P(K, 0)$, se tiene que $g(K) = 0$, $\phi(K, 0) = 0$ y $\frac{\partial\phi}{\partial x}(K, 0) = 0$, así que

$$J(K, 0) = \begin{pmatrix} Kg'(K) & -K\frac{\partial\phi}{\partial y}(K, 0) \\ 0 & q(K) - d \end{pmatrix}.$$

Sabemos que $g'(K) < 0$, por lo que se nos presentan dos casos. Si $q(K) < d$, es decir, no existe punto crítico interior, el punto P es un nodo estable para el sistema linealizado y para (3.2). Si $q(K) > d$, en cuyo caso sí existe punto crítico interior, entonces P es un punto silla tanto para el sistema linealizado como para (3.2). Su variedad estable es el eje x , y su variedad inestable es una trayectoria separatriz que parte de P y divide al interior del cuadrante C_1 en dos regiones, de forma que ninguna otra trayectoria puede cruzar esta separatriz.

En el punto $F(\bar{x}, \bar{y})$, se tiene que $g(\bar{x}) = \phi(\bar{x}, \bar{y})$ y $q(\bar{x}) = d$, así que:

$$J(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} \bar{x} \left[g(\bar{x}) - \frac{\partial \phi}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) \right] & -\bar{x} \frac{\partial \phi}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \\ \bar{y} q'(\bar{x}) & 0 \end{pmatrix},$$

con autovalores

$$\lambda_{\pm} = \frac{\bar{x} \left(g(\bar{x}) - \frac{\partial \phi}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) \right) \pm \sqrt{\left[\bar{x} \left(g(\bar{x}) - \frac{\partial \phi}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) \right) \right]^2 - 4\bar{x}\bar{y}q'(\bar{x}) \frac{\partial \phi}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y})}}{2}.$$

Vamos a interpretar el término $\bar{x} \left(g(\bar{x}) - \frac{\partial \phi}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) \right)$ en función de la pendiente de la y -isoclina. En efecto, partimos de la ecuación de la y -isoclina: $g(x) = \phi(x, y)$ y derivamos con respecto a x :

$$g'(x) = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{g'(x) - \frac{\partial \phi}{\partial x}}{\frac{\partial \phi}{\partial y}}.$$

Es decir, que el signo de la pendiente de la y -isoclina en el punto F coincide con el signo de $\bar{x} \left(g(\bar{x}) - \frac{\partial \phi}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) \right)$. Ponemos $m = \frac{dy}{dx}(\bar{x}, \bar{y})$ de forma que se presentan tres casos:

- Si $m < 0$, ambos autovalores tienen parte real negativa, por lo que $F(\bar{x}, \bar{y})$ es un nodo estable del sistema linealizado y también de (3.2). Las trayectorias tienden a F en espiral.
- Si $m > 0$, ambos autovalores tienen parte real positiva y, por tanto, $F(\bar{x}, \bar{y})$ es un nodo inestable, lo que hace que aparezca un nuevo atractor cíclico, es decir, una trayectoria periódica que rodea a F y atrae a todas las trayectorias que empiecen en C_1 . Este comportamiento, en el cual un punto crítico estable para $m < 0$ se desdobra en un punto crítico inestable más un atractor cíclico para $m > 0$ se denomina bifurcación de Hopf.
- Si $m = 0$, los autovalores son imaginarios puros, por lo que F es un centro para el sistema linealizado, pero no podemos determinar su naturaleza para el sistema (3.2).

3.2. Bifurcación de Hopf

Para avanzar con el estudio de las órbitas vamos a definir que es un ciclo límite:

Definición 3.1 (Atractor) Una órbita periódica γ es un **atractor** si $\omega(x_0) = \gamma$ para todas las condiciones iniciales x_0 en algún entorno de γ .

Definición 3.2 (Ciclo límite) Una órbita periódica γ es un **ciclo límite** si $\omega(x_0) = \gamma$ para al menos un $x_0 \notin \gamma$. Obviamente, la primera condición es más fuerte que la segunda ya que todo atractor es un ciclo límite.

Ahora vamos a estudiar el comportamiento anteriormente descrito del desdoble de un punto crítico estable a un punto crítico inestable más un ciclo límite:

Teorema 3.3 (Hopf) Sea G un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 y $\dot{x} = f_\mu(x)$ una familia de ecuaciones definida en G y dependiente de un parámetro real μ . Sea P_μ un punto crítico de la ecuación diferencial trasladado al origen por un cambio de coordenadas, supongamos que las componentes de $f_\mu(x)$ admiten un desarrollo en serie de potencias en torno al origen al menos hasta orden 3:

$$A(\mu)x + F(\mu, x), \text{ con } F(\mu, x) \in C^3.$$

Sean $\alpha(\mu) + i\beta(\mu)$ los autovalores de $A(\mu)$. Supongamos que se cumplen las condiciones $F(\mu, 0) = 0$, $D_x F(0, 0) = 0$ y además $\alpha(0) = 0$, $\frac{d\alpha}{d\mu}(0) \neq 0$ y $\beta(0) \neq 0$.

Entonces, para todo entorno del origen, U , y para todo $\mu_0 > 0$, existe $\bar{\mu}$ con $|\bar{\mu}| < \mu_0$, tal que la ecuación

$$\dot{x} = A(\mu)x + F(\mu, x)$$

tiene una órbita periódica no trivial, es decir, no constante, en el entorno U .

Teorema 3.4 (Hopf, versión fuerte) Sea G un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y $\dot{x} = f_\mu(x)$ una familia de ecuaciones definida en G y dependiente de un parámetro real μ . Sea P_μ un punto crítico de la ecuación diferencial y supongamos que todos los autovalores de la matriz jacobiana en μ , J_μ , tienen parte real negativa con la excepción de un par de autovalores complejos conjugados $\alpha(\mu) + i\beta(\mu)$ tales que el signo de $\alpha(\mu)$ es el mismo que el de μ , y $\beta(0) \neq 0$. Supongamos que se cumplen estas tres condiciones adicionales:

1. Las componentes de f_μ son analíticas.
2. $\frac{d\alpha}{d\mu}(\mu = 0) > 0$.
3. P_0 es asintóticamente estable.

Entonces, para valores positivos y suficientemente pequeños del parámetro μ , el punto de equilibrio inestable P_μ está rodeado por un atractor periódico, que típicamente depende del valor de μ . El periodo del ciclo es aproximadamente igual a:

$$T = \frac{2\pi}{\beta(0)}.$$

Definición 3.5 Si las órbitas periódicas ocurren para $\mu > 0$ y se comportan como atractores, la transición que recibe el nombre de bifurcación de Hopf **supercrítica**, ocurre cuando μ pasa de valores negativos a positivos.

Si la órbitas periódicas ocurren para $\mu < 0$ y se comportan como repulsores, la transición que recibe el nombre de bifurcación de Hopf **subcrítica**, ocurre cuando μ pasa de valores positivos a negativos.

Si la órbitas periódicas ocurren sólo cuando $\mu = 0$, es una bifurcación de Hopf **degenerada**.

3.3. Modelo depredador-presa de Gause

A continuación, vamos a describir diversos casos particulares de ecuaciones ecológicas de depredador-presa. El primero de ellos es el introducido por G. Gause en 1930, en el cual $\phi(x, y)$ toma la forma:

$$\phi(x, y) = \frac{y}{x}p(x),$$

donde $p(x)$ representa la cantidad promedio de presa cazada por cada depredador y debe cumplir que $p(0) = 0$ y $p(x) > 0$ para $x > 0$.

El modelo de Gause toma por tanto una forma similar a la de (3.2):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x, y) = xg(x) - yp(x), \\ \dot{y} &= f_2(x, y) = y(-d + q(x)). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Vamos a realizar el análisis de estabilidad de los puntos críticos.

Puesto que $x \equiv 0$ y $y \equiv 0$ son soluciones de (3.3) tenemos que el interior de C_1 es invariante. Además, como $q(x)$ es monótona creciente, existirá a lo sumo un valor \bar{x} tal que $q(\bar{x}) = d$. Si no existe este valor entonces implica que $\dot{y} < 0$, lo que conlleva la extinción de los depredadores. Excluimos esta situación y nos centramos en la situación en la que \bar{x} existe. La y -isoclina en este caso es la recta vertical $x = \bar{x}$.

Por otro lado, la x -isoclina viene dada por la ecuación

$$y = \frac{xg(x)}{p(x)},$$

que es una función definida para $x \in (0, \infty)$. Además, $y > 0$ si $x \in (0, K)$, $y = 0$ si $x = K$ e $y < 0$ si $x > K$.

Si $\bar{x} \geq K$, ambas isoclinas no se cortan en C_1 . Vamos a estudiar los puntos críticos en el primer cuadrante. Si $y = 0$, es inmediato ver que los puntos críticos son el origen $(0, 0)$ y el punto $P(0, K)$. Si existiera un punto crítico fuera del eje x , su ordenada sería:

$$\bar{y} = \frac{\bar{x}g(\bar{x})}{p(\bar{x})},$$

y ya que $\bar{x} > 0$, $p(\bar{x}) > 0$ pero $g(\bar{x}) < 0$ por ser $\bar{x} \geq K$, se tiene que $\bar{y} < 0$, que está fuera del primer cuadrante. La matriz jacobiana es

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(x) + xg'(x) - yp'(x) & -p(x) \\ yq'(x) & q(x) - d \end{pmatrix}.$$

Evaluamos A en ambos puntos críticos

$$A(0, 0) = \begin{pmatrix} g(0) & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix},$$

que obviamente tiene autovalor de cada signo, por tanto, el origen es un punto de silla para el sistema linealizado y para (3.3).

$$A(K, 0) = \begin{pmatrix} Kg'(K) & -p(K) \\ 0 & q(K) - d \end{pmatrix}.$$

Dado que $g'(K) < 0$, se tiene que el primer elemento de la diagonal es negativo, además, como $\bar{x} > K$, se tiene que $q(K) < d$, por lo que el segundo elemento también es negativo y, por tanto, $P(K, 0)$ es un punto crítico estable del sistema linealizado y de (3.3).

Consideraremos ahora el caso en el que ambas isoclinas se cortan en C_1 , lo cual ocurre cuando $\bar{x} < K$. En este caso el punto de intersección es único y lo denotamos por $F(\bar{x}, \bar{y})$. En este caso, el origen sigue siendo un punto de silla del sistema, pero $P(K, 0)$ deja de ser estable. En efecto, dado que tenemos que $\bar{x} < K$, se tiene que $q(K) > d$ y, por tanto, el segundo término de la diagonal de $A(K, 0)$ es positivo, y $P(K, 0)$ es un punto de silla de (3.3).

Para estudiar el carácter de F , evaluamos la matriz jacobiana A en F , teniendo en cuenta que $q(K) = d$.

$$A(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} g(\bar{x}) + \bar{x}g'(\bar{x}) - \bar{y}p'(\bar{x}) & -p(\bar{x}) \\ \bar{y}q'(\bar{x}) & 0 \end{pmatrix}.$$

Por la ecuación de la y -isoclina sabemos que $\bar{y} = \frac{\bar{x}g(\bar{x})}{p(\bar{x})}$, por lo que el primer elemento de la matriz A se puede expresar como:

$$\begin{aligned} g(\bar{x}) + \bar{x}g'(\bar{x}) - \frac{\bar{x}g(\bar{x})}{p(\bar{x})}p'(\bar{x}) &= \frac{p(\bar{x})[g(\bar{x}) + \bar{x}g'(\bar{x})] - \bar{x}g(\bar{x})p'(\bar{x})}{p(\bar{x})} \\ &= p(\bar{x}) \frac{d}{dx} \left[\frac{xg(x)}{p(x)} \right]_{x=\bar{x}}. \end{aligned}$$

Ponemos

$$m = \frac{d}{dx} \left[\frac{xg(x)}{p(x)} \right]_{x=\bar{x}},$$

y puesto que $p(\bar{x}) > 0$, el signo del primer elemento de A coincide con el signo de m . La matriz jacobiana toma, por tanto, la forma

$$A(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} p(\bar{x})m & -p(\bar{x}) \\ \bar{y}q'(\bar{x}) & 0 \end{pmatrix}.$$

Si calculamos los autovalores de A , obtenemos:

$$\lambda_{\pm} = \frac{p(\bar{x})m \pm \sqrt{[p(\bar{x})m]^2 - 4\bar{y}p(\bar{x})q'(\bar{x})}}{2}.$$

En caso de que la pendiente de la x -isoclina sea negativa, $m < 0$, entonces ambos autovalores son negativos y, por tanto, $F(\bar{x}, \bar{y})$ es un punto crítico asintóticamente estable del sistema linealizado, y de (3.3).

Si la pendiente es cero, $m = 0$, los autovalores son complejos conjugados, con lo cual, F es un centro del sistema linealizado pero no sabemos su comportamiento en (3.3).

Si la pendiente es positiva, $m > 0$, entonces ambos autovalores son positivos y, por tanto, $F(\bar{x}, \bar{y})$ es un punto crítico inestable del sistema linealizado, y de (3.3).

Si aplicamos el teorema de Poincaré-Bendixson, obtenemos dos alternativas:

- Si $\omega(x_0)$ contiene un punto crítico, éste debe ser F . Del campo de pendientes deducimos que F es globalmente estable. La pendiente de la x -isoclina es negativa en el corte con la y -isoclina: $m < 0$.
- Si $\omega(x_0)$ no contiene un punto crítico, entonces debe ser una órbita periódica que llamaremos γ . Esta órbita debe rodear un punto crítico, que necesariamente ha de ser F . Obviamente γ es un ciclo límite. Toda órbita que comienza en puntos suficientemente alejados de γ se aproxima en espiral hacia el ciclo límite sin intersectarlo. Hemos visto que si $m > 0$, el punto F es inestable. Por tanto, las trayectorias que empiezan muy próximas a F se alejan en espiral de él y también se aproximan asintóticamente a γ . Representamos el campo de pendientes y varias trayectorias para este caso en la Figura 13.

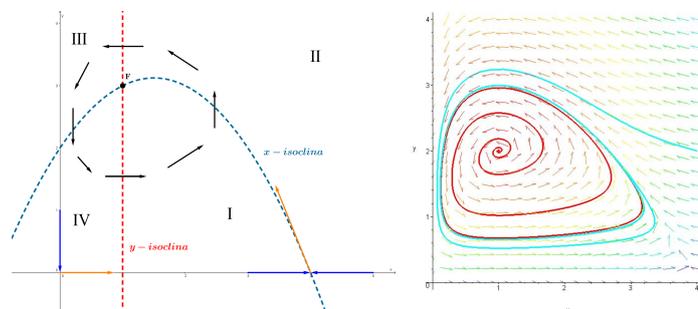


Figura 13: Campo de pendientes y trayectorias. Atractor estable

De este modo concluimos que el modelo de Gause produce una bifurcación de Hopf.

3.4. Respuestas funcionales de Holling

En los años 50, C. S. Hollin, propuso tres tipos diferentes de forma funcional para la tasa alimentaria p , que dependían de x . Describimos a continuación los tres tipos de respuesta funcional de Holling.

Tipo 1 (Respuesta lineal)

La tasa alimentaria toma la forma $p(x) = cx$, donde c es una constante de proporcionalidad positiva. Esta tasa alimentaria es la misma que la considerada para el modelo lineal de Lotka-Volterra, por lo tanto, el sistema (3.2) tiene el mismo comportamiento cualitativo que los sistemas de Lotka-Volterra y, por tanto, no tiene órbitas periódicas.

Tipo 2 (Respuesta saturada)

La tasa alimentaria se toma proporcional a $\frac{x}{a+x}$, donde a es una constante positiva:

$$p(x) = \frac{cx}{a+x}.$$

La respuesta se denomina saturada ya que para valores muy grandes de x , la tasa alimentaria máxima se estabiliza en un valor igual a c , lo que significa que cuando los depredadores están saciados no aumenta la cantidad de presas cazadas a pesar de que su población sea muy grande.

Si se asume la misma dependencia saturada para $q(x)$ y una dependencia lineal para $g(x)$ se tiene que

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{bx}{a+x}, \\ g(x) &= r \left(1 - \frac{x}{K} \right), \end{aligned}$$

y el sistema (3.2) toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= rx \left(1 - \frac{x}{K} \right) - y \frac{cx}{a+x}, \\ \dot{y} &= y \left(-d + \frac{bx}{a+x} \right), \end{aligned} \tag{3.4}$$

donde todos los parámetros son positivos. Claramente, el origen $(0, 0)$ y $P(K, 0)$ son puntos críticos de (3.4). Vamos a estudiar si existen otros puntos críticos del sistema para $x \neq 0$ e $y \neq 0$. De la segunda ecuación de (3.4) tenemos que

$$-d + \frac{bx}{a+x} = 0 \Rightarrow \bar{x} = \frac{ad}{b-d},$$

lo que significa que se debe cumplir $b > d$ para que exista \bar{x} . Por otro lado, de la primera ecuación de (3.4) tenemos que

$$r \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{cy}{a+x} = 0 \Rightarrow y = \frac{a+x}{c} r \left(1 - \frac{x}{K} \right).$$

Substituyendo $x = \bar{x} = \frac{ad}{b-d}$ y simplificando obtenemos que

$$\bar{y} = \frac{rab}{Kc(b-d)} \left(K - \frac{ad}{b-d} \right).$$

Con lo que, para que $\bar{y} > 0$, se debe cumplir que $K > \frac{ad}{b-d}$.

Consideramos primero el caso en que no hay punto crítico interior y por tanto los únicos puntos críticos son $(0, 0)$ y $P(K, 0)$. La matriz jacobiana de (3.4) es

$$\begin{aligned} A(x, y) &= \begin{pmatrix} g(x) + xg'(x) - yp'(x) & -p(x) \\ yq'(x) & q(x) - d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{rx}{K} - y \frac{ac}{(a+x)^2} & -\frac{cx}{a+x} \\ \frac{ab}{y(a+x)^2} & -d + \frac{bx}{a+x} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En el origen se tiene que

$$A(0, 0) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix},$$

por lo que el origen es un punto de silla para el sistema linealizado y también de (3.4). En $P(K, 0)$ se tiene que

$$A(K, 0) = \begin{pmatrix} -r & -\frac{cK}{a+K} \\ 0 & -d + \frac{bK}{a+K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & -\frac{cK}{a+K} \\ 0 & (b-d) \frac{K - \frac{ad}{b-d}}{a+K} \end{pmatrix},$$

entonces, si $b \leq d$ o $K \leq \frac{ad}{b-d}$, se comprueba fácilmente que $P(K, 0)$ es un punto crítico estable del sistema linealizado y de (3.4).

Consideramos ahora el caso en el que hay punto crítico interior $F(\bar{x}, \bar{y}) \in C_1$ con coordenadas

$$\bar{x} = \frac{ad}{b-d}, \quad \bar{y} = \frac{abr}{Kc(b-d)} \left(K - \frac{ad}{b-d} \right).$$

En el apartado anterior se demostró que F es un punto crítico estable \Leftrightarrow la pendiente de la x -isoclina es negativa en el punto de corte

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{xg(x)}{p(x)} \right]_{x=\bar{x}} < 0,$$

en nuestro caso tenemos que

$$\frac{xg(x)}{p(x)} = \frac{xr \left(1 - \frac{x}{K} \right)}{\frac{cx}{a+x}} = \frac{r}{c} (a+x) \left(1 - \frac{x}{K} \right) \Rightarrow \frac{d}{dx} \left[\frac{xg(x)}{p(x)} \right]_{x=\bar{x}} = K - a - 2\bar{x}.$$

Por lo tanto, F es estable $\Leftrightarrow K < a + 2\bar{x}$. El siguiente teorema nos permite refinar este resultado.

Teorema 3.6 *El punto crítico F es globalmente estable para (3.4) $\Leftrightarrow K \leq a + 2\bar{x}$.*

En resumen, si $K < a + 2\bar{x}$, el punto F es un nodo estable.

Si $K = a + 2\bar{x}$, el punto F ya no es asintóticamente estable, pero sigue siendo estable.

Si $K > a + 2\bar{x}$, el punto F es un nodo inestable, y todas las trayectorias cerca de él se alejan. Sin embargo, esto no ocurre con trayectorias que empiezan lejos de F , que se acercan a él, por tanto existirá un ciclo límite que rodee a F .

Por tanto, el modelo de respuesta saturada también presenta una bifurcación de Hopf.

Tipo 3 (Respuesta sigmoideal)

En este caso la tasa alimentaria toma la forma:

$$p(x) = \frac{cx^2}{a^2 + x^2},$$

que también se satura en el valor c para valores grandes de x . Sin embargo, en este caso, existe un punto de inflexión de la curva, que tiene la función de modelar una menor tasa alimentaria para densidades pequeñas de presa. Su nombre viene dado por la forma de letra "S" que adquiere la curva.

Vamos a asumir que hay un comportamiento sigmoideal para $q(x)$ y lineal para $g(x)$, es decir,

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{bx^2}{a^2 + x^2}, \\ g(x) &= r \left(1 - \frac{x}{K}\right). \end{aligned}$$

Por tanto, el sistema (3.2) toma la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - y \frac{cx^2}{a^2 + x^2}, \\ \dot{y} &= y \left(-d + \frac{bx^2}{a^2 + x^2}\right). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Vamos a proceder al estudio de la estabilidad de los puntos críticos de (3.5). El origen $(0, 0)$ y el punto $P(K, 0)$ son puntos críticos. Para determinar si existen puntos críticos en el interior de C_1 , vemos bajo que condiciones existe solución al sistema

$$\begin{aligned} r \left(1 - \frac{x}{K}\right) - y \frac{cx}{a^2 + x^2} &= 0, \\ -d + \frac{bx^2}{a^2 + x^2} &= 0. \end{aligned}$$

Despejando x de la segunda ecuación obtenemos

$$\bar{x} = a \sqrt{\frac{d}{b-d}},$$

que sólo existe si $b > d$. Despejando y de la primera ecuación y substituyendo \bar{x} obtenemos

$$\bar{y} = \frac{abr}{c\sqrt{d(b-d)}} \left(1 - \frac{a}{K} \sqrt{\frac{d}{b-d}} \right).$$

Para que exista el punto crítico dentro de C_1 , \bar{y} tiene que ser mayor que 0. Por tanto, tenemos que

$$\left(1 - \frac{a}{K} \sqrt{\frac{d}{b-d}} \right) > 0 \Rightarrow K > a \sqrt{\frac{d}{b-d}},$$

o lo que es lo mismo: $K > \bar{x}$. En resumen, las dos condiciones: $b > d$ y $K > \bar{x}$ garantizan la existencia de un punto crítico interior.

Vamos a estudiar la estabilidad de los puntos críticos por medio de la matriz jacobiana

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \left(1 - \frac{2x}{K} \right) - 2ca^2 \frac{xy}{(a^2 + x^2)^2} & -\frac{cx^2}{a^2 + x^2} \\ 2ba^2 \frac{xy}{(a^2 + x^2)^2} & -d + \frac{bx^2}{a^2 + x^2} \end{pmatrix}.$$

En el origen la matriz jacobiana es

$$A(0, 0) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, el origen es un punto de silla en el sistema linealizado y en (3.5). En el punto $P(K, 0)$ la matriz jacobiana es

$$A(K, 0) = \begin{pmatrix} -r & -\frac{cK^2}{a^2 + K^2} \\ 0 & -d + \frac{bK^2}{a^2 + K^2} \end{pmatrix}.$$

El segundo término se puede expresar como

$$\frac{(b-d)K^2 - da^2}{a^2 + K^2} = \frac{b-d}{a^2 + K^2} \left(K^2 - \frac{da^2}{b-d} \right).$$

Por tanto, se nos presentan dos casos:

- Si $b < d$ o $K^2 < \frac{da^2}{b-d}$, en cuyo caso no existe punto crítico interior, ambos autovalores son negativos y $P(K, 0)$ es un nodo estable.
- Si $b > d$ y $K^2 > \frac{da^2}{b-d}$, en cuyo caso sí existe punto crítico interior, entonces $P(K, 0)$ es un punto de silla del linealizado y de (3.5).

Asumimos ahora que existe el punto crítico interior $F(\bar{x}, \bar{y})$. Evaluando la matriz jacobiana en F y simplificando tenemos que

$$A(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} r \left(\frac{2b}{d} - 1 - \frac{2ad}{bK} \sqrt{\frac{d}{b-d}} \right) & -\frac{cd}{b} \\ \frac{2(b-d)^2}{ba^2} \bar{x}\bar{y} & 0 \end{pmatrix}$$

Cuyos autovalores son

$$\lambda_{\pm} = \frac{r \left(\frac{2b}{d} - 1 - \frac{2ad}{bK} \sqrt{\frac{d}{b-d}} \right) \pm \sqrt{r^2 \left(\frac{2b}{d} - 1 - \frac{2ad}{bK} \sqrt{\frac{d}{b-d}} \right)^2 - \frac{8cd(b-d)^2}{a^2b^2} \bar{x}\bar{y}}}{2}.$$

Vamos a estudiar el signo del término entre paréntesis, que denotamos por M

$$M = \frac{2b}{d} - 1 - \frac{2ad}{bK} \sqrt{\frac{d}{b-d}}.$$

Si $b \geq 2d$, es evidente que M es negativo. Por lo que, al ser ambos autovalores negativos, F es un punto crítico estable.

Si $b < 2d$, entonces M podría tomar valores positivos. Como tenemos que $b > d$, entonces $d < b < 2d$. Ponemos $b = hd$, con $h \in (1, 2)$. Substituyendo en M y simplificando obtenemos que

$$M = \frac{2}{h} - 1 - \frac{2}{h} \frac{a}{K} \sqrt{\frac{1}{h-1}}.$$

Esta claro que tanto para valores de h próximos a 1 como para 2, M tomará valores negativos. Vamos a estudiar si M valores positivos para valores intermedios de h . Esto ocurre si, y sólo si, $h\sqrt{h-1}M$ toma valores positivos, siendo

$$h\sqrt{h-1}M = \sqrt{h-1}(2-h) - \frac{2a}{K}$$

Buscamos los máximos de $h\sqrt{h-1}M$. Derivando con respecto a h e igualando a cero tenemos que

$$\frac{d}{dh} \left(h\sqrt{h-1}M \right) = \frac{2-h}{2\sqrt{h-1}} - \sqrt{h-1} = 0 \Rightarrow h = \frac{4}{3} \in (1, 2).$$

Si hallamos el valor de $M(\frac{4}{3})$ y le imponemos que sea mayor que cero obtenemos que

$$M \left(\frac{4}{3} \right) = \frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{a}{K} > 0 \Rightarrow \frac{a}{K} < \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Es decir, imponiendo la condición inicial $\frac{a}{K} < \frac{1}{3\sqrt{3}}$ garantizamos que M toma valores positivos.

Por tanto concluimos que:

- Para valores de h próximos a 1 se tiene $M(h) < 0$, por lo que los autovalores son negativos y F es un nodo estable.
- Al ir creciendo h , en un entorno de $\frac{4}{3}$, se tiene que $M(h) > 0$. Por tanto al tener al menos un autovalor positivo F es inestable y se produce una bifurcación de Hopf y F está rodeado de un atractor cíclico.
- Al seguir creciendo h y aproximarse a 2, $M(h)$ vuelve a ser negativo y F recupera su carácter estable.

Conclusion: Por lo tanto, en las ecuaciones ecológicas, sólo pueden llegar a existir ciclos límite, si se cumplen ciertas condiciones sobre las funciones $g(x)$, $q(x)$ y $\phi(x, y)$.

4. Modelos de Lotka-Volterra para más de dos especies

En esta sección, nos vamos a centrar en ecosistemas en los que conviven 3 especies e interactúan entre ellas. El modelo general para sistemas de Lotka-Volterra de 3 especies es

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(r_1 + a_{1,1}x + a_{1,2}y + a_{1,3}z), \\ \dot{y} &= y(r_2 + a_{2,1}x + a_{2,2}y + a_{2,3}z), \\ \dot{z} &= z(r_3 + a_{3,1}x + a_{3,2}y + a_{3,3}z),\end{aligned}\tag{4.1}$$

con $r_i, a_{i,j} \in \mathbb{R}$ para $i, j = 1, 2, 3$. En modelo, el conjunto $\mathcal{O}_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_i \geq 0, i = 1 \dots 3\}$, correspondiente al primer octante, es un conjunto invariante, ya que si alguna de las especies es 0 entonces las demás ecuaciones describen un sistema de Lotka-Volterra de dimensión 2, que vimos que era invariante en el primer cuadrante.

Los puntos críticos de (4.1) se obtienen como solución del sistema

$$\begin{aligned}r_1 + a_{1,1}x + a_{1,2}y + a_{1,3}z &= 0, \\ r_2 + a_{2,1}x + a_{2,2}y + a_{2,3}z &= 0, \\ r_3 + a_{3,1}x + a_{3,2}y + a_{3,3}z &= 0,\end{aligned}\tag{4.2}$$

Aquí, suponemos que $x, y, z \geq 0$ para obtener sólo los puntos críticos en el primer octante.

En el modelo (4.1) podemos tener multitud de casos dependiendo del valor y el signo de las constantes por lo que nos centraremos en los modelos de cadenas tróficas.

4.1. Modelo de Lotka-Volterra con cadenas tróficas

Una cadena trófica de n especies es una cadena en la que la primera especie es presa de la segunda, la segunda de la tercera, y así sucesivamente hasta llegar a la última especie la cual depreda a la anterior pero no es presa de ninguna. Este modelo describe básicamente una cadena alimentaria.

Si suponemos que tenemos una cadena trófica de 3 especies y además puede existir una competencia intraespecie en el modelo, el modelo (4.1) toma la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(r_1 - a_{1,1}x - a_{1,2}y), \\ \dot{y} &= y(-r_2 + a_{2,1}x - a_{2,2}y - a_{2,3}z), \\ \dot{z} &= z(-r_3 + a_{3,2}y - a_{3,3}z),\end{aligned}\tag{4.3}$$

donde $r_i > 0$ y $a_{i,j} \geq 0$. Vamos a calcular los puntos críticos del sistema (4.3), que

se obtienen resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} x(r_1 - a_{1,1}x - a_{1,2}y) &= 0, \\ y(-r_2 + a_{2,1}x - a_{2,2}y - a_{2,3}z) &= 0, \\ z(-r_3 + a_{3,2}y - a_{3,3}z) &= 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

El origen $(0, 0, 0)$ es punto crítico y la matriz jacobiana del sistema (4.3) es

$$A(x, y, z) = \begin{pmatrix} r_1 - 2a_{1,1}x - a_{1,2}y & -a_{1,2}x & 0 \\ a_{2,1}y & -r_2 + a_{2,1}x - 2a_{2,2}y - a_{2,3}z & -a_{2,3}y \\ 0 & a_{3,2}z & -r_3 + a_{3,2}y - a_{3,3}z \end{pmatrix}.$$

Por tanto, en el origen, la matriz tiene dos autovalores negativos y uno positivo, por lo que el origen es un punto de silla del sistema linealizado y de (4.3) para todos los casos. Vamos a ver el resto de puntos críticos por casos.

Caso 1

Si no existiera competencia intraespecie ($a_{i,i} = 0$, $i = 1, 2, 3$), entonces tenemos que resolver el sistema

$$\begin{aligned} x(r_1 - a_{1,2}y) &= 0, \\ y(-r_2 + a_{2,1}x - a_{2,3}z) &= 0, \\ z(-r_3 + a_{3,2}y) &= 0. \end{aligned}$$

Para que existan puntos críticos en el interior de \mathcal{O}_1 , debe cumplirse que

$$\begin{aligned} r_1 - a_{1,2}y &= 0, \\ -r_3 + a_{3,2}y &= 0, \end{aligned}$$

por lo que la condición para la existencia de puntos críticos interiores es: $r_3 = \frac{a_{3,2}r_1}{a_{1,2}}$ e $y = \frac{r_1}{a_{1,2}}$. Para obtener el punto crítico en \mathcal{O}_1 , queda resolver

$$-r_2 + a_{2,1}x - a_{2,3}z = 0,$$

y como es una ecuación en la que x depende de z obtenemos la recta de puntos críticos con coordenadas $P_\lambda \left(\frac{r_2}{a_{2,1}} + \frac{a_{2,3}}{a_{2,1}}\lambda, \frac{r_1}{a_{1,2}}, \lambda \right)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Si calculamos la matriz jacobiana en un punto crítico de la recta, obtenemos

$$A(P_\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{1,2}(r_2 + a_{2,3}\lambda)}{a_{2,1}} & 0 \\ \frac{a_{2,1}r_1}{a_{1,2}} & 0 & -\frac{a_{2,3}r_1}{a_{1,2}} \\ 0 & a_{3,2}\lambda & 0 \end{pmatrix},$$

con autovalores

$$\left(0, \frac{\sqrt{-a_{1,2}r_1(a_{2,3}a_{3,2}\lambda + r_2a_{1,2} + a_{2,3}a_{1,2}\lambda)}}{a_{1,2}}, -\frac{\sqrt{-a_{1,2}r_1(a_{2,3}a_{3,2}\lambda + r_2a_{1,2} + a_{2,3}a_{1,2}\lambda)}}{a_{1,2}} \right).$$

Los dos términos con raíz son imaginarios puros, luego existen órbitas periódicas en torno a cada punto crítico de la recta obtenida.

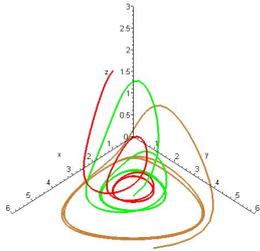
Si $r_3 \neq \frac{a_{3,2}r_1}{a_{1,2}}$ caben dos posibilidades: si $y = \frac{r_3}{a_{3,2}}$ entonces obtenemos el punto $\left(0, \frac{r_3}{a_{3,2}}, \frac{-r_2}{a_{3,2}}\right)$ que no pertenece a \mathcal{O}_1 . Si $y = \frac{r_1}{a_{1,2}}$ obtenemos el punto $P\left(\frac{r_2}{a_{2,1}}, \frac{r_1}{a_{1,2}}, 0\right)$. La matriz jacobiana en el punto P es

$$A(P) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{r_2 a_{1,2}}{a_{2,1}} & 0 \\ \frac{r_1 a_{2,1}}{a_{1,2}} & 0 & -\frac{a_{2,3} r_1}{a_{1,2}} \\ 0 & 0 & -r_3 + \frac{r_1 a_{3,2}}{a_{1,2}} \end{pmatrix},$$

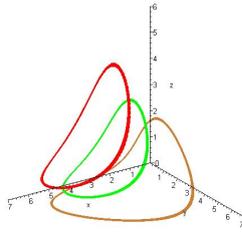
con autovalores

$$\left(\sqrt{-r_2 r_1}, \quad -\sqrt{-r_2 r_1}, \quad -\frac{-r_1 a_{3,2} + a_{1,2} r_3}{a_{1,2}} \right).$$

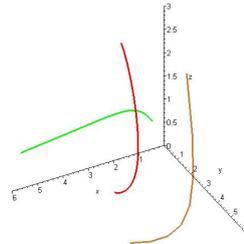
Tenemos así dos autovalores complejos conjugados y $\lambda_3 = -r_3 + \frac{a_{3,2}r_1}{a_{1,2}}$, por lo que, si $r_3 > \frac{a_{3,2}r_1}{a_{1,2}}$, entonces λ_3 sería negativo y las órbitas en este caso tenderían a la extinción de z y a un ciclo límite formado por la interacción aislada de las dos primeras especies. Si $r_3 = \frac{a_{3,2}r_1}{a_{1,2}}$, entonces las órbitas realizan ciclos periódicos como un caso particular del demostrado anteriormente, y si $r_3 < \frac{a_{3,2}r_1}{a_{1,2}}$, entonces las órbitas divergen al infinito, al haber un autovalor positivo. Esto se ve en las siguientes Figuras.



(a) $r_3 > \frac{a_{3,2}r_1}{a_{1,2}}$



(b) $r_3 = \frac{a_{3,2}r_1}{a_{1,2}}$



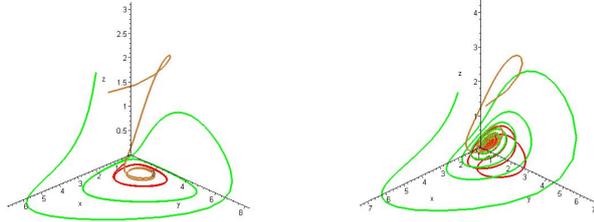
(c) $r_3 < \frac{a_{3,2}r_1}{a_{1,2}}$

Caso 2

Si sólo hay competencia intraespecie en una especie, tenemos tres posibilidades:

- Si $a_{3,3} \neq 0$, entonces tenemos los puntos críticos $(0, 0, 0)$, $P\left(\frac{r_2}{a_{2,1}}, \frac{r_1}{a_{1,2}}, 0\right)$, y $F\left(\frac{r_2}{a_{2,1}} + \frac{a_{2,3}a_{3,2}r_1}{a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}} - \frac{a_{2,3}}{a_{2,1}a_{3,3}}r_3, \frac{r_1}{a_{1,2}}, \frac{a_{3,2}}{a_{1,2}a_{3,3}}r_1 - \frac{r_3}{a_{3,3}}\right)$, si se cumple que $a_{3,2}r_1 > a_{1,2}r_3$. Si no se cumple la condición de existencia de F entonces el modelo tiene el carácter de convergencia al ciclo límite del caso anterior con centro el punto P . En cambio, si se cumple la existencia de F , el punto

$P \left(\frac{r_2}{a_{2,1}}, \frac{r_1}{a_{1,2}}, 0 \right)$ deja de ser estable y el punto F es un nodo estable donde las órbitas convergen a F en forma de espiral. Esto se ve en las siguientes Figuras:



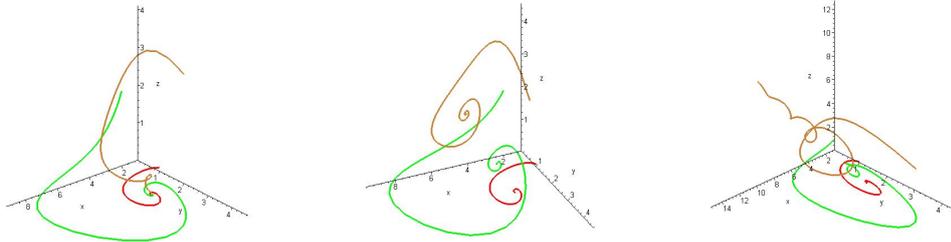
(a) $a_{3,2}r_1 < a_{1,2}r_3$

(b) $a_{3,2}r_1 > a_{1,2}r_3$

- Si $a_{2,2} \neq 0$, obtenemos dos puntos críticos: el origen $(0, 0, 0)$ y el punto en la frontera $F \left(\frac{r_2}{a_{2,1}} + \frac{a_{2,2}}{a_{1,2}a_{2,1}}r_1, \frac{r_1}{a_{1,2}}, 0 \right)$. En el punto F los autovalores son

$$\left\{ -r_3 + \frac{a_{3,2}r_1}{a_{1,2}}, \frac{-a_{2,2}r_1 \pm \sqrt{a_{2,2}^2r_1^2 - 4(r_1r_2a_{1,2}^2 + a_{1,2}a_{2,2}r_1^2)}}{2a_{1,2}} \right\}$$

y, como la raíz es menor que $a_{2,2}r_1$, si $-r_3 + \frac{a_{3,2}r_1}{a_{1,2}} < 0$, entonces las soluciones convergen al punto F en espiral. Si $-r_3 + \frac{a_{3,2}r_1}{a_{1,2}} = 0$ las órbitas convergen a un punto de la curva de la variedad estable de F , y si es mayor que 0 entonces las órbitas convergen a la variedad estable en el infinito. Esto queda plasmado en las siguientes Figuras:



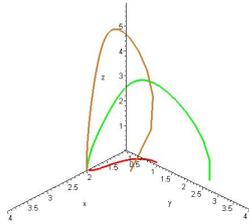
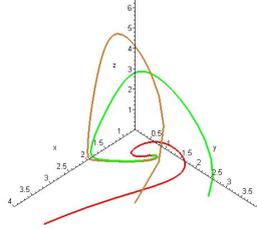
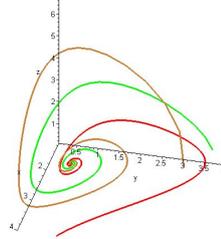
(a) $-r_3 + \frac{a_{3,2}r_1}{a_{1,2}} < 0$

(b) $-r_3 + \frac{a_{3,2}r_1}{a_{1,2}} = 0$

(c) $-r_3 + \frac{a_{3,2}r_1}{a_{1,2}} > 0$

- Si $a_{1,1} \neq 0$ tenemos cuatro posibles puntos críticos: el origen $(0, 0, 0)$, el punto $P_1 \left(\frac{r_1}{a_{1,1}}, 0, 0 \right)$, el punto $P_2 \left(\frac{r_2}{a_{2,1}}, \frac{r_1}{a_{1,2}} - \frac{a_{1,1}}{a_{1,2}a_{2,1}}r_2, 0 \right)$ y el punto interior $F \left(\frac{r_1}{a_{1,1}} - \frac{a_{1,2}}{a_{3,2}a_{1,1}}r_3, \frac{r_3}{a_{3,2}}, \frac{a_{2,1}}{a_{2,3}} \left(\frac{r_1}{a_{1,1}} - \frac{a_{1,2}}{a_{3,2}a_{1,1}}r_3 \right) - \frac{r_2}{a_{2,3}} \right)$. El origen y el punto P_1 siempre existen. Si no existe P_2 , entonces P_1 es un punto crítico estable,

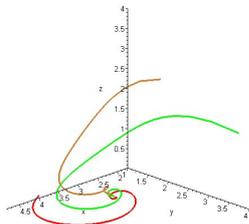
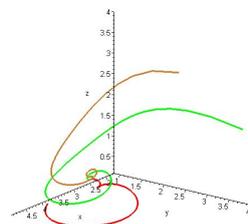
y si existe P_2 , P_1 se transforma en un punto de silla. Si existe F , P_2 es un punto de silla y si no existe, P_2 es nodo estable. Si existe F , entonces también debe existir P_2 y F es nodo estable del sistema. Esto se ve en las siguientes Figuras:

(a) $\exists P_1$ (b) $\exists P_1, P_2$ (c) $\exists P_1, P_2, F$

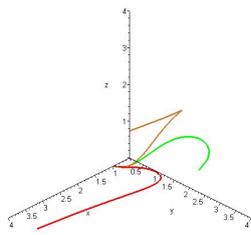
Caso 3

Si hay competencia intraespecie en dos de las especies volvemos a tener tres posibilidades:

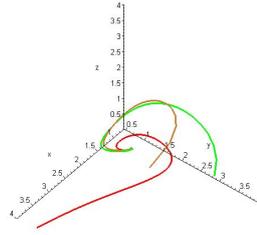
- Si $a_{3,3} \neq 0, a_{2,2} \neq 0$, existen 3 puntos críticos: el origen $(0, 0, 0)$, $P_1(x_1, y_1, 0)$ y $F(x_2, y_2, z_2)$. El comportamiento de P_1 es de nodo estable si no existe F y de punto de silla si existe. En cuanto a F , si existe, es un nodo estable del sistema. Esto se ve en las siguientes Figuras:

(a) $\exists P_1$ (b) $\exists P_1, F$

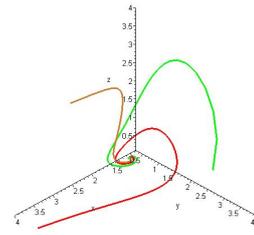
- Si $a_{3,3} \neq 0, a_{1,1} \neq 0$, tenemos 4 puntos críticos y un comportamiento análogo al de $a_{1,1} \neq 0$, como puede verse en las siguientes Figuras.



(a) $\exists P_1$



(b) $\exists P_1, P_2$



(c) $\exists P_1, P_2, F$

- Si $a_{2,2} \neq 0, a_{1,1} \neq 0$, tenemos 4 puntos críticos y un comportamiento análogo al anterior.

Caso 4

Si hay competencia intraespecie en todas las especies entonces obtenemos 4 puntos críticos y un comportamiento de las trayectorias análogo a los anteriores.

Conclusion: Por tanto, en el modelo de Lotka-Volterra de tres especies en el que hay cadenas tróficas, existirán soluciones periódicas cuando no haya competencia intraespecie y además se cumpla que $r_3 = \frac{a_{3,2}r_1}{a_{1,2}}$, y existirán ciclos límite cuando no exista competencia intraespecie en las dos primeras especies y se cumpla que $a_{3,2}r_1 < a_{1,2}r_3$.

5. El método de Poincaré-Lindstedt

Después de haber estudiado varios modelos de Lotka-Volterra en dos y tres especies, nuestro objetivo ahora es profundizar en los modelos en los que existen órbitas periódicas o, al menos, algún ciclo límite al que convergen las trayectorias. Si se intentara resolver los modelos para obtener una expresión de la solución periódica a través del tiempo tendríamos que, a pesar de la posible sencillez del modelo, en general es muy difícil obtener una expresión exacta y cerrada de la solución.

Poincaré introdujo un método para describir soluciones periódicas por medio de una serie de potencias con respecto a un valor pequeño ε en ecuaciones del tipo

$$\ddot{x} + x = \varepsilon f(x), \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (5.1)$$

El método de Poincaré-Lindstedt se basa en la búsqueda de soluciones de la forma

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \varepsilon^3 x_3(t) + \dots$$

Puede ocurrir que exista una solución periódica $x(t)$ de (5.1) con periodo T con términos $x_k(t)$ que no sean periódicos, por ejemplo, el desarrollo de la función $\cos((1 + \varepsilon)t)$ es

$$\cos((1 + \varepsilon)t) = \cos(t) - t\varepsilon \sin((1 + \varepsilon)t) - \frac{1}{2}t^2\varepsilon \cos((1 + \varepsilon)t) + \dots$$

cuyos términos son claramente no periódicos, ya que para valores grandes de t perderíamos la periodicidad. A los términos que dependen de t se les denomina **términos seculares**. Este problema se resuelve desarrollando en serie la frecuencia, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, con respecto a ε ,

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \varepsilon^3\omega_3 + \dots$$

En este caso, como queremos que las funciones sean 2π -periódicas necesariamente debemos tener que $\omega_0 = 1$.

Consideramos ahora un sistema de orden 1 del tipo

$$\begin{aligned} \dot{x} + y &= \varepsilon f(x, y), \\ \dot{y} - x &= \varepsilon g(x, y), \end{aligned} \quad (5.2)$$

donde $0 < \varepsilon \ll 1$ es un pequeño parámetro de perturbación. Entonces el método de Poincaré-Lindstedt trata de buscar soluciones de la forma

$$\begin{aligned} x(T) &= x_0(T) + \varepsilon x_1(T) + \varepsilon^2 x_2(T) + \varepsilon^3 x_3(T) + \dots \\ y(T) &= y_0(T) + \varepsilon y_1(T) + \varepsilon^2 y_2(T) + \varepsilon^3 y_3(T) + \dots \end{aligned}$$

donde x_i, y_i son funciones periódicas de periodo 2π , y $T = \omega t$ con

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \varepsilon^3\omega_3 + \dots, \quad \omega_0 = 1.$$

Si realizamos el cambio de variable $T = \omega t$ en (5.2) obtenemos el sistema

$$\begin{aligned}\omega x' + y &= \varepsilon \sum_{i,j} f_{i,j} x^i y^j, \\ \omega y' - x &= \varepsilon \sum_{i,j} g_{i,j} x^i y^j,\end{aligned}$$

donde \dot{x} corresponde con $\frac{dx}{dt}$ y x' con $\frac{dx}{dT}$, y $\sum_{i,j} f_{i,j} x^i y^j$ ($\sum_{i,j} g_{i,j} x^i y^j$) el desarrollo en serie de $f(x, y)$ ($g(x, y)$ resp.). Si ahora desarrollamos en serie x , y y ω y agrupamos los términos de igual potencia en ε , obtenemos varias ecuaciones que nos darán las soluciones para cada coeficiente de las series.

$$\begin{aligned}(x'_0 + y_0) + \varepsilon(x'_1 + \omega_1 x'_0 + y_1) + \dots &= \varepsilon \sum_{i,j} f_{i,j} (x_0 + \varepsilon x_1 + \dots)^i (y_0 + \varepsilon y_1 + \dots)^j, \\ (y'_0 - x_0) + \varepsilon(y'_1 + \omega_1 y'_0 - x_1) + \dots &= \varepsilon \sum_{i,j} g_{i,j} (x_0 + \varepsilon x_1 + \dots)^i (y_0 + \varepsilon y_1 + \dots)^j.\end{aligned}$$

El sistema obtenido para el orden cero es

$$\begin{aligned}x'_0 + y_0 &= 0, \\ y'_0 - x_0 &= 0,\end{aligned}$$

con solución

$$\begin{aligned}x_0(T) &= A_0 \cos(T) - B_0 \sin(T), \\ y_0(T) &= A_0 \sin(T) + B_0 \cos(T),\end{aligned}$$

donde A_0, B_0 vienen determinadas por las condiciones iniciales del sistema.

El sistema para el orden uno es

$$\begin{aligned}x'_1 + \omega_1 x'_0 + y_1 &= f_{0,0} x_0 y_0, \\ y'_1 + \omega_1 y'_0 - x_1 &= g_{0,0} x_0 y_0.\end{aligned}$$

Si sustituimos $x_0(T), y_0(T)$ en la ecuación anterior, obtenemos

$$\begin{aligned}x'_1 + y_1 &= f_{0,0} \left(\frac{A_0^2 - B_0^2}{2} \right) \sin(2T) + f_{0,0} A_0 B_0 \cos(2T) + \omega_1 (A_0 \sin(T) + B_0 \cos(T)) \\ y'_1 - x_1 &= g_{0,0} \left(\frac{A_0^2 - B_0^2}{2} \right) \sin(2T) + g_{0,0} A_0 B_0 \cos(2T) - \omega_1 (A_0 \cos(T) - B_0 \sin(T))\end{aligned}$$

Si intentamos resolverlo obtendremos términos seculares. Para que no ocurra esto asignaremos un valor a ω_1 para eliminar esa perturbación. Para obtener este valor de ω_1 utilizaremos el siguiente resultado:

Proposición 5.1 *El sistema*

$$\begin{aligned}x' + y &= A \sin(t) + B \cos(t) + \sum_{m \geq 2} (A_m \sin(mt) + B_m \cos(mt)) \\y' - x &= C \sin(t) + D \cos(t) + \sum_{m \geq 2} (C_m \sin(mt) + D_m \cos(mt))\end{aligned}$$

tiene soluciones periódicas si $A - D = 0$ y $B + C = 0$.

Utilizando el resultado anterior obtenemos que $\omega_1 = 0$. Si resolvemos el sistema con $\omega_1 = 0$, obtendremos las expresiones de $x_1(T)$ e $y_1(T)$ sin términos seculares.

Este método se aplica de forma análoga para órdenes superiores y obtendríamos al final una expresión para la solución periódica del sistema (5.2).

Después de haber descrito el método de Poincaré-Lindstedt, vamos a proceder a obtener el sistema (5.2) a partir del modelo de Lotka-Volterra

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(a - by), \\ \dot{y} &= y(-c + dx).\end{aligned}$$

Como hemos estudiado anteriormente, las soluciones periódicas rodean al punto de equilibrio $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$. Ahora si perturbamos el sistema en torno al punto crítico mediante

$$x(t) = \frac{c}{d} + \varepsilon\varphi(t), \quad y(t) = \frac{a}{b} + \varepsilon\psi(t),$$

obtenemos el sistema

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{\varphi} = \frac{-bc}{d}\varepsilon\psi - b\varepsilon^2\varphi\psi \\ \varepsilon\dot{\psi} = \frac{ad}{b}\varepsilon\varphi + d\varepsilon^2\varphi\psi \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{\varphi} = \frac{-bc}{d}\psi - b\varepsilon\varphi\psi \\ \dot{\psi} = \frac{ad}{b}\varphi + d\varepsilon\varphi\psi \end{cases},$$

que responde a la forma (5.2). Procedemos ahora a aplicar el método como ha sido descrito anteriormente, siendo ahora ω_0 la frecuencia de la solución del sistema no perturbado, es decir, con $\varepsilon = 0$:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{bc}{d} \cdot \frac{ad}{b}} = \sqrt{ac}.$$

Además para poder hacer los cálculos pertinentes debemos modificar el resultado para eliminar los términos seculares de la siguiente forma:

Proposición 5.2 *El sistema*

$$\begin{aligned}\sqrt{ab}x' + ay &= A \sin(t) + B \cos(t) + \sum_{m \geq 2} (A_m \sin(mt) + B_m \cos(mt)) \\ \sqrt{ab}y' - by &= C \sin(t) + D \cos(t) + \sum_{m \geq 2} (C_m \sin(mt) + D_m \cos(mt))\end{aligned}$$

tiene soluciones periódicas si, $A - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}D = 0$ y $B + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}C = 0$.

5.1. Metodo de Poincaré-Lindstedt en sistemas de orden 3

Ahora vamos a pasar a adaptar el método de Poincaré-Lindstedt para sistemas de dimension 3.

Consideramos el sistema de Lotka-Volterra para 3 especies de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(r_1 - a_{1,2}y), \\ \dot{y} &= y(-r_2 + a_{2,1}x - a_{2,3}z), \\ \dot{z} &= z(-r_3 + a_{3,2}y).\end{aligned}$$

Este sistema, como se vió antes, tiene soluciones periódicas o ciclos límite cuando $r_3 \geq \frac{a_{3,2}r_1}{a_{1,2}}$. Vamos a calcular la expresión de las órbitas periódicas para este sistema, es decir, en el caso en que $r_3 = \frac{a_{3,2}r_1}{a_{1,2}}$.

En primer lugar, calculamos los puntos críticos del sistema, dados por una recta de puntos críticos $r_\lambda := \left(\frac{r_2}{a_{2,1}} + \frac{a_{2,3}}{a_{2,1}}\lambda, \frac{r_1}{a_{1,2}}, \lambda \right)$, con $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Si perturbamos el sistema en torno a un punto P de la recta con el cambio de variable

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{r_2}{a_{2,1}} + \frac{a_{2,3}}{a_{2,1}}\lambda + \varepsilon x_e(t), \\ y(t) &= \frac{r_1}{a_{1,2}} + \varepsilon y_e(t), \\ z(t) &= \lambda + \varepsilon z_e(t),\end{aligned}$$

obtenemos el sistema perturbado

$$\begin{aligned}\dot{x}_e &= -\frac{a_{1,2}}{a_{2,1}}(r_2 + a_{2,3}\lambda)y_e - a_{1,2}x_e y_e \varepsilon, \\ \dot{y}_e &= \frac{a_{2,1}r_1}{a_{1,2}}x_e - \frac{a_{2,3}r_1}{a_{1,2}}z_e + (a_{2,1}x_e y_e - a_{2,3}y_e z_e)\varepsilon, \\ \dot{z}_e &= a_{3,2}\lambda z_e + a_{3,2}y_e z_e \varepsilon.\end{aligned}$$

Del sistema perturbado, obtenemos ω_0 como el valor del autovalor imaginario del sistema sin perturbar, es decir, cuando $\varepsilon = 0$. Si ahora realizamos el cambio $t = \omega T$, obtenemos el sistema

$$\begin{aligned}\omega x'_e &= -\frac{a_{1,2}}{a_{2,1}}(r_2 + a_{2,3}\lambda)y_e - a_{1,2}x_e y_e \varepsilon, \\ \omega y'_e &= \frac{a_{2,1}r_1}{a_{1,2}}x_e - \frac{a_{2,3}r_1}{a_{1,2}}z_e + (a_{2,1}x_e y_e - a_{2,3}y_e z_e)\varepsilon, \\ \omega z'_e &= a_{3,2}\lambda y_e + a_{3,2}y_e z_e \varepsilon.\end{aligned}$$

Ahora, por último, si realizamos los cambios de variables

$$\begin{aligned}x_e(T) &= x_0(T) + x_1(T)\varepsilon + x_2(T)\varepsilon^2 + \dots \\ y_e(T) &= y_0(T) + y_1(T)\varepsilon + y_2(T)\varepsilon^2 + \dots \\ z_e(T) &= z_0(T) + z_1(T)\varepsilon + z_2(T)\varepsilon^2 + \dots \\ \omega &= \omega_0 + \omega_1\varepsilon + \omega_2\varepsilon^2 + \dots\end{aligned}$$

y agrupamos los términos de igual potencia en ε , obtenemos, para el coeficiente del orden 0 de ε , el sistema

$$\begin{aligned}\omega_0 x'_0 &= -\frac{a_{1,2}}{a_{2,1}} (r_2 + a_{2,3}\lambda) y_0, \\ \omega_0 y'_0 &= \frac{a_{2,1}r_1}{a_{1,2}} x_0 - \frac{a_{2,3}r_1}{a_{1,2}} z_0, \\ \omega_0 z'_0 &= a_{3,2}\lambda y_0.\end{aligned}$$

La solución de este sistema viene dada por:

$$\begin{aligned}x_0(T) &= \frac{(r_2 + a_{2,3}\lambda)a_{1,2}B}{a_{2,1}\omega_0} \cos(T) - \frac{(r_2 + a_{2,3}\lambda)a_{1,2}C}{a_{2,1}\omega_0} \sin(T) + \frac{a_{2,3}A}{a_{2,1}}, \\ y_0(T) &= B \sin(T) + C \cos(T), \\ z_0(T) &= -\frac{a_{3,2}B\lambda}{\omega_0} \cos(T) + \frac{a_{3,2}C\lambda}{\omega_0} \sin(T) + A,\end{aligned}$$

con A, B, C dependientes de las condiciones iniciales del sistema. Las derivadas de x_0, y_0, z_0 vienen dadas por

$$\begin{aligned}x'_0(T) &= -\frac{(r_2 + a_{2,3}\lambda)a_{1,2}B}{a_{2,1}\omega_0} \sin(T) - \frac{(r_2 + a_{2,3}\lambda)a_{1,2}C}{a_{2,1}\omega_0} \cos(T), \\ y'_0(T) &= B \cos(T) - C \sin(T), \\ z'_0(T) &= \frac{a_{3,2}B\lambda}{\omega_0} \sin(T) + \frac{a_{3,2}C\lambda}{\omega_0} \cos(T).\end{aligned}$$

Ahora que tenemos las soluciones del orden 0, pasamos al sistema de orden 1:

$$\begin{aligned}\omega_0 x'_1 + \omega_1 x'_0 &= -\frac{a_{1,2}}{a_{2,1}} (r_2 + a_{2,3}\lambda) y_1 - a_{1,2}x_0 y_0, \\ \omega_0 y'_1 + \omega_1 y'_0 &= \frac{a_{2,1}r_1}{a_{1,2}} x_1 - \frac{a_{2,3}r_1}{a_{1,2}} z_1 + a_{2,1}x_0 y_0 - a_{2,3}y_0 z_0, \\ \omega_0 z'_1 + \omega_1 z'_0 &= a_{3,2}\lambda y_1 + a_{3,2}y_0 z_0.\end{aligned}$$

Si sustituimos las funciones $x_0(T), y_0(T), z_0(T)$ en el sistema de orden 1, obtenemos el sistema

$$\begin{aligned}\omega_0 x'_1 + \frac{a_{1,2}}{a_{2,1}} (r_2 + a_{2,3}\lambda) y_1 &= \\ &= \frac{a_{1,2}C}{a_{2,1}\omega_0} (\omega_1 (r_2 + a_{2,3}\lambda) - \omega_0 a_{2,3}A) \cos(T) + \frac{a_{1,2}B}{a_{2,1}\omega_0} (\omega_1 (r_2 + a_{2,3}\lambda) - \omega_0 a_{2,3}A) \sin(T) \\ &\quad + \frac{-a_{1,2}^2 BC}{a_{2,1}\omega_0} (r_2 + a_{2,3}\lambda) \cos(2T) + \frac{a_{1,2}^2}{2a_{2,1}\omega_0} ((C^2 - B^2)(r_2 + a_{2,3}\lambda)) \sin(2T), \\ \omega_0 y'_1 - \frac{a_{2,1}r_1}{a_{1,2}} x_1 + \frac{a_{2,3}r_1}{a_{1,2}} z_1 &= \\ &= -\omega_1 B \cos(T) + \omega_1 C \sin(T) + \frac{BC}{\omega_0} (a_{1,2}(r_2 + a_{2,3}\lambda) + a_{2,3}a_{3,2}\lambda) \cos(2T) +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{B^2 - C^2}{2\omega_0} (a_{1,2}r_2 + (a_{1,2} + a_{3,2})a_{2,3}\lambda) \sin(2T), \\
\omega_0 z_1' - a_{3,2}\lambda y_1 & = \\
& = \frac{a_{3,2}C}{\omega_0} (A\omega_0 - \omega_1\lambda) \cos(T) + \frac{a_{3,2}B}{\omega_0} (A\omega_0 - \omega_1\lambda) \sin(T) - \frac{a_{3,2}^2\lambda BC}{\omega_0} \cos(2T) \\
& + \frac{a_{3,2}^2\lambda}{2\omega_0} (C^2 - B^2) \sin(2T).
\end{aligned}$$

Para resolverlo sin que hayan términos seculares debemos utilizar el siguiente resultado:

Proposición 5.3 *Un sistema de la forma*

$$\begin{aligned}
\sqrt{ab+cd}\dot{x} &= -ay + A \cos(t) + B \sin(t) + \sum_{n>1} (A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt)), \\
\sqrt{ab+cd}\dot{y} &= bx - cz + C \cos(t) + D \sin(t) + \sum_{n>1} (C_n \cos(nt) + D_n \sin(nt)), \quad (5.3) \\
\sqrt{ab+cd}\dot{z} &= dy + E \cos(t) + F \sin(t) + \sum_{n>1} (E_n \cos(nt) + F_n \sin(nt)),
\end{aligned}$$

tiene soluciones sin términos seculares si se cumple el sistema:

$$\begin{aligned}
\sqrt{ab+cd}C + cF - bB &= 0 \\
\sqrt{ab+cd}D - cE + bA &= 0
\end{aligned}$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad, hacemos $A_n, B_n, C_n, D_n, E_n, F_n = 0$ con $n > 1$. La solución del sistema (5.3) para $x(t)$ viene dada por

$$\begin{aligned}
x(t) &= \left(\frac{a^2bz_0}{\sqrt{ab+cd}} - \frac{acF}{2\sqrt{ab+cd}} - \frac{cdB}{\sqrt{ab+cd}} + \frac{acd z_0}{\sqrt{ab+cd}} - \frac{aC}{2} - \frac{abB}{2\sqrt{ab+cd}} \right) \frac{\cos(t)}{ab+cd} \\
&+ \left(\frac{aD}{2} - \frac{acE}{2\sqrt{ab+cd}} + \frac{abA}{2\sqrt{ab+cd}} \right) \frac{t \cos(t)}{ab+cd} \\
&- \left(aD + \frac{acd y_0}{\sqrt{ab+cd}} - \frac{acE}{\sqrt{ab+cd}} - \frac{cdA}{\sqrt{ab+cd}} + \frac{a^2by_0}{\sqrt{ab+cd}} \right) \frac{\sin(t)}{ab+cd} \\
&- \left(\frac{aC}{2} - \frac{abB}{2\sqrt{ab+cd}} + \frac{acF}{2\sqrt{ab+cd}} \right) \frac{t \sin(t)}{ab+cd} + x_0
\end{aligned}$$

Esta solución tiene términos seculares. Para que no tengamos el término secular $t \cos(t)$, hacemos

$$\frac{aD}{2} - \frac{acE}{2\sqrt{ab+cd}} + \frac{abA}{2\sqrt{ab+cd}} = 0 \implies \sqrt{ab+cd}D - cE + bA = 0$$

Si queremos que desaparezca el término secular $t \sin(t)$, hacemos

$$\frac{aC}{2} - \frac{abB}{2\sqrt{ab+cd}} + \frac{acF}{2\sqrt{ab+cd}} = 0 \implies \sqrt{ab+cd}C + cF - bB = 0$$

Por tanto, las dos ecuaciones dan las condiciones necesarias para no tener términos seculares. Este procedimiento se realiza de forma análoga para $y(t)$ y $z(t)$ donde

obtendremos las mismas ecuaciones. ■

En nuestro caso, si resolvemos el sistema anterior para no obtener términos seculares, llegamos a que

$$\omega_1 = -\frac{r_1 a_{2,3} A(a_{1,2} - a_{3,2}) \omega_0}{\omega_0^2 a_{1,2} + r_1 r_2 a_{1,2} + r_1 a_{2,3} \lambda a_{1,2} + a_{3,2} \lambda r_1 a_{2,3}},$$

con lo que si resolvemos la EDO para el orden 1 sustituyendo el valor anterior de ω_1 obtendremos las soluciones $x_1(T), y_1(T), z_1(T)$, libres de términos seculares.

Seguidamente procederíamos a resolver el 2º orden del método, de forma analoga.

Para mayor comprensión del método vamos a aplicarlo en el siguiente ejemplo

Ejemplo 5.4 Consideramos el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(1 - y), \\ \dot{y} &= y(-2 + x - z), \\ \dot{z} &= z(-1 + y),\end{aligned}$$

Los puntos críticos son de la forma $(2 + \lambda, 1, \lambda)$. Tomamos de forma arbitraria, el punto $\left(\frac{5}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$. Si hacemos los cambios de variable en torno a este punto obtenemos el sistema

$$\begin{aligned}\omega x'_e &= -\frac{5}{2}y_e - \varepsilon y_e z_e, \\ \omega y'_e &= x_e - z_e + \varepsilon(x_e y_e - y_e z_e), \\ \omega z'_e &= \frac{1}{2}y_e + \varepsilon y_e z_e.\end{aligned}$$

En el sistema no perturbado, con $\varepsilon = 0$, calculamos los autovalores y obtenemos que $\omega_0 = \sqrt{3}$. Por tanto, si sustituimos los desarrollos en serie en el sistema anterior, obtenemos el sistema

$$\begin{aligned}\sqrt{3}x'_0 + (\sqrt{3}x'_1 + \omega_1 x'_0)\varepsilon + \dots &= -\frac{5}{2}(y_0 + \varepsilon y_1 + \dots) - \varepsilon(y_0 + \varepsilon y_1 + \dots)(x_0 + \varepsilon x_1 + \dots), \\ \sqrt{3}y'_0 + (\sqrt{3}y'_1 + \omega_1 y'_0)\varepsilon + \dots &= x_0 - z_0 + \varepsilon(x_1 - z_1) + \dots + \varepsilon \sum_{n \geq 0} \sum_{p=0}^n ((x_p y_{n-p} - y_p z_{n-p})\varepsilon^n), \\ \sqrt{3}z'_0 + (\sqrt{3}z'_1 + \omega_1 z'_0)\varepsilon + \dots &= \frac{1}{2}(y_0 + \varepsilon y_1 + \dots) + \varepsilon(y_0 + \varepsilon y_1 + \dots)(z_0 + \varepsilon z_1 + \dots).\end{aligned}$$

El sistema para el orden 0 es

$$\begin{aligned}\sqrt{3}x'_0 &= -\frac{5}{2}y_0, \\ \sqrt{3}y'_0 &= x_0 - z_0, \\ \sqrt{3}z'_0 &= \frac{1}{2}y_0,\end{aligned}$$

cuya solución, dando condiciones iniciales $x_0(0) = 2, y_0(0) = 1, z_0(0) = 1$, es

$$\begin{aligned}x_0(T) &= \frac{5}{6} \cos(T) - \frac{5\sqrt{3}}{6} \sin(T) + \frac{7}{6}, \\y_0(T) &= \frac{\sqrt{3}}{3} \sin(T) + \cos(T), \\z_0(T) &= -\frac{1}{6} \cos(T) + \frac{\sqrt{3}}{6} \sin(T) + \frac{7}{6}.\end{aligned}$$

El sistema para el orden 1 es

$$\begin{aligned}\sqrt{3}x'_1 &= -\frac{5}{2}y_1 - x_0y_0 - \omega_1x'_0, \\ \sqrt{3}y'_1 &= x_1 - z_1 + x_0y_0 - y_0z_0 - \omega_1y'_0, \\ \sqrt{3}z'_1 &= \frac{1}{2}y_1 + y_0z_0 - \omega_1z'_0.\end{aligned}$$

Si sustituimos los valores de x_0, y_0, z_0 en el sistema anterior y simplificamos obtenemos el sistema

$$\begin{aligned}\sqrt{3}x'_1 &= \frac{-5}{2}y_1 + \left(\frac{5\sqrt{3}}{6}\omega_1 - \frac{7}{6}\right) \cos(T) + \left(\frac{5}{6}\omega_1 - \frac{7\sqrt{3}}{18}\right) \sin(T) - \frac{5}{6} \cos(2T) \\ &\quad + \frac{5\sqrt{3}}{18} \sin(2T), \\ \sqrt{3}y'_1 &= x_1 - z_1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\omega_1 \cos(T) + \omega_1 \sin(T) + \cos(2T) - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin(2T), \\ \sqrt{3}z'_1 &= \frac{1}{2}y_1 + \left(\frac{7}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6}\omega_1\right) \cos(T) + \left(\frac{7\sqrt{3}}{18} - \frac{1}{6}\omega_1\right) \sin(T) - \frac{1}{6} \cos(2T) \\ &\quad + \frac{\sqrt{3}}{18} \sin(2T).\end{aligned}$$

La condición para que la solución del sistema anterior no tenga términos seculares es el sistema

$$\begin{aligned}\sqrt{3} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\omega_1\right) + \left(\frac{7\sqrt{3}}{18} - \frac{1}{6}\omega_1\right) - \left(\frac{5}{6}\omega_1 - \frac{7\sqrt{3}}{18}\right) &= 0, \\ \sqrt{3}\omega_1 - \left(\frac{7}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6}\omega_1\right) + \left(\frac{5\sqrt{3}}{6}\omega_1 - \frac{7}{6}\right) &= 0,\end{aligned}$$

con lo que, si despejamos ω_1 , obtenemos el valor $\omega_1 = \frac{7\sqrt{3}}{18}$. Por lo tanto, sustituyendo el valor de ω_1 en el sistema anterior, quedaría como

$$\begin{aligned}\sqrt{3}x'_1 &= \frac{-5}{2}y_1 - \frac{7\sqrt{3}}{108}\sin(T) - \frac{7}{36}\cos(T) - \frac{5}{6}\cos(2T) + \frac{5\sqrt{3}}{18}\sin(2T), \\ \sqrt{3}y'_1 &= x_1 - z_1 - \frac{7}{18}\cos(T) + \frac{7\sqrt{3}}{18}\sin(T) + \cos(2T) - \frac{\sqrt{3}}{3}\sin(2T), \\ \sqrt{3}z'_1 &= \frac{1}{2}y_1 + \frac{35}{36}\cos(T) + \frac{35\sqrt{3}}{108}\sin(T) - \frac{1}{6}\cos(2T) + \frac{\sqrt{3}}{18}\sin(2T),\end{aligned}$$

Si lo resolvemos y tomamos solo la solución particular, obtenemos la solución sin términos seculares

$$\begin{aligned}x_1(T) &= \frac{7}{108}\cos(T) - \frac{7\sqrt{3}}{108}\sin(T) + \frac{35}{324}\cos(2T) - \frac{858\sqrt{3}}{324}\sin(2T), \\ y_1(T) &= \frac{8}{27}\cos(2T) + \frac{16}{81}\sqrt{3}\sin(2T), \\ z_1(T) &= \frac{-35}{108}\cos(T) + \frac{35\sqrt{3}}{108}\sin(T) - \frac{25}{324}\cos(2T) - \frac{\sqrt{3}}{324}\sin(2T).\end{aligned}$$

El sistema para el orden 2 es

$$\begin{aligned}\sqrt{3}x'_2 &= -\frac{5}{2}y_2 - x_1y_0 - x_0y_1 - \omega_1x'_1 - \omega_2x'_0, \\ \sqrt{3}y'_2 &= x_2 - z_2 + x_1y_0 + x_0y_1 - z_1y_0 - z_0y_1 - \omega_1y'_1 - \omega_2y'_0, \\ \sqrt{3}z'_2 &= \frac{1}{2}y_2 + y_1z_0 + y_0z_1 - \omega_1z'_1 - \omega_2z'_0.\end{aligned}$$

Si sustituimos los valores ya conocidos en el sistema anterior y simplificamos, obtenemos el sistema

$$\begin{aligned}\sqrt{3}x'_2 &= -\frac{5}{2}y_2 - \frac{11161}{648}\cos(T) + \frac{5}{6}\omega_2\sqrt{3}\cos(T) - \frac{11401}{1944}\sqrt{3}\sin(T) + \frac{5}{6}\omega_2\sin(T) \\ &\quad + \frac{5893}{1458}\sqrt{3}\sin(2T) - \frac{5977}{486}\cos(2T) + \frac{25}{162}\sqrt{3}\sin(3T) - \frac{5}{9}\cos(3T), \\ \sqrt{3}y'_2 &= x_2 - z_2 - \frac{5}{27}\cos(T) - \frac{1}{3}\omega_2\sqrt{3}\cos(T) + \frac{7}{81}\sqrt{3}\sin(T) + \omega_2\sin(T) \\ &\quad - \frac{2381}{486}\sqrt{3}\sin(2T) + \frac{2}{3}\cos(3T) + \frac{7255}{486}\cos(2T) - \frac{4}{27}\sqrt{3}\sin(3T), \\ \sqrt{3}z'_2 &= \frac{1}{2}y_2 + \frac{3695}{216}\cos(T) - \frac{1}{6}\omega_2\sqrt{3}\cos(T) + \frac{3679}{648}\sqrt{3}\sin(T) - \frac{1}{6}\omega_2\sin(T) \\ &\quad + \frac{1621}{1458}\sqrt{3}\sin(2T) - \frac{1}{9}\cos(3T) - \frac{1201}{486}\cos(2T) - \frac{1}{162}\sqrt{3}\sin(3T).\end{aligned}$$

Aquí, si queremos que no hayan términos seculares en la solución debemos resolver el sistema

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\left(-\frac{5}{27} - \frac{\sqrt{3}\omega_2}{3}\right) + \left(\frac{3679\sqrt{3}}{648} - \frac{\omega_2}{6}\right) - \left(\frac{5\omega_2}{6} - \frac{11401\sqrt{3}}{1944}\right) &= 0, \\ \sqrt{3}\left(\frac{7\sqrt{3}}{81} + \omega_2\right) - \left(\frac{3695}{216} - \frac{\sqrt{3}\omega_2}{6}\right) + \left(\frac{5\sqrt{3}\omega_2}{6} - \frac{11161}{648}\right) &= 0,\end{aligned}$$

cuya solución es $\omega_2 = \frac{11039\sqrt{3}}{1944}$. Si sustituimos el valor de ω_2 y resolvemos la EDO, obtenemos la solución

$$\begin{aligned} x_2(T) &= \frac{3635}{972} + \frac{13211}{11664} \cos(T) - \frac{11771}{11664} \sqrt{3} \sin(T) + \frac{1253}{729} \cos(2T) + \frac{145}{11664} \cos(3T) \\ &\quad - \frac{20}{243} \sqrt{3} \sin(3T) - \frac{2818}{729} \sqrt{3} \sin(2T), \\ y_2(T) &= \frac{727}{243} \sqrt{3} \sin(2T) + \frac{149}{1944} \sqrt{3} \sin(3T) + \frac{353}{81} \cos(2T) + \frac{2}{27} \cos(3T), \\ z_2(T) &= \frac{3635}{972} - \frac{55183}{11664} \cos(T) + \frac{55471}{11664} \sqrt{3} \sin(T) - \frac{71}{1458} \sqrt{3} \sin(2T) - \frac{1901}{1458} \cos(2T) \\ &\quad - \frac{2}{243} \sqrt{3} \sin(3T) - \frac{125}{11664} \cos(3T). \end{aligned}$$

Hasta este punto, la solución del sistema original sería de la forma

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{5}{2} + \varepsilon \left(\frac{5}{6} \cos(\omega t) - \frac{5\sqrt{3}}{6} \sin(\omega t) + \frac{7}{6} \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{7}{108} \cos(\omega t) - \frac{7\sqrt{3}}{108} \sin(\omega t) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{35}{324} \cos(2\omega t) - \frac{858\sqrt{3}}{324} \sin(2\omega t) \right) + \varepsilon^3 \left(\frac{3635}{972} + \frac{13211}{11664} \cos(\omega t) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{11771}{11664} \sqrt{3} \sin(\omega t) + \frac{1253}{729} \cos(2\omega t) + \frac{145}{11664} \cos(3\omega t) \right), \\ y(t) &= 1 + \varepsilon \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \sin(\omega t) + \cos(\omega t) \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{8}{27} \cos(2\omega t) + \frac{16}{81} \sqrt{3} \sin(2\omega t) \right) \\ &\quad + \varepsilon^3 \left(\frac{727}{243} \sqrt{3} \sin(2\omega t) + \frac{149}{1944} \sqrt{3} \sin(3\omega t) + \frac{353}{81} \cos(2\omega t) + \frac{2}{27} \cos(3\omega t) \right), \\ z(t) &= \frac{1}{2} + \varepsilon \left(-\frac{1}{6} \cos(\omega t) + \frac{\sqrt{3}}{6} \sin(\omega t) + \frac{7}{6} \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{-35}{108} \cos(\omega t) + \frac{35\sqrt{3}}{108} \sin(\omega t) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{25}{324} \cos(2\omega t) - \frac{\sqrt{3}}{324} \sin(2\omega t) \right) + \varepsilon^3 \left(\frac{3635}{972} - \frac{55183}{11664} \cos(T) + \frac{55471}{11664} \sqrt{3} \sin(T) \right. \\ &\quad \left. - \frac{71}{1458} \sqrt{3} \sin(2T) - \frac{1901}{1458} \cos(2T) - \frac{2}{243} \sqrt{3} \sin(3T) - \frac{125}{11664} \cos(3T) \right), \end{aligned}$$

$$\text{con } \omega = \sqrt{3} + \varepsilon \frac{7\sqrt{3}}{18} + \varepsilon^2 \frac{11039\sqrt{3}}{1944}.$$

Podemos seguir realizando este procedimiento en órdenes mayores para obtener soluciones con mayor aproximación a la solución real.

A continuación, tenemos la representación gráfica en la Figura 20 de las soluciones para el método de Poincaré-Lindstedt hasta el orden 6 con varias condiciones iniciales dadas en rojo (la utilizada en el ejemplo y otras dos) y en amarillo las soluciones exactas del sistema.

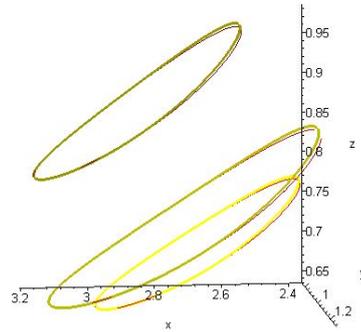


Figura 20: Comparación método Poincaré-Lindstedt con solución exacta

Podemos ver que hay una buena aproximación de la solución con la aplicación del método sólo hasta el orden 6.

5.2. Algoritmo para el método de Poincaré-Lindstedt para 3 especies

Como se puede observar el método utilizado tiene un gran coste computacional para ordenes grandes de ε , por tanto, vamos a describir un algoritmo para el método que optimice el tiempo de ejecución.

Para empezar, perturbamos el sistema de Lotka-Volterra en torno a un punto crítico del sistema y obtenemos un sistema que tendrá la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} + ay &= \varepsilon f(x, y, z), \\ \dot{y} - bx + cz &= \varepsilon g(x, y, z), \\ \dot{z} - dy &= \varepsilon h(x, y, z),\end{aligned}$$

Ahora vamos a definir ciertos términos:

- Definimos $X(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \alpha)$ como el coeficiente del desarrollo en serie de la función $x^{\rho_1} y^{\rho_2} z^{\rho_3}$. Es decir,

$$X(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \alpha) = (x^{\rho_1} y^{\rho_2} z^{\rho_3})_{\alpha}.$$

- Definimos $DX(\alpha), DY(\alpha), DZ(\alpha)$, con $\alpha \in \mathbb{N}$, como la derivada de $x_{\alpha}, y_{\alpha}, z_{\alpha}$, es decir,

$$DX(\alpha) = \frac{d}{dT} x_{\alpha}(T), \quad DY(\alpha) = \frac{d}{dT} y_{\alpha}(T), \quad DZ(\alpha) = \frac{d}{dT} z_{\alpha}(T).$$

- Definimos $W(\alpha)$ con $\alpha \in \mathbb{N}$ como el valor de ω_{α} .

- Definimos F, G, H como las hipermatrices $M \times M \times M$, cuyos elementos son los coeficientes del desarrollo en serie de f, g, h respectivamente, con M el mayor grado de la series. Es decir, p.ej, $F(i, j, k) = f_{i,j,k}$.

Solución de orden 0

1. Asignamos $X(0, 0, 0, 0) = 1$ y $W(0) = \sqrt{ab + cd}$, es decir, $\omega_0 = \sqrt{ab + cd}$.
2. Calculamos $X(1, 0, 0, 0), X(0, 1, 0, 0), X(0, 0, 1, 0)$ como las soluciones del sistema sin perturbar ($\varepsilon = 0$).
3. Calculamos

$$\begin{aligned} DX(0) &= \frac{d}{dT}X(1, 0, 0, 0), \\ DY(0) &= \frac{d}{dT}X(0, 1, 0, 0), \\ DZ(0) &= \frac{d}{dT}X(0, 0, 1, 0). \end{aligned}$$

4. Calculamos, para cada ρ con $2 \leq \rho \leq M$:

$$\begin{aligned} X(\rho, 0, 0, 0) &= X(1, 0, 0, 0)X(\rho - 1, 0, 0, 0), \\ X(0, \rho, 0, 0) &= X(0, 1, 0, 0)X(0, \rho - 1, 0, 0), \\ X(0, 0, \rho, 0) &= X(0, 0, 1, 0)X(0, 0, \rho - 1, 0). \end{aligned}$$

5. Para cada ρ_1, ρ_2, ρ_3 tal que $2 \leq \rho_1, \rho_2, \rho_3 \leq M$, calculamos su desarrollo en serie $(x^{\rho_1}y^{\rho_2}z^{\rho_3})_0$,

$$X(\rho_1, \rho_2, \rho_3, 0) = X(\rho_1, 0, 0, 0)X(0, \rho_2, 0, 0)X(0, 0, \rho_3, 0).$$

Solución de orden 1

1. Calculamos los primeros términos de la parte derecha del sistema de orden 1:

$$\begin{aligned} U_1 &= \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^j f_{k,i-j,j-k} x_0^k y_0^{i-j} z_0^{j-k}, \\ V_1 &= \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^j g_{k,i-j,j-k} x_0^k y_0^{i-j} z_0^{j-k}, \\ W_1 &= \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^j h_{k,i-j,j-k} x_0^k y_0^{i-j} z_0^{j-k}, \end{aligned}$$

Estos términos se calculan mediante

$$U_1 = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^j F(k, i-j, j-k) X(k, i-j, j-k, 0),$$

$$V_1 = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^j G(k, i-j, j-k) X(k, i-j, j-k, 0),$$

$$W_1 = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^j H(k, i-j, j-k) X(k, i-j, j-k, 0).$$

2. Calculamos el resto de la parte derecha del sistema:

$$R_1 = -\omega_1 x'_0, \quad S_1 = -\omega_1 y'_0, \quad T_1 = -\omega_1 z'_0,$$

mediante:

$$R_1 = -W(1)DX(0), \quad S_1 = -W(1)DY(0), \quad T_1 = -W(1)DZ(0).$$

El valor de ω_1 se obtiene resolviendo el sistema para que no hayan términos seculares en la solución como ha sido explicado en el teorema (5.3).

3. Una vez determinado $W(1)$ lo sustituimos en R_1, S_1, T_1 . Ahora calculamos $X(1, 0, 0, 1), X(0, 1, 0, 1), X(0, 0, 1, 1)$ como las soluciones del sistema de orden 1 con el valor de $W(1)$ determinado.

4. Calculamos

$$DX(1) = \frac{d}{dT} X(1, 0, 0, 1),$$

$$DY(1) = \frac{d}{dT} X(0, 1, 0, 1),$$

$$DZ(1) = \frac{d}{dT} X(0, 0, 1, 1).$$

5. Calculamos, para cada ρ con $2 \leq \rho \leq M$:

$$X(\rho, 0, 0, 1) = \sum_{q=0}^1 X(1, 0, 0, 1-q) X(\rho-1, 0, 0, q),$$

$$X(0, \rho, 0, 1) = \sum_{q=0}^1 X(0, 1, 0, 1-q) X(0, \rho-1, 0, q),$$

$$X(0, 0, \rho, 1) = \sum_{q=0}^1 X(0, 0, 1, 1-q) X(0, 0, \rho-1, q).$$

6. Para cada ρ_1, ρ_2, ρ_3 tal que $2 \leq \rho_1, \rho_2, \rho_3 \leq M$, calculamos su desarrollo en serie $(x^{\rho_1} y^{\rho_2} z^{\rho_3})_1$,

$$X(\rho_1, \rho_2, \rho_3, 1) = \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^p X(\rho_1, 0, 0, p-q) X(0, \rho_2, 0, q) X(0, 0, \rho_3, 1-p).$$

Solución de orden $n \geq 2$

1. Calculamos los primeros términos de la parte derecha del sistema de orden n :

$$U_n = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^j F(k, i-j, j-k) X(k, i-j, j-k, n-1) - \sum_{p=1}^{n-1} W(n-p) DX(p),$$

$$V_n = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^j G(k, i-j, j-k) X(k, i-j, j-k, n-1) - \sum_{p=1}^{n-1} W(n-p) DY(p),$$

$$W_n = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^j H(k, i-j, j-k) X(k, i-j, j-k, n-1) - \sum_{p=1}^{n-1} W(n-p) DZ(p).$$

2. Calculamos el resto de la parte derecha:

$$R_n = -\omega_n x'_0, \quad S_n = -\omega_n y'_0, \quad T_n = -\omega_n z'_0.$$

El valor de ω_n se obtiene resolviendo el sistema para que no hayan términos seculares en la solución como se ha hecho anteriormente.

3. Una vez determinado $W(n)$ lo sustituimos en R_n, S_n, T_n . Ahora calculamos $X(1, 0, 0, n), X(0, 1, 0, n), X(0, 0, 1, n)$ como las soluciones del sistema de orden n con el valor de $W(n)$ determinado.
4. Calculamos

$$DX(n) = \frac{d}{dT} X(1, 0, 0, n),$$

$$DY(n) = \frac{d}{dT} X(0, 1, 0, n),$$

$$DZ(n) = \frac{d}{dT} X(0, 0, 1, n).$$

5. Calculamos para cada ρ con $2 \leq \rho \leq M$:

$$X(\rho, 0, 0, n) = \sum_{q=0}^n X(1, 0, 0, n-q) X(\rho-1, 0, 0, q),$$

$$X(0, \rho, 0, n) = \sum_{q=0}^n X(0, 1, 0, n-q) X(0, \rho-1, 0, q),$$

$$X(0, 0, \rho, n) = \sum_{q=0}^n X(0, 0, 1, n-q) X(0, 0, \rho-1, q).$$

6. Para cada ρ_1, ρ_2, ρ_3 tal que $2 \leq \rho_1, \rho_2, \rho_3 \leq M$, calculamos su desarrollo en series $(x^{\rho_1} y^{\rho_2} z^{\rho_3})_n$,

$$X(\rho_1, \rho_2, \rho_3, n) = \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^p X(\rho_1, 0, 0, p-q) X(0, \rho_2, 0, q) X(0, 0, \rho_3, n-p).$$

Al final, obtendremos que la aproximación de la solución periódica en el sistema original es

$$\begin{aligned}x(t) &= X(1, 0, 0, 0)(T) + \varepsilon X(1, 0, 0, 1)(T) + \dots + \varepsilon^Q X(1, 0, 0, Q)(T), \\y(t) &= X(0, 1, 0, 0)(T) + \varepsilon X(0, 1, 0, 1)(T) + \dots + \varepsilon^Q X(0, 1, 0, Q)(T), \\z(t) &= X(0, 0, 1, 0)(T) + \varepsilon X(0, 0, 1, 1)(T) + \dots + \varepsilon^Q X(0, 0, 1, Q)(T),\end{aligned}$$

donde $X(1,0,0,q)(T)$, $X(0,1,0,q)$, $X(0,0,1,q)(T)$ son 2π -periódicas en $T = \omega t$ y

$$\omega = W(0) + \varepsilon W(1) + \dots + \varepsilon^Q W(Q).$$

A. Método de Poincaré-Lindstedt para tres dimensiones en Maple

```

LIP03:=proc(edo,ci,orden)
local var,sys,r,omega,PC,EDO,serie,M,i,j,k,F,G,H,n,ODI,OD,sol,A,val,
      X,DX,DY,DZ,U,V,W,R,S,T,aux;
var[1]:=op(1,lhs(edo[1]));
var[2]:=op(1,lhs(edo[2]));
var[3]:=op(1,lhs(edo[3]));
sys:=subs([var[1]=x,var[2]=y,var[3]=z],edo);
sys:={rhs(sys[1])=0,rhs(sys[2])=0,rhs(sys[3])=0,x^2+y^2+z^2<>0};

PC:=isolve(sys,1);
print(PC);
PC:=[PC[readstat("Que punto:")]];
PC:=subs(l=1/2,PC);

EDO:=collect(subs([var[1]=rhs(PC[1])+epsilon*x_e(t),var[2]=rhs(PC[2])
      +epsilon*y_e(t),var[3]=rhs(PC[3])+epsilon*z_e(t)],edo),epsilon);
EDO:=[expand(EDO[1]/epsilon),expand(EDO[2]/epsilon),expand(EDO[3]/epsilon)];

serie[1]:=mtaylor(coeff(subs([x_e(t)=x_e,y_e(t)=y_e,z_e(t)=z_e],
      rhs(EDO[1])),epsilon,1),[x_e,y_e,z_e],12);
serie[2]:=mtaylor(coeff(subs([x_e(t)=x_e,y_e(t)=y_e,z_e(t)=z_e],
      rhs(EDO[2])),epsilon,1),[x_e,y_e,z_e],12);
serie[3]:=mtaylor(coeff(subs([x_e(t)=x_e,y_e(t)=y_e,z_e(t)=z_e],
      rhs(EDO[3])),epsilon,1),[x_e,y_e,z_e],12);
M:=lcm(degree(serie[1]),degree(serie[2]),degree(serie[3]));

for i from 0 to M do
  for j from 0 to M do
    for k from 0 to M do
      F[i,j,k]:=coeff(coeff(coeff(serie[1],y_e,j),x_e,i),z_e,k);
      G[i,j,k]:=coeff(coeff(coeff(serie[2],y_e,j),x_e,i),z_e,k);
      H[i,j,k]:=coeff(coeff(coeff(serie[3],y_e,j),x_e,i),z_e,k);
    od;od;od;
  X[0,0,0,0]:=1;

n:=0; ##### orden 0 #####
ODI:=subs(epsilon = 0, EDO);

```

```

sys:=subs([x_e(t)=x,y_e(t)=y,z_e(t)=z],ODI);
sys:=[rhs(sys[1]),rhs(sys[2]),rhs(sys[3])];

A:=Matrix([[diff(sys[1],x),diff(sys[1],y),diff(sys[1],z)],[diff(sys[2],x),diff(sys[2],y),diff(sys[2],z)],[diff(sys[3],x),diff(sys[3],y),diff(sys[3],z)]]);
val:=Eigenvalues(A);
omega[0]:=Im(val[2]);

OD:=[omega[0]*lhs(ODI[1])=rhs(ODI[1]),omega[0]*lhs(ODI[2])=rhs(ODI[2]),omega[0]*lhs(ODI[3])=rhs(ODI[3])];
sol:=dsolve([op(OD),x_e(0)=rhs(ci[1]),y_e(0)=rhs(ci[2]),z_e(0)=rhs(ci[3])]);
X[1,0,0,0]:=rhs(sol[1]);
X[0,1,0,0]:=rhs(sol[2]);
X[0,0,1,0]:=rhs(sol[3]);
DX[0]:=diff(X[1,0,0,0],t);
DY[0]:=diff(X[0,1,0,0],t);
DZ[0]:=diff(X[0,0,1,0],t);
for i from 2 to M do
  X[i,0,0,0]:=combine(X[1,0,0,0]*X[i-1,0,0,0]);
  X[0,i,0,0]:=combine(X[0,1,0,0]*X[0,i-1,0,0]);
  X[0,0,i,0]:=combine(X[0,0,1,0]*X[0,0,i-1,0]);
od;
for i from 0 to M do
  for j from 0 to M do
    for k from 0 to M do
      X[i,j,k,0]:=combine(X[i,0,0,0]*X[0,j,0,0]*X[0,0,k,0]);
    od;od;od;

n:=n+1; ##### orden 1 #####
U:=combine(sum(sum(sum(F[r,p-q,q-r]*X[r,p-q,q-r,0],r=0..q),q=0..p),p=0..M));
V:=combine(sum(sum(sum(G[r,p-q,q-r]*X[r,p-q,q-r,0],r=0..q),q=0..p),p=0..M));
W:=combine(sum(sum(sum(H[r,p-q,q-r]*X[r,p-q,q-r,0],r=0..q),q=0..p),p=0..M));
R:=-omega[1]*DX[0]; S:=-omega[1]*DY[0]; T:=-omega[1]*DZ[0];
aux:=[combine(U+R),combine(V+S),combine(W+T)];

```

```

sol:=solve({omega[0]*coeff(aux[2],cos(t))-A[2,1]*coeff(aux[1],sin(t))
          -A[2,3]*coeff(aux[3],sin(t))},omega[1]);
omega[1]:=rhs(sol[1]);
R:=-omega[1]*DX[0]; S:=-omega[1]*DY[0]; T:=-omega[1]*DZ[0];
OD:=[omega[0]*lhs(ODI[1])=combine(rhs(ODI[1])+U+R),omega[0]*lhs(ODI[2])=
      combine(rhs(ODI[2])+V+S),omega[0]*lhs(ODI[3])=combine(rhs(ODI[3])
      +W+T)];
sol:=dsolve(OD,singsol=none);
sol:=subs([_C1=0,_C2=0,_C3=0],sol);
sol:=combine(value(sol));
X[1,0,0,1]:=combine(rhs(sol[1]));
X[0,1,0,1]:=combine(rhs(sol[2]));
X[0,0,1,1]:=combine(rhs(sol[3]));
DX[1]:=diff(X[1,0,0,1],t);
DY[1]:=diff(X[0,1,0,1],t);
DZ[1]:=diff(X[0,0,1,1],t);
for i from 2 to M do
  X[i,0,0,1]:=combine(sum(X[i-1,0,0,p]*X[1,0,0,1-p],p=0..1));
  X[0,i,0,1]:=combine(sum(X[0,i-1,0,p]*X[0,1,0,1-p],p=0..1));
  X[0,0,i,1]:=combine(sum(X[0,0,i-1,p]*X[0,0,1,1-p],p=0..1));
od;
X[0,0,0,1]:=1;
for i from 0 to M do
  for j from 0 to M do
    for k from 0 to M do
      X[i,j,k,1]:=combine(sum(sum(X[i,0,0,p-q]*X[0,j,0,q]*X[0,0,k,1-p],
      q=0..p),p=0..1));
    od;od;od;

n:=n+1; ##### orden mayor que 1 #####
while n<=8 do
U:=combine(sum(sum(sum(F[r,p-q,q-r]*X[r,p-q,q-r,n-1],r=0..q),q=0..p),
  p=0..M)-sum(DX[p]*omega[n-p],p=1..n-1));
V:=combine(sum(sum(sum(G[r,p-q,q-r]*X[r,p-q,q-r,n-1],r=0..q),q=0..p),
  p=0..M)-sum(DY[p]*omega[n-p],p=1..n-1));
W:=combine(sum(sum(sum(H[r,p-q,q-r]*X[r,p-q,q-r,n-1],r=0..q),q=0..p),
  p=0..M)-sum(DZ[p]*omega[n-p],p=1..n-1));
R:=-omega[n]*DX[0]; S:=-omega[n]*DY[0]; T:=-omega[n]*DZ[0];
aux:=[combine(U+R),combine(V+S),combine(W+T)];

```

```

sol:=solve({omega[0]*coeff(aux[2],cos(t))-A[2,1]*coeff(aux[1],sin(t))
-A[2,3]*coeff(aux[3],sin(t))},omega[n]);
omega[n]:=rhs(sol[1]);
R:=-omega[n]*DX[0]; S:=-omega[n]*DY[0]; T:=-omega[n]*DZ[0];
OD:=[omega[0]*lhs(ODI[1])=combine(rhs(ODI[1])+U+R),omega[0]*lhs(ODI[2])=
combine(rhs(ODI[2])+V+S),omega[0]*lhs(ODI[3])=combine(rhs(ODI[3])
+W+T)];
sol:=dsolve(OD,singsol=none);
sol:=subs([_C1=0,_C2=0,_C3=0],sol);
sol:=combine(value(sol));
X[1,0,0,n]:=combine(rhs(sol[1]));
X[0,1,0,n]:=combine(rhs(sol[2]));
X[0,0,1,n]:=combine(rhs(sol[3]));
DX[n]:=diff(X[1,0,0,n],t);
DY[n]:=diff(X[0,1,0,n],t);
DZ[n]:=diff(X[0,0,1,n],t);
for i from 2 to M do
  X[i,0,0,n]:=combine(sum(X[i-1,0,0,p]*X[1,0,0,n-p],p=0..n));
  X[0,i,0,n]:=combine(sum(X[0,i-1,0,p]*X[0,1,0,n-p],p=0..n));
  X[0,0,i,n]:=combine(sum(X[0,0,i-1,p]*X[0,0,1,n-p],p=0..n));
od;
X[0,0,0,n]:=1:
for i from 0 to M do
  for j from 0 to M do
    for k from 0 to M do
      X[i,j,k,n]:=combine(sum(sum(X[i,0,0,p-q]*X[0,j,0,q]*X[0,0,k,n-p]
,q=0..p),p=0..n));
    od;od;od;
n:=n+1;
od;
X_e:=sum(X[1,0,0,p]*epsilon^p,p=0..n-1);
Y_e:=sum(X[0,1,0,p]*epsilon^p,p=0..n-1);
Z_e:=sum(X[0,0,1,p]*epsilon^p,p=0..n-1);
Omega:=sum(omega[p]*epsilon^p,p=0..n-1);
X_e:=subs(T=Omega*t,X_e);
Y_e:=subs(T=Omega*t,Y_e);
Z_e:=subs(T=Omega*t,Z_e);
return([x(t)=rhs(PC[1])+combine(epsilon*X_e),y(t)=rhs(PC[2])+combine(
epsilon*Y_e),z(t)=rhs(PC[3])+combine(epsilon*Z_e)]);
end:

```

Referencias

- [1] Cano Cancela, A. (2011). Sistemas de Lotka-Volterra en dinámica poblacional, 28-122.
- [2] Marinca, V. and Herisanu, N. (2011). Nonlinear Dynamical Systems in Engineering, 9–29. Springer-Verlag, Berlin.
- [3] Vankerschaver, J. The Poincaré-Lindstedt Method: the van der Pol oscillator, 2 pages, pdf="<http://www.cds.caltech.edu/archive/help/uploads/wiki/files/224/cds140b-plvdp.pdf>"
- [4] Navarro, J.F. Computation of periodic solutions in systems of differential equations of first order, 6 pages.
- [5] Grozdanovski, T. and Shepherd, J.J. (2008). Approximating the periodic solutions of the Lotka-Volterra system, ANZIAM J. 49 (EMAC2007) pp. C243–C257. pdf="<http://journal.austms.org.au/ojs/index.php/ANZIAMJ/article/download/353/264>".