RPMA

Año 9 Nº 1

Herramientas digitales para el aprendizaje activo de los estudiantes

Barile, Caerols y Gaona

Hernán Burgos

Encargado Nacional de Olimpíadas de Matemática

Geometría Geopolítica

Víctor Cortés y Mario Ponce

Editorial

Este nuevo número de la Revista del Profesor de Matemáticas RPMat contiene varios artículos que muestran aplicaciones de la Matemática en la vida real y cómo su objetividad propone soluciones que colaboran en lograr mantener relaciones de paz y amistad entre países. Ejemplos como éstos son bastantes frecuentes pero poco reconocidos por la gente en general. El artículo sobre geometría geopolítica permitirá discutir y conversar con los estudiantes y profesores de otras áreas, lo que puede ser un ejercicio bastante motivador y estimulante.

Hemos incluido un práctico artículo que nos permite explicar cómo se utiliza una plataforma computacional para presentar ejercicios y secuencias de aprendizaje dinámicas. La plataforma Moodle es un ejemplo de estas herramientas, mostrándose muy versátil, abierta y de fácil acceso.

Además de querer brindar herramientas de aplicación directa a los profesores, RPMat busca también entregar oportunidades para ampliar el conocimiento matemático de nuestros lectores, por lo que incluimos también artículos más complejos y estimulantes. En este número presentamos un artículo que generaliza los triángulos de Pascal, que constituye un aporte original de sus autores.

La entrevista de este número está dedicada a la persona detrás de las olimpíadas de Matemáticas, cuya dedicación y compromiso con las diferentes competencias nacionales e internacionales ha logrado mantener en el tiempo el prestigio y seriedad de la competencia. Su experiencia de vida y de aporte a la disciplina queda plasmada en esta conversación que nos es grato presentar.

Durante el año en curso las autoridades políticas plantearán una serie de cambios en el sistema educacional, no sólo en su estructura sino que además en aspectos de la gestión docente del profesor, su formación y perfeccionamiento. Los profesores y científicos debemos participar en todas las instancias posibles y aportar con nuestra experiencia en la construcción del nuevo modelo.

La Sociedad de Matemática de Chile espera también participar institucionalmente en esta tarea y aportar en aquellas áreas donde nos permitimos opinar, desde nuestra experiencia docente y del conocimiento y cultivo de la disciplina.

Los invitamos a leer RPMat, opinar sobre su contenido y además esperamos recibir colaboraciones que describan sus experiencias de docencia que deseen compartir y también sus aportes didácticos y matemáticos que enriquecerán la revista.

RPMat se encuentra disponible en la dirección electrónica: www.rpmat.cl

RPMAT
Revista del Profesor de Matemáticas

www.rpmat.cl

Contenidos

La revista del profesor de matemáticas es una publicación de la Sociedad de Matemática de Chile, SOMACHI. Publica artículos en español acerca de divulgación de la matemática, artículos históricos, artículos con metodologías didácticas innovadoras y otras formas que valoricen y enriquezcan la labor del profesor de matemáticas.

CHILE
SOCIEDAD DE MATEMÁTICA

Premio EduCiencias Euclides 2014

El Premio Euclides es uno de los Premios EduCiencia que otorga la Universidad Católica de Chile junto con AES Gener. Es un reconocimiento que otorga la Facultad de Matemáticas de la P. Universidad Católica de Chile a profesores de educación media del país que se han destacado por su dedicación ejemplar a la enseñanza de las matemáticas y/o por obtener logros excepcionales en lo que respecta a innovación y calidad en sus métodos educativos. El Premio Euclides existe desde el año 2002, con el fin de reconocer y estimular la excelencia en la docencia escolar, así como difundir en la comunidad el perfil de un buen profesor, la dedicación ejemplar en la enseñanza, así como los logros excepcionales en la innovación y la búsqueda de calidad de los métodos educativos.

Ivette del Carmen Gutiérrez Guerrero, del Colegio Divina Pastora de Ñuñoa, es la ganadora del Premio EUCLIDES 2014. Así presentó Alexis Alvear, de la Facultad de Matemáticas, a la ganadora: “Ivette, es profesora de matemática egresada de la Universidad de Chile en 1997. Desde el año 2004 es parte del Colegio Divina Pastora de Ñuñoa, como profesora de Matemáticas en Enseñanza Media, lugar donde ha aportado añadiendo nuevos cursos y seminarios a su currículo académico, además de asistir a congresos, jornadas y encuentros para profesores de matemática realizados en distintas instituciones”.

La comunidad religiosa calasancia del colegio Divina Pastora de Ñuñoa, en un comunicado agrega:
Toda la comunidad educativa le da las más sinceras felicitaciones y agradecimientos a la profesora Ivette, por su notable labor, responsable, dedicada y comprometida con sus alumnos, vocación de maestra consagrada a la buena enseñanza, como deseaba nuestro Fundador.

Para saber más:
www.educiencias.cl/index.php?contenido=ganadores

Noticias

Académico de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Católica de Chile publica en revista "Annals of Mathematics"

La revista "Annals of Mathematics" es ampliamente reconocida como la mejor revista de investigación matemática a nivel mundial. Fue fundada en 1933 bajo el nombre "The Analyst" y, desde 1933, es publicada por el Institute for Advanced Studies de la Universidad de Princeton, Estados Unidos. El proceso de publicación es altamente selectivo, aceptándose solamente artículos que respondan a preguntas de gran interés científico.

La prestigiosa revista aceptó publicar un artículo de investigación de Giancarlo Urzúa, académico de la Facultad de Matemáticas de la PUC. El artículo ´Chern slopes of simply connected complex surfaces of general type are dense in [2,3]´, que el Dr. Urzúa escribió en conjunto con el Dr. Xavier Roulleau de la Universidad de Poitiers, Francia, resuelve un problema importante de geometría que ha interesado a los matemáticos desde fines de los años 70, después de la demostración de la desigualdad de Bogomolov-Miyaoka-Yau.

Urzúa se convierte así en el tercer académico, que trabajando en una universidad chilena, alcanza dicho logro.

El investigador obtuvo los grados de Licenciado y Magíster en Matemática en la Universidad Católica de Chile, y el grado de Doctor en Matemática en la Universidad de Michigan, USA. Giancarlo Urzúa es actualmente profesor asistente de la Facultad de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Chile.

Para saber más: www.mat.uc.cl/noticias/

Chile es reconocido por su excelente desarrollo matemático en el Congreso Mundial de Seoul 2014

Chile presentó su desarrollo matemático de los últimos 50 años en Corea 2014 en el International Congress of Mathematicians ICM 2014, realizado en Seúl en agosto recién pasado. La SOMACHI fue invitada a realizar una presentación que diera cuenta del importante desarrollo que ha experimentado la Matemática chilena en los últimos 50 años. La presentación fue realizada por la profesora Rubí Rodríguez Moreno, de la Universidad de la Frontera de Temuco (UFRO).
Para saber más:
www.somachi.cl/Noticia.aspx?NotId=0

Noticias

Importantes noticias en la entrega de las Medallas Fields 2014

"TRANSIRE SVVM PECTUS MVNDOQUE POTIRE"
"Sobrepasar su propio entendimiento y apoderarse del mundo"

Cada cuatro años, durante la ceremonia inaugural del Congreso Mundial de Matemáticos, se otorga la Medalla Fields, reconocimiento considerado como el Premio Nobel de las matemáticas, a matemáticos menores de 40 años, que hayan destacado por su labor de investigación en la disciplina. Éste consiste en una medalla acuñada en oro con el retrato de Arquímedes y por el reverso el cilindro con la esfera inscrita, fue instaurado en el Congreso Internacional de Matemática de 1924.

En esta versión, por primera vez una mujer y un latinoamericano se hicieron acreedores de la Medalla: la iraní Maryam Mirzakhani y el brasileño Artur Ávila.

Maryam Mirzakhani, matemática de la Universidad de Stanford, sus estudios abarcan impactantes y originales investigaciones sobre geometría y sistemas dinámicos. Su trabajo en superficies Riemann y sus modelos espaciales conectan varias disciplinas matemáticas (geometría hiperbólica, análisis complejo, topología y dinámica) e influyen en todas ellas.

Artur Ávila Cordeiro de Melo, brasileño (nacido en Río de Janeiro, 29 de junio de 1979), matemático del Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada de la Universidad Federal de Río de Janeiro, destacado por sus trabajos principalmente en Sistemas Dinámicos y Teoría Espectral.

Chile será sede de la XXVI Olimpiada Matemática de Países del Cono Sur 2015

A Chile le ha correspondido éste año, la organización de la XXVI Olimpíada de Matemática de países del Cono Sur. En el evento participan estudiantes menores de 16 años y entre sus objetivos está el incentivar a los talentos matemáticos juveniles que emergen en la región, a ser futuros científicos para que contribuyan a fortalecer la comunidad científica sudamericana y al mismo tiempo, puedan favorecer las relaciones de amistad e intercambio de experiencias académicas entre alumnos y profesores de ésta parte del continente americano.

La justa olímpica se desarrollará desde el 13 al 18 de mayo, en la ciudad de Temuco, de la región de la Araucanía, y contará con la participación de los siguientes países:Argentina, Bolivia, Brasil, Chile, Ecuador, Paraguay, Perú y Uruguay.

Para saber más:
www.somachi.cl/NotOlimpiada.aspx?NotId=9

Premio Jorge Billeke a la excelencia Académica 2014

Como ha sido tradicional en los últimos años, en el encuentro anual de la Sociedad de Matemática de Chile que se realizó en el mes de diciembre de 2014, se otorga el premio Jorge Billeke, en honor a quien fuera un gran matemático chileno, destacado por su gran dedicación, calidez, generosidad y preocupación por sus estudiantes.

El premio tiene por objetivo reconocer y premiar al estudiante más destacado en el estudio de las Matemáticas de nuestro país, en ésta oportunidad ha sido distinguido con tal alto galardón, el alumno de la Universidad de Concepción, Joaquín Leonardo Moraga Sáez, de brillante trayectoria en las competencias olímpicas matemáticas, en sus estudios de licenciatura y actualmente en sus estudios de Magister.

Para saber más http://www.somachi.cl/Noticia.aspx?NotId=0

Geometría geopolítica

Durante los últimos años hemos sido testigos de una disputa de delimitación marítima que esconde una aplicación muy interesante de conceptos geométricos elementales pero complejos.

Víctor Cortés
Facultad de Matemáticas,
Pontificia Universidad Católica de Chile

Mario Ponce
Facultad de Matemáticas,
Pontificia Universidad Católica de Chile

Durante los últimos años hemos sido testigos de una disputa por la delimitación marítima entre países vecinos. Nos referimos a las reclamaciones de Perú por la delimitación de la frontera marítima con Chile en las aguas adyacentes a su frontera terrestre.

En este artículo queremos dejar de lado por un momento las consideraciones geopolíticas y concentrarnos en los aspectos geométricos que este problema nos plantea y así dar a conocer otra instancia más donde la matemática es necesaria.

Es muy relevante hacer notar que, independiente de las banderas y de los aspectos legales, cualquier fallo de este conflicto da lugar a implementaciones cuya naturaleza es geométrica, y tal como veremos más adelante, no del todo simple.

Antes de abandonar definitivamente lasconsideraciones legales, recordamos cuales son las normas que rigen internacionalmente en la actualidad a este tipo de disputas:

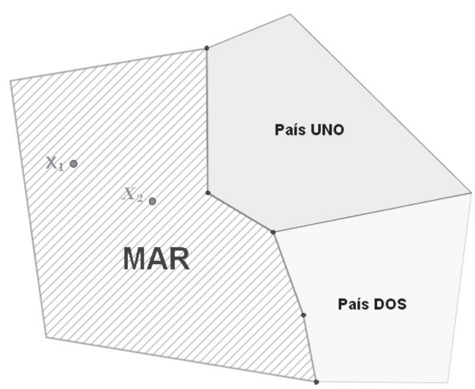
Convención de las Naciones Unidas sobre el Derecho del Mar

Artículo 15. Delimitación del mar territorial entre Estados con costas adyacentes o situadas frente a frente.

"Cuando las costas de dos Estados sean adyacentes o se hallen situadas frente a frente, ninguno de dichos Estados tendrá derecho, salvo acuerdo en contrario, a extender su mar territorial mas allá de una línea media cuyos puntos sean equidistantes de los puntos más próximos de las líneas de base a partir de las cuales se mida la anchura del mar territorial de cada uno de esos Estados. No obstante, esta disposición no será aplicable cuando, por la existencia de derechos históricos o por otras circunstancias especiales, sea necesario delimitar el mar territorial de ambos Estados en otra forma."

Consideraciones generales

Cualquier persona con una mínima sensibilidad (intuición) matemática reconocerá en este artículo una estrecha referencia a conceptos geométricos. En una primera mirada, reconocemos los conceptos tales como: distancia, equidistancia, línea media y otros ampliamente conocidos.



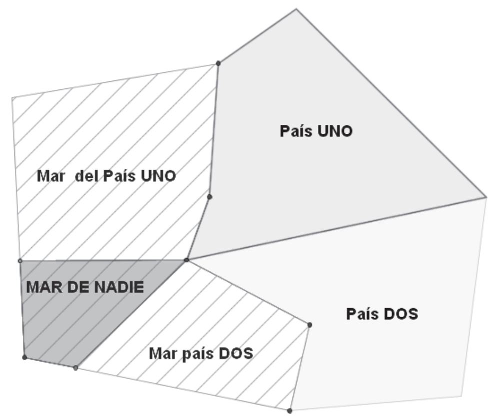
Puntos pertenecientes al Mar del País UNO

En la figura hemos dibujado dos países que llamaremos País UNO y País DOS los cuales quieren determinar de una manera justa una división del mar que los rodea.

Parece razonablemente justo que el punto X1 dibujado represente un territorio de mar del País UNO puesto que se ubica más cerca de la costa del País UNO que de la costa del País DOS. Consecuentemente el punto X2 también debe ser parte del territorio del País UNO. Si aplicamos este criterio para todos los puntos del mar que rodea los países, concluimos que el mar del País UNO corresponde a todos los puntos cuya distancia a la costa del País UNO es menor que la correspondiente distancia al País DOS y análogamente para el mar del País DOS.

A partir de este criterio nos preguntamos entonces ¿Cuál es el trazado del límite marítimo? La respuesta es inmediata a partir del procedimiento anterior: hay puntos del mar ubicados a igual distancia de ambas costas y y por consiguiente no pueden ser asignados a un país en particular. Esto determina un conjunto de puntos, que llamamos el conjunto equidistante.

Un lector curioso habrá observado que el problema geométrico que debemos resolver noes simple. En la figura siguiente se ha aplicado este criterio a dos países que comparten una frontera terrestre. Notemos que el conjunto equidistante en este caso no corresponde a un trazado (una línea), si no que a toda una región del mar. Las consecuencias de establecer este conjunto como el límite terrestre son imaginables, pues difícilmente los países aceptarían que una región con eventuales riquezas sean dejadas libres (existe un Mar de Nadie).



Bastante investigación matemática se ha desarrollado buscando responder la pregunta ¿Qué se puede decir acerca de la estructura geométrica de un conjunto equidistante?

Recién en 1975, Wilker demostró que la situación compleja de la figura no se produce cuando los países no se tocan. En ese caso el conjunto equidistante no contiene regiones, es un trazado continuo, es una curva.

Antes de entra directamente en la problemática geométrica de construir este conjuntoequidistante, vamos a explicar qué entendemos por distancia a la costa desde un punto en el mar. Asumiremos que el lector conoce el con concepto de distancia entre dos puntos.

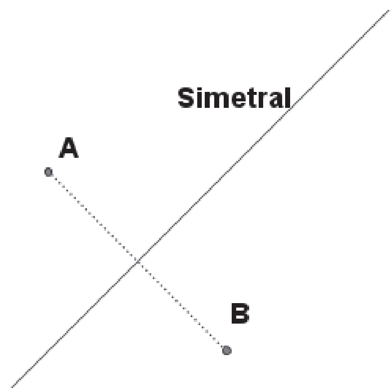
Una costa es una línea poligonal. Es decir, una curva compuesta de segmentos rectos unidos en sus extremos. Dado un punto X fuera de ella vamos a considerar la distancia d(X, A), como el menor valor entre todos los valores d(X, a) con a en el conjunto A, es decir, la distancia de un punto a un conjunto es la menor distancia entre el punto y algún punto en ese conjunto.

¿Por qué nos parece importante responder la pregunta acerca de la complejidad de esta posible frontera marítima? Las razones son varias: una frontera marítima en general no debería ser muy complicada pues las actividades pesqueras que ocurren cerca de ellas deben tener herramientas simples para determinar hasta donde se puede operar. Una frontera difícil de describir también dará lugar a una frontera difícil de trazar.

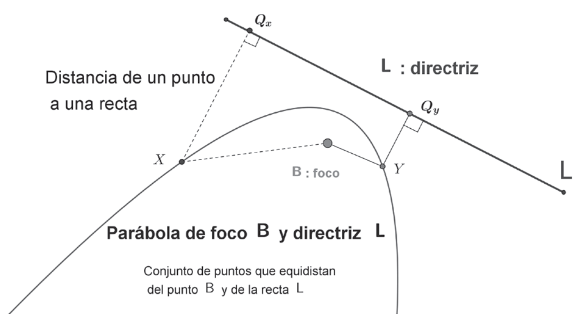
Por último, y quizás la razón real por la que hemos escrito estas notas y dedicado varios años a investigar este tema, radica en que se trata de un problema geométrico simple de enunciar, que da lugar a muchas y desafiantes preguntas matemáticas y que puede ser trabajado con los estudiantes y con la utilización de software educativos. Los diagramas aquí presentados fueron calculados con GEOGEBRA, un programa que es gratis.

Conjuntos equidistantes clásicos

Los conjuntos equidistantes aparecen en la historia de la matemática desde tiempos muy remotos. El primer ejemplo ocurre en el caso en que cada país (conjunto) se reduce a un punto en el plano.



Es bien sabido que la simetral, es decir, la recta perpendicular al segmento AB y que pasa por el punto medio de éste, es el conjunto equidistante entre los puntos A y B. De hecho uno podría definir rectas en el plano de esta manera. La definición de recta está asociada al camino más corto entre dos puntos. Esta noción de equidistancia fue propuesta por Leibniz para definir formalmente un plano del espacio como el conjunto equidistante a dos puntos.



Las cónicas son conjuntos equidistantes a dos conjuntos:

Considerando el conjunto A como una recta L y B un punto fuera de ella, recordamos que el conjunto equidistante a los conjuntos A y B es el trazado generado por una parábola, cuyo foco es el punto B y directriz la recta L.

En el caso en que A es una circunsferencia de centro O y radio R y B un punto en su interior, un punto X es equidistante a ellos si cumple con la condición:

$$R-d(X,O)=d(X, B)$$

o equivalentemente $R=d(X,O)+d(X,B)$,

igualdad que corresponde a la condición que define a una elipse de focos O y B.

Por otro lado para A siendo una circunferencia de centro O y radio R y un punto B en su exterior, un punto X es equidistante a ellos si cumple con la condición:

$$d(X,A)=d(X,O)-R=d(X,B)$$

o equivalentemente

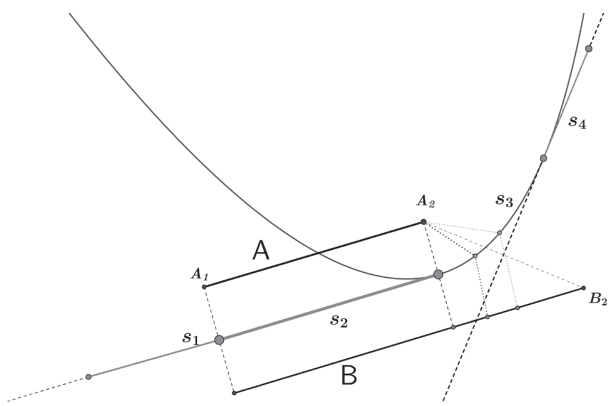
$$R=d(X,B)-d(X,O),$$

lo cual corresponde a una rama de una hipérbola.

Por último si A y B son dos segmentos de igual longitud con un extremo común el conjunto equidistante a ellos es la bisectriz del ángulo que ellos forman.

Para practicar, dejemos como ejercicio calcular el conjunto equidistante a dos segmentos con un extremo común pero de diferente longitud.

Consideremos el caso de dos segmentos paralelos de diferentes longitudes. El conjunto equidistante está compuesto por cuatro trazos: s1 es parte de la simetral de los puntos A1 y B1, s2 el trazo de línea paralelo a los segmentos dados, s3 el trazo de parábola de foco



A2 y directriz la línea que contiene al segmento B y s4 la simetral de los puntos A2 y B2.

Para acercarnos a la situación real de la aplicación del artículo 15 de la UNCLOS, vamos suponer que las respectivas costas están representadas por poligonales finitas. De hecho la misma UNCLOS considera esta simplifica

ción en la definición del concepto de línea de base.
Una vez hecha esta simplificación, veremos que el conjunto equidistante se obtendrá como una concatenación de conjuntos equidistantes, similar a lo que vimos en el ejemplo anterior.
Puesto que la costa en una curva poligonal tiene vértices y segmentos, los conjuntos equidistantes serán una concatenación de trazos de alguno de estos tres objetos:

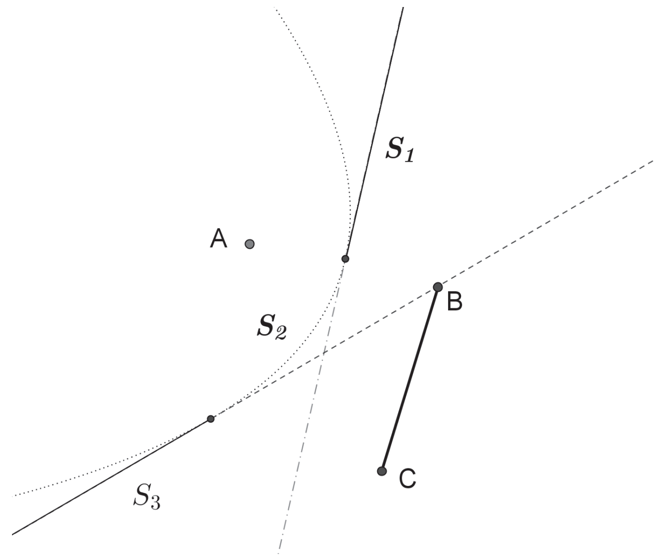
• Una Simetral, en el caso que la distancia se realiza entre dos vértices, uno en cada costa.

• Una Parábola, en el caso que la distancia se realice entre un segmento en una costa y un punto en la otra.

• Una Bisectriz, cuando la distancia se realiza entre dos segmentos, uno en cada costa.

Empecemos por un ejemplo simple en la figura siguiente. El conjunto A es el punto señalado y el otro conjunto es el segmento BC. En la figura se ha dibujado el trazo S1, quecorresponde a la simetral entre A y B. El tramo S2 es un pedazo de la parábola de foco A y directriz la línea BC. El tramo S3 es una parte de la simetral entre A y C.

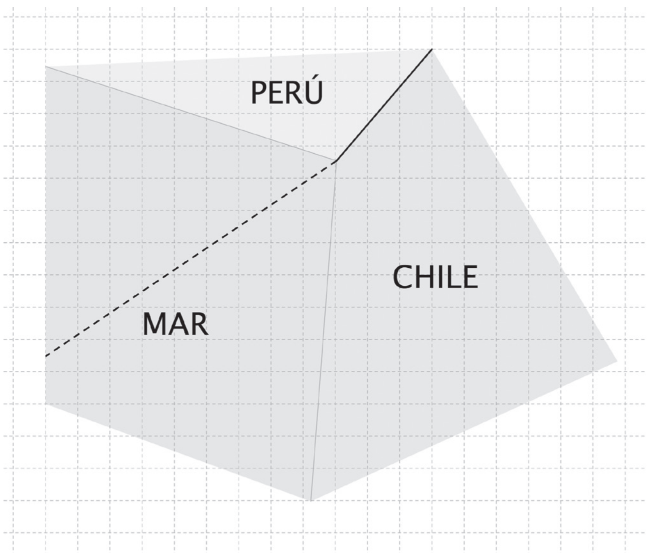
Con los ejemplos expuestos, el lector podrá imaginarse la complejidad del conjunto equidistante cuando A es una costa poligonal y B una costa poligonal con uno o dos segmentos.



Descripción Geométrica del Fallo de la Corte Internacional de la Haya

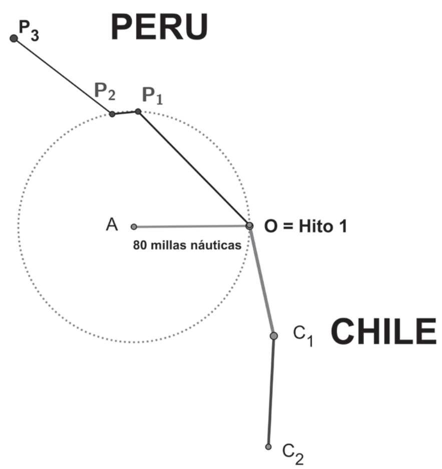
Volvamos al diferendo entre Chile y Perú por la definición de su frontera marítima, La Corte Internacional determinó en Enero 2014 que la aplicación del artículo 15 de la UNCLOS no era directa pues efectivamente, y tal como el artículo prevé como exclusión, existían acuerdos previos entre los países.

El fallo hace una descripción muy interesante desde el punto de vista geométrico. Determi-na que el límite marítimo viene dado por un segmento del paralelo que pasa por el Hito 1, punto terrestre de coordenadas 180 20’ grados, hasta un punto ubicado aguas adentro sobre este paralelo y a 80 millas del Hito 1. Notemos que este punto no está en el conjunto equidistante a las

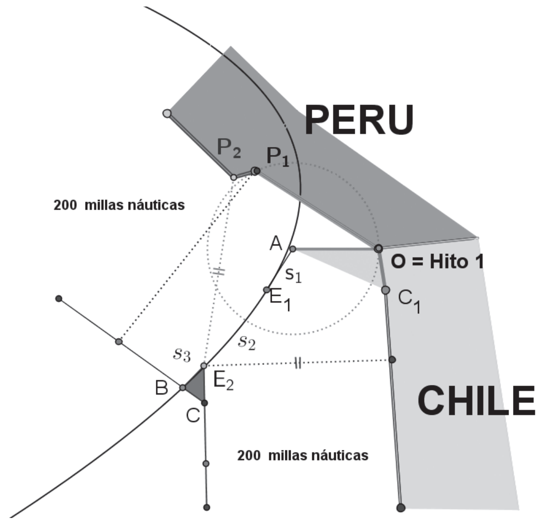


costa, por lo que continuar a partir de con un criterio de equidistancia no es posible.

La solución de la Corte es interesante porque propone olvidar todas las costas, tanto chilenas como peruanas, que se encuentran dentro de un círculo de radio 80 millas con



centro en A. De esta forma el punto A pasa a se parte del conjunto equidistante de las costas resultantes de este ejercicio de olvido. La Corte dispuso que el límite marítimo continúe a lo largo de este conjunto equidistante hasta el límite de las aguas internacionales.



S1: trozo de simetral a los puntos P1,C1.

S2: trozo de parábola de foco P2 y directriz OC1.

S3: trozo de simetral a los puntos P2 C1.

Para terminar hacemos notar que estos cálculos y consideraciones geométricas fueron descritos en el plano, pero en las aplicaciones se debe considerar la geometría esférica de la Tierra.

La Matemática del día a día. . .

¿Por qué usamos códigos de barras?

Ya son parte del pasado esas etiquetas adhesivas sobre los productos del supermercado que indicaban su precio. Hoy, el cajero simplemente le muestra el producto a un dispositivo electrónico que lee el código de barras, el que a su vez le indica a un computador no sólo el precio, si no además la marca y el contenido del paquete. La misma tecnología se usa en los hospitales para identificar a los pacientes por medio de una pulsera, en los aeropuertos para identificar los equipajes, etc. Los códigos de barras permiten "codificar" mucha información importante en una imagen que puede ser "leída" por un dispositivo electrónico. Pero, ¿para qué darse la molestia de codificar la información? Si bien pareciera que escribir explícitamente la información es una mejor idea, la tecnología que permite a los computadores "entender" el lenguaje habitual en que está escrita esta nota no está completamente desarrollada y los recursos que utiliza no son baratos. Por otro lado, un código de barras no es más que secuencia corta de señales negro o blanco, que un lector óptico simple puede detectar fácilmente. Algunas manipulaciones matemáticas elementales permiten verificar la validez de la lectura (códigos detectores de errores) y decodificar la información. Si bien un código de barras es una codificación unidimensional de información, se presentan en forma rectangular (dos dimensiones), de manera de facilitar la lectura y evitar errores. Codificar información en imágenes que pueden ser leídas por computadores y recuperar la información por medio de operaciones matemáticas es la idea que está detrás del desarrollo de los códigos QR, del reconocimiento facial, de la lectura de huellas dactilares, entre otros.

6 71860 01352 5

MÁXIMOS & mínimos

En principio, la solución de un problema de máximo conduce siempre a una desigualdad, la cual expresa el hecho de que la variable que se considera es menor o a lo sumo igual al valor máximo que proporciona la solución.

Courant y Robbins (2)

Juana Contreras S.

Claudio del Pino O.
Universidad de Talca,
Instituto de Matemática y Física

Introducción

El planteamiento y resolución de problemas de búsquedas de máximos y/o mínimos, es un tópico que usualmente se aborda en un primer curso de cálculo, como aplicación de la derivada. En este trabajo se muestra que es posible, en muchos casos interesantes, adelantar la resolución de problemas de extremos, usando como recurso matemático la conocida desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica.

Teorema [Desigualdad clave] *Sean x e y dos números reales y positivos, entonces*

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}, \tag{1}$$

además se cumple la igualdad si y solo si $x = y$.

Demostración: Como el cuadrado de todo número real es no negativo, se tiene que

$$0 \leq (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$$

desarrollando este cuadrado de binomio:

$$0 \leq x - 2\sqrt{xy} + y,$$

de donde

$$2\sqrt{xy} \leq x + y$$

Finalmente, dividiendo ambos lados por 2, se tiene (1).

Además, es claro que se cumple (1) si y solo si $x = y$.

■

Observación

a) La relación (1) establece que *la media geométrica es menor o igual a la media aritmética.*

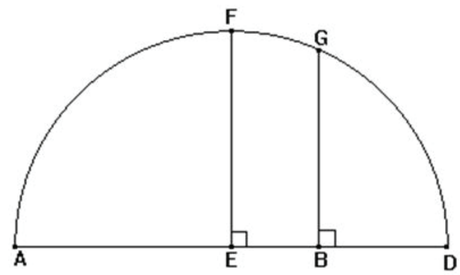
b) Es posible comprobar esta desigualdad de muchas y variadas maneras. A continuación se comentan algunas.

Algebraicamente, la desigualdad (1) también se puede verificar, entre otras, de 2 maneras que se sugieren a continuación:

- A partir de la desigualdad $0 \leq (x-y)^2$.
- Partiendo de la identidad $(x+y)^2 - 4xy = (x-y)^2$.

y, *geométricamente*:

- Suponer que $x > y$. Construir un triángulo rectángulo con hipotenusa $c = \frac{x+y}{2}$ y un cateto igual a $a = \frac{x-y}{2}$. Calcular la longitud del otro cateto b y verificar (1) usando que $b < c$.
- En la semi-circunferencia:



$AE = ED$, $AB = x$, $BD = y$. Comparar las longitudes de EF y BG.

Observación 0.1 Como es de suponer, la desigualdad básica (1) se puede extender a tres números positivos. En efecto:

Teorema 0.1 *Si x, y y z son tres números reales y positivos, entonces:*

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3} \tag{2}$$

donde, la igualdad se cumple, si y solo si $x = y = z$.

Demostración: Es posible verificar (2), usando una idea de Cauchy[1] y la desigualdad (1). En efecto, sea

$$u = \frac{x+y+z}{3}$$

entonces

$$\begin{aligned} xyzu = (xy)(zu) &\leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \left(\frac{z+u}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{x+y}{2} \cdot \frac{z+u}{2}\right)^2 \\ &\leq \left(\frac{\frac{x+y}{2} + \frac{z+u}{2}}{2}\right)^4 \\ &= \left(\frac{x+y+z+u}{4}\right)^4 \\ &= \left(\frac{3u+u}{4}\right)^4 = u^4 \end{aligned}$$

de donde se obtiene lo pedido. ■

Se deja para el lector la segunda afirmación.

Observación

a) Una interesante demostración de (2) es sugerida en [1] y [6]. Es posible implementarla, a través de los siguientes pasos:

   i) Verificar la identidad algebraica:

   $$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$

   ii) Comprobar que

   $$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc) \geq 0$$

   iii) De las dos relaciones anteriores, se tiene una *versión modificada* de (2):

   $$abc \leq \frac{a^3+b^3+c^3}{3}$$

   iv) Finalmente, aplicando un *adecuado cambio de variables*, se obtiene (2).

b) Usando inducción matemática, es posible verificar que la desigualdad básica se extiende a n números reales positivos. (Ver [1]).

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \qquad (3)$$

c) En lo que sigue, se mostrará cómo usando las desigualdades básicas (1), (2) y, en general, (3), es posible abordar una serie de problemas clásicos sobre máximos y mínimos.

Actividades

1. Verificar que la suma de un número positivo con su recíproco siempre es mayor o igual 2. Es decir, si a es positivo, entonces

   $$a + \frac{1}{a} \geq 2$$

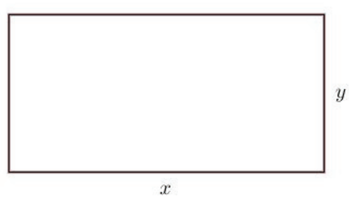
   Desarrollo: Sea a un número positivo. Es claro que:

   $$1 = a \cdot \frac{1}{a} \leq \left(\frac{a+\frac{1}{a}}{2}\right)^2$$

   relación de la cual se obtiene lo afirmado.

2. De todos los rectángulos de perímetro 20, determinar cuál de ellos tiene área máxima.

   Desarrollo: Consideremos el siguiente rectángulo



[1] Por lo tanto, una muy buena idea!

De acuerdo a la información $x + y = 10$ y se debe maximizar $A = xy$.

Usando (1), se tiene

$$xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = 25$$

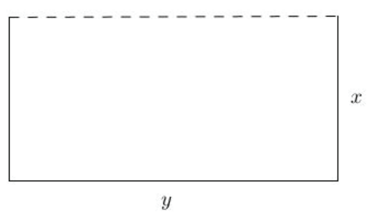
Luego, todos los rectángulos de perímetro 20 tienen un área a lo sumo igual a 25, y la igualdad se alcanza cuando $x = y = 5$.

Respuesta: El área máxima se obtiene cuando el rectángulo es un cuadrado de lado 5.

Observación 0.2 También se puede plantear el problema dual a la actividad 2: *De todos los rectángulos de área fija, determinar cuál de ellos tiene perímetro mínimo*. Se sugiere resolver este problema para concluir que, de manera análoga a la aplicación precedente: *De los rectángulos que tienen área fija el cuadrado es el que tiene perímetro mínimo*.

3. Un granjero tiene 2400 metros de cerca y desea cercar un campo rectangular que limita con un río recto. No necesita cercar a lo largo del río. ¿Cuáles son las dimensiones del campo que tiene el área más grande?

   Desarrollo: Se considera la siguiente figura:



   donde el lado punteado indica la parte del terreno que limita con el río.

   De acuerdo a la información, $2x + y = 2400$ y se debe maximizar $A = xy$. Despejando y de la ecuación precedente y reemplazando en la expresión del área, se tiene que

$$A = x(2400 - 2x) = 2x(1200 - x)$$

   Luego, usando la desigualdad básica (1):

$$\begin{aligned} A = 2x(1200 - x) &\leq 2 \cdot \left(\frac{x + (1200 - x)}{2}\right)^2 \\ &= 2 \cdot 360000 = 720000 \end{aligned}$$

   Por lo tanto, el área máxima es igual a 720000, y se obtiene cuando

$$x = 1200 - x$$

   es decir, cuando $x = 600$.

   Respuesta: El lado opuesto al río debe medir 1200 metros y cada uno de los otros dos lados, 600 metros.

Observación 0.3 Una variante de la actividad precedente, es imponer la condición que el lado del terreno que limita con el río, por razones de seguridad, se debe cerrar con doble cerca. Plantear y resolver esta actividad.

4. Se desea cercar un terreno rectangular que se encuentra junto a un camino, con una cerca que vale \$900 el metro para el lado que está junto el camino y cerca de \$100 el metro, para el resto. ¿Cuál es el tamaño máximo del terreno que podemos cercar con \$28000?

5. Si x, y, r, s son números positivos tales que $x^2 + y^2 = 1$ y $r^2 + s^2 = 1$, encontrar el máximo valor de $xr + ys$.

   Sugerencia: Partir con

$$xr + ys \leq \frac{(x+r)^2}{4} + \frac{(y+s)^2}{4}$$

6. Los márgenes superior e inferior de un póster miden 6 cm, y los márgenes laterales miden 4 cm. Si el área impresa del póster se fija en 384 cm^2, determine las dimensiones del póster cuya área sea mínima.

   Sugerencia: Sean x la base e y la altura del rectángulo correspondiente al texto impreso. Entonces $xy = 384$ y el área total es

$$\begin{aligned} A = (x+8)(y+12) &= (x+8)\left(\frac{384}{x}+12\right) \\ &= 12\left(40 + x + \frac{256}{x}\right) \end{aligned}$$

   Usando (1), minimizar $x + \frac{256}{x}$

7. Encontrar el área del rectángulo más grande que puede inscribirse en una semicircunferencia de radio r.

   Sugerencia: Si r es el radio de la circunferencia, $2x$ la base del rectángulo e y su altura, verificar que su área es $A = 2x\sqrt{r^2 - x^2}$. Utilizando (1), maximizar A^2.

8. Verificar que entre todas las cajas rectangulares (paralelepípedos) que tienen un área superficial fija, el cubo es el que tiene mayor volumen.

   Sugerencia: Siendo x, y, z los lados de la caja, se tiene que $2xy + 2xz + 2yz = A$ y su volumen es $V = xyz$. Para usar (2), maximizar A^2.

9. Verificar que entre todos los triángulos que tienen un perímetro dado, el triángulo equilátero es el que tiene mayor área.

   Sugerencia: Sea p el perímetro fijo y supongamos que tenemos un triángulo T de área A y lados a, b y c. Por la fórmula de Herón

$$A^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

   donde s es el semiperímetro de T. Observar que maximizar A es equivalente a maximizar A^2.

10. Se va a construir una caja con la parte superior abierta a partir de un trozo cuadrado de cartón que tiene 30 cm de ancho, al recortar un cuadrado de cada una de las cuatro esquinas y doblar los lados hacia arriba. Encuentre el volumen más grande que puede tener una caja semejante.

    Sugerencia: Siendo x la longitud del lado de cada cuadrado recortado, se tiene que el volumen de la caja construida es $V = x(30 - 2x)^2$. De donde $4V = (4x)(30-2x)(30-2x)$ y usar (2).

Conclusiones

A partir de este trabajo, queda claro que es factible adelantar los típicos e interesantes problemas de máximos y mínimos, al momento que el estudiante se enfrenta al mundo de los productos notables.

De esta manera es posible combinar el árido mundo del álgebra escolar con actividades más propias de la matemática, como son el modelamiento y la resolución de problemas.

Referencias

[1] Beckenbach, E., Bellman, R. *An introduction to inequalities*. Random House. 1961.

[2] Courant, R., y Robbins, H. *¿Qué es la matemática?*. Editorial Aguilar. Madrid 1962.

[3] Natanson I. P., *Lecciones populares de matemáticas. Problemas elementales de máximo y mínimo*. Moscú: Editorial Mir 1977.

[4] Niven, Ivan. *Maxima and Minima Without Calculus*. MAA. 1981.

[5] Stewart, James. *Cálculo de una variable: transcendentes tempranas*. Thomson-Learning. 2001.

[6] Zeit, Paul. The Art and craft of problem solving. John Wiley & Sons, Inc. (2007)

Hernán Burgos

Encargado Nacional de Olimpíadas de Matemática.

Un matemático que ha tenido un profundo impacto en el desarrollo de la Olimpíada Nacional de Matemáticas, en la detección de talentos y en la divulgación de la Matemática.


TUR
IMO 2007
HANOI - VIETNAM
POR
CHI
IMO 2007
HANOI - VIETNAM

El equipo Editor de RPMat se reunió a conversar con un matemático que ha tenido un profundo impacto en el desarrollo de la Olimpíada Nacional de Matemáticas en Chile. El profesor Hernán Burgos Vega es uno de los académicos más importantes en la detección de talentos y la divulgación matemática entre los jóvenes chilenos. Se formó en la Universidad Técnica del Estado UTE en Santiago entre 1967 y 1971 titulándose de Profesor de Estado en Matemática y Estadística. Trabajó en la UTE hasta el 11 de septiembre de 1973, siendo exonerado como académico y estudiante del LAM. Fue detenido en la UTE junto a muchos académicos y estudiantes, junto a Víctor Jara y el rector Kirberg, peregrinando varias semanas entre los estadios Chile y Nacional. Se exilió en Perú desempeñándose como académico de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos. En 1974 recibió una beca del gobierno Rumano para hacer un doctorado en Teoría Cualitativa de Ecuaciones Diferenciales con retardo. Al recibirse de doctor en 1979, e imposibilitado de volver al país, parte a trabajar Costa Rica. Es autorizado a volver al Chile en 1983. En marzo de 1984 es contratado en la Universidad de la Frontera (en sus palabra “una Universidad multicolor y muy grata para trabajar, de la cual estoy eternamente agradecido”). Se integró en el grupo de Investigación en Sistemas Dinámicos donde trabaja en equipo con Myrna Wallace y Jorge Billeke (QEPD). Se integra a la Olimpiada Iberomaricana. Ha sido el tesorero de la Sociedad de Matemática de Chile por largos períodos y en los últimos años dirige el Departamento de Matemáticas de la UFRO. Está casado con una gran mujer, Marcela, y es padre de 4 maravillosos hijos.

RPMat: ¿Desde cuándo estás a cargo de la olimpiada?

Hernán Burgos: desde el año 2000, 2001…

RPMat: ¿Por qué no nos cuentas cómo quedaste a cargo de la olimpiada?

HB: yo quedé cargo el año 2000, cuando llegué a Santiago como encargado regional de Temuco. Al llegar a la Universidad de Santiago, la Secretaria de Samuel Navarro, quien era el encargado nacional, me dice que Samuel estaba en una conferencia en Punta Arenas, y que había dejado el recado que me hiciera yo cargo de la olimpiada!!!. Y de ahí improvisé, la desarrollamos, y nunca más la dejé…

RPMat: Pero tú ya estabas ligado a la olimpiada desde antes…

HB: si pues, como encargado regional, y a veces como acompañante en olimpiadas internacionales.

RPMat: ¿Hay algo personal que te llama a dedicarte a esto?

HB: A mi me gusta a hacer cosas, ojalá desde cero. Por ejemplo, yo creo que de antes que yo tomara la olimpiada nunca se había hecho un afiche, o mas bien, los que habían eran informales. Al año que yo asumo ya hicimos el primer afiche bonito, con diseño y todo. Comenzamos a conversar más con los encargados regionales, a darle un poquito de estructura, aunque la olimpiada no ha logrado mucha estructura. Deberíamos tener mucha más estructura, ordenarnos, aun somos algo artesanales, pero año a año vamos saliendo adelante igual.

RPMat: ¿Por qué crees tú, mirando en perspectiva, que existe la olimpiada?

HB: Yo soy matemático de formación, yo creo que la matemática debe divulgarse pues es fundamental en el desarrollo de cualquier sociedad, y si uno va motivando, incentivando a los niños desde chicos, uno va divulgado regionalmente, se van acercando a la matemática de muchas formas. Hoy tenemos, todos sabemos, muchos matemáticos importantes en el país quienes quizás no lo hubiesen sido si no fuera por la olimpiada. Están Rivera, Ponce, Libedinsky, Navas, uno puede contar muchos. Yo así hago matemática, a través de la olimpiada, la divulgo al menos.

RPMat: Y además de la sociedad, ¿Ganan algo los colegios al participar de la olimpiada?

HB: Si, mucho. Yo entrevisto profesores, estudiantes. He visitado muchos colegios. A mí en Temuco me invitan mucho a dar charlas en colegios. Luego de la olimpiada, los estudiantes llegan a los colegios conversando de matemáticas con sus compañeros, de las preguntas estimulantes que vieron…

RPMat: ¿Y el profesor, gana algo?

HB: El profesor gana mucho. Por lo menos, en la olimpiada nacional, en la final y en las regionales, en Temuco, en la PUC, en todo Chile, se hacen charlas para los profesores que acompañan al estudiante. Son charlas de problemas bonitos, desafiantes, que le muestran al profesor que hay problemas difíciles, que si uno de los desmenuza, los arregla, ya no se ven tan complicados, y pueden servir como una herramienta poderosa para enseñar contenidos. ¿Para qué vamos a decir lo que es una altura de un triángulo, la simetral, qué se yo, si uno puede poner un problema donde todas esas cosas aparezcan?. Al final el profesor puede hablar de problemas donde aparecen todos estos contenidos, todos mezclados, y los contenidos aparecen como herramientas para resolver problemas más desafiantes.

RPMat: ¿Se siente el profesor también estimulado por los propios problemas? Pues el profesor no es solamente alguien quien enseña la matemática, también es un individuo que gusta de la matemática, la goza intelectualmente …

HB: Hay profesores, no todos, que nos demandan a los académicos como nosotros, demandan que uno los visite, que les entregue material, que les mande problemas. Ellos se quieren nutrir, van a todas las paradas…

RPMat: Les pasa lo mismo a los académicos ejemplo, ¿Tú haces esto por los niños solamente o tú mismo te sientes disfrutando los problemas?

HB: A mi claro, por supuesto que me gustan los problemas. Darme cuenta que cuando uno se enfrente a primera vista no sabes como hacerlo, pero al rato, te empiezas a dar cuenta que sabes como enfrentarlo, vas viendo cositas. Es el gustito ese de resolver un problema que no están tan fácil, se parece a lo que sentía cuando hacia investigación y demostraba teoremas. También está el gustito cuando uno puede leer la solución de un estudiante talentoso, muy alejada de la solución oficial, y uno tiene que empezar a pensar en lo que el estudiante hizo, cómo lo enfrentó… es estimulante, es todo un descubrimiento también

RPMat: ¿Los estudiantes de olimpiadas son muy distintos a los otros?, o igual te permite saber algo de los otros estudiantes no olímpicos, aquellos que te llegan a la universidad. ¿Es la olimpiada solo para la elite intelectual?

HB: Es un referente para la elite. Los estudiantes que son olímpicos, que llegan a la final, son de un estrato muy pequeño de cada colegio. En cada colegios hay 1 o 2, quienes son muy distintos. Pero estos conversan con el resto, y los empujan hacia arriba. Yo estoy convencido que esta cuestión irradia mucho. Yo creo que es el evento matemático más potente que se hace en el país. No hay un evento mas potente en Chile.

RPMat: ¿Por qué crees que la olimpiada no ha llegado a tener esta estructura necesaria, en qué se ha fallado?

HB: Porque los matemáticos que estamos allí somos todos voluntarios. De alguna forma le quitamos algunas horas a las universidades que nos emplean y nos pagan. Hacemos lo que podamos en los tiempos que nos permiten.

Por otro lado la Sociedad de Matemática de Chile, que organiza la olimpiada, no tiene las espaldas, los recursos para organizar una estructura. Por otra parte, el Ministerio de Educación, en estos 27 años, no entiende bien de qué se trata la olimpiada de matemáticas y la repercusión que tiene en levantar el nivel en el país. La olimpiada de matemáticas es por ejemplo generadora de otras competencias. Hay competencias en el sur, en el norte, que se llaman de otras maneras: hay que se llaman campeonatos, olimpiadas locales, que nacieron al alero de la olimpiada. Por ejemplo en la Universidad de la Frontera de Temuco, se hacía un campeonato que al principio le pusimos “Campeonato Pre-olímpico”, que era justamente para que los estudiantes pudieran hacer algunos problemas, más accesibles. Estos mismos estudiantes iban a la olimpiada y no hacían nada, ni participaban. Hoy tenemos un campeonato con 3200 estudiantes, que de alguna forma está un escalón más abajo de la olimpiada, pero igualmente irradia mucho. Por ejemplo, hoy en Temuco tenemos 9 puntajes nacionales de la PSU. Yo no digo que sea directamente el campeonato, o la olimpiada, pero algo hay allí.

RPMat: A tí te ha tocado asistir a varios eventos internacionales. ¿Cómo ves a Chile con respecto de los otros países?, ¿Te parece un problema la falta de preparación?

HB: No, no me parece un problema. Es cierto que desde el punto de vista de los niños, uno querría que se sientan mejor, por su orgullo, sería bueno que trajeran más medallas. Pero yo creo que con el hecho de competir, de su preparación mínima con paginas webs de otras partes, prácticamente autodidactas, y que va una olimpiada y saca un oro, comparado con un brasileño con mucha preparación que saca una plata, yo creo que es mucho más valioso para nuestro país.

Eso se refleja que como comunidad matemática Chile es mas que algunos de esos países que te nombré, es mas que Perú, que Argentina. Los resultados en la olimpiadas tienen mas que ver con un tema de recursos, de entrenamiento.

Triángulo de Pascal Modificado

El conocido Triángulo de Pascal tiene varias propiedades que son consecuencias del patrón recursivo con el que se construye el arreglo. Modificando las condiciones iniciales en este patrón recursivo, resulta un modelo que presenta ciertas regularidades que son revisadas más adelante.

David Alvo
Universidad Adolfo Ibáñez

Rely Pellicer
Universidad Adolfo Ibáñez

Introducción.

Los triángulos numéricos son objetos conocidos desde hace varios siglos por los estudiosos de la matemática. En general consisten en arreglos de números generados según un patrón recursivo y aparecen con frecuencia en estudios de Teoría de Números y sus aplicaciones.

Existe una gran variedad de estos objetos que han surgido a través de la historia y que, por su utilidad en ciertas áreas, se conocen con el nombre de los matemáticos que los hicieron célebres o por alguna característica relativa a sus aplicaciones. Los triángulos numéricos más conocidos llevan por nombre: de Bell, Bernoulli, Catalan, Clark, Euler, Armónico de Leibniz, Losanitsch, Magog, Monótono, Pascal, Seidel-Entringer-Arnold, Sierpinski y Trinomial. Una descripción inicial de estos triángulos y sus propiedades más relevantes aparecen en [4].

El triángulo numérico más famoso es el Triángulo de Pascal. Aparece relacionado con temas muy utilizados desde las matemáticas básicas como los números combinatorios y el Teorema del Binomio y sobre él se han comprobado numerosos resultados que aparecen en diversas fuentes (Ver [1], [2], [3]).

El Triángulo de Pascal (**TP**) se puede definir de forma recursiva de la siguiente manera:

Definición 1. *El* ***TP*** $T(m,n)$ *queda determinado por las relaciones:*

i) $T(m,0)=1$

ii) $T(0,n)=1$

iii) $T(m,n)=T(m,n-1)+T(m-1,n)$,

para $m,n=1,2,...$

La siguiente figura muestra la notación general y el uso de los índices, que quedará justificado plenamente más adelante.

$$
\begin{array}{cccccc}
 & T(0,1) & T(0,2) & T(0,3) & T(0,4) & T(0,5) & \cdots \\
T(1,0) & T(1,1) & T(1,2) & T(1,3) & T(1,4) & \cdots & \\
T(2,0) & T(2,1) & T(2,2) & T(2,3) & \cdots & & \\
T(3,0) & T(3,1) & T(3,2) & \cdots & & & \\
T(4,0) & T(4,1) & \vdots & & & & \\
T(5,0) & \vdots & & & & & \\
\vdots & & & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccc}
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & \\
1 & 3 & 6 & 10 & \cdots & & \\
1 & 4 & 10 & \cdots & & & \\
1 & 5 & \vdots & & & & \\
1 & \vdots & & & & & \\
\vdots & & & & & &
\end{array}
$$

Es claro que los números combinatorios satisfacen estas relaciones. $T(m,n) = \binom{m+n}{n} = \dfrac{(m+n)!}{m!\,n!}$, con $m,n = 0,1,2,....$ Tambin es conocida la propiedad que explica que la suma de los elementos en la n-sima fila del tringulo es igual a 2^n.

$$\sum_{k=0}^{n} T(n-k,k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Triángulo de Pascal Modificado y patrones recursivos.

A continuación introducimos lo que denominamos Triángulo de Pascal Modificado (**TPM**).

Definición 2. *El **TPM** $P(m,n)$ generado por las sucesiones $\{a_m\}$ y $\{b_n\}$ queda determinado por las relaciones:*

i) $P(m,0) = a_m$

ii) $P(0,n) = b_n$

iii) $P(m,n) = P(m,n-1) + P(m-1,n)$,

para $m,n = 1,2,...$

La figura muestra la notación general y el uso de los índices, así como un ejemplo de **TPM**: el caso $a_m = 2m$, $b_n = n^2+1$.

$$\begin{array}{cccccccc}
 & P(0,1) & P(0,2) & P(0,3) & P(0,4) & P(0,5) & b_n \rightarrow \\
P(1,0) & P(1,1) & P(1,2) & P(1,3) & P(1,4) & \cdots & \\
P(2,0) & P(2,1) & P(2,2) & P(2,3) & \cdots & & \\
P(3,0) & P(3,1) & P(3,2) & \cdots & & & \\
P(4,0) & P(4,1) & \vdots & & & & \\
P(5,0) & \vdots & & & & & \\
a_m & & & & & & \\
\downarrow & & & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccc}
 & 2 & 5 & 10 & 17 & 26 & \cdots \\
2 & 4 & 9 & 19 & 36 & \cdots & \\
4 & 8 & 17 & 36 & \cdots & & \\
6 & 14 & 31 & \cdots & & & \\
8 & 22 & \vdots & & & & \\
10 & \vdots & & & & & \\
\vdots & & & & & &
\end{array}$$

Una de las ideas centrales de este artículo es el hecho de que, dado el patrón recursivo de formación del **TPM** y dadas las sucesiones en el borde, el interior del triángulo queda totalmente determinado. Esta idea puede precisarse a través de las siguientes proposiciones que relacionan los elementos del interior del **TPM** con los términos de las sucesiones generadoras.

Proposición 1. *Dado el* ***TPM*** $P(m,n)$, *para todo* $m,n \in \mathbb{N}$

$$P(m,n) = P(m,0) + \sum_{k=1}^{n} P(m-1,k) \tag{1}$$

$$P(m,n) = P(0,n) + \sum_{k=1}^{m} P(k,n-1) \tag{2}$$

La demostración de estas relaciones es consecuencia directa de la aplicación sucesiva de la regla *iii)* de la Definición 2 y se pueden visualizar como recorridos sobre el **TPM** que parten desde uno de los bordes y van sumando elementos hasta llegar al lugar deseado $P(m,n)$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 2 \rightarrow & 5 \rightarrow & 10 \rightarrow & 17 \rightarrow & 26 & 37 \\
\nearrow & & & & & \downarrow & \\
2 & 4 \rightarrow & 9 \rightarrow & 19 \rightarrow & 36 & 62 & \\
\nearrow & & & & \downarrow & & \\
4 & 8 \rightarrow & 17 \rightarrow & 36 & 72 & & \\
\nearrow & & & \downarrow & & & \\
6 & 14 \rightarrow & 31 & 67 & & & \\
\nearrow & & \downarrow & & & & \\
8 & 22 & 53 & & & & \\
\nearrow & \downarrow & & & & & \\
10 & 32 & & & & & \\
 & & & & & & \\
12 & & & & & &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccccccc}
 & 2 & 5 & 10 & 17 & 26 & 37 \\
\swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & & \\
2 & 4 & 9 & 19 & 36 \rightarrow 62 & & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & \\
4 & 8 & 17 & 36 \rightarrow 72 & & & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & & & & \\
6 & 14 & 31 \rightarrow 67 & & & & \\
\downarrow & \downarrow & & & & & \\
8 & 22 \rightarrow 53 & & & & & \\
\downarrow & & & & & & \\
10 \rightarrow 32 & & & & & & \\
 & & & & & & \\
12 & & & & & &
\end{array}$$

Lo anterior tambin ocurre en el tringulo usual y se conoce como la *Propiedad del palo de golf*, por la forma que tienen los recorridos sobre el tringulo.

Sin importar las sucesiones iniciales que generan un **TPM**, se da una conexión interesante con el **TP** clásico.

Proposición 2. *Dado el* ***TPM*** $P(m,n)$, *para todo* $m,n \in \mathbb{N}$

$$P(m,n) = \sum_{k=0}^{d} T(d-k\ ,\ k) P\left(m-(d-k)\ ,\ n-k\right)\ ; \qquad \textit{donde} \quad d \leq \text{mín}(m,n) \tag{3}$$

Este resultado permite obtener un elemento del **TPM** a partir de los términos contenidos en una misma diagonal anterior a la que contiene el elemento que se busca. Dependiendo de cuántas diagonales antes se tome para desarrollar, aparecerán como multiplicadores los correspondientes términos del **TP**.

$$\begin{aligned}
P(m,n) &= P(m-1,n) + P(m,n-1) \\
&= P(m-2,n) + 2\,P(m-1,n-1) + P(m,n-2) \\
&= P(m-3,n) + 3\,P(m-2,n-1) + 3\,P(m-1,n-2) + P(m,n-3) \\
&= P(m-4,n) + 4\,P(m-3,n-1) + 6\,P(m-2,n-2) + 4\,P(m-1,n-3) + P(m,n-4) \\
&= \ldots
\end{aligned}$$

De aquí resulta una interesante forma práctica de observar lo anterior. En la siguiente figura se ha tomado un **TPM** y sobre él se ha colocado un **TP** clásico, con vértice en uno de sus elementos (en este caso el número 67) y en sentido inverso al triángulo original. De este modo, sobre algunos de los elementos del **TPM** aparecen los términos del triángulo de Pascal. La propiedad anterior se traduce en que para obtener el elemento 67 del **TPM** basta seleccionar una de las diagonales anteriores a él y considerar los elementos de ella que están encerrados a su vez en el triángulo de Pascal invertido. Sobre cada uno de ellos aparece un número del **TP**. Si se multiplican entre ellos y se suman a lo largo de la diagonal seleccionada se obtiene el elemento ubicado bajo el vértice. Los términos del **TP** invertido actúan como multiplicadores.

					1			
				5	1			
			10	4	1			
			2	5	10	17	26	37
		10	6	3	1			
		2	4	9	19	36	62	
	5	4	3	2	1			
		4	8	17	36	72		
1	1	1	1	1				
		6	14	31	67			
		8	22	53				
		10	32					
		12						

$$\begin{aligned} 67 &= 1\cdot 31 + 1\cdot 36 \\ &= 1\cdot 14 + 2\cdot 17 + 1\cdot 19 \\ &= 1\cdot 6 + 3\cdot 8 + 3\cdot 9 + 1\cdot 10 \end{aligned}$$

Note que cuando el **TP** invertido sale del **TPM** deja de cumplirse la propiedad. Además, esta regla es válida al poner el vértice del **TP** invertido sobre cualquier elemento del triángulo modificado.

La siguiente proposición relaciona el valor de un elemento del interior de un **TPM** con los valores de los términos de las sucesiones generadoras en el borde del triángulo.

Proposición 3. *Dado el* ***TPM*** $P(m,n)$*, para todo* $m,n \in \mathbb{N}$

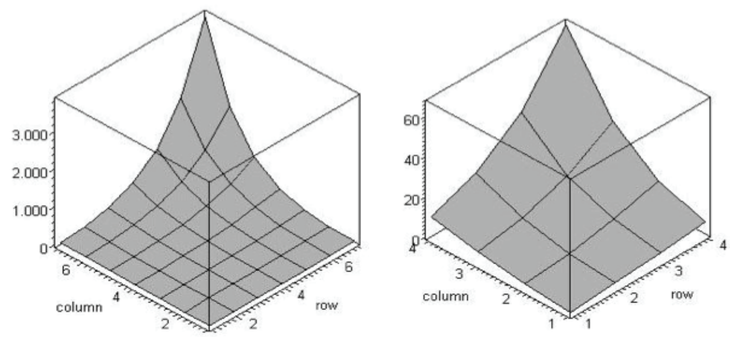
$$\begin{aligned} P(m,n) &= \sum_{k=1}^{m} P(k,0)T(m-k,n-1) + \sum_{k=1}^{n} P(0,k)T(m-1,n-k) \\ &= \sum_{k=1}^{m} a_k \binom{m+n-k-1}{m-k} + \sum_{k=1}^{n} b_k \binom{m+n-k-1}{n-k} \end{aligned} \tag{4}$$

La demostración de esta propiedad es consecuencia de la Proposición 2 y la aplicación sucesiva de la regla *iii)* de la Definición 2. Además se ha utilizado la simetría de los números combinatorios para escribir los índices de una forma más adecuada.

Con este resultado se confirma nuestra idea principal de que, dado el patrón recursivo de formación del **TPM** y dadas las sucesiones en el borde, el interior del triángulo queda totalmente determinado.

En este punto presentamos un modelo gráfico de un **TPM**. Dadas las sucesiones $\{a_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que generan un **TPM** $P(m,n)$ podemos representar en un sistema de coordenadas cartesianas en $\mathbb{R}^3$ la función de dos variables $P(m,n)$, de modo que en los planos coordenados aparecen las sucesiones generadoras $\{a_m\}$ y $\{b_n\}$. En la siguiente figura se muestra el **TPM** generado por las sucesiones $a_m = 2m$ y $b_n = n^2 + 1$ en distintas escalas. Nótese que ya no se presentan los datos en forma triangular, sino que se ha completado el correspondiente rectángulo (m,n).

0	2	5	10	17	26	37
2	4	9	19	36	62	99
4	8	17	36	72	134	233
6	14	31	67	139	273	506
8	22	53	120	259	532	1038
10	32	85	205	464	996	2034
12	44	129	334	798	1794	3828



Referencias

[CG] J. H. Conway and R. K. Guy: *The Book of Numbers*. Springer-Verlag, 1996.

[G] M. Gardner: *Pascal's Triangle. Ch. 15 in Mathematical Carnival: A New Round-Up of Tan-talizers and Puzzles from Scientific American*, New York: Vintage Books, 1977..

[P] T. Pappas: *Pascal's Triangle, the Fibonacci Sequence and Binomial Formula...*, Wide World Publ.Tetra, 1989.

[W] E. W. Weisstein: *Number triangle* From MathWorld?A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/NumberTriangle.html.

Con profunda alegría hemos recibido la noticia de que Artur Avila, investigador CNRS de Francia y académico del IMPA de Río de Janeiro, ha sido recientemente galardonado con una de las cuatro Medallas Fields en el presente Congreso Internacional de Matemáticas 2014 de Corea del Sur.

Artur, vasto especialista en Sistemas Dinámicos, ha producido muchos de los trabajos más importantes del área de los últimos 15 años. Inició su carrera a muy corta edad, siendo captado a través de un programa para niños talentosos de Brasil vía las Olimpiadas de Matemática. Inmediatamente comenzó a cursar (¡a los 16 años!) el Magíster en Matemática del Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), donde se doctoró años más tarde bajo la tutela de (USACH; premio Math. Council of the Americas 2013). Artur visitó nuestro país en el marco de este proyecto y de la realización del III Congreso Latinoamericano de Mate-máticos, donde dictó una de las conferencias plenarias. Junto con esto, tiene preconfirmada una visita para el congreso internacional "Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity", el cual reúne a especialistas mundiales del área y que por primera vez se realizará en Chile en septiembre de 2015, en el contexto del proyecto Anillo 1103 Centro de Sistemas Dinámicos y Temas Relacionados. La organización de este encuentro será coordinada por Carlos Vásquez (PUCV) y la realización tendrá lugar en la V región, en Olmué. Además, continuará su traba-jo en colaboración con Jairo Bochi (PUC) con quien ya

Artur Ávila

La Medalla Fields 2014 para un matemático brasileño

Por Andrés Navas Flores,
Universidad de Santiago de Chile

Wellington de Melo. Durante su doctorado realizó una pasantía de investigación en EE.UU., tras lo cual se radicó en París, siendo contratado por el CNRS y promovido rápidamente al rango de "Directeur de Recherche".

Siendo Chile un país en el que los Sistemas Dinámicos han tenido un alto desarrollo, con dos proyectos Anillo y tres proyectos MathAMSUD durante los últimos 8 años, la relación de Artur con nuestro país no ha sido menor. En particular, fue investigador asociado del proyecto MathAMSUD "Dynamical Systems and Ergodic Theory" (2009-2011), dirigido por Marcelo Viana (IMPA; premio UMALCA 2000, premio Ramanujan 2005) y cuyo equipo chileno era liderado por Andrés Navas (USACH; equipo chileno era liderado por Andrés Navas ha escrito 10 artículos, siendo ésta su colaboración más prolífica- en el marco del proyecto Fondecyt 1140202 "Geometric Aspects of Multiplicative Ergodic Theory".

Muchos años atrás (1995), Artur ya había visitado nuestro país (Viña del Mar) para participar en las Olimpiadas Iberoamericanas de Matemáticas, ocasión en la que obtuvo el primer premio. Tuve la suerte de acompañar su carrera desde el inicio: fui su compañero de aula en el IMPA durante los años 1996-1997 y he seguido desde cerca algunas de sus líneas de investigación a partir de entonces. En este contexto, puedo dar constacia del extraordinario talento e impresionante trabajo que hicieron de Artur un merecedor incuestionable de la Medalla Fields.

Herramientas digitales para el aprendizaje activo de los estudiantes

Una tendencia creciente en colegios y universidades es incorporar al proceso de aprendizaje de los alumnos, herramientas tecnológicas como ejercitación en linea. Existen actualmente disponibles en la red una bateria de ejercicios en distintos temas y en diferentes plataformas.

Este artículo pretende dar a conocer la forma en que se construyen actualmente estas preguntas en Moodle, algunos tipos de preguntas y los cuidados que hay que tener al programarlas de modo que resulten un real aporte a quien las utiliza.

Viviana Barile
Universidad Adolfo Ibáñez

Hugo Caerols
Universidad Adolfo Ibáñez

Jorge Gaona
Estudiante de postgrado en Didáctica de la Matemática en Université Paris VII

1. Introducción

Una corriente de creciente desarrollo en nuestro país y en el mundo es incorporar la tecnología para mejorar los procesos de aprendizaje de los alumnos.

En este artículo pretendemos explicar detalles respecto a la construcción de un sistema electrónico de ayuda a la ejercitación de los estudiantes, con la idea de introducir a los profesores en las potencialidades de este trabajo y que quizás puedan generar grupos de desarrollo en sus respectivos colegios que les permitan apoyar y gestionar el trabajo de sus estudiantes.

Para realizar este trabajo a nivel de un colegio se requiere instalar Moodle, que es un sistema de gestión de cursos gratuito y de amplia difusión en varias universidades y colegios de nuestro país. Hablar de las potencialidades de este sistema tomaría mucho tiempo, alejándonos del objetivo central de este trabajo. Sólo mencionaremos que permite: mejorar la interacción profesor-alumno, subir guías de ejercicios, trabajar con foros y diseñar cuestionarios y encuestas entre muchas otras posibilidades.

Utilizamos un complemento de Moodle llamado Wiris, que dota a Moodle de CAS (Computer Algebra System), que fortalece de sobremanera el generador de preguntas de Moodle en matemática.

La ventaja fundamental de este complemento, versus la pregunta estática clásica, es que hace posible la aleatoriedad en una pregunta y posee una gran variedad de formas de respuesta. Para hacerse una idea, es como tener un pequeño Maple dentro de Moodle, es decir, una misma pregunta al ser ejecutada por distintos alumnos incluso simultáneamente, tiene distintas presentaciones y resultados, lo que ayuda a mejorar la ejercitación de los alumnos en tareas matemáticas específicas, evitando la mecanización.

Todas estas nuevas potencialidades requieren de un aprendizaje por parte del profesor que se interese por construir evaluaciones con esta herramienta. Por esta razón al momento de adaptar una pregunta y parametrizarla tendrá que pensar en en una serie de elementos para que esta sea válida matemáticamente y además tenga sentido en el caso de una pregunta aplicada.

Los problemas pueden generarse de distinta forma, por ejemplo, pueden obtenerse mirando los problemas de algún libro o una guía y pasándolos al formato digital o bien considerando un objetivo a desarrollar y generando un problema adecuado para lograrlo.

A continuación presentaremos algunos problemas que esperamos ilustren la capacidades de la herramienta.

2. Generando los primeros problemas

Nuestro primer ejemplo es de la unidad de combinatoria que permite adaptar las preguntas de manera bastante amigable.

Problema 1 ¿De cuántas maneras puedo escoger 14 personas de un total de 37 ?

Aquí los números $14(m)$ y $37(n)$ pueden escogerse como parámetros de modo que cada vez que los alumnos ejecuten esta pregunta, estos números cambien y les fuercen a utilizar en este caso las combinaciones para contar.

La persona que confecciona la pregunta debe tener cuidados básicos pero importantes. Programará algo como lo siguiente:

m y n deben ser números enteros aleatorios en cierto rango por ejemplo $1 \leq n \leq 40$ y $1 \leq m \leq n$. Miremos esta elección de forma mas cuidadosa. ¿Tiene sentido que en alguna iteración el total de personas sea 1 ? Esto nos hace refinar esta elección inicial y escoger por ejemplo $5 \leq n \leq 40$. Note que con estas restriciones la cantidad de personas de un grupo parte de 1. ¿Tiene sentido grupos de una persona o del total de personas ? Esto nos hace refinar la elección del otro parámetro y escoger $2 \leq m \leq n-1$.

Otra cosa que se nos había pasado: Tratemos de contestar la pregunta ¿De cuántas maneras puedo escoger 20 personas de un total de 40 ? Si hacemos el cálculo con nuestra calculadora obtendremos $\binom{40}{20} = 1{,}378465288 \times 10^{11}$. Como queremos que los alumnos puedan entregar este resultado en forma numérica acotaremos el número total de personas n en $5 \leq n \leq 36$, de esta forma el número más grande que aparecerá es $\binom{36}{18} = 9{,}875, 135, 300$ que cabe en una calculadora de 10 dígitos.

Lo que explicamos anteriormente es muy importante. Al parametrizar debemos tener el cuidado que la elección aleatoria de los valores de los parámetros se haga de forma que no se estropee la pregunta para alguna iteración del programa, que como buen programa hará lo que nosotros le digamos que haga. El codigo inicial de la pregunta será algo como:

n aleatorio entre 5 y 36
m aleatorio entre 2 y $n-1$
¿De cuántas maneras puedo escoger m personas de un total de n ?

El algoritmo para esta pregunta aparece en la Figura 1.

Al ejecutar la pregunta tiene la presentación que aparece en la Figura 2.

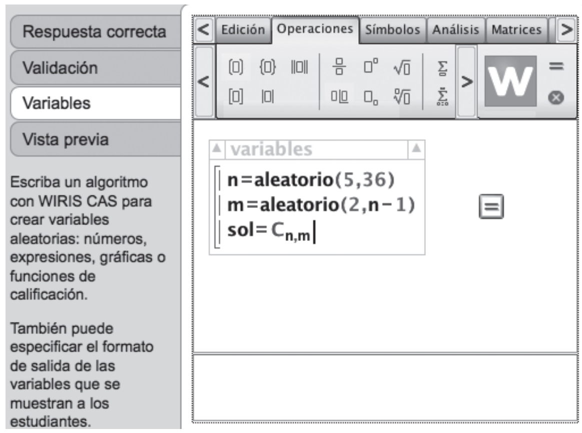


Figura 1: Algoritmo pregunta combinatoria

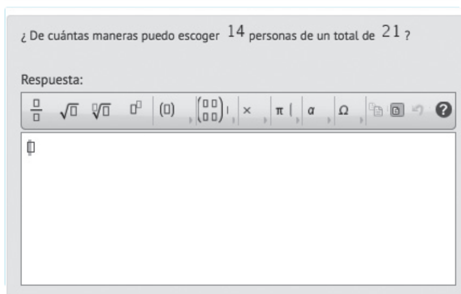


Figura 2: Enunciado pregunta combinatoria

El alumno ingresará un valor como respuesta y el programa internamente compara el resultado del alumno con el valor que se le asocia en la programación y de acuerdo a esto asigna como correcta o incorrecta la respuesta. No hemos incluido la ventana en que se escribe la pregunta, iremos con un poco mas de detalle en el siguiente ejemplo que tiene relación con las aplicaciones de la trigonometría.

Problema 2 Desde un punto A un observador ve la cima C de una montaña con un ángulo de elevación $\angle DAC = \gamma = 30°$. Luego se traslada hasta un punto B, 130 metros, los ángulos $\angle CAB = \alpha$

y $\angle ABC = \beta$ miden $45°$ y $60°$ respectivamente. Determine la altura de la montaña.

Este problema fue extraído de un libro clásico una vez parametrizado e ingresado a la plataforma los estudiantes verán la pregunta como aparece en la Figura 3. La imagen que aprece en a Figura 3 se hizo aparte y se insertó en el texto de la pregunta, es decir es una imagen fija que aparece cada vez que se ejecuta la pregunta.

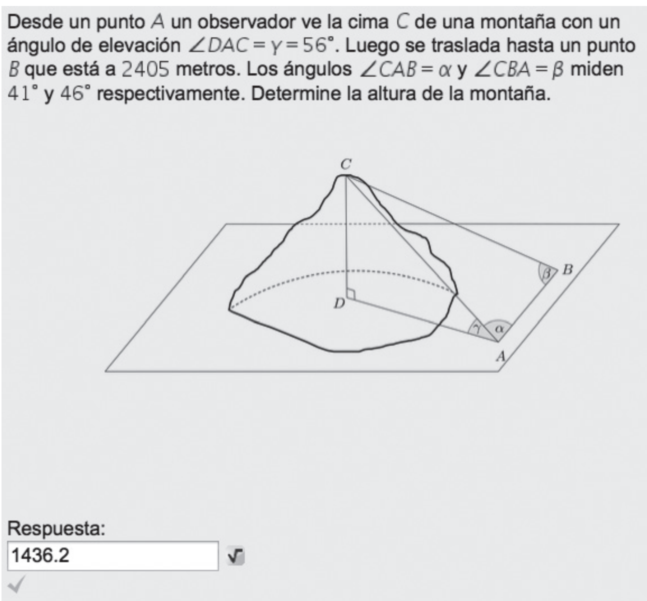


Figura 3: Enunciado pregunta de trigonometría

Aquí los valores iniciales de los posibles parámetros son:

$0 < \alpha < 180°$, $0 < \beta < 180°$, $0 < \gamma < 90°$ y la distancia AB mayor que cero.

Una primera disyuntiva es si deseamos que los ángulos sean valores conocidos, como $30°, 45°, 60°$ en cuyo caso esperaremos respuestas exactas con raíces y fracciones que una calculadora ordinaria no puede entregar o bien permitimos valores razonables en estos rangos y aceptamos una respuesta como correcta si coincide hasta un cierto valor decimal que podemos indicarle al programa.

Otro elemento a tener en cuenta es el hecho que al hablar de una montaña, esta altura debería estar en un rango razonable digamos entre 1000 y 8848 metros que es la altura del monte Everest, del Himalaya, la montaña más alta de nuestro planeta.

El lector puede verificar que la altura es

$$\frac{AB \operatorname{sen}(\beta) \operatorname{sen}(\gamma)}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}$$

Otra condición que no se puede pasar por alto, es que al ser ABC un triángulo $\alpha + \beta$ debe ser menor que $180°$, lo que restrige la elección de los parámetros iniciales.

Para conctruir esta pregunta con Moodle y Wiris siga los siguientes pasos:

- Ingrese a su plataforma Moodle para luego ingresar al ambiente *Banco de Preguntas*.
- En *Banco de Preguntas*, seleccione el tipo de pregunta que creará. En este caso crearemos una pregunta de *Respuesta corta*.
- Se desplegará una ventana donde tiene que llenar el espacio denominado *Texto de la pregunta* donde se escribe el enunciado de esta. Se escribe el problema de manera normal, salvo que los elementos que queremos que sean variables se escriben precedidos del signo #. Estos elementos se definen más tarde en la ventana de algoritmo de la pregunta que se muestra en la Figura 4.
- Se define la solución que también es una variable precedida de # pues depende de los parámetros aleatorios de los que se habló más arriba.

- En *Respuesta* abra la pantalla indicada por el símbolo del editor de ecuaciones (amarillo). Esto le permitirá llegar al ambiente de trabajo donde se programan las preguntas. En la Figura 4 se muestra en deatalle el algoritmo de esta pregunta.

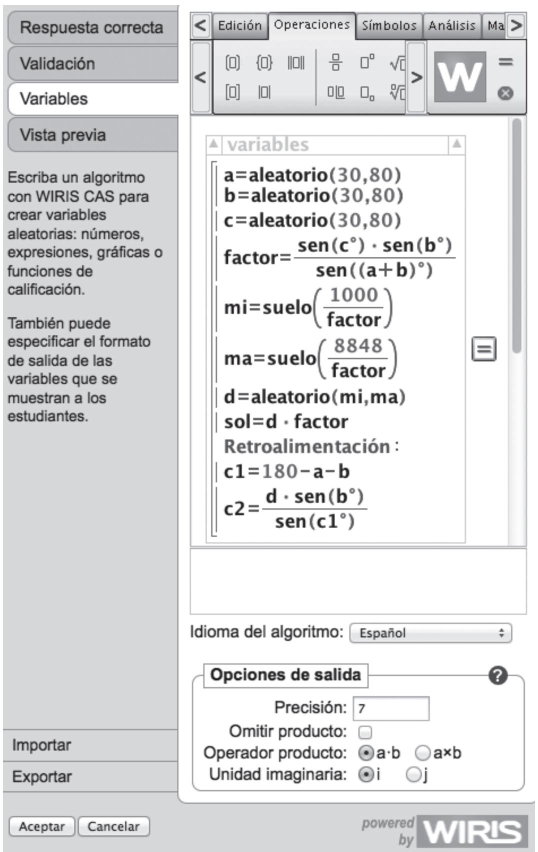


Figura 4: Algoritmo pregunta de trigonometría

- Guarde todos los cambios y realice una vista previa del problema.

3. Retroalimentación

Un elemento muy importante que se puede agregar a cada una de las preguntas es la retroalimentación. Esta puede mejorar de manera sustancial los aprendizajes y la motivación de los estudiantes.

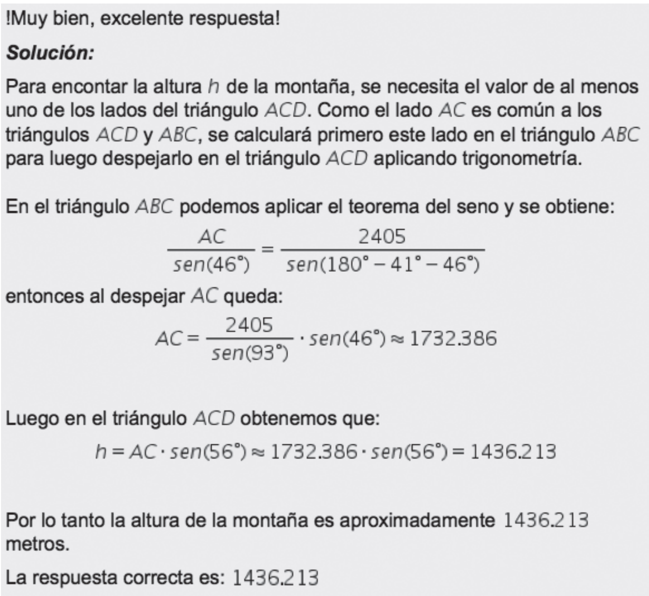
La plataforma Moodle, por defecto, permite retroalimentar de tres formas diferentes. Retroalimentación de tarea, retroalimentación personal y retroalimentación de procesos.

En el caso de la retroalimentación de proceso, es posible dar un desarrollo paso a paso del problema planteado, en función de los parámetros aleatorios de la pregunta.

En la Figura 3 se muestra la retroalimentación de tarea que le indica al alumno que la respuesta ingresada es la correcta, En la Figura 5 se le entrega una frase de felicitación por haber ingresado la respuesta correcta (retroalimentación personal) y además se le da una posible solución paso a paso (retroalimentación de proceso).

Note que esta última cambia en función de los valores aleatorios de los ángulos y de la ditancia que se traslada para hacer la medición. Este desarrollo paso a paso puede ser tan detallado como lo quiera el profesor que construye la pregunta y puede incluir más de una solución.

Para escribir la retroalimentación siga la misma estructura que en la escritura del enunciado. Cada vez que se quiera escribir un objeto que contenga un elemento variable se antepone el símbolo # y a su vez estos se tienen que definir en el mismo espacio dedicado a la programación. En esta pregunta hubo que definir dos variables nuevas $c1$ y $c2$ que son cálculos intermedios que permiten explicar el desarrollo.



!Muy bien, excelente respuesta!

Solución:

Para encontar la altura h de la montaña, se necesita el valor de al menos uno de los lados del triángulo ACD. Como el lado AC es común a los triángulos ACD y ABC, se calculará primero este lado en el triángulo ABC para luego despejarlo en el triángulo ACD aplicando trigonometría.

En el triángulo ABC podemos aplicar el teorema del seno y se obtiene:

$$\frac{AC}{sen(46°)} = \frac{2405}{sen(180° - 41° - 46°)}$$

entonces al despejar AC queda:

$$AC = \frac{2405}{sen(93°)} \cdot sen(46°) \approx 1732.386$$

Luego en el triángulo ACD obtenemos que:

$$h = AC \cdot sen(56°) \approx 1732.386 \cdot sen(56°) = 1436.213$$

Por lo tanto la altura de la montaña es aproximadamente 1436.213 metros.

La respuesta correcta es: 1436.213

Figura 5: Retroalimentación pregunta trigonometría

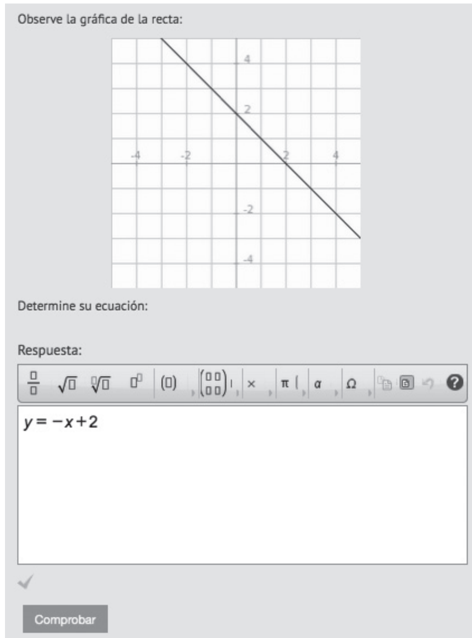


Figura 6: Enunciado pregunta que incluye un gráfico aleatorio

4. Incluyendo gráficos aleatorios

Como último ejemplo para mostrar las distintas posibilidades de programación mostraremos como generar gráficos aleatorios. El lenguaje puede parecer un poco técnico pero hemos decidido escribirlo de esta forma, para dar una mayor claridad a quienes comiencen a construir sus propias preguntas. La idea de esta pregunta es ir desde la representación gráfica de la recta a su ecuación, que es lo contrario a lo que se solicita usualmente. El enunciado se muestra en la Figura 6. Detallamos ahora todos los pasos a seguir en la plataforma Moodle.

Para poder crear esta pregunta hay que ir al menú *Crear una nueva pregunta* de Moodle, se elige *Matemáticas y Ciencias Wiris*, se despliegan varias opciones de preguntas y se hace un click sobre *Respuesta Corta - Ciencias*.

Esto abrirá una ventana de edición de la pregunta donde hay dos elementos que se tienen que definir como mínimo para que cualquier pregunta funcione: el enunciado y la respuesta correcta.

En el enunciado se escribe:

Observe la siguiente recta #graf Determine su ecuación.

En el espacio de respuesta se escribe:

Respuesta 1 #sol Calificación 100 %

En la defición del enunciado, #graf representa el gráfico y #sol la respuesta correcta, ambos elementos dependen de parámetros aleatorios y se definen en la pestaña *Variables* que se abre al hacer click sobre el símbolo de raíz que está al costado del espacio donde se escribe la respuesta correcta. El algoritmo que define estos objetos se muestra en la Figura 7.

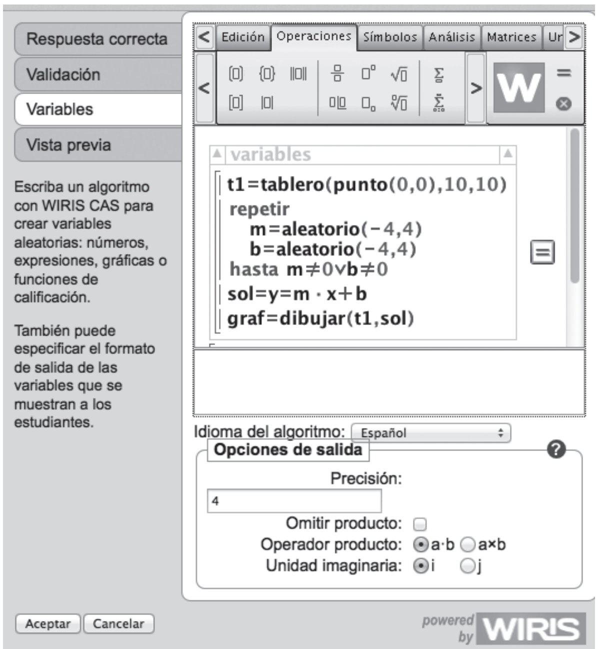


Figura 7: Algoritmo de pregunta que incluye un gráfico aleatorio

Para definir #graf se necesita, a su vez, definir dos elementos previos: el plano cartesiano sobre el que se va a graficar y el objeto a graficar.

La configuración del plano cartesiano es bastante flexible, pero para simplificar el ejemplo y centrarse en la definición del objeto, se eligieron las dimesiones de los ejes de una medida estática y se definió de tal forma que el eje x y el eje y estén entre -5 y 5. Estas características se configuran mediante el comando *tablero*: $t1 = tablero(punto(0,0), 10, 10)$, donde $punto(0,0)$ es el centro del tablero y los números 10 que aparecen dos veces, corresponden a la distancia que hay entre el mínimo y máximo que hay entre los valores del eje x y eje y.

Una vez definido el plano, se define el objeto a graficar. En este caso es una recta por lo que hay que elegir una de las varias maneras que hay para definirla: con dos puntos, un punto y una pendiente o utilizando algunas de sus ecuaciones características.

En este caso elegimos la ecuación principal, por lo que se necesita definir la pendiente m y el coeficiente libre b.

Teniendo en cuenta la restricción de la cuadrícula, la recta debe estar en el cuadrado $[-5,5] \times [-5,5]$ y además, como el estudiante debe extraer información del gráfico, la imagen debe mostrar pares ordenados (x_1, y_1) de la recta que sean números enteros para que se los pueda identificar.

Por esta razón m y b tomarán valores enteros tales $-4 \leq m \leq 4$, observe que si, por ejemplo, se elegía cómo mínimo y máximo a -5 y 5 para las variables m y b respectivamente, podía aparecer la recta $y = 5x + 5$ que sólo tiene el par ordenado $(-1, 0)$ con coordenadas x e y enteras dentro del cuadrado definido previamente.

Otro elemento importante a considerar es que tanto m como b podrían tomar como valor el 0, por lo que podrían aparecer las siguientes rectas:

- $y = mx$ con $m \neq 0$.
- $y = b$ con $b \neq 0$.
- $y = 0$.

¿Cuál de estos casos se descartan? y ¿por qué? La elección que se hizo en este caso fue descartar sólo la última opción y es por razones prácticas: la gráfica de $y = 0$ no se distingue tan fácilmente en la imagen que ven los estudiantes, razón por la cual se utiliza el comando *repetir … hasta*, de tal forma que

WIRIS haga iteraciones hasta que uno de los dos parámetros sea distinto de cero o hasta que ambos sean distintos de cero.

Por último, se define la solución simplemente como $sol = y = m \cdot x + b$ y el gráfico mediante el comando *dibujar*: $graf = dibujar(t1, sol)$.

Cabe observar que al estudiante no se le está solicitando una forma particular de responder, por lo que a pesar de que el objeto es único, para un valor particular de m y b este puede ser escrito de varias maneras,

Por ejemplo, si la respuesta fuese $y = 3x + 2$ el estudiante podría responder entre otras posibilidades: $y - 3x - 2 = 0$ o $2y = 6x + 4$.

Para que acepte las infinitas posibilidades de respuesta, en el caso particular de objetos definidos mediante una igualdad, es necesario activar la casilla *ecuaciones equivalentes* que está en la pestaña *Validación* de Wiris y que se muestra en la Figura 8, de tal forma que el sistema use el CAS incorporado para comparar la respuesta del estudiante con la definida previamente y concluir que son equivalentes matemáticamente.

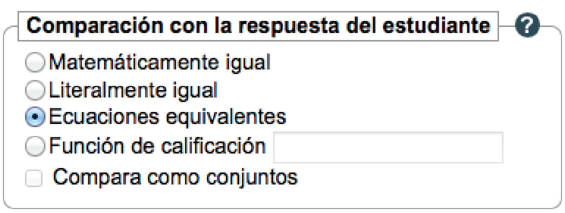


Figura 8: Opción para que el sistema acepte ecuaciones equivalentes

Observe que cada vez que usted ejecuta la pregunta aparecen datos diferentes.

De esta forma usted puede confeccionar un banco de preguntas de distintos temas y niveles. Puede seleccionar estas preguntas para construir un cuestionario de preguntas aleatorias.

Cada vez que un alumno ingrese quedarán registrados una serie de indicadores: como el tiempo que demora en contestar, la respuesta que ingresó en cada pregunta, el número de intentos y la distribución en el tiempo de su trabajo en la plataforma. Con esta información es posible determinar temas que no han sido asimilados por sus alumnos de la forma esperada.

El lector interesado se dará cuenta que recién comienza a introducirse en un mundo en el que no sólo hay que considerar restricciones matemáticas sino también de espacio y presentación. Al aprender y aplicar todo esto, podrá hacer buenas preguntas, que además resulten muy flexibles en términos de presentación.

Por lo anterior, se hace muy necesario formar equipos de trabajo en los que participen distintas personas, algunas de las cuales deben tener habilidades de programación, creatividad y sobre todo conocimientos de matemática, para que el material desarrollado resulte interesante y de un nivel adecuado con respecto a los propósitos requeridos. Esto lo trataremos en el siguiente punto.

Comentarios sobre la construcción de las preguntas.

Para trabajar en el desarrollo de bancos de preguntas hay ciertas condiciones que son necesarias para que el banco construido sea de buena calidad en relación al proyecto que se esté comenzando a desarrollar.

Un primer elemento que hay que considerar, es tener claridad de los objetivos de aprendizaje del curso o tema y que estos objetivos se traduzcan en criterios de evaluación que guíen la construcción de las preguntas.

Una vez que están claros los objetivos de aprendizaje que se pretenden desarrollar, es recomendable no hacer doble trabajo y utilizar las preguntas que estén en línea con los objetivos descritos más arriba y que otras instituciones y profesores ya confeccionaron y que han compartido de manera libre en un página diseñada para este propósito [2].

Estas preguntas, pueden ser descargadas y subidas a la plataforma Moodle donde esté trabajando y dentro ella puede modificar tanto los elementos del enunciado como los elementos del algortimo que no se ajusten a sus requerimientos.

Una vez definidos estos dos primeros elementos, es muy importante trabajar en equipo. No sólo para repartir el trabajo, sino que para discutir sobre las dudas que a cada profesor le irán surgiendo en el proceso de construcción y obtener un resultado de mejor calidad.

A modo de ejemplo, compartiremos algunas experiencias que conocemos, e indicaremos aquellos factores que han hecho que el resultado no haya sido tan bueno como se esperaba, las que sin embargo, han dejado valiosas lecciones.

Una primera modalidad de trabajo observada fue totalmente horizontal. Se estableció una lista de los criterios de evaluación. En base a esta lista, cada profesor del equipo creaba una pregunta para completarla. Efectivamente se construyeron las preguntas, pero como no hubo mucha comunicación, los niveles de dificultad estaban un poco desalineados y en general no se veía un hilo conductor entre ellas.

En un trabajo de autoevaluación que se hizo más tarde, los profesores mencionaron que todos tuvieron dudas en las elecciones que hacían, pero que no encontraron los canales de comunicación para expresarlas, por lo que recurrieron a la intuición para salir del paso.

Una segunda modalidad observada, fue totalmente opuesta, el coordinador del equipo de construcción indicaba a cada profesor qué pregunta construir, por lo que la responsabilidad del diseño recaía en una sola persona.

Al hacer una autoevaluación se pudo constatar que se desaprovechó la capacidad creativa de los profesores, lo que conlleva una baja en su compromiso con el proyecto. Adems, toda la arquitectura de la construcción dependía de una sóla persona, lo que impidió que los distintos puntos de vistas que enriquecieran el trabajo de creación.

Entonces, ¿cómo encontrar un equilibrio? Una posibilidad es trabajar en un punto intermedio entre las dos experiencias presentadas anteriormente, es decir, que se formen pequeños grupos de trabajo, de 2 o 3 personas, que estén a cargo de unidades específicas, pero, que a su vez cada una de las personas de ese equipo sepa periódicamente lo que están construyendo los otros equipos con el fin de visualizar conexiones entre las distintas preguntas.

Recomendamos establecer reuniones para conversar sobre los códigos utilizados y analizar en equipo las preguntas. A través de esta interacción se pueden mejorar las preguntas, pueden aparecer nuevas preguntas, y a veces, se constata la necesidad de rediseñarlas por que no se adecuan a los niveles de dificultad o a los objetivos de aprendizaje para los cuales fueron construidas.

Es importante que los profesores que trabajan en los cursos se involucren de alguna manera en la generación y/o validación de las preguntas para que de esta forma se sientan parte del proceso.

No hemos tocado aún un tema muy importante que es cómo se integra este trabajo en la estructura metodológica de un curso y este es un gran tema del que se puede escribir mucho. No hay una receta específica sino distintas experiencias que integran este trabajo en los cursos de diferente manera. Tareas semanales, pruebas semanales, ejercitación libre. Esperamos más adelante tener algunos resultados a este respecto y poder contarles algunas experiencias.

Finalizamos este artículo con una serie de referencias de manera que los lectores interesados puedan comenzar a entrar en este nuevo mundo al que nos lleva la tecnología, cuyo avance nos hacen reflexionar permanentemente sobre las estrategias metodológicas utilizadas.

La tecnología ha cambiado definitivamente la forma en que se accede al conocimiento y es nuestro deber estar al día en los avances de manera de mejorar la formación de nuestros futuros profesores y estudiantes.

Para contactar a los autores

viviana.barile@uai.cl, hugo.caerols@uai.cl, jorge.gaona@quinan.cl

Referencias

[1] Blog sobre aprendizaje de matemáticas con tecnología.
http://www.matematicacontecnologia.org

[2] Comunidad colaborativa de preguntas construidas con Wiris.
http://stemcollection.com

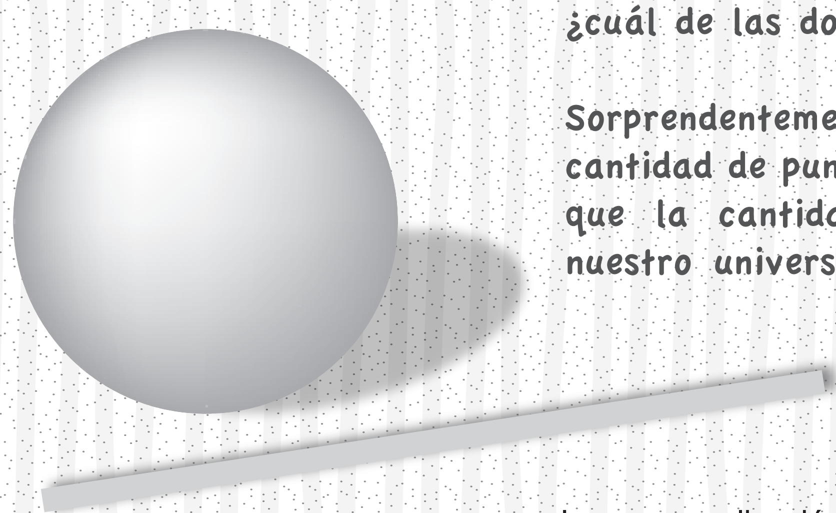
[3] Manual y librería de comandos Wiris CAS.
http://www.wiris.net/demo/wiris/manual/es/

[4] Manual Wiris CAS.
http://www.infoymate.es/wiris/

[5] Manual Wiris Quizzes.
http://www.wiris.com/es/quizzes/docs/moodle

Entre una esfera y un segmento de recta, ¿cuál de las dos figuras tiene más puntos?

Sorprendentemente ambas tienen la misma cantidad de puntos. Esta cantidad es mayor que la cantidad de átomos que forman nuestro universo...!



Lee una explicación en el próximo número de RPMat.

Problemas y soluciones

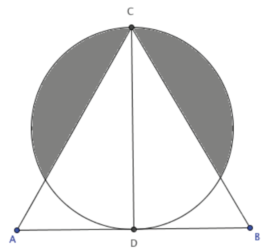
Esta sección contiene una serie de problemas interesantes y desafiantes. Invitamos a nuestros lectores a proponernos sus soluciones, las que podrán ser incluidas en los próximos números.

Hugo Caerols
Universidad Adolfo Ibáñez

Problemas

16.- Si x e y son enteros positivos. ¿Cuántas parejas (x, y) son soluciones de la ecuación $5x+3y = 100$?

17.- Encuentra el área de la región sombreada, si el triángulo es equilátero de lado 2, CD es diámetro del círculo y el lado AB es tangente en D.



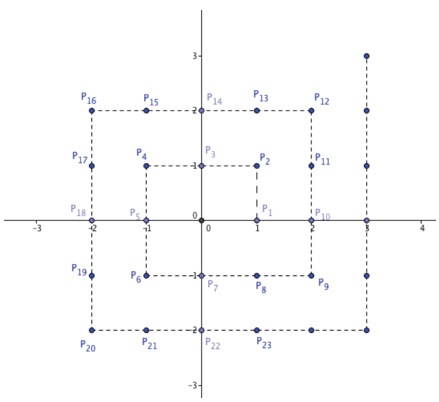
18.- Cuatro números primos tienen la siguiente estructura

$$aa;\ bab;\ bacd;\ aaac.$$

Sabiendo que cada letra representa un dígito y que las letras iguales corresponden a dígitos iguales ¿Cuáles son los números?

19.- ¿Cuántas parejas de enteros positivos (n, p) cumplen que p es primo y que $p^n - 9n = n^p$?

20.- Una hormiga empieza en el $(0, 0)$. En el primer paso va al $(1, 0)$, luego moviéndose en espiral al $(1, 1), (0, 1), (-1, 1)$ y así sucesivamente. ¿A qué coordenada llegará en el paso 2014?



Soluciones

6.- La patente de un auto clásico tiene un número de cuatro dígitos que es un cuadrado perfecto. Si los dos primeros dígitos son iguales y los últimos también. ¿Cuál es el número ?

Solución:

Sean a y b los números de la patente que se repiten, es decir, la patente es $aabb$. El número asociado a la patente es un cuadrado perfecto, luego $a \cdot 10^3 + a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + b = n^2$ para algún natural n. De lo anterior $11 \cdot (100a + b) = n^2$, con lo que n^2 es divisible por 11. Luego n debe ser divisible por 11. Sea $n = 11k$. reemplazando obtenemos $100a + b = 11k^2$. Como a y b no pueden ser más que 9, tenemos que $11k^2 \leq 909$. Lo que entrega una cota bastante razonable para k. Esto es $k \leq 9$. Probando los valores posibles de k, obtenemos el único caso $k = 8$, para el que $n^2 = (11 \times 8)^2 = 7744$.

7.- Diego y Sofía juegan. Cada jugador escoge un número entero del 1 al 7 de tal forma que al sumarlo al anterior, el resultado sea un número primo. Pierde el primero que diga un número para el cual la suma acumulada no sea prima. Si parte Sofía. ¿Qué número debe decir para asegurar su victoria ?

Solución:

Los resultados de la suma acumulada son números primos, por lo que hay que tener muy presente cuales son estos números al comenzar a jugar este juego. Presentamos la lista inicial de los 25 números primos menores que 100.

2	3	5	7	11	13	17	19	23
29	31	37	41	43	47	53	59	61
67	71	73	79	83	89	97		

Note que en todos los casos salvo el último, la diferencia entre dos primos consecutivos es menos que 7 luego, al ir completando un primo, el otro jugador siempre puede llegar al siguiente, sumando un número del 1 al 7 hasta llegar al 89. El que complete 89 con su suma ganará. (El oponente no podrá llegar a 97 con la suma dado que a lo más puede sumar 7.) Decimos que 89 es ganador, en el sentido que el que lleve la suma a 89 ganará el juego. 83 es perdedor, en el sentido que quien lleve la suma a 83, le da al oponente la posibilidad de sumar 6, obteniendo 83+6=89 y por lo descrito anteriormente ganar de el juego. De esa forma podemos ir clasificando hacia atrás los números primos en ganadores o perdedores, de acuerdo a si permiten o no al jugador llegar a un número de la secuencia ganadora. 79 es ganador. Si Sofía suma 79, le deja pocas opciones a Diego, dado que no puede llegar a 89, porque tendría que sumar más que 7 y no puede. Para seguir jugando Diego debe sumar 4, obteniendo 83, Sofía suma 6 y llega a 89 dejando a Diego sin posibilidad de Jugar. A continuación están marcados los primos de la secuencia ganadora, que pueden ser analizados rápidamente por el lector repitiendo el análisis hacia atrás que hemos hecho.

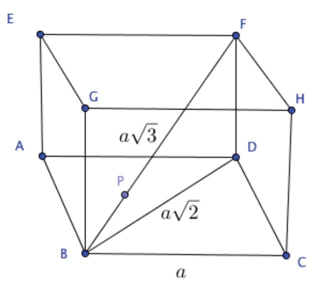
$$\begin{array}{ccccccccc}
2 & 3 & \overline{5} & 7 & 11 & \overline{13} & 17 & 19 & \overline{23} \\
29 & \overline{31} & 37 & 41 & \overline{43} & 47 & \overline{53} & 59 & \overline{61} \\
67 & \overline{71} & 73 & \overline{79} & 83 & \overline{89} & 97 & &
\end{array}$$

Los últimos números de la lista son 13 que es ganador y 11 perdedor, 7 perdedor y 5 ganador. Luego la única opción de partida que conduce a Sofía a ganar en forma segura, es decir 5, luego sumar adecuadamente para ir obteniendo números de la secuencia ganadora indicada por los círculos las arriba.

8.- Nueve esferas de radio 1 se colocan dentro de una caja cúbica de manera que el centro de una de ellas coincida con el centro del cubo y cada una de las esferas restantes es tangente a la esfera del centro y a tres de las caras del cubo. ¿Cuál es el volumen del espacio que queda fuera de las nueve esferas y al interior del cubo ?

Solución:

La manera de ubicar las esferas de acuerdo a las condiciones es, una al centro y una en cada una de las ocho esquinas determinadas por los vértices del cubo. Si determinamos el lado del cubo el problema queda prácticamente resuelto, pues sólo debemos restar su volumen al de las nueve esferas unitarias.



Dos consideraciones: Si un punto P equidista de tres caras de un cubo, entonces está en la diagonal correspondiente a ese vértice (ver figura). Utilizando el teorema de Pitágoras, la diagonal del cubo mide $a\sqrt{3}$, donde a es la medida del lado. Por lo anterior los centros de dos de las esferas opuestas están sobre la diagonal y el de la central también ! Al ser unitarias y tangentes la diagonal mide $a\sqrt{3} = 4 + 2\sqrt{3}$ luego $a = 4 + \frac{2}{\sqrt{3}}$. El volumen pedido es $\left(4 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 - 12\pi$.

incide

INFORMACIÓN CIENTÍFICA PARA EL DESARROLLO

El portal INCIDE publica material e información sobre ciencia y ofrece charlas de divulgación científica a colegios, instituciones y empresas.

En nuestra web encontrará:

- Charlas
- Conferencias
- Entrevistas
- Trabajo científico
- Publicaciones
- Material audiovisual
- Y más...

Contáctenos en www.incidechile.cl
y solicite su visita.

Destacados profesionales, profesores e investigadores exponen sobre problemas relevantes para la sociedad en un lenguaje directo y preciso.

Incide Chile es una iniciativa de un grupo de proyectos de investigación, con el patrocinio de la Pontificia Universidad Católica de Chile, para colaborar en la divulgación de la ciencia.

Gentileza de Proyecto Anillo ACT1112