# LINEALIZACION FORMAL DE UN SISTEMA DE PFAFF COMPLETAMENTE INTEGRABLE CON SINGULARIDADES

Tesis

entregada a la

Universidad de Chile

en cumplimiento parcial de los requisitos

para optar al grado de

Magister en Ciencias Matemáticas

FACULTAD DE CIENCIAS

por

JULIO MARCELO GALLARDO PASSARGE

Enero, 1989



Patrocinante: Dr. Patricio González G.

Facultad de Ciencias

Universidad de Chile

# I N F O R M E D E A P R O B A C I O N

# T E S I S D E M A G I S T E R

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magister presentada por el Candidato

JULIO MARCELO GALLARDO PASSARGE

ha sido aprobada por la Comisión Informante de Tesis como requisito de tesis para el grado de Magister en Ciencias Matemáticas

Patrocinante de Tesis

Dr. Patricio González G. ____________________

Comisión Informante de Tesis

Dr. Ricardo Baeza R. ____________________

Dr. Gonzalo Riera L. ____________________

A mi madre, por su apoyo
y su gran alegría por la vida,
sin los cuales,
esto no habría sido posible.

*A Gladys, mi esposa.*

# I N D I C E


| | Pág. |
|---|---|
| INTRODUCCION. | i |
| NOTACIONES. | vii |
| CAPITULO I. ALGUNOS RESULTADOS BASICOS. | 1 |
| 1. Convergencia de soluciones formales. | 1 |
| 2. Reordenación de series en dos variables. | 2 |
| 3. Una propiedad de las funciones holomorfas en dos variables. | 3 |
| CAPITULO II. EXISTENCIA GLOBAL DE SOLUCIONES PARA UN SISTEMA DE PFAFF CON SINGULARIDADES. | 7 |
| 1. Definición de un sistema de Pfaff completamente integrable. | 7 |
| 2. Convergencia de soluciones formales para una ecuación del tipo $x\dfrac{\partial z}{\partial x} = a(x,y)z + \alpha(x,y)$ . | 10 |
| 3. Un teorema de existencia global de soluciones para un sistema de Pfaff lineal no homogéneo con singularidades. | 29 |
| 4. Un teorema de existencia local de soluciones para una ecuación con singularidades. | 36 |

# I N T R O D U C C I O N

En el ámbito de las ecuaciones diferenciales en general y de las ecuaciones diferenciales ordinarias de variable compleja en particular, sin duda son las ecuaciones lineales las que permiten un estudio más completo de sus soluciones, es decir, aquellas de la forma

$$(E_1) \qquad \frac{du}{dx} = A(x)u \ ,$$

donde $A(x)$ es una matriz holomorfa en $B_1(0,\gamma) := \{x \in \mathbb{C} : |x| < \gamma\}$ salvo quizás en 0.

Cuando $A(x)$ tiene un polo de orden $p$ en el origen, la ecuación $(E_1)$ puede escribirse del siguiente modo:

$$(E_2) \qquad x^p \frac{du}{dx} = \widetilde{A}(x)u \ ,$$

siendo $\widetilde{A}(x)$ holomorfa en $B_1(0,\gamma)$ .

Para $p = 1$ , suponiendo por ejemplo que los valores propios de $\widetilde{A}(0)$ son distintos entre sí, podemos describir la forma de una matriz fundamental, ([2], Pág. 25), y calcularla mediante operaciones algebraicas.

Para $p \geq 2$ , debemos considerar la matriz $\widetilde{A}(x)$ restringida a un sector $S$ centrado en el origen, esto es

$$S = \{x \in \mathbb{C} : \theta_1 < \operatorname{Arg} x < \theta_2 , \quad 0 < |x| < r\} ,$$

en cuyo caso, bajo ciertas hipótesis, también podemos describir la forma de una matriz fundamental para la ecuación $(E_2)$ , ([2], Pág. 60).

Con esto en cuenta, la linealización de una ecuación diferencial se revela como un problema de natural interés, tanto en su aspecto teórico como en su aplicación a situaciones concretas.

Un importante teorema, debido a Poincaré ([4], Pág. 175), permite, bajo ciertas restricciones sobre los valores propios de la matriz $F_1$ , linealizar formalmente la ecuación

$$\frac{du}{dx} = F(u) = F_1u + F_2u^2 + F_3u^3 + \dots ,$$

es decir, probar la existencia de una serie formal

$$P(z) = z + P_2z^2 + P_3z^3 + \dots ,$$

tal que la substitución $u = P(z)$ transforma la ecuación $\frac{du}{dx} = F(u)$ en su parte lineal $\frac{dz}{dx} = F_1 \cdot u$ .

Imponiendo otras condiciones a los valores propios de $F_1$ , es posible demostrar, como puede verse en los teoremas de Poincaré y Siegel, ([9], Pág. 182), que la serie formal $P(z)$ resulta convergente.

Otro importante teorema al respecto aparece en el libro de Wasow, Asymptotic expansions for ordinary differential equations, ([2]) en el cual se aborda el problema de linealizar una ecuación con un punto singular, de la forma

$$(E_3) \qquad x^p \frac{du}{dx} = f(x,u) \ ,$$

donde $p$ es un entero mayor o igual que dos y $f(x,u)$ es holomorfa en $S \times B$, siendo $S$ un sector abierto centrado en el origen de $\mathbb{C}$ y $B$ una bola abierta centrada en el origen de $\mathbb{C}^m$.

Al considerar $p \geq 2$, aparece de manera natural la necesidad de suponer que los coeficientes de $u^n$ en el desarrollo de $f(x,u)$ en potencias de $u$, admiten desarrollo asintótico.

En general, para una función $a(x)$ definida en un sector $S$, decimos que admite desarrollo asintótico en potencias de $x$, si existe una serie formal $\sum_{r\geq 0} a_r x^r$ tal que

$$\forall\ n \geq 0 \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x\in S}} x^{-n}\left(a(x) - \sum_{r=0}^{n} a_r x^r\right) = 0 \ .$$

Ahora bien, si la función $f(x,u)$ satisface ciertas hipótesis, ([2], Pág. 210), se demuestra que existe una transformación $P(x,z)$ holomorfa, que reduce la ecuación

$$x^p \frac{du}{dx} = f(x,u) \quad \text{a} \quad x^p \frac{dz}{dx} = A(x)\cdot z \ .$$

La prueba de este teorema está dividida en dos partes, en una primera etapa se construye una serie formal

$$P(x,z) = z + P_2(x)z^2 + P_3(x)z^3 + \dots \ ,$$

que linealiza formalmente a la ecuación $(E_3)$ , y en la segunda parte se prueba que $P(x,z)$ es convergente.

Cabe señalar que, entre las numerosas investigaciones acerca del problema de linealización de la ecuación $(E_3)$ , como por ejemplo las de Malmquist, (1943, 1944), y de Iwano, (1959), el teorema recién citado es conseguido imponiendo condiciones más bien restrictivas a la función $f(x,u)$ .

También es posible formular el problema de linealización para un sistema de ecuaciones en derivadas parciales como el siguiente:

$$(S) \quad \begin{cases} x^p \dfrac{\partial u}{\partial x} = f(x,y,u) \\ \\ y^q \dfrac{\partial u}{\partial y} = g(x,y,u) , \end{cases}$$

donde $p,q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , $f$ y $g$ toman valores en $\mathbb{C}^m$ y son holomorfas en $B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,\gamma_2) \times B_m(0,\varepsilon)$ , siendo $B_m(0,\varepsilon)$ una bola abierta centrada en el origen de $\mathbb{C}^m$ . De manera más general, podemos considerar a $f$ y $g$ holomorfas en $S_1 \times S_2 \times B_m(0,\varepsilon)$ , donde $S_1$ y $S_2$ son sectores abiertos centrados en el origen de $\mathbb{C}$ .

Supondremos que (S) es un sistema de Pfaff con singularidades, que verifica la condición de completa integrabilidad, (o que es completamente integrable), si se satisface:

$$y^q \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u}\cdot g = x^p \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial u}\cdot f .$$

Resolver este problema en toda su generalidad, es decir con $p$ y $q$ enteros no negativos arbitrarios, $f$ y $g$ a valores en $\mathbb{C}^m$ y holomorfas en un polidisco o en $S_1 \times S_2 \times B_m(0,\varepsilon)$, resulta ser bastante complicado, por lo cual, en este trabajo nos hemos limitado a considerar el sistema (S) con $p = 1$, $q \geq 0$; $f$ y $g$ a valores en $\mathbb{C}$ y holomorfas en un polidisco centrado en el origen de $\mathbb{C}^3$. En este caso, y basándonos en la demostración que aparece en Wasow para linealizar la ecuación $(E_3)$, se ha logrado establecer resultados que permiten linealizar formalmente un sistema del tipo (S).

En el Capítulo I se dan algunos resultados básicos destinados a facilitar la lectura de los Capítulos posteriores.

En el Capítulo II se generaliza un resultado de Gérard que afirma lo siguiente:

Si una serie formal $u = \sum_{m \geq 0} u_m(y) x^m$, con $u_m(y)$ holomorfa en $|y| < d$ y $u_o(0) = 0$, es solución formal de la ecuación $x \dfrac{du}{dx} = f(x,y,u)$, donde $f$ es holomorfa en una vecindad del origen de $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^m$, entonces $u$ converge para $x$ e $y$ suficientemente pequeños ([1], Pág. 243).

Cuando $f$ es holomorfa en una vecindad del origen de $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}$, toma valores en $\mathbb{C}$ y está definida por $f(x,y,u) = a(x,y) + \alpha(x,y)$, se ha establecido un lema en el cual se afirma que la serie formal $u$ es convergente en todo el conjunto donde son holomorfas las funciones $a(x,y)$ y $\alpha(x,y)$.

Enseguida, y dentro del Capítulo II, este lema es usado para establecer dos teoremas sobre existencia de soluciones holomorfas para sistemas de Pfaff lineales no homogéneos con singularidades.

El Capítulo III contiene la construcción de los coeficientes $\phi_n(x,y)$ , holomorfos en una misma vecindad del origen, que serán usados para definir una serie formal

$$P(x,y,z) = z + \phi_2(x,y)z^2 + \phi_3(x,y)z^3 + \dots ,$$

la cual permitirá linealizar el sistema (S) .

Estos coeficientes $\phi_n(x,y)$ se obtienen, gracias a los teoremas del Capítulo II, como soluciones de ciertos sistemas lineales no homogéneos que denotamos por $(*)_n$ . Sin embargo, para usar estos teoremas, es necesario probar que los sistemas $(*)_n$ satisfacen la condición de completa integrabilidad y es justamente este punto el que ocupa la mayor parte del Capítulo.

Cabe hacer notar que, cuando las funciones f y g toman valores en $\mathbb{C}^m$ , con $m \geq 2$ , se torna muy difícil y engorroso probar que los sistemas $(*)_n$ son completamente integrables.

En el Capítulo IV, se establecen los resultados finales que aseguran la linealización formal del sistema (S) en los casos $p = q = 1$ ; $p = 1$ , $q \geq 2$ ; $p = 1$ , $q = 0$ .

Finalmente, en el Capítulo V se dá algunos ejemplos que hacen razonable conjeturar la convergencia de la serie formal $P(x,y,z)$ y se plantean los problemas que constituyen la continuación natural de este trabajo.

# N O T A C I O N E S

1. $\mathbb{C}$ : Números complejos.

2. $\mathbb{R}_{\leq 0}$ : Números reales no positivos.

3. $\mathbb{Q}_{\leq 0}$ : Números racionales no positivos.

4. $\mathbb{N}_o$ : Números naturales unión $\{0\}$ .

5. $M_n(\mathbb{C})$ : Matrices cuadradas de orden $n$ , con coeficientes complejos.

6. Dado $m \in \mathbb{N}$ , denotaremos por $B_m(0,\varepsilon)$ al conjunto $\{x \in \mathbb{C}^m / \|x\| < \varepsilon\}$ .

# C A P I T U L O I

## ALGUNOS RESULTADOS BASICOS

En este Capítulo, enunciaremos algunos resultados que son indispensables para la comprensión de los Capítulos siguientes.

### 1. Convergencia de soluciones formales.

Dada la ecuación del tipo:

$$x \frac{du}{dx} = a(x)u + b(x) \quad , \tag{0}$$

donde $a : B_1(0,\gamma) \to M_n(\mathbb{C})$ y $b : B_1(0,\gamma) \to \mathbb{C}^n$ son funciones holomorfas, decimos que la serie formal $\sum_{m\geq 0} \phi_m x^m = \phi(x)$ es solución formal de la ecuación (0), si al reemplazar $u$ por $\phi(x)$ y las funciones $a(x)$ y $b(x)$ por sus desarrollos en serie de potencias en torno al origen, se obtiene una igualdad entre series formales.

Enseguida, enunciaremos un teorema bien conocido, cuya demostración puede verse en Wasow ([2]).

TEOREMA 1.1. Sean $a(x)$ y $b(x)$ funciones holomorfas en $B_1(0,\gamma)$ donde $a(x)$ toma valores en $M_n(\mathbb{C})$ y $b(x)$ en $\mathbb{C}^n$.

Si $\phi(x) = \sum_{m\geq 0} \phi_m x^m$, $\phi_m \in \mathbb{C}^n$, es solución formal de la ecuación (0), entonces la serie formal $\phi(x)$ converge para $|x| < \gamma$.

OBSERVACION. En este trabajo recurriremos al teorema anterior sólo en el caso $n = 1$.

## 2. Reordenación de series en dos variables.

A continuación, se enunciará un resultado cuya demostración puede deducirse fácilmente de los teoremas de reordenación de series que aparecen en el Capítulo "Series y productos infinitos" en ([6]).

PROPOSICION 2.1. Sea $\sum_{m+n\geq 0} a_{m,n} x^m y^n$ una serie de potencias cuyo dominio de convergencia es $]0,\gamma_1[ \times ]0,\gamma_2[$. Sea $\{g_i\}$, $i \in \mathbb{N}_o$ una sucesión de funciones con las siguientes propiedades:

(i) $g_i : \mathbb{N}_o \times \mathbb{N}_o \to \mathbb{N}_o \times \mathbb{N}_o$ inyectiva

(ii) $g_i(\mathbb{N}_o \times \mathbb{N}_o) \cap g_j(\mathbb{N}_o \times \mathbb{N}_o) = \phi$ para $i \neq j$

(iii) $\bigcup_{i\in\mathbb{N}_o} g_i(\mathbb{N}_o \times \mathbb{N}_o) = \mathbb{N}_o \times \mathbb{N}_o$.

Entonces:

(a) Escribiendo $g_i(m,n) = (m_i,n_i)$, tendremos que

$$\sum_{m_i,n_i} a_{m_i,n_i} x^{m_i} y^{n_i} := S_i(x,y) \text{ es convergente en } |x| < \gamma_1,$$

$|y| < \gamma_2$.

(b) Escribiendo $S(x,y) = \sum_{m+n\geq 0} a_{m,n} x^m y^n$ , tendremos

$$S(x,y) = \sum_{i\in\mathbb{N}_0} S_i(x,y) \quad \text{para} \quad |x| < \gamma_1 \ , \quad |y| < \gamma_2 \ .$$

OBSERVACION. La Proposición 2.1 también es válida para una serie en más de dos variables.

Como consecuencia inmediata, se tienen los Corolarios:

COROLARIO 2.2. Sea $a(x,y) = \sum a_{m,n} x^m y^n$ , holomorfa en $|x| < \gamma_1$ , $|y| < \gamma_2$ . Entonces podemos expresar $a(x,y)$ del siguiente modo:

$$a(x,y) = \sum_{m\geq 0} a_m(y) x^m \ , \ \text{donde} \ \ a_m(y) = \sum_{n\geq 0} a_{m,n} y^n \ ,$$

siendo $a_m(y)$ holomorfa en $|y| < \gamma_2$ .

COROLARIO 2.3. Sea $f(x,y,u)$ holomorfa en $B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,\gamma_2) \times B_1(0,\varepsilon)$ . Entonces $f$ admite un desarrollo en serie de potencias de la siguiente forma

$$f(x,y,u) = \sum_{n\geq 0} a_n(x,y) u^n \ ,$$

donde los coeficientes $a_n(x,y)$ son holomorfos en $B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,\gamma_2)$ .

## 3. Una propiedad de las funciones holomorfas en dos variables.

La siguiente propiedad de las funciones holomofas, será utilizada en el Capítulo II.

PROPOSICION 3.1. Si $v(x,y)$ es holomorfa en $B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,\gamma_2)$ y $|v(x,y)| \leq M|x|^{N+1}$ $\forall\ (x,y) \in B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,\gamma_2)$ , entonces

$v(x,y) = x^{N+1}B(x,y)$ , donde $B(x,y)$ es holomorfa en $B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,\gamma_2)$.

Demostración: Sea $v(x,y) = \sum_{m+n\geq 0} v_{m,n}x^m y^n$ . Reordenando, podemos escribir

$$v(x,y) = \sum_{\substack{0\leq m\leq N \\ n\geq 0}} v_{m,n}x^m y^n + \sum_{\substack{m\geq N+1 \\ n\geq 0}} v_{m,n}x^m y^n =$$

$$= \sum_{n\geq 0} v_{o,n}x^o y^n + \sum_{n\geq 0} v_{1,n}xy^n + \dots + \sum_{n\geq 0} v_{N,n}x^N y^n + \sum_{\substack{m\geq N+1 \\ n\geq 0}} v_{m,n}x^m y^n .$$

Definamos las funciones

$$A_i(y) = \sum_{n\geq 0} v_{i,n}y^n \qquad , \qquad i = 0,1, \dots, N$$

y

$$\tilde{B}(x,y) = \sum_{\substack{m\geq N+1 \\ n\geq 0}} v_{m,n}x^{m-N}y^n ,$$

las cuales son holomorfas en $B_1(0,\gamma_2)$ y $B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,\gamma_2)$ respectivamente, en virtud de la Proposición 2.1.

Escribamos

$$v(x,y) = A_o(y) + xA_1(y) + \dots + x^N A_N(y) + x^N\tilde{B}(x,y)$$

y dividiendo por $x^N$ para $x \neq 0$ , resulta

$$\frac{v(x,y)}{x^N} = \frac{A_o(y) + xA_1(y) + \dots + x^N A_N(y)}{x^N} + \tilde{B}(x,y)$$

o bien

$$\frac{A_o(y) + xA_1(y) + \ldots + x^N A_N(y)}{x^N} = \tilde{B}(x,y) - \frac{v(x,y)}{x^N} \quad .$$

Teniendo en cuenta que $|v(x,y)| \leq M|x|^{N+1}$ , entonces, la función $\tilde{B}(x,y) - \frac{v(x,y)}{x^N}$ es acotada en $0 < |x| < \gamma_1$ , $|y| < \gamma_2$ .

Ahora bien, si $A_o(y) \neq 0$ para algún $y \in B_1(0,\gamma_2)$ , entonces

$$\lim_{x \to 0} \frac{A_o(y) + xA_1(y) + \ldots + x^N A_N(y)}{x^N} = \infty \ ,$$

lo cual está en contradicción con el hecho de que $\tilde{B}(x,y) - \frac{v(x,y)}{x^N}$ es acotada. Luego, $A_o(y) = 0$ y en consecuencia

$$\frac{A_1(y) + xA_2(y) + \ldots + x^{N-1} A_N(y)}{x^{N-1}} = \tilde{B}(x,y) - \frac{v(x,y)}{x^N} \quad .$$

Si $A_1(y) \neq 0$ , para algún $y \in B_1(0,\gamma_2)$ , entonces

$$\lim_{x \to 0} \frac{A_1(y) + xA_2(y) + \ldots + x^{N-1} A_N(y)}{x^{N-1}} = \infty \ ,$$

obteniéndose nuevamente una contradicción, por lo tanto $A_1(y) = 0$ .

Continuando de este modo, concluimos que

$$A_o(y) = A_1(y) = \ldots = A_{N-1}(y) = 0 \qquad \text{para} \quad |y| < \gamma_2 \ ,$$

con lo cual

$$v(x,y) = x^N A_N(x,y) + x^N \tilde{B}(x,y) = x^N \left( A_N(x,y) + \tilde{B}(x,y) \right) .$$

Así, tomando $B(x,y) = A_N(x,y) + \tilde{B}(x,y)$ , tenemos

$$v(x,y) = x^N B(x,y) \ ,$$

donde $B(x,y)$ es holomorfa en $B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,\gamma_2)$ .

q.e.d.

## C A P I T U L O  II

### EXISTENCIA GLOBAL DE SOLUCIONES
### PARA UN SISTEMA DE PFAFF LINEAL CON SINGULARIDADES

1. Definición de un sistema de Pfaff completamente integrable.

DEFINICION. Sean $f(x,y,u)$ y $g(x,y,u)$ holomorfas en $B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,\gamma_2) \times B_m(0,\varepsilon)$ , y sean $p,q$ enteros no negativos.

Diremos que el sistema

$$(1) \quad \begin{cases} x^p \dfrac{\partial u}{\partial x} = f(x,y,u) \\ \\ y^q \dfrac{\partial u}{\partial x} = g(x,y,u) , \end{cases}$$

satisface la condición de completa integrabilidad o que es completamente integrable, si se verifica la siguiente igualdad:

$$\text{(C.I.)} \qquad y^q \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,u) + \frac{\partial f}{\partial u}(x,y,u)g(x,y,u) = x^p \frac{\partial g}{\partial x}(x,y,u) +$$

$$+ \frac{\partial g}{\partial u}(x,y,u)\cdot f(x,y,u) \ ,$$

$$\forall \quad (x,y,u) \in B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,\gamma_2) \times B_m(0,\varepsilon) \ .$$

OBSERVACION. El sistema (1) se llama "sistema de Pfaff", porque está definido por medio de la forma de Pfaff

$$\omega = \frac{f(x,y,u)}{x^p}\,dx + \frac{g(x,y,u)}{y^q}\,dy \ .$$

A través de este trabajo, siempre supondremos que $f(x,y,u)$ y $g(x,y,u)$ toman valores en $\mathbb{C}$, que $x \in \mathbb{C}$, $y \in \mathbb{C}$ y $u \in \mathbb{C}$.

Ahora escribiremos la condición (C.I.), como una igualdad entre dos series en potencias de $u$, con coeficientes que dependen de $x$ e $y$.

Sea pues

$$f(x,y,u) = \sum_{n\geq 0} a_n(x,y)u^n \quad y \quad g(x,y,u) = \sum_{n\geq 0} b_n(x,y)u^n \ ,$$

entonces

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x,y,u)\cdot g(x,y,u) = \sum_{n\geq 1} na_n(x,y)u^{n-1} \cdot \sum_{n\geq 0} b_n(x,y)u^n =$$

$$= b_o(x,y)a_1(x,y) + \sum_{n\geq 1} [\,(n+1)b_o(x,y)a_{n+1}(x,y) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} ka_k(x,y)b_{n+1-k}(x,y)\,]\,u^n \ ,$$

y por lo tanto

$$y^q \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,u) + \frac{\partial f}{\partial u}(x,y,u)g(x,y,u) = y^q \frac{\partial a_o}{\partial y}(x,y) + b_o(x,y)a_1(x,y) +$$

$$+ \sum_{n\geq 1} \left[ y^q \frac{\partial a_n}{\partial y}(x,y) + (n+1)b_o(x,y)a_{n+1}(x,y) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n} ka_k(x,y)b_{n+1-k}(x,y) \right] u^n .$$

Teniendo en cuenta la simetría de los dos miembros en (C.I.), es inmediato que:

$$x^p \frac{\partial g}{\partial x}(x,y,u) + \frac{\partial g}{\partial u}(x,y,u)f(x,y,u) = x^p \frac{\partial b_o}{\partial x}(x,y) + a_o(x,y)b_1(x,y) +$$

$$+ \sum_{n\geq 1} \left[ x^p \frac{\partial b_n}{\partial x}(x,y) + (n+1)a_o(x,y)b_{n+1}(x,y) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n} kb_k(x,y)a_{n+1-k}(x,y) \right] u^n$$

y al comparar los coeficientes de $u$ en (C.I.), obtenemos:

$$y^q \frac{\partial a_o}{\partial y}(x,y) + b_o(x,y)a_1(x,y) = x^p \frac{\partial b_o}{\partial x}(x,y) + a_o(x,y)b_1(x,y)$$

y

$$y^q \frac{\partial a_n}{\partial y}(x,y) + (n+1)b_o(x,y)a_{n+1}(x,y) + \sum_{k=1}^{n} ka_k(x,y)b_{n+1-k}(x,y) =$$

$$= x^p \frac{\partial b_n}{\partial x}(x,y) + (n+1)a_o(x,y)b_{n+1}(x,y) + \sum_{k=1}^{n} kb_k(x,y)a_{n+1-k}(x,y) ,$$

para todo $n \geq 1$ y $|x| < \gamma_1$ , $|y| < \gamma_2$ .

En el caso $f(x,y,0) = g(x,y,0) = 0$ , es decir, cuando $a_o(x,y) = b_o(x,y) = 0$ , las igualdades anteriores se reducen a:

$$(2) \qquad y^q \frac{\partial a_n}{\partial y}(x,y) + \sum_{k=1}^{n} k a_k(x,y) b_{n+1-k}(x,y) = x^p \frac{\partial b_n}{\partial x}(x,y) + \sum_{k=1}^{n} k b_k(x,y) a_{n+1-k}(x,y) ,$$

válidas para $|x| < \gamma_1$ , $|y| < \gamma_2$ y para todo $n \geq 1$ .

Destacamos la igualdad (2) pues será usada en el Capítulo III.

Con respecto a los supuestos hechos para $f$ y $g$ , esto es, que toman valores en $\mathbb{C}$ y eventualmente $f(x,y,0) = g(x,y,0) = 0$ , nos referiremos más adelante.

## 2. Convergencia de soluciones formales para una ecuación del tipo $x \frac{\partial z}{\partial x} = a(x,y) z + \alpha(x,y)$ .

En ([1]) (Lema 1.1, Pág. 243), se demuestra un lema, que bajo condiciones muy generales, garantiza la convergencia local de soluciones formales para una ecuación del tipo siguiente:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} = f(x,y,z) .$$

En nuestro trabajo, necesitamos demostrar la convergencia global de soluciones formales para una ecuación de la forma

$$(3) \qquad x\frac{\partial z}{\partial x} = a(x,y)z + \alpha(x,y) \ ,$$

por lo tanto, el lema anteriormente mencionado, no es directamente aplicable a nuestros fines, sin embargo, la idea de la demostración contiene la información necesaria para que en el caso de la ecuación lineal (3), podamos demostrar la convergencia global.

Antes de enunciar el resultado sobre convergencia global, recordemos que una serie formal en dos variables,

$$\phi(x,y) = \sum_{m+n\geq 0} \phi_{m,n} x^m y^n \ ,$$

es solución formal de la ecuación (3), si al reemplazar $z$ por $\phi(x,y)$, donde previamente hemos expresado $a(x,y)$ y $\alpha(x,y)$ como serie de potencias en $x,y$ centradas en $(0,0)$, se obtiene una igualdad entre series formales.

LEMA 2.1. Consideremos la ecuación escalar

$$(3) \qquad x\frac{\partial z}{\partial x} = a(x,y)z + \alpha(x,y) \ ,$$

donde $a(x,y)$ y $\alpha(x,y)$ son holomorfas en $B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,\gamma_2)$ con valores en $\mathbb{C}$. Sea $\phi(x,y)$ una solución formal de (3), la cual reordenamos del siguiente modo:

$$\phi(x,y) = \sum_{m\geq 0} \phi_m(y) x^m \ ,$$

donde

$$\phi_m(y) = \sum_{n\geq 0} \phi_{m,n} y^n \ , \qquad \text{con } \phi_{m,n} \in \mathbb{C} \ .$$

Supongamos que $\phi_m(y)$ es holomorfa en $B_1(0,\gamma_2)$ . Entonces, $\phi(x,y)$ es holomorfa en $B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,\gamma_2)$ .

Demostración:

Paso 1: Sea $\phi_N(x,y) = \sum_{m=0}^{N} \phi_m(y)x^m$ , para un cierto $N$ por precisar.

Si hacemos el cambio de variable $z = \phi_N(x,y) + v$ en la ecuación (3), obtenemos

$$x \frac{\partial v}{\partial x} = a(x,y)v + a(x,y)\phi_N(x,y) - x \frac{\partial \phi_N}{\partial x}(x,y) + \alpha(x,y) .$$

Sea $g_N(x,y)$ la función holomorfa en $|x| < \gamma_1$ , $|y| < \gamma_2$ definida por

$$g_N(x,y) = a(x,y)\phi_N(x,y) - x \frac{\partial \phi_N}{\partial x}(x,y) + \alpha(x,y) ,$$

entonces, como

$$\phi(x,y) = \sum_{m \geq 0} \phi_m(y)x^m$$

es solución formal de (3), la serie

$$\lambda(x,y) = \sum_{m \geq N+1} \phi_m(y)x^m ,$$

es solución formal de la ecuación

$$(4) \qquad x \frac{\partial v}{\partial x} = a(x,y)v + g_N(x,y) .$$

Paso 2: Demostremos que existe $\omega_N(x,y)$ holomorfa en $|x| < \gamma_1$, $|y| < \gamma_2$ tal que

$$(5) \qquad g_N(x,y) = x^{N+1}\omega_N(x,y) .$$

En efecto, como

$$\phi(x,y) = \sum_{m\geq 0} \phi_m(y)x^m = \phi_N(x,y) + \sum_{m\geq N+1} \phi_m(y)x^m$$

es solución formal de la ecuación (3), se tiene

$$x\,\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y) = x\,\frac{\partial\phi_N}{\partial x}(x,y) + x\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{m\geq N+1} \phi_m(y)x^m\right) =$$

$$= a(x,y)\left(\phi_N(x,y) + \sum_{m\geq N+1} \phi_m(y)x^m\right) + \alpha(x,y) ,$$

de donde,

$$a(x,y)\phi_N(x,y) + \alpha(x,y) - x\,\frac{\partial\phi_N}{\partial x}(x,y) =$$

$$= a(x,y)\sum_{m\geq N+1} \phi_m(y)x^m - x\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{m\geq N+1} \phi_m(y)x^m\right) ,$$

es decir,

$$g_N(x,y) = a(x,y)\sum_{m\geq N+1} \phi_m(y)x^m - \sum_{m\geq N+1} m\phi_m(y)x^m .$$

Por lo tanto, factorizando por $x^{N+1}$, tenemos:

$$g_N(x,y) = x^{N+1}\left(a(x,y)\sum_{m\geq N+1} \phi_m(y)x^{m-N-1} - \sum_{m\geq N+1} m\phi_m(y)x^{m-N-1}\right) ,$$

donde la expresión entre paréntesis, obviamente es holomorfa en $|x| < \gamma_1$ , $|y| < \gamma_2$ . Designando a esta expresión por $\omega_N(x,y)$ , obtenemos (5).

Paso 3: Precisemos el tamaño de $N$ . Sean $r_1, r_2$ tales que $0 < r_1 < \gamma_1$ , $0 < r_2 < \gamma_2$ y escojamos $N$ de manera que

$$\frac{|a(x,y)|}{N+1} \leq \frac{1}{2} \qquad y \qquad N > \text{Máx}|a_o(y)|$$

para todo $(x,y) \in \{|x| \leq r_1\} \times \{|y| \leq r_2\}$ , donde $a_o(y)$ es el término libre de $x$ en el desarrollo de $a(x,y)$ en potencias de $x$ . (Desarrollo de $a(x,y)$ en potencias de $x$ : $\sum_{m\geq 0} a_m(y)x^m$) . Sea además $K_N = \text{Máx}\{|\omega_N(x,y)| : |x| \leq r_1 , |y| \leq r_2\}$ y denotemos por $A$ al conjunto $\{|x| < r_1\} \times \{|y| < r_2\}$ .

Paso 4: Probaremos que, dada una constante $M \geq \frac{2K_N}{N+1}$ , si $\psi(x,y)$ es una función holomorfa en $A$ , que satisface la relación

$$|\psi(x,y)| \leq M|x|^{N+1} , \qquad \forall \ (x,y) \in A ,$$

entonces, la función definida por

$$\widetilde{\psi}(x,y) = \int_0^x \Phi(\xi,y) \, d\xi ,$$

donde

$$\Phi(x,y) = \begin{cases} [\, a(x,y)\psi(x,y) + g_N(x,y)] \cdot \frac{1}{x} & \text{para } x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{para } x = 0 , \end{cases}$$

es holomorfa en $A$ y verifica

$$|\widetilde{\psi}(x,y)| \leq M|x|^{N+1} \quad , \qquad \forall\ (x,y) \in A \ .$$

1°) Demostremos que $\widetilde{\psi}$ es holomorfa en $A$ .

Sea $\psi(x,y)$ holomorfa en $A$ , tal que

$$|\psi(x,y)| \leq M|x|^{N+1} \quad , \qquad \forall\ (x,y) \in A \ .$$

Por Proposición 3.1. (Capítulo I), podemos asegurar que existe $\rho(x,y)$ holomorfa en $A$ , tal que

$$\psi(x,y) = x^{N+1}\rho(x,y) \ .$$

Además, como $g_N(x,y) = x^{N+1}\omega_N(x,y)$ , siendo $\omega_N(x,y)$ holomorfa en $|x| < \gamma_1$ , $|y| < \gamma_2$ , en particular holomorfa en $A$ , tenemos que, para $x \neq 0$

$$\begin{aligned}\Phi(x,y) &= [\, a(x,y)\psi(x,y) + g_N(x,y)] \cdot \frac{1}{x} = \\ &= [\, a(x,y)x^{N+1}\rho(x,y) + x^{N+1}\omega_N(x,y)]\ \frac{1}{x} = \\ &= x^N[\, a(x,y)\rho(x,y) + \omega_N(x,y)] \ .\end{aligned}$$

Ahora bien, la función

$$x^N[\, a(x,y)\rho(x,y) + \omega_N(x,y)] \ ,$$

es obviamente holomorfa en $A$ y toma el valor 0 para $x = 0$ , (pues $N \geq 1$) , o sea es igual a $\Phi(x,y)$ en $A$ , por lo tanto, $\Phi(x,y)$ es holomorfa en $A$ y en consecuencia

$$\widetilde{\psi}(x,y) = \int_0^x \Phi(\xi,y)\,d\xi \quad , \text{ también lo es.}$$

2°) Demostremos que $\widetilde{\psi}$ satisface la desigualdad

$$|\widetilde{\psi}(x,y)| \leq M|x|^{N+1} \qquad \forall\ (x,y) \in A\ .$$

Supongamos $x \neq 0$ , entonces para $(x,y) \in A$ tenemos

$$|\widetilde{\psi}(x,y)| = \left|\int_0^x \Phi(\xi,y)\,d\xi\right| = \left|\int_0^x [\,a(\xi,y)\psi(\xi,y) + g_N(\xi,y)]\ \frac{d\xi}{\xi}\right| \leq$$

$$\leq \int_0^x |a(\xi,y)\psi(\xi,y) + g_N(\xi,y)|\ \frac{|d\xi|}{|\xi|} \leq$$

$$\leq \int_0^x \left(|a(\xi,y)\psi(\xi,y)| + |g_N(\xi,y)|\right)\ \frac{|d\xi|}{|\xi|}\ .$$

Haciendo uso de las desigualdades $|a(\xi,y)| \leq \frac{1}{2}\,(N+1)$ , $|\psi(\xi,y)| \leq M|\xi|^{N+1}$ y $|g_N(\xi,y)| \leq K_N|\xi|^{N+1}$ , para $(\xi,y) \in A$ , se obtiene

$$\int_0^x \left(|a(\xi,y)\psi(\xi,y)| + |g_N(\xi,y)|\right)\ \frac{|d\xi|}{|\xi|} \leq$$

$$\leq \int_0^x \left(\frac{1}{2}\,(N+1)M + K_N\right)|\xi|^N|d\xi| =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\,(N+1)M + K_N\right)\int_0^x |\xi|^N|d\xi| = \left(\frac{1}{2}\,(N+1)M + K_N\right)\frac{|x|^{N+1}}{N+1} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\,M + \frac{K_N}{N+1}\right)|x|^{N+1}\ ,$$

y como $M \geq \frac{2K_N}{N+1}$ , entonces

$$|\widetilde{\psi}(x,y)| \leq M|x|^{N+1} \quad , \qquad \forall\ (x,y) \in A \ .$$

OBSERVACION. Para $x = 0$ , la desigualdad es trivialmente satisfecha.

<u>Paso 5</u>: Construiremos una sucesión de funciones holomorfas en $A$ , que convergen uniformemente a una solución de la siguiente ecuación integral:

$$(6) \qquad u(x,y) = \int_0^x [\, a(\xi,y)u(\xi,y) + g_N(\xi,y)]\ \frac{d\xi}{\xi} \quad .$$

Sea $\{v_n\}_n$ la sucesión definida en $A$ por:

$$(7) \qquad v_o \equiv 0 \quad , \quad v_{n+1}(x,y) = \int_0^x \Phi_n(\xi,y)d\xi \quad ,$$

donde

$$\Phi_n(x,y) = \begin{cases} [\, a(x,y)v_n(x,y) + g_N(x,y)]\ \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{si } x = 0 \ . \end{cases}$$

Obviamente $v_o(x,y)$ es holomorfa en $A$ y verifica

$$|v_o(x,y)| \leq M|x|^{N+1} \qquad \forall\ (x,y) \in A \ ,$$

por lo tanto, si escogemos $M \geq \frac{2K_N}{N+1}$ , del paso 4 sabemos que $v_1(x,y)$ es holomorfa en $A$ y satisface

$$|v_1(x,y)| \leq M|x|^{N+1} \qquad \forall\ (x,y) \in A \ .$$

Por inducción, es claro que para cada $n \in \mathbb{N}_o$ , la función $v_n(x,y)$ es holomorfa en $A$ y verifica

$$(8) \qquad |v_n(x,y)| \leq M|x|^{N+1} \qquad \forall\ (x,y) \in A\ .$$

Probemos que la sucesión $v_n$ converge uniformemente en $A$ cuando $n$ tiende a infinito, hacia una función $v$ que es solución de la ecuación (6).

Para $x \neq 0$ , tenemos las siguientes desigualdades:

$$|v_1(x,y) - v_o(x,y)| = \left|\int_0^x g_N(\xi,y)\ \frac{d\xi}{\xi}\right| \leq \int_0^x K_N|\xi|^N|d\xi| =$$

$$= \frac{K_N}{N+1}\ |x|^{N+1} \leq \frac{1}{2}\ M|x|^{N+1}\ ,\quad \forall\ (x,y) \in A\ ,\ x \neq 0\ ;$$

$$|v_2(x,y) - v_1(x,y)| = \left|\int_0^x a(\xi,y)(v_1(\xi,y) - v_o(\xi,y))\ \frac{d\xi}{\xi}\right| \leq$$

$$\leq \int_0^x \frac{1}{2}\ (N+1)\ \frac{1}{2}\ M|\xi|^N|d\xi| = \frac{1}{4}\ M|x|^{N+1}\ ,\quad \forall\ (x,y) \in A\ ,\ x \neq 0\ .$$

Por inducción, es fácil probar que para todo $n \geq 1$

$$|v_n(x,y) - v_{n-1}(x,y)| \leq \frac{1}{2^n}\ M|x|^{N+1}\ ,\qquad \forall\ (x,y) \in A\ ,\quad x \neq 0$$

y como $v_m(0,y) = 0$ , esta última desigualdad es válida para todo $(x,y) \in A$ .

Escribamos ahora

$$v_n(x,y) = (v_1(x,y) - v_o(x,y)) + \ldots + (v_n(x,y) - v_{n-1}(x,y)) .$$

Como

$$|v_s(x,y) - v_{s-1}(x,y)| \leq \frac{1}{2^s} M|x|^{N+1} \leq \frac{1}{2^s} Mr_1^{N+1} , \qquad \forall\ (x,y) \in A$$

y
$$\sum_{s\geq 1} \frac{1}{2^s} Mr_1^{N+1} = Mr_1 < \infty ,$$

el criterio de Weiertrass implica la convergencia uniforme de $v_n$, cuando $n$ tiende a infinito, hacia una función $v$ holomorfa sobre $A$.

<u>Paso 6</u>: Demostraremos que $v$ es solución de la ecuación (6).

Como

$$|v_n(x,y)| \leq M|x|^{N+1} , \qquad \forall\ (x,y) \in A ,$$

y $v_n$ converge uniformemente a $v$, cuando $n$ tiende a infinito, en el conjunto $A$, entonces

$$(9) \qquad |v(x,y)| \leq M|x|^{N+1} \qquad \forall\ (x,y) \in A .$$

Así, la función $\int_0^x \Phi_v(\xi,y)d\xi$, donde

$$\Phi_v(x,y) = \begin{cases} [\,a(x,y)v(x,y) + g_N(x,y)]\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 , \end{cases}$$

resulta ser holomorfa en $A$.

Ahora bien, como

$$v_{n+1}(x,y) = \int_0^x \Phi_n(\xi,y)\,d\xi \quad ,$$

necesitamos probar la siguiente convergencia puntual: Para cada $(x,y) \in A$

$$\int_0^x \Phi_n(\xi,y)\,d\xi \to \int_0^x \Phi_v(\xi,y)\,d\xi \qquad \text{cuando} \quad n \to \infty \ .$$

En el caso $x = 0$ , la convergencia anterior es obvia. Supongamos entonces $x \neq 0$ y probemos que

$$\int_0^x [a(\xi,y)v_n(\xi,y) + g_N(\xi,y)]\,\frac{d\xi}{\xi} \to \int_0^x [a(\xi,y)v(\xi,y) + g_N(\xi,y)]\,\frac{d\xi}{\xi}$$

cuando $n \to \infty$ , o equivalentemente,

$$\int_0^x a(\xi,y)[v(\xi,y) - v_n(\xi,y)]\,\frac{d\xi}{\xi} \to 0 \qquad \text{cuando} \quad n \to \infty \ .$$

Para demostrar esto, notemos que, en virtud de (8), (9) y Proposición 3.1 (Capítulo I), tenemos:

$$v(\xi,y) - v_n(\xi,y) = \xi^{N+1}u_n(\xi,y) \ ,$$

donde $u_n(\xi,y)$ es holomorfa en $A$ y probemos que

$$x^N u_n(x,y) := \tilde{u}_n(x,y) \to 0 \quad , \qquad \text{cuando} \quad n \to \infty \ ,$$

uniformemente en $A$ . En efecto, de (8) y (9) se tiene

$$|v(x,y) - v_n(x,y)| \leq 2M|x|^{N+1} \qquad \forall\ (x,y) \in A \ ,$$

y como

$$\frac{v(x,y) - v_n(x,y)}{x} = x^N u_n(x,y) \quad ,$$

obtenemos:

$$|x^N u_n(x,y)| \leq 2M|x|^N \qquad \forall\ (x,y) \in A\ .$$

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Si

$$|x| < \left(\frac{\varepsilon}{2M}\right)^{\frac{1}{N}} \quad ,$$

se tiene

$$|x^N u_n(x,y)| \leq 2M|x|^N < 2M\,\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon \quad ,$$

válida para todo $n \in \mathbb{N}_o$ y todo

$$(x,y) \in \left\{|x| < \left(\frac{\varepsilon}{2M}\right)^{\frac{1}{N}}\right\} \times \{|y| < r_2\}\ .$$

Sea $n_o$ tal que

$$n \geq n_o \Rightarrow |v(x,y) - v_n(x,y)| < \varepsilon\cdot\left(\frac{\varepsilon}{2N}\right)^{\frac{1}{N}} \qquad \forall\ (x,y) \in A\ .$$

En particular, esta última desigualdad es válida para todo

$$(x,y) \in \left\{\left(\frac{\varepsilon}{2N}\right)^{\frac{1}{N}} \leq |x| < r_1\right\} \times \{|y| < r_2\}\ .$$

Así, en este conjunto, se tiene:

$$|x^N u_n(x,y)| = \frac{|v(x,y) - v_n(x,y)|}{|x|} < \frac{\varepsilon\cdot\left(\frac{\varepsilon}{2M}\right)^{\frac{1}{N}}}{\left(\frac{\varepsilon}{2M}\right)^{\frac{1}{N}}} = \varepsilon \quad ,$$

para todo $n \geq n_o$ . Luego, podemos asegurar que:

$$n \geq n_o \Rightarrow |\tilde{u}_n(x,y)| = |x^N u_n(x,y)| < \varepsilon \qquad \forall\ (x,y) \in A ,$$

o sea,

$$\tilde{u}_n \to 0 \qquad \text{cuando} \quad n \to \infty ,$$

uniformemente en $A$ .

Con esto en cuenta, escribamos

$$\int_0^x a(\xi,y)(v(\xi,y) - v_n(\xi,y)) \frac{d\xi}{\xi} = \int_0^x a(\xi,y)\tilde{u}_n(\xi,y)\,d\xi ,$$

y acotemos. Resulta:

$$\left|\int_0^x a(\xi,y)\tilde{u}_n(\xi,y)\,d\xi\right| \leq \int_0^x |a(\xi,y)|\,|\tilde{u}_n(\xi,y)|\,|d\xi| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\,(N+1) \int_0^x |\tilde{u}_n(\xi,y)|\,|d\xi| .$$

Tomemos ahora $\varepsilon > 0$ y sea $m_o$ tal que:

$$n \geq m_o \Rightarrow |\tilde{u}_n(\xi,y)| < \frac{2\varepsilon}{(N+1)r_1} , \qquad \forall\ (x,y) \in A .$$

De este modo,

$$\frac{1}{2}\,(N+1) \int_0^x |\tilde{u}_n(\xi,y)|\,|d\xi| < \frac{1}{2}\,(N+1)\,\frac{2\varepsilon}{(N+1)r_1} \int_0^x |d\xi| =$$

$$= \frac{1}{2}\,(N+1)\,\frac{2\varepsilon}{(N+1)r_1}\,|x| = \frac{\varepsilon}{r_1}\,|x| < \frac{\varepsilon}{r_1}\,r_1 = \varepsilon ,$$

y por lo tanto,

$$\left|\int_0^x a(\xi,y)(v(\xi,y) - v_n(\xi,y))\right| < \varepsilon \quad , \quad \forall\, n \geq m_o \; .$$

Es decir, hemos demostrado la siguiente convergencia puntual: Para cada $(x,y) \in A$

$$\int_0^x a(\xi,y)(v(\xi,y) - v_n(\xi,y)) \frac{d\xi}{\xi} \to 0 \qquad \text{cuando} \quad u \to \infty \; ,$$

que era lo que debíamos probar.

Resumiendo, podemos decir que: Dado cualquier $(x,y) \in A$, se tiene

$$\int_0^x \Phi_n(\xi,y)\,d\xi \to \int_0^x \Phi_v(\xi,y)\,d\xi \quad , \qquad \text{cuando} \quad n \to \infty \; .$$

Ahora bien, haciendo tender $n$ a infinito en la relación (7), obtenemos

$$(10) \qquad v(x,y) = \int_0^x \Phi_v(\xi,y)\,d\xi \qquad \forall\ (x,y) \in A \; ,$$

lo cual nos dice que $v(x,y)$ es solución de la ecuación (6), ya que cuando $x \neq 0$,

$$\Phi_v(\xi,y) = [\,a(\xi,y)v(\xi,y) + g_N(\xi,y)] \cdot \frac{1}{\xi} \quad , \qquad \forall\ \xi \neq 0 \; ,$$

en cuyo caso la igualdad (10) toma la forma (6).

(Observación: Notemos que en la ecuación (6) el integrado no está definido para $\xi = 0$ ; sin embargo esto se supera al considerar (10)).

Paso 7: Probaremos que $v$ es solución de la ecuación (4).

Derivando con respecto a $x$ en (10), se obtiene:

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \Phi_v(x,y) \quad , \qquad \forall\ (x,y) \in A \ .$$

Luego, para $x \neq 0$ ,

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = [\,a(x,y)v(x,y) + g_N(x,y)]\cdot\frac{1}{x} \ ,$$

o bien

$$x\,\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = a(x,y)v(x,y) + g_N(x,y) \ .$$

Teniendo en cuenta (5) y (9), queda claro que esta última igualdad también se satisface para $x = 0$ . O sea, hemos demostrado que $v(x,y)$ es solución de (4).

Por otra parte, según se estableció en (9), $v(x,y)$ satisface

$$|v(x,y)| \leq M|x|^{N+1} \qquad \forall\ (x,y) \in A \ .$$

Por lo tanto, en virtud de Proposición 3.1 (Capítulo I), podemos escribir $v(x,y) = \sum_{m\geq N+1} v_m(y)x^m$ , donde los $v_m(y)$ son holomorfos para $|y| < r_2$ .

Paso 8: A continuación probaremos que $v_m(y) = \phi_m(y)$ , para todo $y \in B_1(0,r_2)$ .

Como $v(x,y)$ es solución de (4), tenemos:

$$(11) \qquad x\,\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = x\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{m\geq N+1} v_m(y)x^m\right) =$$

$$= a(x,y)\left(\sum_{m\geq N+1} v_m(y)x^m\right) + g_N(x,y) \ .$$

Por otro lado, (ver Paso 1), sabemos que

$$g_N(x,y) = \phi_N(x,y)a(x,y) + \alpha(x,y) - x\,\frac{\partial\phi_N}{\partial x}\,(x,y)$$

y escribamos

$$\phi_N(x,y) = \sum_{n=0}^{N}\phi_n(y)x^n \quad , \qquad a(x,y) = \sum_{n\geq 0} a_n(y)x^n \ ,$$

$$\alpha(x,y) = \sum_{n\geq 0}\alpha_n(y)x^n \ .$$

Así,

$$g_N(x,y) = \sum_{m=0}^{N}\left[\left(\sum_{i=0}^{m}\phi_i(y)a_{m-i}(y)\right) + \alpha_m(y) - m\phi_m(y)\right]x^m +$$

$$+ \sum_{m\geq N+1}\left[\left(\sum_{i=0}^{m}\phi_i(y)a_{m-i}(y)\right) + \alpha_m(y)\right]x^m \ ,$$

con lo cual,

$$a(x,y)\left(\sum_{m\geq N+1} v_m(y)x^m\right) + g_N(x,y) =$$

$$= \sum_{m\geq N+1}\left[\sum_{i=0}^{m-N-1} a_i(y)v_{m-i}(y)\right]x^m + g_N(x,y) =$$

$$= \sum_{m=0}^{N}\left[\left(\sum_{i=0}^{m}\phi_i(y)a_{m-i}(y)\right) + \alpha_m(y) - m\phi_m(y)\right]x^m +$$

$$+ \sum_{m \geq N+1} \left[ \left( \sum_{i=0}^{m-N-1} a_i(y) v_{m-i}(y) \right) + \left( \sum_{i=0}^{N} \phi_i(y) a_{m-i}(i) \right) + \alpha_m(y) \right] x^m .$$

Por otro lado,

$$x \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \sum_{m \geq N+1} m v_m(y) x^m ,$$

entonces, comparando coeficientes en la igualdad (11), tenemos:

$$(12) \qquad m v_m(y) = \sum_{i=0}^{m-N-1} a_i(y) v_{m-i}(y) + \sum_{i=0}^{N} \phi_i(y) a_{m-i}(y) + \alpha_m(y) ,$$

$\forall\ m \geq N+1$ y $\forall\ y \in B_1(0,r_2)$ .

Además, como la serie formal

$$\lambda(x,y) = \sum_{m \geq N+1} \phi_m(y) x^m ,$$

es solución formal de (4), repitiendo el mismo cálculo que nos llevó a establecer la relación (12), donde sólo cambiamos $v_m(y)$ por $\phi_m(y)$ , obtenemos:

$$(13) \qquad m\phi_m(y) = \sum_{i=0}^{m-N-1} a_i(y) \phi_{m-i}(y) + \sum_{i=0}^{N} \phi_i(y) a_{m-i}(y) + \alpha_m(y) ,$$

$\forall\ m \geq N+1$ y $\forall\ y \in B_1(0,r_2)$.

Cuando $m = N + 1$ , las igualdades (12) y (13) se transforman, respectivamente, en

$$(N+1) v_{N+1}(y) = a_o(y) v_{N+1}(y) + \phi_o(y) a_{N+1}(y) + \ldots +$$

$$+ \phi_N(y) a_1(y) + \alpha_{N+1}(y) ,$$

y

$$(N + 1)\phi_{N+1}(y) = a_o(y)\phi_{N+1}(y) + \phi_o(y)a_{N+1}(y) + \dots +$$

$$+ \phi_N(y)a_1(y) + \alpha_{N+1}(y) \quad ,$$

las cuales pueden ser escritas del siguiente modo,

$$(N + 1 - a_o(y))v_{N+1}(y) = \phi_o(y)a_{N+1}(y) + \dots + \phi_N(y)a_1(y) + \alpha_{N+1}(y) \quad ,$$

y

$$(N + 1 - a_o(y))\phi_{N+1}(y) = \phi_o(y)a_{N+1}(y) + \dots + \phi_N(y)a_1(y) + \alpha_{N+1}(y) \quad .$$

Recordemos ahora que $N$ fue escogido de manera que $N > \text{Máx}|a_o(y)|$ para $|y| \leq r_2$ y por lo tanto, $a_o(y) \neq N + 1$ para todo $y \in B(0,r_2)$ . Luego,

$$v_{N+1}(y) = \frac{\phi_o(y)a_{N+1}(y) + \dots + \phi_N(y)a_1(y) + \alpha_{N+1}(y)}{N + 1 - a_o(y)} = \phi_{N+1}(y)$$

$\forall\ y \in B_1(0,r_2)$ .

Si escribimos (12) y (13) para $m = N + 2$ , obtenemos, respectivamente:

$$v_{N+2}(y) = \frac{a_1(y)v_{N+1}(y) + \phi_o(y)a_{N+2}(y) + \dots + \phi_N(y)a_2(y) + \alpha_{N+2}(y)}{N + 2 - a_o(y)}$$

y

$$\phi_{N+2}(y) = \frac{a_1(y)\phi_{N+1}(y) + \phi_o(y)a_{N+2}(y) + \dots + \phi_N(y)a_2(y) + \phi_{N+2}(y)}{N + 2 - a_o(y)} \quad ,$$

pero como $v_{N+1}(y) = \phi_{N+1}(y)$ , entonces, $v_{N+2}(y) = \phi_{N+2}(y)$ , $\forall\ y \in B_1(0,r_2)$ . Continuando de esta manera, es claro que $v_m(y) = \phi_m(y)$

para $m \geq N + 1$ y para todo $y \in B_1(0,r_2)$ .

Paso 9: La serie formal $\phi(x,y) = \sum_{m\geq 0} \phi_m(y)x^m$ , define una función holomorfa en $A$ . Tenemos

$$\phi(x,y) = \sum_{m\geq 0} \phi_m(y)x^m = \phi_N(x,y) + \sum_{m\geq N+1} \phi_m(y)x^m$$

y

$$\phi_m(y) = v_m(y)$$

para $m \geq N + 1$ , por lo tanto

$$\phi(x,y) = \phi_N(x,y) + \sum_{m\geq N+1} v_m(y)x^m = \phi_N(x,y) + v(x,y) \ .$$

Como $\phi_N(x,y)$ y $v(x,y)$ son holomorfas en $A$ , $\phi(x,y)$ también lo es.

Paso 10: La serie $\phi(x,y)$ es holomorfa en $B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,\gamma_2)$ .

Del paso 9, sabemos que $\phi(x,y)$ es holomorfa en $A$ , donde $A = \{|x| < r_1\} \times \{|y| < r_2\}$ siendo $r_1$ y $r_2$ números arbitrarios que satisfacen $0 < r_1 < \gamma_1$ , $0 < r_2 < \gamma_2$ , por lo tanto $\phi(x,y)$ es holomorfa en todo el conjunto $B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,\gamma_2)$ .

Esto completa la demostración del Lema 2.1.

q.e.d.

## 3. Un Teorema de existencia global de soluciones para un sistema de Pfaff lineal no homogéneo con singularidades.

Demostraremos ahora un Teorema que será de gran importancia en el desarrollo de este trabajo.

TEOREMA 3.1. Sean

$$a(x,y) = \sum_{m+n\geq 0} a_{m,n} x^m y^n \quad , \quad b(x,y) = \sum_{m+n\geq 0} b_{m,n} x^m y^n$$

$$\alpha(x,y) = \sum_{m+n\geq 0} \alpha_{m,n} x^m y^n \quad , \quad \beta(x,y) = \sum_{m+n\geq 0} \beta_{m,n} x^m y^n$$

funciones holomorfas en $B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,\gamma_2)$ a valores en $\mathbb{C}$ , tales que el sistema

$$(14) \qquad \begin{cases} x \dfrac{\partial z}{\partial x} = a(x,y)z + \alpha(x,y) & (14') \\ \\ y \dfrac{\partial z}{\partial y} = b(x,y)z + \beta(x,y) & (14'') \end{cases} ,$$

es completamente integrable. Además supondremos que $a(0,0) \notin \mathbb{N}_0$ ó $b(0,0) \notin \mathbb{N}_0$ . Entonces, el sistema (14) admite una única solución $\phi(x,y)$ holomorfa en todo el conjunto $B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,\gamma_2)$ .

Demostración: Primero demostraremos que el sistema (14) admite una única solución formal. En efecto, sea $\phi(x,y) = \sum_{m+n\geq 0} \phi_{m,n} x^m y^n$ una serie formal y supongamos $a(0,0) \notin \mathbb{N}_0$ .

Reemplazando $\phi(x,y)$ en (14') y comparando coeficientes, obtenemos:

$$(15) \qquad m\phi_{m,n} = \sum_{\substack{i+k=m \\ j+\ell=n}} a_{i,j}\phi_{k,\ell} + \alpha_{m,n} \,, \qquad \forall\ (m,n) \in \mathbb{N}_o \times \mathbb{N}_o \,,$$

o bien

$$(m - a_{oo})\phi_{m,n} = \sum_{\substack{i+k=m \\ j+\ell=n}} a_{i,j}\phi_{k,\ell} + \alpha_{m,n} \,.$$

Como $a_{oo} \neq 0$ , tomando $(m,n) = (0,0)$ en (15), se tiene $\phi_{oo} = -a_{oo}^{-1}\alpha_{oo}$ , lo cual determina únicamente a $\phi_{oo}$ . En general, como $a_{oo} \notin \mathbb{N}_o$ , dado cualquier $(m,n) \in \mathbb{N}_o \times \mathbb{N}_o$ , $(m,n) \neq (0,0)$ , el término $\phi_{m,n}$ estará únicamente determinado en función de los $\phi_{k,\ell}$ para $0 \leq k \leq m$ , $0 \leq \ell \leq n$ , $(k,\ell) \neq (m,n)$ .

De este modo, está claro que existe una única serie formal $\phi(x,y) = \sum_{m+n\geq 0} \phi_{m,n}x^m y^n$ , que satisface la ecuación (14').

En adelante, denotaremos por $\phi(x,y)$ a la serie formal $\sum_{m+n\geq 0} \phi_{m,n}x^m y^n$ , donde los coeficientes $\phi_{m,n}$ han sido determinados a partir de la relación (15).

(Observación: Si suponemos $b(0,0) \notin \mathbb{N}_o$ , obtenemos una única serie formal que satisface (14")).

Ahora probaremos que $\phi(x,y)$ también es solución formal de (14"). Para esto, usamos la completa integrabilidad del sistema (14), que de acuerdo a la relación (C.I.), se expresa del siguiente modo:

$$(16) \qquad y\frac{\partial}{\partial y}\,(a(x,y)z + \alpha(x,y)) + \frac{\partial}{\partial z}\,(a(x,y)z + \alpha(x,y))\,(b(x,y)z + \alpha(x,y)) =$$

$$= x \frac{\partial}{\partial x} (b(x,y)z + \beta(x,y)) + \frac{\partial}{\partial z} (b(x,y)z + \beta(x,y))(a(x,y)z + \alpha(x,y)) ,$$

$\forall\ (x,y,z) \in B_1(0,\gamma_1) \times B_2(0,\gamma_2) \times \mathbb{C}$ .

Afirmamos que si reemplazamos $z$ por una serie formal cualquiera $\sum\limits_{m+n\geq 0} z_{m,n} x^m y^n$ en la relación (16), la igualdad entre las expresiones, ahora formales, subsistirá.

En efecto, desarrollando los paréntesis en (16) y cancelando términos semejantes, se tiene:

$$(17) \qquad y \frac{\partial a}{\partial y} (x,y)\cdot z + y \frac{\partial \alpha}{\partial y} (x,y) + a(x,y)\beta(x,y) =$$

$$= x \frac{\partial b}{\partial x}(x,y)\cdot z + z \frac{\partial \beta}{\partial x} (x,y) + b(x,y)\alpha(x,y) .$$

Usando esta última igualdad para $z_1 = 0$ , concluimos que

$$y \frac{\partial \alpha}{\partial y}(x,y) + a(x,y)\beta(x,y) = x \frac{\partial \beta}{\partial x} (x,y) + b(x,y)\alpha(x,y)$$

por lo tanto, a partir de (17), se deduce,

$$y \frac{\partial a}{\partial y} (x,y) = x \frac{\partial b}{\partial x} (x,y)$$

en cuyo caso es claro que al reemplazar $z$ por $\sum\limits_{m+n\geq 0} z_{m,n} x^m y^n$ en (17), que es equivalente a (16), se obtiene una igualdad entre series formales.

Probemos que $\phi(x,y)$ es solución formal de (14"), demostrando que

$$y \frac{\partial \phi}{\partial y} (x,y) - b(x,y)\phi(x,y) - \beta(x,y) := u(x,y)$$

es solución formal de $x \frac{\partial z}{\partial x} = a(x,y)z$ . Pero si esto ocurre, entonces, necesariamente $u(x,y) = 0$ . (Para ver esto, tomar $\alpha_{m,n} = 0$ en (15) y recordar que $a(0,0) \notin \mathbb{N}_0$) .

De las igualdades

$$y\,\frac{\partial\phi}{\partial y}\,(x,y) = \sum_{m+n\geq 0} n\phi_{m,n}x^m y^n \ , \quad x\,\frac{\partial\phi}{\partial x}\,(x,y) = \sum_{m+n\geq 0} m\phi_{m,n}x^m y^n \ ,$$

se obtiene

$$x\,\frac{\partial}{\partial x}\left(y\,\frac{\partial\phi}{\partial y}\,(x,y)\right) = y\,\frac{\partial}{\partial y}\left(x\,\frac{\partial\phi}{\partial x}\,(x,y)\right)$$

y como $\phi(x,y)$ es solución formal de (14'), tenemos:

$$x\,\frac{\partial\phi}{\partial x}\,(x,y) = a(x,y)\phi(x,y) + \alpha(x,y) \ .$$

Luego

$$\begin{aligned} x\,\frac{\partial}{\partial x}\left(y\,\frac{\partial\phi}{\partial y}\,(x,y)\right) &= y\,\frac{\partial}{\partial y}\left(x\,\frac{\partial\phi}{\partial x}\,(x,y)\right) = y\,\frac{\partial}{\partial y}\,(a(x,y)\phi(x,y) + \alpha(x,y)) = \\ &= y\left(\frac{\partial a}{\partial y}\,(x,y)\cdot\phi(x,y) + \frac{\partial\alpha}{\partial y}\,(x,y)\right) + y\cdot a(x,y)\,\frac{\partial\phi}{\partial y}\,(x,y) \ . \end{aligned} \tag{18}$$

Teniendo en cuenta que en (16) podemos reemplazar $z$ por una serie formal cualquiera, en particular por $\phi(x,y)$, tendremos

$$\begin{aligned} &y\left(\frac{\partial a}{\partial y}\,(x,y)\cdot\phi(x,y) + \frac{\partial\alpha}{\partial y}\,(x,y)\right) + a(x,y)\,(b(x,y)\phi(x,y) + \beta(x,y)) = \\ &= x\left(\frac{\partial b}{\partial x}\,(x,y)\cdot\phi(x,y) + \frac{\partial\beta}{\partial x}\,(x,y)\right) + b(x,y)\,(a(x,y)\phi(x,y) + \alpha(x,y)) \ , \end{aligned}$$

de donde

$$y\left(\frac{\partial a}{\partial y}\,(x,y)\phi(x,y) + \frac{\partial\alpha}{\partial y}\,(x,y)\right) + y\cdot a(x,y)\,\frac{\partial\phi}{\partial y}\,(x,y) =$$

$$= y\left(\frac{\partial a}{\partial y}(x,y)\cdot\phi(x,y) + \frac{\partial \alpha}{\partial y}(x,y)\right) + a(x,y)(b(x,y)\phi(x,y) + \beta(x,y)) +$$

$$- a(x,y)(b(x,y)\phi(x,y) + \beta(x,y)) + y\cdot a(x,y)\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) =$$

$$= x\left(\frac{\partial b}{\partial x}(x,y)\cdot\phi(x,y) + \frac{\partial \beta}{\partial x}(x,y)\right) + b(x,y)(a(x,y)\phi(x,y) + \alpha(x,y)) +$$

$$- a(x,y)(b(x,y)\phi(x,y) + \beta(x,y)) + y\cdot a(x,y)\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) =$$

$$= x\left(\frac{\partial b}{\partial x}(x,y)\cdot\phi(x,y) + \frac{\partial \beta}{\partial x}(x,y)\right) + b(x,y)\left(x\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y)\right) +$$

$$- a(x,y)(b(x,y)\phi(x,y) + \beta(x,y)) + y\cdot a(x,y)\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) =$$

$$= x\left(\frac{\partial b}{\partial x}(x,y)\cdot\phi(x,y) + \frac{\partial \beta}{\partial x}(x,y)\right) + b(x,y)\left(x\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y)\right) +$$

$$+ a(x,y)\left(y\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) - b(x,y)\phi(x,y) - \beta(x,y)\right).$$

Con lo cual, de las igualdades expresadas en (18), podemos escribir:

$$x\frac{\partial}{\partial x}\left(y\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y)\right) - x\left(\frac{\partial b}{\partial x}(x,y)\phi(x,y) + \frac{\partial \beta}{\partial x}(x,y)\right) - b(x,y)\left(x\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y)\right) =$$

$$= a(x,y)\left(y\frac{\partial \phi}{y}(x,y) - b(x,y)\phi(x,y) - \beta(x,y)\right),$$

y como

$$x\frac{\partial}{\partial x}\left(y\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) - b(x,y)\phi(x,y) - \beta(x,y)\right) =$$

$$= x\frac{\partial}{\partial x}\left(y\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y)\right) - x\left(\frac{\partial b}{\partial x}(x,y)\phi(x,y) + \frac{\partial \beta}{\partial x}(x,y)\right) - b(x,y)\left(x\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y)\right)$$

tenemos que,

$$x \frac{\partial}{\partial x}\left(y \frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) - b(x,y)\phi(x,y) - \beta(x,y)\right) = a(x,y)\left(y \frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) - \right.$$

$$\left. - b(x,y)\phi(x,y) - \beta(x,y)\right) ,$$

es decir, $y \dfrac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) - b(x,y)\phi(x,y) - \beta(x,y)$ es solución formal de $x \dfrac{\partial z}{\partial x} = a(x,y)z$ . Por lo tanto, necesariamente $y \dfrac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) - b(x,y)\phi(x,y) - \beta(x,y) = 0$ , esto es $y \dfrac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) = b(x,y)\phi(x,y) + \beta(x,y)$ , lo cual prueba que $\phi(x,y)$ es solución formal de la ecuación (14") .

Hemos demostrado así, que el sistema (14) admite una única solución formal.

Para completar la demostración, debemos probar que $\phi(x,y)$ converge en $B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,\gamma_2)$ .

Reordenemos $\phi(x,y)$ de la siguiente manera:

$$\phi(x,y) = \sum_{m \geq 0} \phi_m(y)x^m \quad , \text{ donde } \quad \phi_m(y) = \sum_{n \geq 0} \phi_{m,n} y^n ,$$

y escribamos

$$b(x,y) = \sum_{m \geq 0} b_m(y)x^m \quad , \quad \beta(x,y) = \sum_{m \geq 0} \beta_m(y)x^m ,$$

donde $b_m(y)$ y $\beta_m(y)$ son holomorfas en $B_1(0,\gamma_2)$ .

Como $\phi(x,y)$ es solución formal de (14"), se tiene:

$$y \frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y) = \sum_{m\geq 0} y \frac{d\phi_m}{dy}(y)x^m = b(x,y)\phi(x,y) + \beta(x,y) =$$

$$= \sum_{m\geq 0} \left( \sum_{i+j=m} b_i(y)\phi_j(y) + \beta_m(y) \right) x^m ,$$

comparando coeficientes, resulta:

$$y \frac{d\phi_m}{dy}(y) = \sum_{i+j=m} b_i(y)\phi_j(y) + \beta_m(y) \quad , \qquad \forall\, m \geq 0 .$$

Así, para $m = 0$ ,

$$y \frac{d\phi_o}{dy}(y) = b_o(y)\phi_o(y) + \beta_o(y) ,$$

pero entonces, por Teorema 1.1 (Capítulo I), podemos asegurar que $\phi_o(y)$ es holomorfa en $B_1(0,\gamma_2)$ .

Para $m = 1$ ,

$$y \frac{d\phi_1}{dy}(y) = b_o(y)\phi_1(y) + b_1(y)\phi_o(y) + \beta_1(y) ,$$

pero entonces, $\phi_1(y)$ es holomorfa en $B_1(0,\gamma_2)$ .

Continuando de esta manera, queda claro que $\phi_m(y)$ es holomorfa en $B_1(0,\gamma_2)$ , para todo $m \geq 0$ .

Así pues, tenemos una serie formal $\phi(x,y) = \sum_{m+n\geq 0} \phi_{m,n}x^m y^n$ , que al reordenarla en potencias de $x$ del siguiente modo:

$$\phi(x,y) = \sum_{m\geq 0} \phi_m(y)x^m ,$$

resultan coeficientes $\phi_m(y)$ holomorfos en $B_1(0,\gamma_2)$ . Además, como

$\phi(x,y)$ es solución formal del sistema (14) y en particular de la ecuación (14'), el Lema 2.1 nos asegura que $\phi(x,y)$ es holomorfa en $B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,\gamma_2)$.

q.e.d.

4. Un Teorema de existencia local de soluciones para una ecuación con singularidades.

Probaremos un resultado que asegura la existencia de soluciones holomorfas, en una misma vecindad del origen, para una familia de ecuaciones lineales no homogéneas con singularidades.

TEOREMA 4.1. Sea $a(x,y)$ holomorfa en $B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,\gamma_2)$ con valores en $\mathbb{C}$ donde $a(0,0) \notin \mathbb{R}_{\leq 0}$. Entonces, existe $\rho > 0$, $(0 < \rho \leq \gamma_2)$, tal que para cualquier función $\alpha(x,y)$ con valores en $\mathbb{C}$, holomorfa en $B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,r)$, $(0 < r \leq \rho)$ y para cualquier $n \in \mathbb{N}$, la ecuación

$$(19) \qquad x\,\frac{\partial z}{\partial x} = -na(x,y)z + \alpha(x,y)$$

admite una única solución $z_n(x,y)$, holomorfa en $B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,r)$.

Demostración: Sea $n \in \mathbb{N}$ arbitrario.

Si $-na(0,0) \in \mathbb{N}_o$ entonces $a(0,0) \in \mathbb{Q}_{\leq 0}$, lo cual contradice que $a(0,0) \notin \mathbb{R}_{\leq 0}$. Luego, $-na(0,0) \notin \mathbb{N}_o$ y por lo tanto existe una única serie formal $z_n(x,y) = \sum_{i+j\geq 0} z^n_{i,j} x^i y^j$, solución formal de la ecuación (19), (ver el comienzo de la demostración del Teorema 3.1 de este Capítulo), que puede ser reordenada de la siguiente manera:

$$z_n(x,y) = \sum_{i\geq 0} z_i^n(y)x^i \quad , \quad \text{donde} \quad z_i^n(y) = \sum_{j\geq 0} z_{i,j}^n y^j \; .$$

Ahora bien, como $a(0,0) \notin \mathbb{R}_{\leq 0}$ , existe $d > 0$ tal que $B_1(a(0,0),d) \cap \mathbb{R}_{\leq 0} = \phi$ .

De la continuidad de $a(0,y)$ , sabemos que existe $\rho > 0$ tal que

$$y \in B_1(0,\rho) \Rightarrow a(0,y) \in B_1(a(0,0),d) \; ,$$

en cuyo caso,

$$y \in B_1(0,\rho) \Rightarrow -na(0,y) \notin \mathbb{N}_o \; .$$

En efecto, si para algún $\tilde{y} \in B_1(0,\rho)$, $-na(0,\tilde{y}) \in \mathbb{N}_o$ , entonces $a(0,\tilde{y}) \in \mathbb{Q}_{\leq 0}$ , lo cual contradice que para $y \in B_1(0,\rho)$

$$a(0,y) \in B_1(a(0,0),d) \quad \text{y} \quad B_1(a(0,0),d) \cap \mathbb{R}_{\leq 0} = \phi \; .$$

Con esto en cuenta reemplazemos $z_n(x,y) = \sum_{i\geq 0} z_i^n(y)x^i$ en la ecuación (19), donde previamente expresamos $a(x,y)$ y $\alpha(x,y)$ como series en potencias de $x$ con coeficientes que dependen de $y$ , a saber:

$$a(x,y) = \sum_{i\geq 0} a_i(y)x^i \quad \text{y} \quad \alpha(x,y) = \sum_{i\geq 0} \alpha_i(y)x^i \; ,$$

siendo $a_i(y)$ y $\alpha_i(y)$ holomorfos en $B_1(0,r)$ . Se obtiene:

$$x\frac{\partial z_n}{\partial x}(x,y) = \sum_{i\geq 0} iz_i^n(y)x^i = \sum_{i\geq 0}\left(\alpha_i(y) - n\sum_{k+\ell=i} a_k(y)z_\ell^n(y)\right)x^i$$

y al comparar coeficientes, resulta:

$$(20) \qquad iz_i^n(y) = \alpha_i(y) - n\sum_{k+\ell=i} a_k(y)z_\ell^n(y) \qquad \forall\, i \geq 0 \; .$$

Para $i = 0$ en (20), $\alpha_o(y) - na(y)z_o^n(y) = 0$ o bien,

$$z_o^n(y) = \frac{\alpha_o(y)}{na_o(y)} ,$$

puesto que $a_o(y) = a(0,y)$ y para $y \in B_1(0,\rho)$ , en particular para $y \in B_1(0,r)$ , $-na_o(y) \notin \mathbb{N}_o$ y por lo tanto $na_o(y) \neq 0$ . Luego, $z_o^n(y)$ es holomorfa en $B_1(0,r)$ .

Para $i = 1$ ,

$$z_1^n(y) = \alpha_1(y) - na_o(y)z_1^n(y) - na_1(y)z_o^n(y)$$

o bien, $$z_1^n(y)(1 + na_o(y)) = \alpha_1(y) - na_1(y)z_o^n(y)$$

y como $-na_o(y) \notin \mathbb{N}_o$ para $y \in B_1(0,r)$ , tenemos:

$$z_1^n(y) = \frac{\alpha_1(y) - na_1(y)z_o^n(y)}{1 + na_o(y)}$$

o sea $z_1^n(y)$ es holomorfa en $B_1(0,r)$ .

En general, si hemos calculado las funciones $z_o^n(y)$, $z_1^n(y)$, ..., $z_{i-1}^n(y)$ , holomorfas en $B_1(0,r)$ , la relación (20) nos dice que

$$z_i^n(y) = \frac{\alpha_i(y) - n \cdot \sum\limits_{k+\ell=i,k\neq 0} a_k(y)z_\ell^n(y)}{i + na_o(y)} ,$$

es decir, $z_i^n(y)$ es holomorfa en $B_1(0,r)$ , para todo $i \geq 0$ .

Aplicando el Lema 2.1 (Capítulo II), podemos asegurar que $z_n(x,y)$ es holomorfa en $B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,r)$ .

q.e.d.

# C A P I T U L O III

## CONSTRUCCION DE UNA FAMILIA NUMERABLE DE SISTEMAS DE PFAFF COMPLETAMENTE INTEGRABLES

A través de este Capítulo, construiremos recursivamente una familia numerable de sistemas de Pfaff lineales no homogéneos y probaremos inductivamente que cada uno de estos sistemas es completamente integrable.

Las soluciones $\phi_n(x,y)$ de esta familia de sistemas están definidos sobre una misma vecindad del origen de $\mathbb{C}^2$ y con ellas definiremos una serie formal $z + \sum_n \phi_n(x,y)z^n$ , la cual nos permitirá pasar de un sistema de la forma

$$(*)\quad \begin{cases} x^p \dfrac{\partial u}{\partial x} = f(x,y,u) \\ \\ y^q \dfrac{\partial u}{\partial y} = g(x,y,u) \end{cases} ,$$

a un sistema lineal del tipo

$$x^p \frac{\partial z}{\partial x} = a(x,y)z$$

$$y^q \frac{\partial z}{\partial y} = b(x,y)z \ ,$$

para ciertos enteros no negativos $p$ y $q$ .

En este Capítulo, explicaremos cómo se construye esta familia de sistemas de Pfaff en los casos $p = q = 1$ ; $p = 1$ , $q \geq 2$ y $p = 1$ , $q = 0$ y en el siguiente se verá cómo aparece en forma natural cuando linealizamos (*) . Más adelante nos referiremos a los casos $p \geq 2$ , $q \geq 2$ y $p \geq 2$ , $q = 0$ .

1. Construcción de la familia de sistemas en el caso $p = q = 1$ .

Primer sistema de la familia.

Sean $f(x,y,u)$ y $g(x,y,u)$ funciones holomorfas en el conjunto $B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,\gamma_2) \times B_1(0,\varepsilon)$ con valores en $\mathbb{C}$ y tales que $f(x,y,0) = g(x,y,0) = 0$ .

Sean $\sum\limits_{n\geq 1} a_n(x,y)u^n$ y $\sum\limits_{n\geq 1} b_n(x,y)u^n$ los desarrollos en potencias de $u$ para $f(x,y,u)$ y $g(x,y,u)$ respectivamente.

Recordemos (Corolario 2.3, Capítulo II) que los coeficientes $a_n(x,y)$ y $b_n(x,y)$ son holomorfos en $B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,\gamma_2)$ , para todo $n \geq 1$ .

Supongamos además que $a_1(0,0) \notin \mathbb{Q}_{\leq 0}$ o $b_1(0,0) \notin \mathbb{Q}_{\leq 0}$ y que el sistema (*) , para $p = q = 1$ , es decir

$$x\,\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,y,u)$$

$$y\,\frac{\partial u}{\partial y} = g(x,y,u)\ ,$$

es completamente integrable.

De esta última hipótesis podemos asegurar que se cumple la relación (2) del Capítulo II, la cual usaremos para demostrar la completa integrabilidad de los sistemas a construir.

El primer sistema de la familia será:

$$(*)_2\ \begin{cases} x\,\dfrac{\partial z}{\partial x} = -a_1(x,y)z + a_2(x,y) \\ \\ y\,\dfrac{\partial z}{\partial x} = -b_1(x,y)z + b_2(x,y) \end{cases}$$

Afirmamos que $(*)_2$ es completamente integrable. Para esto debemos probar que se cumple la condición (C.I.), (Capítulo II), para este sistema, es decir

$$y\,\frac{\partial}{\partial y}\left(-a_1(x,y)z + a_2(x,y)\right) + \left(\frac{\partial}{\partial z}\left(-a_1(x,y)z + a_2(x,y)\right)\right)\left(-b_1(x,y)z + b_2(x,y)\right) =$$

$$= x\frac{\partial}{\partial x}\left(-b_1(x,y)z + b_2(x,y)\right) + \left(\frac{\partial}{\partial z}\left(-b_1(x,y)z + b_2(x,y)\right)\right)\left(-a_1(x,y)z + a_2(x,y)\right)\ .$$

Desarrollando los paréntesis y cancelando téminos semejantes, tenemos:

$$(21)\qquad -y\,\frac{\partial a_1}{\partial y}\,(x,y)\cdot z + y\,\frac{\partial a_2}{\partial y}\,(x,y) - a_1(x,y)b_2(x,y) = -x\,\frac{\partial b_1}{\partial x}\,(x,y)\cdot z +$$

$$+ x\,\frac{\partial b_2}{\partial x}\,(x,y) + -b_1(x,y)a_2(x,y)\ .$$

La relación (2), (Capítulo II), para $n = 1$, nos dice que

$$y \frac{\partial a_1}{\partial y}(x,y) + a_1(x,y)b_1(x,y) = x \frac{\partial b_1}{\partial x}(x,y) + b_1(x,y)a_1(x,y) ,$$

con lo cual se obtiene:

$$(22) \qquad y \frac{\partial a_1}{\partial y}(x,y) = x \frac{\partial b_1}{\partial x}(x,y)$$

y por lo tanto la relación (21) equivale a

$$y \frac{\partial a_2}{\partial y}(x,y) - a_1(x,y)b_2(x,y) = x \frac{\partial b_2}{\partial x}(x,y) - b_1(x,y)a_2(x,y) .$$

Sumando a ambos lados $2a_2(x,y)b_1(x,y) + 2a_1(x,y)b_2(x,y)$, tenemos:

$$y \frac{\partial a_2}{\partial y}(x,y) + a_1(x,y)b_2(x,y) + 2a_2(x,y)b_1(x,y) =$$

$$= x \frac{\partial b_2}{\partial x}(x,y) + b_1(x,y)a_2(x,y) + 2b_2(x,y)a_1(x,y) ,$$

que es justamente la relación (2) para $n = 2$.

Esto termina de probar la completa integrabilidad del sistema $(*)_2$. Ahora bien, como $a_1(0,0) \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$ ó $b_1(0,0) \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$, entonces $-a_1(0,0) \notin \mathbb{N}_0$ ó $-b_1(0,0) \notin \mathbb{N}_0$, en cuyo caso, el teorema 3.1 del Capítulo II nos asegura que existe solución $\phi_2(x,y)$ para el sistema $(*)_2$, (de hecho única), holomorfa en todo el conjunto $B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,\gamma_2)$.

OBSERVACION. La necesidad de la hipótesis $a_1(0,0) \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$ o $b_1(0,0) \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$, se apreciará en la construcción de los demás sistemas.

Construcción de los otros sistemas de la familia.

Consideremos las siguientes expresiones formales:

$$(23) \qquad h_n(x,y) = \sum_{k=2}^{n} a_k(x,y)\cdot\left(\sum_{j_1+\dots+j_k=n} P_{j_1}\cdot\ldots\cdot P_{j_n}\right) \qquad y$$

$$(24) \qquad k_n(x,y) = \sum_{k=2}^{n} b_k(x,y)\cdot\left(\sum_{j_1+\dots+j_k=n} P_{j_1}\cdot\ldots\cdot P_{j_k}\right)$$

donde en $h_n(x,y)$ y $k_n(x,y)$ tenemos:

(i) $n \geq 2$

(ii) Los subíndices son enteros positivos

(iii) $a_k(x,y)$ y $b_k(x,y)$ son los coeficientes de $u^k$ en los desarrollos en potencias de $u$ de $f(x,y,u)$ y $g(x,y,u)$ respectivamente.

(iv) $P_{j_1}\cdot\ldots\cdot P_{j_k}$ representa un producto de $k$ factores, donde $P_{j_1}, \ldots, P_{j_k}$ son funciones por determinar.

(v) Definimos $P_1 = 1 \in \mathbb{N}$ .

OBSERVACION. Tomando $n = 2$ en (23) y (24) y teniendo en cuenta (v) es claro que $h_2(x,y) = a_2(x,y)$ y $k_2(x,y) = b_2(x,y)$ .

Tomemos ahora $n = 3$ en (23) y (24) y hagamos $P_2 = \phi_2(x,y)$ , obtenemos: $h_3(x,y) = a_2(x,y)\left(2\phi_2(x,y)\right) + a_3(x,y)$ , $k_3(x,y) = b_2(x,y)\left(2\phi_2(x,y)\right) + b_3(x,y)$ . Puesto que $a_k(x,y)$ , $b_k(x,y)$ y $\phi_2(x,y)$ son holomorfas en $B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,\gamma_2)$ cualquiera sea $k \geq 1$ , $h_3(x,y)$ y $k_3(x,y)$ son holomorfas en $B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,\gamma_2)$ .

Así pues, consideremos el siguiente sistema:

$$(*)_3 \quad \begin{cases} x\,\dfrac{\partial z}{\partial x} = -2a_1(x,y)z + h_3(x,y) \\ \\ y\,\dfrac{\partial z}{\partial y} = -2b_1(x,y)z + k_3(x,y) \; . \end{cases}$$

Si $(*)_3$ es completamente integrable y tenemos en cuenta que: $a_1(0,0) \notin \mathbb{Q}_{\leq 0}$ ó $b_1(0,0) \notin \mathbb{Q}_{\leq 0} \Rightarrow -2a_1(0,0) \notin \mathbb{N}_0$ ó $-2b_1(0,0) \notin \mathbb{N}_0$, usando el Teorema 3.1 (Capítulo II), podemos asegurar que existe una solución $\phi_3(x,y)$ de $(*)_3$, (de hecho única) holomorfa en $B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,\gamma_2)$.

Tomemos ahora $n = 4$ en (23) y (24) y hagamos $P_2 = \phi_2(x,y)$, $P_3 = \phi_3(x,y)$ para obtener:

$$h_4(x,y) = a_2(x,y)\left(2\phi_3(x,y) + \phi_2^2(x,y)\right) + a_3(x,y)\left(3\phi_2(x,y)\right) + a_4(x,y)$$

$$k_4(x,y) = b_2(x,y)\left(2\phi_3(x,y) + \phi_2^2(x,y)\right) + b_3(x,y)\left(3\phi_2(x,y)\right) + b_4(x,y) \; .$$

Es inmediato que $h_4(x,y)$ y $k_4(x,y)$ son holomorfas en $B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,\gamma_2)$.

Como antes, si el sistema

$$(*)_4 \quad \begin{cases} x\,\dfrac{\partial z}{\partial x} = -3a_1(x,y)z + h_4(x,y) \\ \\ y\,\dfrac{\partial z}{\partial y} = -3b_1(x,y)z + k_4(x,y) \end{cases}$$

es completamente integrable, y teniendo en cuenta que $-3a_1(0,0) \notin \mathbb{N}_0$ ó $-3b_1(0,0) \notin \mathbb{N}_0$, podemos proseguir de la misma manera.

Notemos que, la completa integrabilidad de $(*)_2$ nos permite asegurar la existencia de la solución $\phi_2(x,y)$ para dicho sistema, holomorfa en $B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,\gamma_2)$ . Así, de acuerdo a nuestro procedimiento, que nos hace definir $h_3(x,y)$ y $k_3(x,y)$ en función de $\phi_2(x,y)$ , construímos $(*)_3$ .

Si $(*)_3$ no fuese completamente integrable, no podemos usar el Teorema 3.1 para garantizar la existencia de la solución $\phi_3(x,y)$ , y según nuestro procedimiento, que nos hace definir $h_4(x,y)$ y $k_4(x,y)$ en función de $\phi_2(x,y)$ y $\phi_3(x,y)$ , no podríamos construir $(*)_4$ . Si $(*)_3$ es completamente integrable, entonces construímos $(*)_4$ .

Una vez más, si $(*)_4$ no es completamente integrable, el proceso se detendría y en caso de serlo, podemos continuar.

Así pues, para demostrar que este proceso nos permite construir el sistema $(*)_n$ para todo $n \geq 2$ , debemos probar la siguiente proposición:

PROPOSICION 2.1. Si de acuerdo al procedimiento recursivo señalado anteriormente, hemos construído $\phi_2(x,y), \ldots, \phi_{n-1}(x,y)$ , entonces el sistema

$$(*)_n \quad \begin{cases} x\,\dfrac{\partial z}{\partial x} = (1-n)a_1(x,y)z + h_n(x,y) \\ \\ y\,\dfrac{\partial z}{\partial y} = (1-n)b_1(x,y)z + k_n(x,y) \end{cases}$$

es completamente integrable.

<u>Demostración</u>: Debemos probar lo siguiente:

$$(25) \qquad y \frac{\partial}{\partial y}\Big[(1-n)a_1(x,y)z + h_n(x,y)\Big] + \frac{\partial}{\partial z}\Big[(1-n)a_1(x,y)z + h_n(x,y)\Big] \cdot$$

$$\cdot \Big[(1-n)b_1(x,y)z + k_n(x,y)\Big] = x \frac{\partial}{\partial x}\Big[(1-n)b_1(x,y)z + k_n(x,y)\Big] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\Big[(1-n)b_1(x,y)z + k_n(x,y)\Big]\Big[(1-n)a_1(x,y)z + h_n(x,y)\Big] .$$

Desarrollando, cancelando y reordenando en potencias de $z$, se obtiene:

$$(26) \qquad \left[y \frac{\partial h_n}{\partial y}(x,y) + (1-n)a_1(x,y)k_n(x,y)\right] + \left[(1-n)\ y \frac{\partial a_1}{\partial y}(x,y)\right]z =$$

$$= \left[x \frac{\partial k_n}{\partial x}(x,y) + (1-n)b_1(x,y)h_n(x,y)\right] + \left[(1-n)\ x \frac{\partial b_1}{\partial x}(x,y)\right]z .$$

Ahora bien, la completa integrabilidad del sistema (*) nos llevó a establecer la relación (2), (ver Capítulo II), de la cual dedujimos la igualdad (22), es decir:

$$y \frac{\partial a_1}{\partial y}(x,y) = x \frac{\partial b_1}{\partial x}(x,y) .$$

Por lo tanto, para demostrar la igualdad (25), o lo que es equivalente, (26), debemos probar que:

$$(27) \qquad y \frac{\partial h_n}{\partial y}(x,y) + (1-n)a_1(x,y)k_n(x,y) =$$

$$= x \frac{\partial k_n}{\partial x}(x,y) + (1-n)b_1(x,y)h_n(x,y) .$$

Para esto, desarrollaremos la igualdad (27), de manera que el primer miembro quede sólo en función de $a_k(x,y)$, $b_k(x,y)$, $\frac{\partial a_k}{\partial y}(x,y)$,

$\phi_2(x,y), \ldots, \phi_{n-1}(x,y)$ y el segundo sólo en función de $a_k(x,y)$, $b_k(x,y)$, $\frac{\partial b_k}{\partial x}(x,y)$, $\phi_2(x,y), \ldots, \phi_{n-1}(x,y)$. Una vez hecho esto, consideramos a las expresiones obtenidas como polinomios en $\phi_2(x,y), \ldots, \phi_{n-1}(x,y)$ y probamos que los coeficientes respectivos son iguales.

Desarrollemos el miembro de la izquierda en la igualdad (27). (En lo que resta del Capítulo, para facilitar la escritura, omitiremos casi siempre las variables $x,y$).

Por construcción, sabemos que:

$$h_n = \sum_{k=2}^{n} a_k \left( \sum_{i_1+\ldots+i_k=n} \phi_{i_1} \cdot \ldots \cdot \phi_{i_k} \right), \quad \text{donde definimos } \phi_1 = 1 .$$

Derivando con respecto a $y$, enseguida multiplicando por $y$, se obtiene:

$$y \frac{\partial h_n}{\partial y} = \sum_{k=2}^{n} \left[ y \frac{\partial a_k}{\partial y} \left( \sum_{i_1+\ldots+i_k=n} \phi_{i_1} \cdot \ldots \cdot \phi_{i_k} \right) + \right.$$

$$\left. + a_k \cdot y \frac{\partial}{\partial y} \left( \sum_{i_1+\ldots+i_k=n} \phi_{i_1} \cdot \ldots \cdot \phi_{i_k} \right) \right] =$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \left[ y \frac{\partial a_k}{\partial y} \left( \sum_{i_1+\ldots+i_k=n} \phi_{i_1} \cdot \ldots \cdot \phi_{i_k} \right) + \right.$$

$$\left. + a_k \left( \sum_{i_1+\ldots+i_k=n} y \frac{\partial}{\partial y} \left( \phi_{i_1} \cdot \ldots \cdot \phi_{i_k} \right) \right) \right] .$$

Reemplazando $\frac{\partial}{\partial y} \left( \phi_{i_1} \cdot \ldots \cdot \phi_{i_k} \right)$ por $\sum_{s=1}^{k} \phi_{i_1} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial \phi_{i_s}}{\partial y} \cdot \ldots \cdot \phi_{i_k}$ en la suma anterior, resulta:

$$y \frac{\partial h_n}{\partial y} = \sum_{k=2}^{n} \left[ y \frac{\partial a_k}{\partial y} \left( \sum_{i_1+\ldots+i_k=n} \phi_{i_1} \cdot \ldots \cdot \phi_{i_k} \right) + \right.$$

$$\left. + a_k \left( \sum_{i_1+\ldots+i_k=n} \left( \sum_{s=1}^{k} \phi_{i_1} \cdot \ldots \cdot \left( y \frac{\partial \phi_{i_s}}{\partial y} \right) \cdot \ldots \cdot \phi_{i_k} \right) \right) \right] .$$

Notemos que, estamos suponiendo que de acuerdo a nuestro procedimiento recursivo, hemos construído $\phi_2(x,y), \ldots, \phi_{n-1}(x,y)$, los cuales son soluciones de los sistemas $(*)_2, \ldots, (*)_{n-1}$, respectivamente.

Además, como los índices son enteros positivos, las condiciones $2 \leq k \leq n$ e $i_1 + \ldots + i_k = n$ obligan a que $1 \leq i_k \leq n - 1$, $\forall\, k = 2, \ldots, n$ .

Así pues, podemos afirmar que $\phi_{i_s}(x,y)$ es solución de $(*)_{i_s}$, es decir,

$$(*)_{i_s} \quad \begin{cases} x \dfrac{\partial \phi_{i_s}}{\partial x}(x,y) = (1 - i_s) a_1(x,y) \phi_{i_s}(x,y) + h_{i_s}(x,y) \\[2ex] y \dfrac{\partial \phi_{i_s}}{\partial y}(x,y) = (1 - i_s) b_1(x,y) \phi_{i_s}(x,y) + k_{i_s}(x,y) , \end{cases}$$

lo cual aún es válido en el caso $i_s = 1$, si definimos

$$(28) \qquad h_1(x,y) = k_1(x,y) = 0 .$$

Reemplazando $y \dfrac{\partial \phi_{i_s}}{\partial y}$ por $(1 - i_s) b_1 \phi_{i_s} + k_{i_s}$ en la expresión obtenida para $y \dfrac{\partial h_n}{\partial y}$, se tiene:

$$y\,\frac{\partial h_n}{\partial y} = \sum_{k=2}^{n} \left[ y\,\frac{\partial a_k}{\partial y} \left( \sum_{i_1+\ldots+i_k=n} \phi_{i_1}\bullet\ldots\bullet\phi_{i_k} \right) + \right.$$

$$\left. + a_k \left( \sum_{i_1+\ldots+i_k=n} \left( \sum_{s=1}^{k} \phi_{i_1}\bullet\ldots\bullet\left( (1-i_s)b_1\phi_{i_s} + k_{i_s} \right)\bullet\ldots\bullet\phi_{i_k} \right) \right) \right] =$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \left( y\,\frac{\partial a_k}{\partial y} \left( \sum_{i_1+\ldots+i_k=n} \phi_{i_1}\bullet\ldots\bullet\phi_{i_k} \right) + \right.$$

$$+ a_k \left( \sum_{i_1+\ldots+i_k=n} \left( \sum_{s=1}^{k} (1-i_s)b_1\phi_{i_1}\bullet\ldots\bullet\phi_{i_k} + \right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \sum_{s=1}^{k} \phi_{i_1}\bullet\ldots\bullet k_{i_s}\bullet\ldots\bullet\phi_{i_k} \right) \right) \right] .$$

Por otra parte, $k_n = \sum_{k=2}^{n} b_k \left( \sum_{i_1+\ldots+i_k=n} \phi_{i_1}\bullet\ldots\bullet\phi_{i_k} \right)$, de manera que

$$(1-n)a_1 k_n = \sum_{k=2}^{n} (1-n)a_1 b_k \left( \sum_{i_1+\ldots+i_k=n} \phi_{i_1}\bullet\ldots\bullet\phi_{i_k} \right) ,$$

por lo tanto:

$$(29)\qquad y\,\frac{\partial h_n}{\partial y} + (1-n)a_1 k_n = \sum_{k=2}^{n} \left[ y\,\frac{\partial a_k}{\partial y} \left( \sum_{i_1+\ldots+i_k=n} \phi_{i_1}\bullet\ldots\bullet\phi_{i_k} \right) + \right.$$

$$+ a_k \left( \sum_{i_1+\ldots+i_k=n} \left( \sum_{s=1}^{k} (1-i_s)b_1\phi_{i_1}\bullet\ldots\bullet\phi_{i_k} + \right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \sum_{s=1}^{k} \phi_{i_1}\bullet\ldots\bullet k_{i_s}\bullet\ldots\bullet\phi_{i_k} \right) \right) + (1-n)a_1 b_k \left( \sum_{i_1+\ldots+i_k=n} \phi_{i_1}\bullet\ldots\bullet\phi_{i_k} \right) \right] .$$

Ahora bien, como la expresión $y \dfrac{\partial h_n}{\partial y} + (1-n)a_1 k_n$ es simétrica a $x \dfrac{\partial k_n}{\partial x} + (1-n)b_1 h_n$ , se obtiene:

$$(30) \qquad x \frac{\partial k_n}{\partial x} + (1-n)b_1 h_n = \sum_{k=2}^{n} \left[ x \frac{\partial b_k}{\partial x} \left( \sum_{i_1+\ldots+i_k=n} \phi_{i_1} \cdot \ldots \cdot \phi_{i_k} \right) + \right.$$

$$+ b_k \left( \sum_{i_1+\ldots+i_k=n} \left( \sum_{s=1}^{k} (1-i_s) a_1 \phi_{i_1} \cdot \ldots \cdot \phi_{i_k} + \right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \sum_{s=1}^{k} \phi_{i_1} \cdot \ldots \, h_{i_s} \cdot \ldots \cdot \phi_{i_k} \right) \right) + (1-n) b_1 a_k \left( \sum_{i_1+\ldots+i_k=n} \phi_{i_1} \cdot \ldots \cdot \phi_{i_k} \right) \right] .$$

Por construcción, $k_{i_s} = \sum_{\ell=2}^{i_s} b_\ell \left( \sum_{j_1+\ldots+j_\ell=i_s} \phi_{j_1} \cdot \ldots \cdot \phi_{j_\ell} \right)$ si $i_s \geq 2$ , y por (28), $h_{i_s} = k_{i_s} = 0$ si $i_s = 1$ . Entonces, si reemplazamos $k_{i_s}$ por $\sum_{\ell=2}^{i_s} b_\ell \left( \sum_{j_1+\ldots+j_\ell=i_s} \phi_{j_1} \cdot \ldots \cdot \phi_{j_\ell} \right)$ o bien por 0 (según sea el valor de $i_s$) , en el segundo miembro de la igualdad (29), y tenemos en cuenta que $\phi_1 = 1$ , lo que resulta es una sumatoria donde los sumandos son productos que dependen de $a_k$ , $b_k$ , $\dfrac{\partial a_k}{\partial y}$ para $2 \leq k \leq n$ y de $\phi_2, \ldots, \phi_{n-1}$ .

Si en esta suma resultante consideramos, por un momento, a las funciones denotadas por $\phi_2, \ldots, \phi_{n-1}$ ya no como funciones, sino como $n-2$ indeterminadas de un polinomio y pensamos que se trata de un polinomio en esas $n-2$ indeterminadas, entonces es claro que en (29), el miembro de la derecha puede ser escrito del siguiente modo:

(29') $\quad [\text{Término libre de } \phi_2, \ldots, \phi_{n-1}] +$

$$+ \Sigma \left[\text{Coeficiente que depende de } a_k \,,\, b_k \,,\, \frac{\partial a_k}{\partial y}\right] \phi_{r_1}^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \phi_{r_m}^{\alpha_m} \,,$$

donde $r_1 \geq 2, \ldots, r_m \geq 2$ , $r_1, \ldots, r_m$ distintos entre sí,
$\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{N}$ y $\alpha_1 r_1 + \ldots + \alpha_m r_m \leq n$ .

Análogamente, reemplazando $h_{i_s}$ por
$\sum_{\ell=2}^{i_s} a_\ell \left( \sum_{j_1+\ldots+j_\ell=i_s} \phi_{j_1} \cdot \ldots \cdot \phi_{j_\ell} \right)$ o bien por 0 (según sea el valor de $i_s$) ,
en el segundo miembro de la igualdad (30), y teniendo en cuenta que $\phi_1 = 1$ , resulta una sumatoria donde los sumandos son productos que dependen de $a_k$ , $b_k$ , $\frac{\partial b_k}{\partial x}$ para $2 \leq k \leq n$ y de $\phi_2, \ldots, \phi_{n-1}$ . Considerando a $\phi_2, \ldots, \phi_{n-1}$ como indeterminadas, escribamos esta suma resultante de la siguiente manera:

(30') $\quad [\text{Término libre de } \phi_2, \ldots, \phi_{n-1}] +$

$$+ \Sigma \left[\text{Coeficiente que depende de } a_k \,,\, b_k \,,\, \frac{\partial b_k}{\partial x}\right] \phi_{r_1}^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \phi_{r_m}^{\alpha_m} \,,$$

donde $r_1 \geq 2, \ldots, r_m \geq 2$ , $r_1, \ldots, r_m$ distintos entre sí,
$\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{N}$ y $\alpha_1 r_1 + \ldots + \alpha_m r_m \leq n$ .

Así pués, para demostrar la igualdad (27), o lo que es equivalente, que la sumatoria (29') es igual a la sumatoria (30'), basta probar que el término libre de $\phi_2, \ldots, \phi_{n-1}$ en (29') es igual al término libre de $\phi_2, \ldots, \phi_{n-1}$ en (30') y que el coeficiente que multiplica a $\phi_{r_1}^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \phi_{r_m}^{\alpha_m}$ en (29') es igual al coeficiente que multiplica a

$\phi_{r_1}^{\alpha_1} \bullet \ldots \bullet \phi_{r_m}^{\alpha_m}$ en (30').

1°) Veamos que los términos libres de $\phi_2, \ldots, \phi_{n-1}$ son iguales.

Para esto, consideremos el segundo miembro de la igualdad (29), que es una suma de $n - 1$ sumandos, donde el sumando general es:

$$(\sigma) \qquad y\,\frac{\partial a_k}{\partial y}\left(\sum_{i_1+\ldots+i_k=n} \phi_{i_1} \bullet \ldots \bullet \phi_{i_k}\right) +$$

$$+\, a_k\left(\sum_{i_1+\ldots+i_k=n}\left(\sum_{s=1}^{k} (1 - i_s) b_1 \phi_{i_1} \bullet \ldots \bullet \phi_{i_k} + \sum_{s=1}^{k} \phi_{i_1} \bullet \ldots \bullet k_{i_s} \bullet \ldots \bullet \phi_{i_k}\right)\right) +$$

$$+\, (1 - n) a_1 b_k\left(\sum_{i_1+\ldots+i_k=n} \phi_{i_1} \bullet \ldots \bullet \phi_{i_k}\right) ,$$

y $k$ varía de 2 hasta $n$ .

Reemplazando $k_{i_s}$ por $\displaystyle\sum_{\ell=2}^{i_s} b_\ell\left(\sum_{j_1+\ldots+j_\ell=i_s} \phi_{j_1} \bullet \ldots \bullet \phi_{j_\ell}\right)$ o por 0 (según sea el valor de $i_s$) , en el segundo miembro de (29), podemos encontrar el término libre de $\phi_2, \ldots, \phi_{n-1}$ en cada uno de los sumandos $(\sigma)$ , es decir, para $k = 2, \ldots, n$ , y luego los sumamos para obtener el término buscado.

Cuando $k = n$ en $(\sigma)$ , tendremos que $i_1 + \ldots + i_k = n$ sí y sólo si $i_1 = \ldots = i_n = 1$ . Por lo tanto

$$\sum_{i_1+\ldots+i_k=n} \phi_{i_1} \bullet \ldots \bullet \phi_{i_n} = 1 \quad , \quad \text{pues } \phi_1 = 1 ,$$

$$\sum_{s=1}^{n} (1 - i_s) b_1 \phi_{i_1} \cdot \ldots \cdot \phi_{i_n} = 0 \text{ , ya que } i_s = 1 \text{ para } s = 1, \ldots, n$$

y $$\sum_{s=1}^{n} \phi_{i_1} \cdot \ldots \cdot k_{i_s} \cdot \ldots \cdot \phi_{i_n} = k_{i_1} \cdot \ldots \cdot \phi_{i_n} + \ldots + \phi_{i_1} \cdot \ldots \cdot k_{i_n} = 0 \text{ ,}$$

pues $k_1 = 0$ .

Luego, el término libre de $\phi_2, \ldots, \phi_{n-1}$ que se obtiene de $(\sigma)$ para $k = n$ , es:

$$y \frac{\partial a_n}{\partial y} + (1 - n) a_1 b_n \ .$$

Cuando $k = 2, \ldots, n - 1$ en $(\sigma)$ , es claro que

$\sum_{i_1+\ldots+i_k=n} \phi_{i_1} \cdot \ldots \cdot \phi_{i_n}$ depende de $\phi_2, \ldots, \phi_{n-1}$ , como también depende

$\sum_{s=1}^{k} (1 - i_s) \phi_{i_1} \cdot \ldots \cdot \phi_{i_k}$ , puesto que en el producto $\phi_{i_1} \cdot \ldots \cdot \phi_{i_k}$ de k-factores, donde $2 \leq k \leq n - 1$ , está la condición $i_1 + \ldots + i_k = n$ , lo cual obliga a que al menos uno de entre los $i_1, \ldots, i_k$ sea mayor o igual que dos.

Para la suma $\sum_{s=1}^{k} \phi_{i_1} \cdot \ldots \cdot k_{i_s} \cdot \ldots \cdot \phi_{i_k}$ , obtenemos términos libres de $\phi_2, \ldots, \phi_{n-1}$ , cuando de entre las k-tuplas $(i_1, \ldots, i_k)$ que satisfacen $i_1 + \ldots + i_k = n$ , sólo consideramos aquellas en que $i_1 = 1, \ldots, i_{s_o} = n - k + 1, \ldots, i_k = 1$ , donde $1 \leq s_o \leq k$ . En este caso

$$\sum_{s=1}^{k} \phi_{i_1} \cdot \ldots \cdot k_{i_s} \cdot \ldots \cdot \phi_{i_k} = k_{i_1} \cdot \ldots \cdot \phi_{i_k} + \ldots + \phi_{i_1} \cdot \ldots \cdot k_{i_{s_o}} \cdot \ldots \cdot \phi_{i_k} +$$

$$+ \ldots + \phi_{i_1} \cdot \ldots \; k_{i_1} = k_{i_{s_o}} \;,$$

ya que $i_s = 1$ para $s \neq s_o$ y entonces, $\phi_1 = 1$ y por (28), $k_1 = 0$ .

Como $i_{s_o} = n - k + 1 \geq 2$ , se tiene:

$$k_{i_{s_o}} = \sum_{\ell=2}^{i_{s_o}} b_\ell \left( \sum_{j_1+\ldots+j_\ell = i_{s_o}} \phi_{j_1} \cdot \ldots \cdot \phi_{j_\ell} \right) ,$$

siendo $b_{i_{s_o}}$ , con $i_{s_o} = n - k + 1$ el término que no depende de $\phi_2, \ldots, \phi_{n-1}$ .

Además, es claro que entre las k-tuplas que satisfacen $i_1 + \ldots + i_k = n$ , hay exactamente $k$ donde el 1 aparece $k - 1$ veces y $n - k + 1$ aparece una vez. Teniendo esto en cuenta, el término libre de $\phi_2, \ldots, \phi_{n-1}$ que podemos sacar de $(\sigma)$ para $k \in \{2, \ldots, n - 1\}$ , una vez que reemplazamos $k_{i_s}$ , será:

$$a_k \, k b_{n-k+1} = k a_k b_{n-k+1} \,.$$

Luego, al considerar la sumatoria (29'), el coeficiente libre de $\phi_2, \ldots, \phi_{n-1}$ que se obtiene, es:

$$y \frac{\partial a_n}{\partial y} + (1 - n) a_1 b_n + \sum_{k=2}^{n-1} k a_k b_{n-k+1} \,.$$

Para determinar el coeficiente libre de $\phi_2, \ldots, \phi_{n-1}$ en la suma (30'), la situación es totalmente simétrica a la anterior y sólo debemos cambiar y por x , $a_k$ por $b_k$ y $b_k$ por $a_k$ . De este modo, el término buscado será:

$$x \frac{\partial b_n}{\partial x} + (1 - n) b_1 a_n + \sum_{k=2}^{n-1} k b_k a_{n-k+1} \ .$$

Ahora debemos probar que:

$$y \frac{\partial a_n}{\partial y} + (1 - n) a_1 b_n + \sum_{k=2}^{n-1} k a_k b_{n-k+1} = x \frac{\partial b_n}{\partial x} + (1 - n) b_1 a_n + $$

$$+ \sum_{k=2}^{n-1} k b_k a_{n-k+1} \ .$$

Sumando $na_n b_1 + nb_n a_1$ a ambos lados, obtenemos:

$$y \frac{\partial a_n}{\partial y} + \sum_{k=1}^{n} k a_k b_{n-k+1} = x \frac{\partial b_n}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} k b_k a_{n-k+1} \ ,$$

que es justamente la relación (2).

Esto termina de probar que los coeficientes libres de $\phi_2, \ldots, \phi_{n-1}$ en (29') y (30'), son iguales.

2°) Probaremos que: Dados $r_1, \ldots, r_m \in \mathbb{N}$ , donde $r_1 \geq 2, \ldots, r_m \geq 2$ , $r_1, \ldots, r_m$ distintos entre sí y dados $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{N}$ tales que: $\alpha_1 r_1 + \ldots + \alpha_m r_m \leq n$ , entonces, el coeficiente que multiplica a $\phi_{r_1}^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \phi_{r_m}^{\alpha_m}$ en (29'), es igual al coeficiente que multiplica a $\phi_{r_1}^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \phi_{r_m}^{\alpha_m}$ en (30').

Para esto, cuando reemplazamos $k_{i_s}$ por

$$\sum_{\ell=2}^{i_s} b_\ell \left( \sum_{j_1+\ldots+j_\ell=i_s} \phi_{j_1}\cdot\ldots\cdot\phi_{j_\ell} \right)$$

o por 0 (según el valor de $i_s$) , en el segundo miembro de (29), buscamos el coeficiente que multiplica a $\phi_{r_1}^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\phi_{r_m}^{\alpha_m}$ en cada uno de los sumandos $(\sigma)$ y luego los sumamos para encontrar el término buscado.

Con el fin de facilitar el cálculo de los coeficientes, enunciemos de manera precisa los siguientes hechos:

<u>Afirmación 1</u>. Sea $(i_1, \ldots, i_k)$ una k-tupla tal que, $2 \leq k \leq n$ , $i_1, \ldots, i_k \in \mathbb{N}$ y $i_1 + \ldots + i_k = n$ .

Supongamos que $\phi_{i_1}\cdot\ldots\cdot\phi_{i_k} = \phi_{r_1}^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\phi_{r_m}^{\alpha_m}$ , donde $r_1, \ldots, r_m \in \mathbb{N}$ son distintos entre sí, $r_1 \geq 2, \ldots, r_m \geq 2$ , $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{N}$ y $\alpha_1 r_1 + \ldots + \alpha_m r_m \leq n$ .

Entonces, $k = \alpha_1 + \ldots \alpha_m + n - \omega_m$ , donde $\omega_m = \alpha_1 r_1 + \ldots + \alpha_m r_m$ .

OBSERVACION. Recordemos que estamos tratando a las funciones denotadas por $\phi_2, \ldots, \phi_{n-1}$ , como indeterminadas de un polinomio.

<u>Demostración</u>: Para que $\phi_{i_1}\cdot\ldots\cdot\phi_{i_k} = \phi_{r_1}^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\phi_{r_m}^{\alpha_m}$ , debe tenerse que entre los índices $i_1, \ldots, i_k$ ; $\alpha_1$ sean iguales a $r_1$ , $\alpha_2$ iguales a $r_2$ , ..., $\alpha_m$ iguales a $r_m$ y los restantes iguales a 1. O sea, debe tenerse:

$$\phi_{i_1}\cdot\ldots\cdot\phi_{i_k} =$$

$$= \underbrace{\phi_{r_1}\cdot\ldots\cdot\phi_{r_1}}_{\alpha_1\text{-veces}}\cdot\underbrace{\phi_{r_2}\cdot\ldots\cdot\phi_{r_2}}_{\alpha_2\text{-veces}}\cdot\ldots\cdot\underbrace{\phi_{r_m}\cdot\ldots\cdot\phi_{r_m}}_{\alpha_m\text{-veces}}\cdot\underbrace{1\cdot\ldots\cdot 1}_{x\text{-veces}} \quad ,$$

siendo $x$ = número de índices igual a 1 en la k-tupla $(i_1, \ldots, i_k)$ .

Ahora bien, como $n = i_1 + \ldots + i_k$ y $i_1 + \ldots + i_k = \alpha_1 r_1 + \ldots + \alpha_m r_m + x$ , se tiene:

$$n = \alpha_1 r_1 + \ldots + \alpha_m r_m + x = \omega_m + x ,$$

de donde $x = n - \omega_m$ . Por lo tanto es claro que

$$k = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m + n - \omega_m .$$

Afirmación 2. Consideremos una k-tupla $(i_1, \ldots, i_k)$ tal que $2 \leq k \leq n$ , $i_1, \ldots, i_k \in \mathbb{N}$ , $i_1 + \ldots + i_k = n$ , y sean $r_1, \ldots, r_m$ ; $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ números satisfaciendo las mismas condiciones que en la afirmación 1.

Supongamos $k \geq \alpha_1 + \ldots + \alpha_m + n - \omega_m$ y en el producto $\phi_{i_1}\cdot\ldots\cdot k_{i_s}\cdot\ldots\cdot\phi_{i_k}$ , $(1 \leq s \leq k)$ , reemplazemos $k_{i_s}$ por

$\sum_{\ell=2}^{i_s} b_\ell \left(\sum_{j_1+\ldots+j_\ell=i_s} \phi_{j_1}\cdot\ldots\cdot\phi_{j_\ell}\right)$ , cuando $i_s \neq 1$ . Resulta:

$$\phi_{i_1}\cdot\ldots\cdot k_{i_s}\cdot\ldots\cdot\phi_{i_k} =$$

$$= \phi_{i_1}\cdot\ldots\cdot\phi_{i_{s-1}}\cdot\left(\sum_{\ell=2}^{i_s} b_\ell\left(\sum_{j_1+\ldots+j_\ell=i_s} \phi_{j_1}\cdot\ldots\cdot\phi_{j_\ell}\right)\right)\cdot\phi_{i_{s+1}}\cdot\ldots\cdot\phi_{i_k} =$$

$$= \sum_{\ell=2}^{i_s} \phi_{i_1}\cdot\ldots\cdot\phi_{i_{s-1}}\cdot\left(b_\ell \sum_{j_1+\ldots+j_\ell=i_s} \phi_{j_1}\cdot\ldots\cdot\phi_{j_\ell}\right)\cdot\phi_{i_{s+1}}\cdot\ldots\cdot\phi_{i_k} =$$

$$= \sum_{\ell=2}^{i_s} \left(\sum_{j_1+\ldots+j_\ell=i_s} b_\ell\cdot\phi_{i_1}\cdot\ldots\cdot\phi_{i_{s-1}}\cdot\left(\phi_{j_1}\cdot\ldots\cdot\phi_{j_\ell}\right)\cdot\phi_{i_{s+1}}\cdot\ldots\cdot\phi_{i_k}\right) .$$

Afirmamos que en esta sumatoria ningún sumando puede ser igual a $b_\ell\phi_{r_1}^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\phi_{r_m}^{\alpha_m}$ , o sea,

$$\phi_{i_1}\cdot\ldots\cdot\phi_{i_{s-1}}\cdot\left(\phi_{j_1}\cdot\ldots\cdot\phi_{j_\ell}\right)\cdot\phi_{i_{s+1}}\cdot\ldots\cdot\phi_{i_k} \neq \phi_{r_1}^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot{}_{r_m}^{\alpha_m} .$$

Cuando $i_s = 1$ , reemplazamos $k_{i_s}$ por 0 en el producto $\phi_{i_1}\cdot\ldots\cdot k_{i_s}\cdot\ldots\cdot\phi_{i_k}$ , (recordar (28)). Se obtiene $\phi_{i_1}\cdot\ldots\cdot k_{i_s}\cdot\ldots\cdot\phi_{i_k} = 0$ , en cuyo caso es obvio que

$$\phi_{i_1}\cdot\ldots\cdot k_{i_s}\cdot\ldots\cdot\phi_{i_k} \neq \phi_{r_1}^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\phi_{r_m}^{\alpha_m} .$$

<u>Demostración</u>: Examinemos entonces los productos

$$\phi_{i_1}\cdot\ldots\cdot\phi_{i_{s-1}}\cdot\left(\phi_{j_1}\cdot\ldots\cdot\phi_{j_\ell}\right)\cdot\phi_{i_{s+1}}\cdot\ldots\cdot\phi_{i_k}$$

y veamos si alguno de ellos puede ser igual a $\phi_{r_1}^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\phi_{r_m}^{\alpha_m}$ .

Notemos que $\phi_{i_1}\bullet\ldots\bullet\phi_{i_{s-1}}\bullet\left(\phi_{j_1}\bullet\ldots\bullet\phi_{j_\ell}\right)\bullet\phi_{i_{s+1}}\bullet\ldots\bullet\phi_{i_k}$ es un producto de $k - 1 + \ell$ factores, donde

$$i_1 + \ldots + i_{s-1} + j_1 + \ldots + j_\ell + i_{s+1} + \ldots + i_k = n$$

pues $j_1 + \ldots + j_\ell = i_s$ . Luego, si

$$\phi_{i_1}\bullet\ldots\bullet\phi_{i_{s-1}}\bullet\left(\phi_{j_1}\bullet\ldots\bullet\phi_{j_\ell}\right)\bullet\phi_{i_{s+1}}\bullet\ldots\bullet\phi_{i_k} = \phi_{r_1}^{\alpha_1}\bullet\ldots\bullet\phi_{r_m}^{\alpha_m} ,$$

la afirmación 1 nos garantiza que $k - 1 + \ell = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m + n - \omega_m$ , y como supusimos $\alpha_1 + \ldots + \alpha_m + n - \omega_m \leq k$ , tendremos $k - 1 + \ell \leq k$ , por lo tanto $\ell \leq 1$ , lo cual contradice la restricción $2 \leq \ell \leq i_s$ . Esto termina de probar la afirmación 2.

Con las afirmaciones 1 y 2,(a las cuales nos referiremos por A.1 y A.2 respectivamente), estamos en condiciones de calcular el coeficiente de $\phi_{r_1}^{\alpha_1}\bullet\ldots\bullet\phi_{r_m}^{\alpha_m}$ en (29').

Por comodidad, escribamos nuevamente la expresión $(\sigma)$ :

$$y\,\frac{\partial a_k}{\partial y}\left(\sum_{i_1+\ldots+i_k=n}\phi_{i_1}\bullet\ldots\bullet\phi_{i_k}\right) +$$

$$+ a_k\left(\sum_{i_1+\ldots+i_k=n}\left(\sum_{s=1}^{k}(1 - i_s)b_1\phi_{i_1}\bullet\ldots\bullet\phi_{i_k} + \sum_{s=1}^{k}\phi_{i_1}\bullet\ldots\bullet k_{i_s}\bullet\ldots\bullet\phi_{i_k}\right)\right)$$

$$+ (1 - n)a_1 b_k\left(\sum_{i_1+\ldots+i_k=n}\phi_{i_1}\bullet\ldots\bullet\phi_{i_k}\right) ,$$

donde $k$ varía de 2 hasta $n$ .

Cuando $k \in \{\alpha_1 + \ldots + \alpha_m + n - \omega_m + 1, \ldots, n\}$ , A.1 y A.2 nos aseguran que al reemplazar $k_{i_s}$ en $(\sigma)$ , por

$\sum_{\ell=2}^{i_s} b_\ell \left( \sum_{j_1+\ldots+j_\ell=i_s} \phi_{j_1} \cdot \ldots \cdot \phi_{j_\ell} \right)$ o por 0 según sea el valor de $i_s$ , no obtendremos ningún sumando donde aparezca el producto $\phi_{r_1}^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \phi_{r_m}^{\alpha_m}$ . Con esto en cuenta, sólo nos ocuparemos de $(\sigma)$ para $k \in \{2, \ldots, \alpha_1 + \ldots + \alpha_m + n - \omega_m\}$ .

(A) En el caso $k = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m + n - \omega_m$ , A.2 nos dice que los sumandos $a_k \phi_{i_1} \cdot \ldots \cdot k_{i_s} \cdot \ldots \cdot \phi_{i_k}$ que aparecen en $(\sigma)$ , no contribuyen al coeficiente de $\phi_{r_1}^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \phi_{r_m}^{\alpha_m}$ , por lo tanto, en $(\sigma)$ , solamente consideraremos los restantes sumandos.

Si $\phi_{i_1} \cdot \ldots \cdot \phi_{i_k} = \phi_{r_1}^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \phi_{r_m}^{\alpha_m}$ , de la demostración de A.1 sabemos que entre los índices $i_1, \ldots, i_k$ ; $\alpha_p$ deben ser iguales a $r_p$ , donde $1 \leq p \leq m$ y $n - \omega_m$ índices deben ser iguales a 1. Luego, una posibilidad para la k-tupla $(i_1, \ldots, i_k)$ es la siguiente:

$$(i_1, \ldots, i_k) = (\underbrace{r_1, \ldots, r_1}_{\alpha_1 \text{ veces}}, \ldots, \underbrace{r_m, \ldots, r_m}_{\alpha_m \text{ veces}}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-\omega_m \text{ veces}})$$

y todas las demás k-tuplas tales que se verifique

$$\phi_{i_1} \cdot \ldots \cdot \phi_{i_k} = \phi_{r_1}^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \phi_{r_m}^{\alpha_m} ,$$

se obtienen por permutación de $(r_1, \ldots, r_1, \ldots, r_m, \ldots, r_m, 1, \ldots, 1)$ .

Por lo tanto, al considerar la expresión

$$y\,\frac{\partial a_k}{\partial y}\left(\sum_{i_1+\ldots+i_k=n}\phi_{i_1}\cdot\ldots\cdot\phi_{i_k}\right),$$

está claro que como coeficiente de $\phi_{r_1}^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\phi_{r_m}^{\alpha_m}$ se obtiene:

$$(31)\qquad y\,\frac{\partial a_k}{\partial y}\,\frac{(\alpha_1+\ldots+\alpha_m+n-\omega_m)!}{\alpha_1!\cdot\ldots\cdot\alpha_m!(n-\omega_m)!}\,.$$

De igual forma, al considerar

$$(1-n)a_1b_k\left(\sum_{i_1+\ldots+i_k=n}\phi_{i_1}\cdot\ldots\cdot\phi_{i_k}\right),$$

el coeficiente de $\phi_{r_1}^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\phi_{r_m}^{\alpha_m}$ que se obtiene, es

$$(32)\qquad (1-n)a_1b_k\,\frac{(\alpha_1+\ldots+\alpha_m+n-\omega_m)!}{\alpha_1!\cdot\ldots\cdot\alpha_m!(n-\omega_m)!}\,.$$

Por otra parte, si $(i_1,\ldots,i_k)$ es alguna de las permutaciones de $(r_1,\ldots,r_1,\ldots,r_m,\ldots,r_m,1,\ldots,1)$, es claro que

$$\sum_{s=1}^{k}(1-i_s)=\alpha_1(1-r_1)+\ldots+\alpha_m(1-r_m)=$$

$$=\alpha_1+\ldots+\alpha_m-\alpha_1r_1-\ldots-\alpha_mr_m=\alpha_1+\ldots+\alpha_m-\omega_m\,.$$

Por lo tanto, a partir de la expresión

$$a_k\cdot\left(\sum_{i_1+\ldots+i_k=n}\left(\sum_{s=1}^{k}(1-i_s)b_1\phi_{i_1}\cdot\ldots\cdot\phi_{i_k}\right)\right),$$

se obtiene

$$(33) \qquad a_k b_1(\alpha_1 + \ldots + \alpha_m - \omega_m)\ \frac{(\alpha_1 + \ldots + \alpha_m + n - \omega_m)!}{\alpha_1!\cdot\ldots\cdot\alpha_m!(n - \omega_m)!}$$

como coeficiente de $\phi_{r_1}^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\phi_{r_m}^{\alpha_m}$ .

Finalmente, si sumamos (31), (32) y (33), resulta:

$$\frac{(\alpha_1 + \ldots + \alpha_m + n - \omega_m)!}{\alpha_1!\cdot\ldots\cdot\alpha_m!(n - \omega_m)!}\left(y\,\frac{\partial a_k}{\partial y} + a_k b_1(\alpha_1 + \ldots + \alpha_m - \omega_m) + \right.$$

$$\left. + (1 - n)a_1 b_k\right) .$$

(B) Cuando $k \in \{2, \ldots, \alpha_1 + \ldots + \alpha_m + n - \omega_m - 1\}$ , A.1 y A.2 nos dicen que para obtener el coeficiente de $\phi_{r_1}^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\phi_{r_m}^{\alpha_m}$ en $(\sigma)$ , sólo debemos considerar la suma

$$a_k\cdot\left(\sum_{i_1+\ldots+i_k=n}\left(\sum_{s=1}^{k}\phi_{i_1}\cdot\ldots\cdot k_{i_s}\cdot\ldots\cdot\phi_{i_k}\right)\right) ,$$

que es igual a

$$a_k\cdot\sum_{s=1}^{k}\left(\sum_{i_1+\ldots+i_k=n}\phi_{i_1}\cdot\ldots\cdot k_{i_s}\cdot\ldots\cdot\phi_{i_k}\right) .$$

Así pués, calculemos el coeficiente de $\phi_{r_1}^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot{}_{r_m}^{\alpha_m}$ en la sumatoria $\sum_{i_1+\ldots+i_k=n}\phi_{i_1}\cdot\ldots\cdot k_{i_s}\cdot\ldots\cdot\phi_{i_k}$ , donde $1 \leq s \leq k$ .

Es claro que si $i_s = 1$ , como $k_1 = 0$ , (ver (28)), tendremos: $\phi_{i_1}\cdot\ldots\cdot k_{i_s}\cdot\ldots\cdot\phi_{i_k} = 0$ , en cuyo caso $\phi_{i_1}\cdot\ldots\cdot k_{i_s}\cdot\ldots\cdot\phi_{i_k}$ no aportará al coeficiente de $\phi_{r_1}^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\phi_{r_m}^{\alpha_m}$ . Supongamos entonces $i_s \neq 1$ .

Si $i_s \neq 1$ , sabemos que:

$$k_{i_s} = \sum_{\ell=2}^{i_s} b_\ell \left(\sum_{j_1+\ldots+j_\ell=i_s} \phi_{j_1}\cdot\ldots\cdot\phi_{j_\ell}\right) ,$$

por lo tanto,

$$\phi_{i_1}\cdot\ldots\cdot k_{i_s}\cdot\ldots\cdot\phi_{i_k} = \tag{34}$$

$$= \sum_{\ell=2}^{i_s} \left(\sum_{j_1+\ldots+j_\ell=i_s} b_\ell \phi_{i_1}\cdot\ldots\cdot\phi_{i_{s-1}}\cdot\left(\phi_{j_1}\cdot\ldots\cdot\phi_{j_\ell}\right)\cdot\phi_{i_{s+1}}\cdot\ldots\cdot\phi_{i_k}\right) .$$

Para determinar el coeficiente de $\phi_{r_1}^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\phi_{r_m}^{\alpha_m}$ en el segundo miembro de (34), debemos considerar aquellos sumandos para los cuales

$$\phi_{i_1}\cdot\ldots\cdot\phi_{i_{s-1}}\cdot\left(\phi_{j_1}\cdot\ldots\cdot\phi_{j_\ell}\right)\cdot\phi_{i_{s+1}}\cdot\ldots\cdot\phi_{i_k} = \phi_{r_1}^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\phi_{r_m}^{\alpha_m} .$$

Ahora bien, como $i_1 + \ldots + i_{s-1} + j_1 + \ldots + j_\ell + i_{s+1} + \ldots + i_k = i_1 + \ldots + i_{s-1} + i_s + i_{s+1} + \ldots + i_k = n$ , de la demostración de A.1 sabemos que entre los índices $i_1, \ldots, i_{s-1}, j_1, \ldots j_\ell, i_{s+1}, \ldots, i_k$ ; $\alpha_j$ deben ser iguales a $r_j$ ; $(j = 1, \ldots, m)$ y los restantes $n - \omega_m$ , iguales a 1. Así, A.1 nos asegura que $k - 1 + \ell = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m + n - \omega_m$ y por lo tanto, $\ell = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m + n - \omega_m - k + 1$ .

Luego, en el segundo miembro de la igualdad (34), sólo consideramos el sumando con $\ell = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m + n - \omega_m - k + 1$ , es decir,

$$b_\ell \sum_{j_1+\ldots+j_\ell=i_s} \phi_{i_1}\cdot\ldots\cdot\phi_{i_{s-1}}\cdot\left(\phi_{j_1}\cdot\ldots\cdot\phi_{j_\ell}\right)\phi_{i_{s+1}}\cdot\ldots\cdot\phi_{i_k} .$$

De este modo, para obtener de $\sum_{i_1+\ldots+i_k=n} \phi_{i_1}\cdot\ldots\cdot k_{i_s}\cdot\ldots\cdot\phi_{i_k}$ el coeficiente de $\phi_{r_1}^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\phi_{r_m}^{\alpha_m}$ , debemos contar todas las $(\alpha_1+\ldots+\alpha_m+n-\omega_m)$-tuplas $(i_1, \ldots, i_{s-1}, j_1, \ldots, j_\ell , i_{s+1}, \ldots, i_k)$ , en las cuales $\alpha_j$ índices son iguales a $r_j$ , $(j = 1, \ldots, m)$ y los restantes $n - \omega_m$ , iguales a 1.

Es claro que estas $(\alpha_1+\ldots+\alpha_m+n-\omega_m)$-tuplas $(i_1, \ldots, i_{s-1}, j_1, \ldots, j_\ell , i_{s+1}, \ldots, i_k)$ son permutaciones de

(35) $$(\underbrace{r_1, \ldots\ldots, r_1}_{\alpha_1 \text{ veces}}, \ldots\ldots, \underbrace{r_m, \ldots\ldots, r_m}_{\alpha_m \text{ veces}}, \underbrace{1, \ldots\ldots, 1}_{(n-\omega_m) \text{ veces}}) .$$

Recíprocamente, dada una permutación $\left(\tau_1, \ldots, \tau_{\alpha_1+\ldots+\alpha_m+n-\omega_m}\right)$ de la $(\alpha_1+\ldots+\alpha_m+n-\omega_m)$-tupla (35), y teniendo en cuenta que

$$s - 1 + \ell + k - s = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m + n - \omega_m ,$$

tiene sentido escribir

$$\left(\tau_1, \ldots, \tau_{\alpha_1+\ldots+\alpha_m+n-\omega_m}\right) =$$

$$= \left(\underbrace{\tau_1, \ldots, \tau_{s-1}}_{s-1 \text{ índices}}, \underbrace{\tau_s, \ldots, \tau_{s+\ell-1}}_{\ell \text{ índices}}, \underbrace{\tau_{s+\ell}, \ldots, \tau_{\alpha_1+\ldots+\alpha_m+n-\omega_m}}_{k-s \text{ índices}}\right) .$$

Es decir, toda permutación de (35) es una $(\alpha_1+\ldots+\alpha_m+n-\omega_m)$-tupla de la forma $(i_1, \ldots, i_{s-1}, j_1, \ldots, j_\ell, i_{s+1}, \ldots, i_k)$, donde

$$(36)\quad \begin{cases} i_1 + \ldots + i_{s-1} + j_1 + \ldots + j_\ell + i_{s+1} + \ldots + i_k = n \quad \text{y} \\ \ell = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m + n - \omega_m - k + 1 , \\ \text{en la cual hay } \alpha_j \text{ índices iguales a } r_j , \quad (j = 1, \ldots, m) , \\ \text{y los restantes } n - \omega_m \text{ son iguales a 1.} \end{cases}$$

Como hay $\dfrac{(\alpha_1 + \ldots + \alpha_m + n - \omega_m)!}{\alpha_1!\cdot\ldots\cdot\alpha_m!(n - \omega_m)!}$ permutaciones de (35), tenemos el mismo número de $(\alpha_1+\ldots+{}_m+n-\omega_m)$-tuplas $(i_1, \ldots, i_{s-1}, j_1, \ldots, j_\ell, i_{s+1}, \ldots, i_k)$ que satisfacen las condiciones señaladas en (36). Teniendo esto en cuenta, el coeficiente de $\phi_{r_1}^{\alpha_1} \ldots \phi_{r_m}^{\alpha_m}$ en la suma $\sum_{i_1+\ldots+i_k=n} \phi_{i_1}\cdot\ldots\cdot k_{i_s}\cdot\ldots\cdot\phi_{i_k}$ es:

$$b_\ell \frac{(\alpha_1 + \ldots + \alpha_m + n - \omega_m)!}{\alpha_1! \ldots \alpha_m!(n - \omega_m)!} ,$$

donde $\ell = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m + n - \omega_m - k + 1$ .

Como esto es válido para todo $s$ tal que $1 \leq s \leq k$ , al considerar la expresión

$$a_k\cdot \sum_{s=1}^{k} \left( \sum_{i_1+\ldots+i_k=n} \phi_{i_1}\cdot\ldots\, k_{i_s}\cdot\ldots\cdot\phi_{i_k} \right) ,$$

obtenemos el siguiente coeficiente de $\phi_{r_1}^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\phi_{r_m}^{\alpha_m}$ :

$$a_k \cdot k \cdot b_\ell \frac{(\alpha_1 + \ldots + \alpha_m + n - \omega_m)!}{\alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_m! (n - \omega_m)!} ,$$

con $\ell = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m + n - \omega_m - k + 1$ .

Resumiendo, cuando en $(\sigma)$ consideramos $k = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m + n - \omega_m$ , (Parte A), obtuvimos como coeficiente de $\phi_{r_1}^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \phi_{r_m}^{\alpha_m}$ :

$$(37) \qquad \frac{(\alpha_1 + \ldots + \alpha_m + n - \omega_m)!}{\alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_m! (n - \omega_m)!} \left( y \frac{\partial a_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_m + n - \omega_m}}{\partial y} + \right.$$

$$\left. + a_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_m + n - \omega_m} \cdot b_1 \cdot (\alpha_1 + \ldots + \alpha_m - \omega_m) + (1 - n) a_1 b_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_m + n - \omega_m} \right) .$$

Cuando $k \in \{2, \ldots, \alpha_1 + \ldots + \alpha_m + n - \omega_m - 1\}$ en $(\sigma)$ , (Parte B), obtuvimos

$$(38) \qquad \frac{(\alpha_1 + \ldots + \alpha_m + n - \omega_m)!}{\alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_m! (n - \omega_m)!} k a_k b_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_m + n - \omega_m - k + 1} .$$

En el caso $k \in \{\alpha_1 + \ldots + \alpha_m + n - \omega_m + 1, \ldots, n\}$ , el coeficiente de $\phi_{r_1}^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \phi_{r_m}^{\alpha_m}$ que se obtiene de $(\sigma)$ es nulo.

Por lo tanto, si sumamos los coeficientes de (37) y (38), obtenemos el coeficiente de $\phi_{r_1}^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \phi_{r_m}^{\alpha_m}$ que aparece en (29'). Este es:

$$(39) \qquad \frac{(\alpha_1 + \ldots + \alpha_m + n - \omega_m)!}{\alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_m! (n - \omega_m)!} \left( y \frac{\partial a_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_m + n - \omega_m}}{\partial y} + \right.$$

$$+ a_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_m + n - \omega_m} \cdot b_1 \cdot (\alpha_1 + \ldots + \alpha_m - \omega_m) +$$

$$+ (1 - n) a_1 b_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_m + n - \omega_m} +$$

$$\left. + \sum_{k=2}^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_m + n - \omega_m - 1} k a_k b_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_m + n - \omega_m - k + 1} \right) .$$

Para determinar el coeficiente de $\phi_{r_1}^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \phi_{r_m}^{\alpha_m}$ en la expresión (30'), la situación es totalmente simétrica a la anterior y sólo debemos cambiar $y$ por $x$ , $a$ por $b$ y $b$ por $a$ .

Así, resulta que el coeficiente buscado es:

$$(40) \qquad \frac{(\alpha_1 + \ldots + \alpha_m + n - \omega_m)!}{\alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_m! (n - \omega_m)!} \left( x \frac{\partial b_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_m + n - \omega_m}}{\partial x} + \right.$$

$$+ b_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_m + n - \omega_m} \cdot a_1 \cdot (\alpha_1 + \ldots + \alpha_m - \omega_m) +$$

$$+ (1 - n) b_1 a_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_m + n - \omega_m} +$$

$$\left. + \sum_{k=2}^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_m + n - \omega_m - 1} k b_k a_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_m + n - \omega_m - k + 1} \right) .$$

Ahora necesitamos probar que los coeficientes (39) y (40) son iguales. Para esto, denotando por $\Sigma_1$ y $\Sigma_2$ a las sumas entre paréntesis en

(39) y (40), respectivamente, demostraremos que $\Sigma_1 = \Sigma_2$ .

En efecto, si en la igualdad $\Sigma_1 = \Sigma_2$ sumamos a ambos lados $na_{\alpha_1+\dots+\alpha_m+n-\omega_m}\cdot b_1 + na_1 b_{\alpha_1+\dots+\alpha_m+n-\omega_m}$ , se obtiene:

$$y\,\frac{\partial a_{\alpha_1+\dots\alpha_m-n-\omega_m}}{\partial y} + \sum_{k=1}^{\alpha_1+\dots+\alpha_m+n-\omega_m} k a_k b_{\alpha_1+\dots+\alpha_m+n-\omega_m-k+1} =$$

$$x\,\frac{\partial b_{\alpha_1+\dots\alpha_m+n-\omega_m}}{\partial x} + \sum_{k=1}^{\alpha_1+\dots+\alpha_m+n-\omega_m} k b_k a_{\alpha_1+\dots+\alpha_m+n-\omega_m-k+1} ,$$

que es justamente la relación (2).

Esto termina de probar que los coeficientes de $\phi_{r_1}^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\phi_{r_m}^{\alpha_m}$ en (29') y (30') son iguales, y como ya vimos que los términos libres de $\phi_2, \ldots, \phi_{n-1}$ en (29') y (30') son iguales, hemos demostrado la igualdad entre las sumas (29') y (30').

Ahora bien, como la igualdad entre (29') y (30') es equivalente a la igualdad (27), la que a su vez equivale a (26), y ésta a (25), podemos asegurar que la igualdad (25) es válida, lo cual significa que el sistema $(*)_n$ es completamente integrable.

Queda así demostrada la Proposición 2.1.

De este modo, el procedimiento recursivo descrito anteriormente para definir los sistemas $(*)_n$ , no se detiene al cabo de un número finito de pasos sino que nos permite construir el sistema $(*)_n$ , para todo $n \geq 2$ . Así obtenemos una familia $(*)_n$ , $n \geq 2$ , de sistemas completamente integrables.

Recordemos que el sistema $(*)_2$ quedó definido de la siguiente manera:

$$x \frac{\partial v}{\partial x} = -a_1(x,y)v + a_2(x,y)$$

$$y \frac{\partial v}{\partial y} = -b_1(x,y)v + b_2(x,y) \ ,$$

donde $a_1, a_2, b_1, b_2$ son holomorfas en $B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,\gamma_2)$ .

Si el Teorema 3.1 (Capítulo II), garantizara tan sólo la existencia de una solución local, podríamos afirmar que $\phi_2(x,y)$ es holomorfa en una vecindad $V_2$ de $(0,0)$ , tal que $V_2 \subseteq B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,\gamma_2)$ y no necesariamente en todo el conjunto $B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,\gamma_2)$ . Así, $h_3(x,y)$ y $k_3(x,y)$ , que dependen de $\phi_2(x,y)$ , serían holomorfas en $V_2$ , y por lo tanto, al aplicar el Teorema 3.1 al sistema $(*)_3$ , este es

$$x \frac{\partial v}{\partial x} = -2a_1(x,y)v + h_3(x,y)$$

$$y \frac{\partial v}{\partial y} = -2b_1(x,y)v + k_3(x,y) \ ,$$

tendríamos una solución $\phi_3(x,y)$ holomorfa en una vecindad $V_3$ de $(0,0)$ , donde $V_3 \subset V_2$ .

Estas vecindades están ordenadas por inclusión de la siguiente manera:

$$B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,\gamma_2) \supseteq V_2 \supseteq V_3 \supseteq \dots$$

en cuyo caso es factible pensar que $\bigcap_{n \geq 2} V_n = \{(0,0)\}$ .

Así pues, es la garantía de existencia global que nos dá el Teorema 3.1, la que nos permite conseguir que las soluciones $\phi_n(x,y)$ de $(*)_n$ sean holomorfas en una vecindad común, a saber, la vecindad $B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,\gamma_2)$ del punto $(0,0) \in \mathbb{C}^2$.

2. Construcción de la familia en el caso $p = 1$, $q \geq 2$.

Procederemos análogamente al caso $p = q = 1$, modificando una hipótesis y aplicando el Teorema 4.1 (Capítulo II).

Como antes, sean $f(x,y,u)$ y $g(x,y,u)$ funciones holomorfas en $B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,\gamma_2) \times B_1(0,\varepsilon)$ con valores en $\mathbb{C}$, tales que $f(x,y,0) = g(x,y,0) = 0$.

Sean $\sum_{n\geq 1} a_n(x,y)u^n$ y $\sum_{n\geq 1} b_n(x,y)u^n$ los desarrollos en potencias de $u$ para $f(x,y,u)$ y $g(x,y,u)$ respectivamente.

Supondremos que $a_1(0,0) \notin R_{\leq 0}$ y que el sistema $(*)$ para $p = 1$, $q \geq 2$, es decir

$$x \frac{\partial u}{\partial x} = f(x,y,u)$$

$$y^q \frac{\partial u}{\partial y} = g(x,y,u) ,$$

es completamente integragle.

Igual que en el apartado 1, construimos el primer sistema de la familia, al que denotaremos por $(*)'_2$, este es:

$$(*)'_2 \begin{cases} x \dfrac{\partial z}{\partial x} = -a_1(x,y)z + a_2(x,y) \\ \\ y^q \dfrac{\partial z}{\partial y} = -b_1(x,y)z + b_2(x,y) \ . \end{cases}$$

Es claro que la misma demostración dada para probar la completa integrabilidad de $(*)_2$ es válida para $(*)'_2$ .

Ahora bien, como $a_1(0,0) \notin \mathbb{R}_{\leq 0}$ , por el Teorema 4.1 (Capítulo II), sabemos que existe $\rho > 0$ tal que la ecuación

$$x \frac{\partial z}{\partial x} = -a_1(x,y)z + a_2(x,y)$$

posee una única solución $z_2(x,y)$ holomorfa en $B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,\rho)$ .

Como $-a_1(0,0) \notin \mathbb{N}_o$ y $(*)'_2$ es completamente integrable, podemos probar, tal como se hizo en la demostración del Teorema 3.1 del Capítulo anterior, que $z_2(x,y)$ también es solución de la ecuación

$$y^q \frac{\partial z}{\partial y} = -b_1(x,y)z + b_2(x,y)$$

y por lo tanto del sistema $(*)'_2$ .

Los restantes sistemas los construimos del mismo modo que los $(*)_n$ , a través de las expresiones $h_n(x,y)$ y $k_n(x,y)$ definidas en el apartado 1.

Así pués, para $n = 3$ , hacemos $P_2 = z_2(x,y)$ en $h_3(x,y)$ y $k_3(x,y)$ , resultando las siguientes funciones holomorfas en $B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,\rho)$ :

$$h_3(x,y) = a_2(x,y)(2z_2(x,y)) + a_3(x,y) ,$$

$$k_3(x,y) = b_2(x,y)(2z_2(x,y)) + b_3(x,y)$$

y definimos:

$$(*)'_3 \begin{cases} x \dfrac{\partial z}{\partial x} = -2a_1(x,y)z + h_3(x,y) \\ \\ y^q \dfrac{\partial z}{\partial y} = -2b_1(x,y)z + k_3(x,y) . \end{cases}$$

La Proposición 2.1 del Capítulo II también es válida en el caso $p = 1$ , $q \geq 2$ y la demostración totalmente análoga, (basta cambiar $y$ por $y^q$) . Luego, el sistema $(*)'_3$ es completamente integrable.

Nuevamente por Teorema 4.1, la ecuación

$$x \frac{\partial z}{\partial x} = -2a_1(x,y)z + h_3(x,y)$$

posee una única solución $z_3(x,y)$ , holomorfa en $B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,\rho)$ .

Además, de la completa integrabilidad del sistema $(*)'_3$ y considerando que $-2a_1(0,0) \notin \mathbb{N}_o$ , sabemos que $z_3(x,y)$ es solución del sistema $(*)'_3$ .

Continuando de esta manera, construimos para todo $n \geq 2$ el sistema completamente integrable

$$(*)'_n \begin{cases} x\,\dfrac{\partial z}{\partial x} = (1-n)a_1(x,y)z + h_n(x,y) \\ \\ y^q\,\dfrac{\partial z}{\partial y} = (1-n)b_1(x,y)z + k_n(x,y) \ , \end{cases}$$

con su respectiva solución $z_n(x,y)$ , holomorfa en $B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,\rho)$ .

OBSERVACION. En esta construcción, que se apoya en el Teorema 4.1 del Capítulo II, pudo habserse incluído el caso $q = 1$ . Sin embargo, cuando $p = q = 1$ , obtuvimos soluciones $\phi_n(x,y)$ de los sistemas $(*)_n$ , holomorfas en todo el conjunto $B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,\gamma_2)$ , suponiendo $a_1(0,0) \notin \mathbb{Q}_{\leq 0}$ ó $b_1(0,0) \notin \mathbb{Q}_{\leq 0}$ en lugar de $a_1(0,0) \notin \mathbb{R}_{\leq 0}$ .

3. Construcción de la familia en el caso $p = 1$ , $q = 0$ .

Consideremos el sistema $(*)$ para $p = 1$ , $q = 0$ , este es:

$$x\,\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,y,u)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = g(x,y,u) \ ,$$

que suponemos completamente integrable, con $f(x,y,u)$ y $g(x,y,u)$ holomorfas en $B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,\gamma_2) \times B_1(0,\varepsilon)$ a valores complejos, tales que $f(x,y,0) = g(x,y,0) = 0$ .

Con la misma notación que en los apartados 1 y 2, sean $\sum\limits_{n\geq 1} a_n(x,y)u^n$ y $\sum\limits_{n\geq 1} b_n(x,y)u^n$ los desarrollos en potencias de $u$ para $f$ y $g$ respectivamente y supongamos $a_1(0,0) \notin \mathbb{Q}_{\leq 0}$ .

Definamos la función

$$\tilde{g}(x,y,u) = y \cdot g(x,y,u)$$

y consideremos el siguiente sistema completamente integrable:

$$(41)\qquad \begin{cases} x \dfrac{\partial u}{\partial x} = f(x,y,u) \\ \\ y \dfrac{\partial u}{\partial y} = \tilde{g}(x,y,u) \end{cases} .$$

La completa integrabilidad de (41), es consecuencia directa de la completa integrabilidad del sistema

$$x \frac{\partial u}{\partial x} = f(x,y,u)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = g(x,y,u)$$

y omitimos la demostración.

Así pués, el sistema (41) satisface todas las hipótesis que nos permitió construir la familia $(*)_n$ .

Como $\quad \tilde{g}(x,y,u) = y \cdot g(x,y,u) = \sum\limits_{k \geq 1} y \cdot b_k(x,y) u^k$ ,

tenemos, por construcción,

$$k_n(x,y) = \sum_{k=2}^{n} y \cdot b_k(x,y) \left( \sum_{i_1 + \ldots + i_k = n} \phi_{i_1}(x,y) \cdot \ldots \cdot \phi_{i_k}(x,y) \right) ,$$

y si definimos

$$\widetilde{k}_n(x,y) = \sum_{k=2}^{n} b_k(x,y) \left[ \sum_{i_1+\ldots+i_k=n} \phi_{i_1}(x,y)\cdot\ldots\cdot\phi_{i_k}(x,y) \right] ,$$

podemos escribir $k_n(x,y) = y\cdot\widetilde{k}_n(x,y)$ .

De este modo, el sistema $(*)_n$ que se obtiene de (41), es

$$x \frac{\partial z}{\partial x} = (1-n)a_1(x,y)z + h_n(x,y)$$

$$y \frac{\partial z}{\partial y} = (1-n)yb_1(x,y)z + y\widetilde{k}_n(x,y) ,$$

y a partir de éste construimos el sistema

$$(*)''_n \begin{cases} x \dfrac{\partial z}{\partial x} = (1-n)a_1(x,y)z + h_n(x,y) \\ \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = (1-n)b_1(x,y)z + \widetilde{k}_n(x,y) , \end{cases}$$

quedando así definida la familia $(*)''_n$ para $n \geq 2$ .

Notemos que la solución $\phi_n(x,y)$ de $(*)_n$ , holomorfa en todo el conjunto $B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,\gamma_2)$ , también es solución del sistema $(*)''_n$ . En efecto: Sea $\phi_n(x,y)$ la solución de $(*)_n$ , por lo tanto

$$y \frac{\partial\phi_n}{\partial y}(x,y) = (1-n)yb_1(x,y)\phi_n(x,y) + y\widetilde{k}_n(x,y) ,$$

o equivalentemente,

$$y\left[\frac{\partial\phi_n}{\partial y}(x,y) - (1-n)b_1(x,y)\phi_n(x,y) - \widetilde{k}_n(x,y)\right] = 0$$

y como la función entre paréntesis es holomorfa en $B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,\gamma_2)$ , se tiene $\dfrac{\partial \phi_n}{\partial y}(x,y) = (1 - n)b_1(x,y)\phi_n(x,y) + \widetilde{k}_n(x,y)$ .

Es decir, $\phi_n(x,y)$ es solución de $(*)''_n$ .

# C A P I T U L O  IV

## LINEALIZACION FORMAL DE UN SISTEMA DE PFAFF COMPLETAMENTE INTEGRABLE

En este Capítulo, estudiaremos el problema de linealización de un sistema de Pfaff de la forma

$$(*)\quad \begin{cases} x^p \dfrac{\partial u}{\partial x} = f(x,y,u) \\ \\ y^q \dfrac{\partial u}{\partial y} = g(x,y,u) \end{cases} ,$$

para ciertos enteros no negativos $p$ y $q$ , donde las funciones $f$ y $g$ son holomorfas en un polidisco que contiene al origen de $\mathbb{C}^3$ y toman valores en $\mathbb{C}$ .

Demostraremos, bajo ciertas hipótesis sobre las funciones $f$ y $g$ , la existencia de una serie formal

$$P(x,y,z) = z + \sum_{n\geq 2} P_n(x,y)z^n ,$$

con coeficientes $P_n(x,y)$ holomorfos en una vecindad común de $(0,0) \in \mathbb{C}^2$, la cual permite transformar el sistema (*) , a un sistema lineal del siguiente tipo:

$$x^p \frac{\partial z}{\partial x} = a(x,y)z$$

$$y^q \frac{\partial z}{\partial y} = b(x,y)z .$$

El procedimiento empleado para conseguir la linealización del sistema (*) nos conduce a sustituir una serie formal en otra, obligándonos a imponer ciertas condiciones sobre las funciones $f$ y $g$, para que esta sustitución tenga sentido. Así, es necesario suponer que $f(x,y,0) = g(x,y,0) = 0$ .

1. <u>Teorema de linealización en el caso</u> $p = q = 1$ .

TEOREMA 1.1. Sea

$$(S_1) \begin{cases} x \dfrac{\partial u}{\partial x} = f(x,y,u) \\ \\ y \dfrac{\partial u}{\partial y} = g(x,y,u) \end{cases}$$

un sistema completamente integrable, donde $f$ y $g$ son holomorfas en $B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,\gamma_2) \times B_1(0,\varepsilon)$ , toman valores en $\mathbb{C}$ y satisfacen las siguientes hipótesis:

(i) $f(x,y,0) = g(x,y,0) = 0$

(ii) Si $\sum_{n\geq 1} a_n(x,y)u^n$ y $\sum_{n\geq 1} b_n(x,y)u^n$ son los desarrollos en potencias de $u$ para $f(x,y,u)$ y $g(x,y,u)$ respectivamente, supondremos $a_1(0,0) \notin \mathbb{Q}_{\leq 0}$ o $b_1(0,0) \notin \mathbb{Q}_{\leq 0}$.

Entonces, podemos asegurar que existe una serie formal

$$P(x,y,z) = z + \sum_{n\geq 2} P_n(x,y) z^n ,$$

donde los coeficientes $P_n(x,y)$ son holomorfos en $B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,\gamma_2)$, tal que la substitución $u = P(x,y,z)$ reduce el sistema $(S_1)$ a su parte lineal:

$$(L_1) \quad \begin{cases} x \dfrac{\partial z}{\partial x} = a_1(x,y) z \\ \\ y \dfrac{\partial z}{\partial y} = b_1(x,y) z . \end{cases}$$

<u>Demostración</u>: Consideremos la serie formal

$$P(x,y,z) = \sum_{n\geq 2} \phi_n(x,y) z^n ,$$

donde $\phi_n(x,y)$ es la solución del sistema $(*)_n$ definido en el Apartado 1 del Capítulo II, la cual es holomorfa en $B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,\gamma_2)$, para todo $n \geq 2$.

Sea $P(x,y,z) = z + Q(x,y,y)$, donde $Q(x,y,z) = \sum_{n\geq 2} \phi_n(x,y) z^n$ y hagamos la sustitución $u = P(x,y,z)$ en $(S_1)$. Derivando y reemplazando formalmente, obtenemos: Por una parte,

$$x \frac{\partial u}{\partial x} = x \frac{\partial Q}{\partial x} + \left(1 + \frac{\partial Q}{\partial z}\right) x \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$y \frac{\partial u}{\partial y} = y \frac{\partial Q}{\partial y} + \left(1 + \frac{\partial Q}{\partial z}\right) y \frac{\partial z}{\partial y}$$

y por otra,

$$f(x,y,P) = a_1 z + a_1 Q + \sum_{n\geq 2} a_n(x,y)(z+Q)^n$$

$$g(x,y,P) = b_1 z + b_1 Q + \sum_{n\geq 2} b_n(x,y)(z+Q)^n .$$

Ahora bien, la sumatoria

$$\sum_{n\geq 2} a_n(x,y)(z+Q)^n = \sum_{n\geq 2} a_n(x,y)\left(z + \sum_{r\geq 2} \phi_r(x,y)z^r\right)^n ,$$

puede ser reordenada en potencias de $z$, de la siguiente manera:

$$\sum_{n\geq 2} a_n(x,y)(z+Q)^n = \sum_{n\geq 2} h_n(x,y)z^n$$

donde

$$h_n(x,y) = \sum_{k=2}^{n} a_k(x,y)\left(\sum_{j_1+\ldots+j_k=n} \phi_{j_1}(x,y)\cdot\ldots\cdot\phi_{j_k}(x,y)\right)$$

y por definición $\phi_1(x,y) \equiv 1$ .

En efecto, para determinar el coeficiente de $z^m$, $(m \geq 2)$ en la suma $\sum_{n\geq 2} a_n(x,y)(z+Q)^n$, es claro que sólo debemos considerar $2 \leq n \leq m$, y de cada uno de los sumandos

$$a_n(x,y)(z+Q)^n = a_n(x,y)\left(z + \sum_{r\geq 2} \phi_r(x,y)z^r\right)^n ,$$

$n = 2, \ldots, m$, extraen el coeficiente de $z^m$ .

Notemos que, como $\phi_1 \equiv 1$, podemos escribir:

$$a_n(x,y)(z+Q)^n = a_n(x,y)\left(\sum_{r\geq 1} \phi_r(x,y)z^r\right)^n .$$

Así, para $n = 2$ , el coeficiente de $z^m$ será:

$$a_2(x,y)\left(\sum_{j_1+j_2=m} \phi_{j_1}(x,y)\cdot\phi_{j_2}(x,y)\right) .$$

En general, para $2 \leq n \leq m$ , el coeficiente de $z^m$ será:

$$a_n(x,y)\left(\sum_{j_1+\ldots+j_n=m} \phi_{j_1}(x,y)\cdot\ldots\cdot\phi_{j_m}(x,y)\right) .$$

Por lo tanto, de la suma

$$\sum_{n\geq 2} a_n(x,y)(z + Q)^n ,$$

se obtiene el siguiente coeficiente para $z^m$ :

$$\sum_{k=2}^{m} a_k(x,y)\left(\sum_{j_1+\ldots+j_k=m} \phi_{j_1}(x,y)\cdot\ldots\cdot\phi_{j_k}(x,y)\right) ,$$

que es justamente $h_m(x,y)$ .

Cabe señalar aquí, como la función $h_m(x,y)$ definida en el Capítulo III, aparece de manera natural al reemplazar la serie formal $P(x,y,z)$ en la función $f(x,y,u)$ .

Proseguimos con nuestros cálculos y escribimos:

$$f(x,y,P) = a_1(x,y)z + a_1(x,y)Q + \sum_{n\geq 2} h_n(x,y)z^n .$$

De manera análoga, tenemos

$$g(x,y,P) = b_1(x,y)z + b_1(x,y)Q + \sum_{n\geq 2} k_n(x,y)z^n$$

donde

$$k_n(x,y) = \sum_{k=2}^{n} b_k(x,y)\left(\sum_{j_1+\ldots+j_k=n} \phi_{j_1}(x,y)\cdot\ldots\cdot\phi_{j_k}(x,y)\right) ,$$

(definiendo $\phi_1(x,y) \equiv 1$) .

Así pues, teniendo en cuenta la reordenación en potencias de $z$ de $f(x,y,P)$ , es claro que la sustitución $u = P(x,y,z)$ transforma la ecuación $x \frac{\partial u}{\partial x} = f(x,y,u)$ en:

$$x \frac{\partial Q}{\partial x} + \left(1 + \frac{\partial Q}{\partial z}\right) x \frac{\partial z}{\partial x} = a_1 z + a_1 Q + \sum_{n\geq 2} h_n ,$$

(OBSERVACION. Por comodidad escribiremos $a_1$ en lugar de $a_1(x,y)$, etc),

o equivalentemente

$$\left(1 + \frac{\partial Q}{\partial z}\right) x \frac{\partial z}{\partial x} = a_1 z + a_1 Q - x \frac{\partial Q}{\partial x} + \sum_{n\geq 2} h_n(x,y) z^n ,$$

pero como

$$1 + \frac{\partial Q}{\partial z} = 1 + \sum_{n\geq 2} n\phi_n(x,y) z^{n-1}$$

es una serie formal con término libre no nulo, sabemos que existe la serie formal inversa $\left(1 + \frac{Q}{z}\right)^{-1}$ , (ver [5]), por lo tanto

$$x \frac{\partial z}{\partial x} = \left(1 + \frac{\partial Q}{\partial z}\right)^{-1} \left(a_1 z + a_1 Q - x \frac{\partial Q}{\partial x} + \sum_{n\geq 2} h_n z^n\right) .$$

Análogamente

$$y \frac{\partial z}{\partial y} = \left(1 + \frac{\partial Q}{\partial z}\right)^{-1} \left(b_1 z + b_1 Q - y \frac{\partial Q}{\partial y} + \sum_{n\geq 2} z^n\right) .$$

Ahora bien, nosotros deseamos conseguir que $x \frac{\partial z}{\partial x} = a_1(x,y) z$ y $y \frac{\partial z}{\partial y} = b_1(x,y) z$ , o sea,

$$(42)\qquad \left(1+\frac{\partial Q}{\partial z}\right)^{-1}\left(a_1 z + a_1 Q - x\frac{\partial Q}{\partial z} + \sum_{n\geq 2} h_n z^n\right) = a_1 z$$

y

$$(43)\qquad \left(1+\frac{\partial Q}{\partial z}\right)^{-1}\left(b_1 z + b_1 Q - y\frac{\partial Q}{\partial y} + \sum_{n\geq 2} k_n z^n\right) = b_1 z\ .$$

Supongamos entonces válida la igualdad (42), la cual equivale a:

$$a_1 z + a_1 Q - x\frac{\partial Q}{\partial x} + \sum_{n\geq 2} h_n z^n = a_1 z\left(1+\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\ .$$

Cancelando el término en común y reagrupando, se tiene:

$$(42')\qquad x\frac{\partial Q}{\partial x} = a_1 Q - a_1 z\frac{\partial Q}{\partial z} + \sum_{n\geq 2} h_n z^n\ .$$

Análogamente

$$(43')\qquad y\frac{\partial Q}{\partial y} = b_1 Q - b_1 z\frac{\partial Q}{\partial z} + \sum_{n\geq 2} k_n z^n\ .$$

Si escribimos (42') y (43') respectivamente, como series formales en potencias de $z$ con coeficientes que dependen de $x$ e $y$, obtenemos:

$$(42'')\qquad \sum_{n\geq 2} x\frac{\partial\phi_n}{\partial x}(x,y)z^n = \sum_{n\geq 2}\left[(1-n)a_1(x,y)\phi_n(x,y) + h_n(x,y)\right]z^n$$

y

$$(43'')\qquad \sum_{n\geq 2} y\frac{\partial\phi_n}{\partial y}(x,y)z^n = \sum_{n\geq 2}\left[(1-n)b_1(x,y)\phi_n(x,y) + k_n(x,y)\right]z^n\ .$$

Para ver que las igualdades (42) y (43) son válidas, es suficiente notar que las funciones $\phi_n(x,y)$, holomorfas en $B_1(0,\gamma_1)\times B_1(0,\gamma_2)$, son soluciones de los sistemas $(*)_n$, es decir:

$$x \frac{\partial \phi_n}{\partial x}(x,y) = (1-n)a_1(x,y)\phi_n(x,y) + h_n(x,y)$$

$$y \frac{\partial \phi_n}{\partial y}(x,y) = (1-n)b_1(x,y)\phi_n(x,y) + k_n(x,y) \; .$$

Por lo tanto, como (42") equivale a (42) y (43") a (43), hemos probado que la sustitución $u = P(x,y,z)$, linealiza el sistema $(S_1)$ a su parte lineal, o sea, lo transforma en:

$$(L_1) \quad \begin{cases} x \dfrac{\partial z}{\partial x} = a_1(x,y)z \\ \\ y \dfrac{\partial z}{\partial y} = b_1(x,y)z \; . \end{cases}$$

Esto termina de probar el Teorema 1.1.

Cuando no se satisface la hipótesis $f(x,y,0) = g(x,y,0) = 0$ en el Teorema anterior, es posible, si suponemos $a_1(0,0) \notin \mathbb{N}_0$ ó $b_1(0,0) \notin \mathbb{N}_0$, transformar el sistema $(S_1)$ en un sistema del tipo

$$x \frac{\partial v}{\partial x} = \tilde{f}(x,y,v)$$

$$y \frac{\partial v}{\partial y} = \tilde{g}(x,y,v) \; ,$$

donde $\tilde{f}(x,y,0) = \tilde{g}(x,y,0) = 0$. Con este propósito, usaremos un resultado que puede leerse en [1], (Corolario 2.4, Pág. 253) y que adaptado al sistema $(S_1)$, afirma lo siguiente:

Si el sistema

$$(S_1) \quad \begin{cases} x \dfrac{\partial u}{\partial x} = f(x,y,u) \\ \\ y \dfrac{\partial u}{\partial y} = g(x,y,u) \end{cases}$$

es completamente integrable, con $f$ y $g$ holomorfas en un polidisco que contiene al origen de $\mathbb{C}^3$ , $f(0,0,0) = g(0,0,0)$ y además $\frac{\partial f}{\partial u}(0,0,0) \notin \mathbb{N}_o$ o $\frac{\partial g}{\partial u}(0,0,0) \notin \mathbb{N}_o$ , entonces podemos asegurar que existe una única solución $\phi_o(x,y)$ de $(S_1)$ , holomorfa en una vecindad del origen, que satisface $\phi_o(0,0) = 0$ .

(OBSERVACION. Sea $f(x,y,u)$ una función holomorfa en un polidisco que contiene al origen de $\mathbb{C}^3$ y sea $\sum_{n\geq 0} a_n(x,y)u^n$ su desarrollo en potencias de $u$ . Entonces es obvio que $\frac{\partial f}{\partial u}(0,0,0) = a_1(0,0)$) .

Ahora estamos en condiciones de probar el siguiente lema:

LEMA 1.2. Si el sistema $(S_1)$ es completamente integrable, con $f$ y $g$ holomorfas en un polidisco que contiene al origen de $\mathbb{C}^3$ , $f(0,0,0) = g(0,0,0) = 0$ y además $\frac{\partial f}{\partial u}(0,0,0) \notin \mathbb{N}_o$ o $\frac{\partial g}{\partial u}(0,0,0) \notin \mathbb{N}_o$ , entonces la sustitución $u = v + \phi_o(x,y)$ , donde $\phi_o(x,y)$ es la solución de $(S_1)$ garantizada por el resultado citado anteriormente, transforma $(S_1)$ en el siguiente sistema de Pfaff completamente integrable:

$$(S_1)\begin{cases} x\,\dfrac{\partial v}{\partial x} = \tilde{f}(x,y,v) \\[2ex] y\,\dfrac{\partial v}{\partial y} = \tilde{g}(x,y,v) \end{cases} ,$$

donde $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ son holomorfas en un polidisco $B_1(0,\gamma_1') \times B_1(0,\gamma_2') \times B_1(0,\varepsilon')$ y satisfacen $\tilde{f}(x,y,0) = \tilde{g}(x,y,0) = 0$ .

<u>Demostración</u>: Reemplazando $u$ por $v + \phi_o(x,y)$ en $(S_1)$ , se obtiene:

$$x \frac{\partial v}{\partial x} + x \frac{\partial \phi_o}{\partial x} (x,y) = f(x,y,v + \phi_o(x,y))$$

$$y \frac{\partial v}{\partial y} + y \frac{\partial \phi_o}{\partial y} (x,y) = g(x,y,v + \phi_o(x,y)) ,$$

y como $\phi_o(x,y)$ es solución de $(S_1)$ , tenemos

$$x \frac{\partial v}{\partial x} = \tilde{f}(x,y,v)$$

$$y \frac{\partial v}{\partial x} = \tilde{g}(x,y,v)$$

donde

$$\tilde{f}(x,y,v) = f(x,y,v + \phi_o(x,y)) - f(x,y,\phi_o(x,y))$$

y

$$\tilde{g}(x,y,v) = g(x,y,v + \phi_o(x,y)) - g(x,y,\phi_o(x,y)) .$$

Notemos que, como $\phi_o(0,0) = 0$ y las funciones $f$ y $g$ son holomorfas en un conjunto de la forma $B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,\gamma_2) \times B_1(0,\varepsilon)$ , entonces, existen números positivos $\gamma_1',\gamma_2',\varepsilon'$ , tales que para $x \in B_1(0,\gamma_1')$ , $y \in B_1(0,\gamma_2')$ , $v \in B_1(0,\varepsilon')$ se tiene, $v + \phi_o(x,y) \in B_1(0,\varepsilon)$ y por lo tanto $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ están bien definidas en $B_1(0,\gamma_1') \times B_1(0,\gamma_2') \times B_1(0,\varepsilon')$ . Además es claro que $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ son holomorfas en esta última vecindad y satisfacen $\tilde{f}(x,y,0) = \tilde{g}(x,y,0) = 0$ .

La completa integrabilidad de $(\tilde{S}_1)$ se verifica a través de un cálculo rutinario que omitiremos.

q.e.d.

Usando el Teorema 1.1 y el Lema 1.2, podemos establecer el siguiente resultado:

TEOREMA 1.3. Consideremos el sistema completamente integrable $(S_1)$, donde suponemos $f$ y $g$ holomorfas en $B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,\gamma_2) \times B_1(0,\varepsilon)$, $f(0,0,0) = g(0,0,0) = 0$ y además $\frac{\partial f}{\partial u}(0,0,0) \notin \mathbb{Q}_{\leq 0} \cup \mathbb{N}$ ó $\frac{\partial g}{\partial u}(0,0,0) \notin \mathbb{Q}_{\leq 0} \cup \mathbb{N}$. Entonces, existe una serie formal

$$P(x,y,z) = P_o(x,y) + z + \sum_{n\geq 2} P_n(x,y)z^n ,$$

donde $P_o(x,y)$, $P_n(x,y)$, $(n \geq 2)$, son holomorfas en $B_1(0,\gamma_1') \times B_1(0,\gamma_2')$ para ciertos $\gamma_1'$ y $\gamma_2'$, tal que la substitución $u = P(x,y,z)$ transforma $(S_1)$ en un sistema lineal de la forma

$$(\widetilde{L}_1) \quad \begin{cases} x \dfrac{\partial z}{\partial x} = a(x,y)z \\ \\ y \dfrac{\partial z}{\partial y} = b(x,y)z . \end{cases}$$

<u>Demostración</u>: Por el Lema 1.2, haciendo $u = v + \phi_o(x,y)$, $(S_1)$ se reduce al sistema $(\widetilde{S}_1)$.

Por otro lado, como

$$\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial v}(0,0,0) = \frac{\partial f}{\partial u}(0,0,\phi_o(0,0)) = \frac{\partial f}{\partial u}(0,0,0) \notin \mathbb{Q}_{\leq 0}$$

o

$$\frac{\partial \widetilde{g}}{\partial v}(0,0,0) = \frac{\partial g}{\partial u}(0,0,\phi_o(0,0)) = \frac{\partial g}{\partial u}(0,0,0) \notin \mathbb{Q}_{\leq 0} ,$$

aplicando el Teorema 1.1 a $(\widetilde{S}_1)$, sabemos que la serie formal

$z + \sum_{n\geq 2} \phi_n(x,y)z^n$ , con coeficientes $\phi_n(x,y)$ holomorfos en $B_1(0,\gamma_1') \times B_1(0,\gamma_2')$ , transforma $(\widetilde{S}_1)$ en su parte lineal

$$x \frac{\partial z}{\partial x} = a(x,y)z$$

$$y \frac{\partial z}{\partial y} = b(x,y)z \ .$$

Finalmente, queda claro que la substitución

$$u = P(x,y,z) = \phi_o(x,y) + z + \sum_{n\geq 2} \phi_n(x,y)z^n ,$$

lleva $(S_1)$ al sistema lineal $(\widetilde{L}_1)$ .

q.e.d.

(OBSERVACION. El sistema $(\widetilde{L}_1)$ no necesariamente es la parte lineal de $(S_1)$) .

Habiendo conseguido la linealización formal de $(S_1)$ , si la serie $P(x,y,z)$ resulta convergente en una vecindad del origen de $\mathbb{C}^3$ , podemos relacionar a través de $P(x,y,z)$ , las soluciones de $(\widetilde{L}_1)$ , que son factibles de encontrar, con soluciones de $(S_1)$ . En efecto, siendo $(\widetilde{S}_1)$ un sistema completamente integrable donde $\widetilde{f}(x,y,0) = \widetilde{g}(x,y,0) = 0$ , cuando consideramos la relación (2) para $n = 1$ , (ver Capítulo II, Apartado 1), se desprende la completa integrabilidad del sistema $(\widetilde{L}_1)$ .

Ahora bien, un sistema de Pfaff lineal como $(\widetilde{L}_1)$ puede ser transformado en

$$x \frac{\partial \omega}{\partial x} = \tilde{a}\omega$$

$$y \frac{\partial \omega}{\partial y} = \tilde{b}\omega ,$$

donde $\tilde{a},\tilde{b}$ son números complejos. Esto es consecuencia de un teorema general para sistemas de Pfaff lineales, cuya demostración se encuentra en un artículo de Yoshida y Takano (ver [3], Pág. 187, Teor. 6) y que enunciaremos a continuación:

TEOREMA. Consideremos un sistema completamente integrable

$$dX = \left( \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i(x)}{x_i} dx_i \right) X ,$$

donde $X$ es una matriz incógnita $m \times m$ y $P_i(x)$ una matriz $m \times m$ holomorfa en una vecindad de $0 \in \mathbb{C}^n$. (OBSERVACION. $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$)). Entonces, existe una matriz invertible $U(x)$, holomorfa en una vecindad del origen de $\mathbb{C}^n$ y matrices diagonales $L_i$, $i = 1, \ldots, n$, cuyas componentes son enteros no negativos, tal que la sustitución

$X = U(x) x_1^{L_1} \ldots x_n^{L_n} Z$ transforma el sistema anterior en el sistema

$$dZ = \left( \sum_{i=1}^{n} \frac{B_i}{x_i} dx_i \right) Z ,$$

donde $B_i$, $i = 1, \ldots, n$, son matrices constantes que satisfacen $B_i B_j = B_j B_i \quad \forall\, i,j$. El cálculo de las matrices $B_i, L_i$ y los coeficientes en la serie de potencias para $U(x)$ puede realizarse efectuando operaciones algebraicas.

Por lo tanto, aplicando este teorema al sistema $(\tilde{L}_1)$, podemos asegurar que existe una función $u(x,y)$, holomorfa en una vecindad del origen de $\mathbb{C}^2$ y números enteros no negativos $\ell_1, \ell_2$ , tal que la sustitución $z = u(x,y)x^{\ell_1} y^{\ell_2} \omega$ lleva $(\tilde{L}_1)$ al sistema

$$x \frac{\partial \omega}{\partial x} = \tilde{a}\omega$$

$$y \frac{\partial \omega}{\partial y} = \tilde{b}\omega ,$$

donde $\tilde{a},\tilde{b} \in \mathbb{C}$ , para el cual toda solución es de la forma $\omega(x,y) = $
$= cx^{\tilde{a}} y^{\tilde{b}}$ .

Esto último pone de manifiesto la utilidad de linealizar el sistema $(S_1)$ , lo que bajo ciertas restricciones, hemos conseguido al menos formalmente.

OBSERVACION. Entre los resultados previos utilizados para construir la serie formal $P(x,y,z) = z + \sum_{n\geq 2} \phi_n(x,y)z^n$ , que permite linealizar $(S_1)$ , de considerable extensión es la demostración del Lema 2.1 (Capítulo II). Este Lema y su consecuencia, el Teorema 3.1 (Capítulo II), pudieron haberse evitado recurriendo a un resultado del artículo de Gérard y Levelt, (ver [4], Pág. 164, Teor. 4.1 y Pág. 171, Nota 4.5), del cual se desprende como caso particular que toda solución formal de un sistema de la forma

$$x \frac{\partial z}{\partial x} = a(x,y)z + \alpha(x,y)$$

$$y \frac{\partial z}{\partial y} = b(x,y)z + \beta(x,y) ,$$

converge donde los coeficientes $a, \alpha$, $b$ y $\beta$ son holomorfos.

Cuando el sistema que deseamos linealizar es,

$$x\,\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,y,u)$$

$$y^q\,\frac{\partial u}{\partial y} = g(x,y,u) \quad , \qquad (q \geq 2)$$

no tenemos un teorema que garantice la existencia de una solución para un sistema del tipo

$$x\,\frac{\partial z}{\partial x} = a(x,y)z + \alpha(x,y)$$

$$y^q\,\frac{\partial z}{\partial y} = b(x,y)z + \beta(x,y) \quad ,$$

holomorfa en todo el conjunto donde $a, \alpha, b$ y $\beta$ son holomorfas. Por lo tanto, en este punto se rompe la analogía con el procedimiento usado para linealizar $(S_1)$ y cobra importancia el Lema 2.1 (Capítulo II), que ofrece las siguientes ventajas:

1°) Permitió dar una demostración alternativa del Teorema 3.1, (Capítulo II), en lugar de recurrir al resultado de Gérard y Levelt ya citado ([4]).

2°) Permitió demostrar el Teorema 4.1 (Capítulo II), mediante el cual construimos los sistemas $(*)'_n$ , (ver Capítulo III, Apartado 2), con sus respectivas soluciones $z_n(x,y)$ holomorfas en un mismo polidisco centrado en el origen de $\mathbb{C}^2$ .

Como veremos en el Apartado siguiente, las funciones $z_n(x,y)$ definen una serie formal que linealiza el sistema

$$x\,\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,y,u)$$

$$y^q\,\frac{\partial u}{\partial y} = g(x,y,u) \quad .$$

2. Teorema de linealización en el caso $p = 1$ , $q \geq 2$ .

Estableceremos resultados análogos a los Teoremas 1.1 y 1.2 del Apartado anterior.

TEOREMA 2.1. Sea

$$(S_2) \quad \begin{cases} x \dfrac{\partial u}{\partial x} = f(x,y,u) \\ \\ y^q \dfrac{\partial u}{\partial y} = g(x,y,u) \end{cases}$$

un sistema de Pfaff completamente integrable, donde $f$ y $g$ son holomorfas en $B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,\gamma_2) \times B_1(0,\varepsilon)$ , $f(x,y,0) = g(x,y,0) = 0$ y $\dfrac{\partial f}{\partial u}(0,0,0) \notin \mathbb{R}_{\leq 0}$ . Entonces existe una serie formal

$$P(x,y,z) = z + \sum_{n\geq 2} P_n(x,y)z^n ,$$

con coeficientes $P_n(x,y)$ holomorfos en una vecindad $B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,\rho)$ , $(0 < \rho \leq \gamma_2)$ , tal que la substitución $u = P(x,y,z)$ linealiza $(S_2)$ a su parte lineal

$$(L_2) \quad \begin{cases} x \dfrac{\partial z}{\partial x} = a_1(x,y)z \\ \\ y^q \dfrac{\partial z}{\partial y} = b_1(x,y)z . \end{cases}$$

Demostración: Consideremos la serie formal

$$P(x,y,z) = z + \sum_{n\geq 2} \phi_n(x,y)z^n ,$$

donde $\phi_n(x,y)$ es la solución del sistema $(*)'_n$ definido en el Apartado 2 del Capítulo III, la cual es holomorfa en $B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,\rho)$ .

El resto de la demostración continúa igual que la del Teorema 1.1.

q.e.d.

Si en el teorema anterior no se satisface la hipótesis $f(x,y,0) = g(x,y,0) = 0$ , recurrimos a un teorema que aparece en [1], (Pág. 254, Teor, 2.7) y que adaptado al sistema $(S_2)$ afirma lo siguiente:

Si el sistema

$$(S_2) \quad \begin{cases} x \dfrac{\partial u}{\partial x} = f(x,y,u) \\ \\ y^q \dfrac{\partial u}{\partial y} = g(x,y,u) \end{cases}$$

es completamente integrable, $f$ y $g$ holomorfas en un polidisco que contiene al origen de $\mathbb{C}^3$ , $f(0,0,0) = g(0,0,0) = 0$ y $\dfrac{\partial f}{\partial u}(0,0,0) \notin \mathbb{N}_0$ ; entonces, existe una única solución $\phi_0(x,y)$ de $(S_2)$ , holomorfa en una vecindad del origen, que satisface $\phi_0(0,0) = 0$ .

Del resultado recién mencionado, se obtiene el siguiente lema:

LEMA 2.2. Si el sistema $(S_2)$ es completamente integrable con $f$ y $g$ holomorfas en un polidisco que contiene al origen de $\mathbb{C}^3$ , $f(0,0,0) =$ $= g(0,0,0) = 0$ y $\dfrac{\partial f}{\partial u}(0,0,0) \notin \mathbb{N}_0$ , entonces, la sustitución $u = v + \phi_0(x,y)$ , donde $\phi_0(x,y)$ es la solución de $(S_2)$ garantizada por el teorema citado anteriormente, transforma $(S_2)$ en el siguiente sistema de Pfaff completamente integrable:

$$(\widetilde{S}_2) \quad \begin{cases} x \dfrac{\partial v}{\partial x} = \widetilde{f}(x,y,v) \\ \\ y^q \dfrac{\partial v}{\partial y} = \widetilde{g}(x,y,v) \ , \end{cases}$$

donde $\widetilde{f}$ y $\widetilde{g}$ son holomorfas en un polidisco $B_1(0,\gamma_1') \times B_1(0,\gamma_2') \times B_1(0,\varepsilon')$ y satisfacen $\widetilde{f}(x,y,0) = \widetilde{g}(x,y,0) = 0$ .

<u>Demostración</u>: Análoga a la del Lema 1.2.

q.e.d.

A partir del Teorema 2.1 y del Lema 2.2, se obtiene:

TEOREMA 2.3. Consideremos el sistema de Pfaff completamente integrable $(S_2)$ , donde suponemos $f$ y $g$ holomorfas en $B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,\gamma_2) \times B_1(0,\varepsilon)$ $f(0,0,0) = g(0,0,0) = 0$ y además $\frac{\partial f}{\partial u}(0,0,0) \notin \mathbb{R}_{\leq 0} \cup \mathbb{N}$ . Entonces, existe una serie formal

$$P(x,y,z) = P_o(x,y) + z + \sum_{n\geq 2} P_n(x,y)z^n \ ,$$

donde $P_o(x,y)$ , $P_n(x,y)$ , $(n \geq 2)$ , son holomorfas en $B_1(0,\gamma_1') \times B_1(0,\rho)$ para ciertos $\gamma_1'$ y $\rho$ , tal que la sustitución $u = P(x,y,z)$ reduce $(S_2)$ a un sistema lineal de la forma

$$(\widetilde{L}_2) \quad \begin{cases} x\,\dfrac{\partial z}{\partial x} = a(x,y)\,z \\ \\ y^q\,\dfrac{\partial z}{\partial y} = b(x,y)\,z\ . \end{cases}$$

Demostración: Análoga a la del Teorema 1.3.

q.e.d.

Ahora bien, para el sistema $(\widetilde{L}_2)$ , que como $(\widetilde{L}_1)$ es completamente integrable, sabemos como son las soluciones en virtud de una proposición cuya demostración puede verse en ([1]), (Pág. 232, Prop. 5.2). Esta afirma que las soluciones de $(\widetilde{L}_2)$ son de la forma:

$$z(x,y) = cu(x,y)\,x^{\alpha}y^{\beta}e^{Q\left(\frac{1}{y}\right)},$$

donde $c,\alpha,\beta$ son constantes en $\mathbb{C}$ , $u(x,y)$ es holomorfa en una vecindad del origen de $\mathbb{C}^2$ y $Q$ es un polinomio de grado $q-1$ .

Nuevamente queda en evidencia el interés por linealizar el sistema $(S_2)$ , pues, si la serie formal $P(x,y,z)$ resulta convergente, nos permitiría relacionar las soluciones de $(\widetilde{L}_2)$ , cuya forma conocemos, con soluciones de $(S_2)$ .

3. Teorema de linealización en el caso $p = 1$ , $q = 0$ .

TEOREMA 3.1. Sea

$$(S_3)\quad \begin{cases} x\,\dfrac{\partial u}{\partial x} = f(x,y,u) \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = g(x,y,u) \end{cases}$$

un sistema de Pfaff completamente integrable, donde $f$ y $g$ son holomorfas en $B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,\gamma_2) \times B_1(0,\varepsilon)$ , $f(x,y,0) = g(x,y,0) = 0$ y $\dfrac{\partial f}{\partial u}(0,0,0) \notin \mathbb{Q}_{\leq 0}$ .

Entonces, existe una serie formal

$$P(x,y,z) = z + \sum_{n\geq 2} P_n(x,y)z^n ,$$

con coeficientes $P_n(x,y)$ holomorfos en $B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,\gamma_2)$ , tal que la sustitución $u = P(x,y,z)$ linealiza $(S_3)$ a su parte lineal

$$(L_3)\quad \begin{cases} x\,\dfrac{\partial z}{\partial x} = a_1(x,y)z \\ \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = b_1(x,y)z\ . \end{cases}$$

Demostración: Consideremos la serie formal

$$P(x,y,z) = z + \sum_{n\geq 2} \phi_n(x,y)z^n ,$$

donde $\phi_n(x,y)$ es la solución del sistema $(*)''_n$ definido en el Apartado 3 del Capítulo III, la cual es holomorfa en $B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,\gamma_2)$ .

La demostración continúa igual que la del Teorema 1.1.

q.e.d.

Cuando en el teorema anterior no se cumple la hipótesis $f(x,y,0) = g(x,y,0) = 0$ , mediante la sustitución $u = v + \phi_o(x,y)$ , donde $\phi_o(x,y)$ es la solución de

$$x\,\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,y,u)$$

$$y\,\frac{\partial u}{\partial y} = yg(x,y,u)$$

que satisface $\phi_o(0,0) = 0$ , (Corolario 2.4, Pág. 253, [1]), el sistema anterior se transforma en

$$x\,\frac{\partial v}{\partial x} = \tilde{f}(x,y,v)$$

$$y\,\frac{\partial v}{\partial y} = \tilde{g}(x,y,v) \quad ,$$

con $\tilde{f}(x,y,0) = \tilde{g}(x,y,0) = 0$ .

Como $\tilde{g}(x,y,v) = yg(x,y,u + \phi_o(x,y)) - yg(x,y,\phi_o(x,y))$ , este último sistema equivale a

$$x\,\frac{\partial v}{\partial x} = \approx{f}(x,y,v)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \approx{g}(x,y,v) \quad ,$$

donde $\overset{\approx}{f}(x,y,v) = \tilde{f}(x,y,v)$ y $\overset{\approx}{g}(x,y,v) = g(x,y,u + \phi_o(x,y)) - g(x,y,\phi_o(x,y))$ , al cual podemos aplicar el Teorema 3.1.

De este modo, tendremos que para el sistema $(S_3)$, (en el caso $f(x,y,0 \not\equiv 0$ o $g(x,y,0) \not\equiv 0)$, la serie formal

$$P(x,y,z) = \phi_o(x,y) + z + \sum_{n\geq 2} \phi_n(x,y)z^n$$

con coeficientes holomorfos en un polidisco $B_1(0,\gamma_1') \times B_1(0,\gamma_2')$, lo linealiza mediante la sustitución $u = P(x,y,z)$, a un sistema de la forma

$$(\widetilde{L}_3) \quad \begin{cases} x \dfrac{\partial z}{\partial x} = a(x,y)z \\ \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = b(x,y)z \ . \end{cases}$$

Este último sistema, que es completamente integrable, puede ser llevado mediante una transformación $z = \widetilde{z}(x,y)\omega$, donde $\widetilde{z}(x,y)$ es holomorfa y no nula en una vecindad del origen, (ver [7], Pág. 62), a un sistema del tipo

$$x \frac{\partial \omega}{\partial x} = \widetilde{a}(x)\omega$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = 0 \ .$$

Por otra parte, sabemos que las soluciones de la ecuación

$$x \frac{\partial \omega}{\partial x} = \widetilde{a}(x)\omega$$

son de la forma $\omega(x) = c \cdot x^{\widetilde{a}(0)}\widetilde{\omega}(x)$, con $\widetilde{\omega}(x)$ holomorfa y no nula en una vecindad del origen, $c \in \mathbb{C}$, (ver [2], Pág. 25), lo cual nos permite expresar las soluciones de $(\widetilde{L}_3)$ del siguiente modo

$$z(x,y) = c\cdot\tilde{z}(x,y)\hat{\omega}(x,y)x^{\tilde{a}(0)} .$$

Así, de resultar convergente la serie $P(x,y,z)$ , podremos transformar las soluciones de $(\tilde{L}_3)$ en soluciones de $(S_3)$ .

No serán incluídos en este trabajo los casos $p \geq 2$ , $q \geq 2$ y $p \geq 2$ , $q = 0$ ; pues, para establecer resultados de linealización formal análogos a los recién expuestos, necesitamos imponer condiciones muy restrictivas a las funciones $f(x,y,u)$ y $g(x,y,u)$ .

El caso $p = q = 0$ no presenta dificultades y es posible obtener un resultado análogo al Teorema 1.3 del presente Capítulo. Esta vez es el Teorema de Frobenius, (ver [8], Pág. 302), el que nos asegura la existencia de soluciones holomorfas en una misma vecindad del origen de $\mathbb{C}^2$ , para los sistemas

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (1 - n)a_1(x,y)z + h_n(x,y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (1 - n)b_1(x,y)z + k_n(x,y) ,$$

que se construyen a partir de

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,y,u)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = g(x,y,u) .$$

Como la demostración de este resultado es análoga al caso $p = q = 1$ , no tiene interés incluirla en estas páginas.

## CAPITULO V

## EJEMPLOS Y PROBLEMAS POR INVESTIGAR

### 1. Ejemplos.

No es inmediato, en general, dar ejemplos de sistemas de Pfaff que satisfagan la condición de completa integrabilidad y menos aún mostrar la serie formal

$$P(x,y,z) = z + \sum_{n\geq 2} \phi_n(x,y)z^n$$

que linealiza al sistema (*) .

A continuación, daremos algunos ejemplos para sistemas de la forma

$$x^p \frac{\partial u}{\partial x} = f(x,y,u) = a_1(x,y)u + a_2(x,y)u^2$$

$$y^q \frac{\partial u}{\partial y} = g(x,y,u) = b_1(x,y)u + b_2(x,y)u^2 .$$

(1) En el caso $p = q = 1$ , consideremos el siguiente sistema completamente integrable:

$$x \frac{\partial u}{\partial x} = (1 + xy)u + (2xy + x^2y^2)u^2$$

$$y \frac{\partial u}{\partial y} = (2 + xy)u + (3xy + x^2y^2)u^2 ,$$

a partir del cual definimos $(*)_2$ , es decir,

$$x \frac{\partial z}{\partial x} = -(1 + xy)z + 2xy + x^2y^2$$

$$y \frac{\partial z}{\partial y} = -(2 + xy)z + 3xy + x^2y^2 ,$$

cuya solución es $\phi_2(x,y) = xy$ .

En general, las soluciones de los sistemas $(*)_n$ vienen dadas por $\phi_n(x,y) = x^{n-1}y^{n-1}$ y por lo tanto

$$P(x,y,z) = z + \phi_2(x,y)z^2 + \phi_3(x,y)z^3 + \ldots =$$

$$= z + xyz^2 + x^2y^2z^3 + \ldots = \frac{z}{1 - xyz} .$$

Es decir, la serie $P(x,y,z)$ , en principio formal, resulta convergente en una vecindad del origen de $\mathbb{C}^3$ .

(2) En el caso $p = 1$ , $q \geq 2$ , consideremos el siguiente sistema completamente integrable:

$$x \frac{\partial u}{\partial x} = u + (1 + 2x)u^2$$

$$y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = u + (1 + x)u^2 .$$

El sistema $(*)_2$ es:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} = -z + 1 + 2x$$

$$y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = -z + 1 + x ,$$

y su solución, $\phi_2(x,y) = 1 + x$ .

En general, las soluciones de los sistemas $(*)_n$ vienen dadas por $\phi_n(x,y) = (1+x)^{n-1}$ y por lo tanto

$$P(x,y,z) = z + (x+1)z^2 + (x+1)^2 z^3 + \ldots = \frac{z}{1-(1+x)z} .$$

Nuevamente la serie $P(x,y,z)$ resultó convergente en una vecindad del origen de $\mathbb{C}^3$ .

En realidad no es casualidad que en los dos ejemplos anteriores se obtengan series convergentes, pues, dado un sistema completamente integrable de la forma

$$x^p \frac{\partial u}{\partial x} = a_1(x,y)u + a_2(x,y)u^2$$

$$y^q \frac{\partial u}{\partial y} = b_1(x,y)u + b_2(x,y)u^2 \quad , \quad \text{con} \quad p,q \in \mathbb{N}_o \quad ,$$

si el sistema

$$(*)_2 \quad \begin{cases} x^p \dfrac{\partial z}{\partial x} = -a_1(x,y)z + a_2(x,y) \\ \\ y^q \dfrac{\partial z}{\partial y} = -b_1(x,y)z + b_2(x,y) \end{cases}$$

admite solución $\phi_2(x,y)$ holomorfa en una vecindad $B_1(0,\gamma_1) \times B_1(0,\gamma_2)$ , entonces, las funciones $\phi_n(x,y)$ definidas por $\phi_n(x,y) = \phi_2(x,y)^{n-1}$ , serán soluciones de los sistemas $(*)_n$ para todo $n \geq 2$ . En efecto, supongamos que las funciones $\phi_2, \ldots, \phi_{n-1}$ ; definidas por $\phi_2(x,y) = \phi_2(x,y), \ldots, \phi_{n-1}(x,y) = \phi_2(x,y)^{n-2}$ ; son soluciones de los sistemas $(*)_2, \ldots, (*)_{n-1}$ respectivamente y probemos que $\phi_n$ , definida por $\phi_n(x,y) = \phi_2(x,y)^{n-1}$ es solución de

$$(*)_n \begin{cases} x^p \dfrac{\partial z}{\partial x} = (1-n)a_1(x,y)z + h_n(x,y) \\ \\ y^q \dfrac{\partial z}{\partial y} = (1-n)b_1(x,y)z + k_n(x,y) \ . \end{cases}$$

Para esto, tengamos en cuenta que

$$h_n(x,y) = a_2(x,y) \cdot \sum_{j_1+j_2=n} \phi_{j_1}(x,y) \cdot \phi_{j_2}(x,y) \ ,$$

(donde $\phi_1 \equiv 1$ y $\phi_2, \ldots, \phi_{n-1}$ son las soluciones de los sistemas $(*)_2, \ldots, (*)_{n-1}$) , y reemplazemos $z$ por $\phi_n(x,y)$ en $(*)_n$ . Obtenemos por una parte

$$x^p \frac{\partial \phi_n}{\partial x} = (n-1)\phi_2^{n-2} \, x^p \frac{\partial \phi_2}{\partial x} = (n-1)\phi_2^{n-2} \cdot (-a_1\phi_2 + a_2) =$$

$$= (1-n)a_1\phi_2^{n-1} + a_2 \cdot (n-1)\phi_2^{n-2} \ ,$$

y por otra

$$(1-n)a_1\phi_n + h_n = (1-n)a_1\phi_2^{n-1} + a_2 \cdot \sum_{j_1+j_2=n} \phi_{j_1} \cdot \phi_{j_2} =$$

$$= (1-n)a_1\phi_2^{n-1} + a_2 \cdot (n-1)\phi_2^{n-2} \ ,$$

por lo tanto,

$$x^p \frac{\partial \phi_n}{\partial x} = (1-n)a_1\phi_n + h_n \ .$$

Análogamente se prueba que

$$y^q \frac{\partial \phi_n}{\partial y} = (1 - n) b_1 \phi_n + k_n \ ,$$

es decir, $\phi_n(x,y)$ es solución de $(*)_n$ .

Teniendo esto último en cuenta, es obvio que la serie formal $P(x,y,z) = z + \sum_{n \geq 2} \phi_n(x,y) z^n$ , converge en una vecindad del origen de $\mathbb{C}^3$ , ya que

$$P(x,y,z) = z + \sum_{n \geq 2} \phi_2(x,y)^{n-1} z^n = \frac{z}{1 - \phi_2(x,y)\ z} \ ,$$

cuando $|\phi_2(x,y) \cdot z| < 1$ .

Hemos demostrado así, para una cierta clase de sistemas de Pfaff, que la serie formal $P(x,y,z)$ , cuya existencia se garantiza en los Teoremas 1.1, 2.1 y 3.1 del Capítulo IV, es convergente, es decir, se trata de una verdadera transformación holomorfa que permite linealizar un sistema de Pfaff.

En seguida daremos algunos ejemplos de sistemas de Pfaff completamente integrables donde

$$f(x,y,u) = a_1(x,y)u + a_2(x,y)u^2 + a_3(x,y)u^3$$

y

$$g(x,y,u) = b_1(x,y)u + b_2(x,y)u^2 + b_3(x,y)u^3 \ .$$

(3) Para $p = q = 1$ , consideremos el siguiente sistema completamente integrable:

$$x\,\frac{\partial u}{\partial x} = u + 2xyu^2 + 2x^2y^2u^3$$

$$y\,\frac{\partial u}{\partial y} = 2u + 3xyu^2 + 3x^2y^2u^3 \ .$$

Calculando las soluciones $\phi_2, \ldots, \phi_5$ de los sistemas $(*)_2, \ldots, (*)_5$ , obtenemos $\phi_2(x,y) = xy$ , $\phi_3(x,y) = \frac{3}{2}x^2y^2$ , $\phi_4(x,y) = \frac{7}{3}x^3y^3$ , $\phi_5(x,y) = \frac{31}{3}x^4y^4$ y por lo tanto la serie formal $P(x,y,z)$ comienza así:

$$P(x,y,z) = z + xyz^2 + \frac{3}{2}x^2y^2z^3 + \frac{7}{3}x^3y^3z^4 + \frac{31}{3}x^4y^4z^5 + \ldots$$

(4) Para $p = 1$ , $q \geq 2$ , el sistema

$$x\,\frac{\partial u}{\partial x} = u + 3u^2 + 3u^3$$

$$y^2\,\frac{\partial u}{\partial y} = 2u + 6u^2 + 6u^3$$

es completamente integrable.

Calculando $\phi_2, \ldots, \phi_5$ , se obtiene $\phi_2(x,y) = 3$ , $\phi_3(x,y) = \frac{21}{2}$ , $\phi_4(x,y) = \frac{117}{3}$ , $\phi_5(x,y) = \frac{1197}{4}$ y por lo tanto los primeros cinco térmi - nos de la serie formal $P(x,y,z)$ que linealiza al sistema, son:

$$P(x,y,z) = z + 3z^2 + \frac{21}{2}z^3 + \frac{117}{3}z^4 + \frac{1197}{4}z^5 + \ldots$$

En los ejemplos (3) y (4), no es evidente que la serie $P(x,y,z)$ resulte convergente, en todo caso, calculando en un computador una gran cantidad de términos de la sucesión $\sqrt[n]{c_n}$ , (donde $c_n$ = coeficiente de $x \cdot y \cdot z$ en $\frac{P(x,y,z)}{z}$ en el ejemplo (3), y $c_n$ = coeficiente de $z$ en $P(x,y,z)$ en el ejemplo (4)), se observa una tendencia a estabilizarse, lo cual significaría la convergencia de $P(x,y,z)$ .

La misma situación se observa en otros ejemplos estudiados.

## 2. Problemas por investigar.

Denotaremos nuevamente por (*) al sistema

$$x^p \frac{\partial u}{\partial x} = f(x,y,u)$$

$$y^q \frac{\partial u}{\partial y} = g(x,y,u) \ .$$

(1) Para $p = q = 1$ en (*) , donde $f$ y $g$ son holomorfas en una vecindad del origen de $\mathbb{C}^3$ y toman valores en $\mathbb{C}$ , se conjetura la convergencia de la serie formal $P(x,y,z)$ dada por el Teorema 1.1 del Capítulo IV.

(2) Para $p = 1$ , $q \geq 2$ en (*) , con $f$ y $g$ holomorfas en una vecindad del origen de $\mathbb{C}^3$ y a valores en $\mathbb{C}$ , se conjetura la convergencia de la serie formal $P(x,y,z)$ dada por el Teorema 2.1 del Capítulo IV.

(3) Investigar la linealización, primero formal, del sistema (*) cuando $p \geq 2$ ó $q \geq 2$ donde $f$ y $g$ son holomorfas en una vecindad del origen de $\mathbb{C}^3$ y toman valores en $\mathbb{C}$ .

Si es posible la linealización formal, investigar la convergencia de la transformación $P(x,y,z)$ .

(4) Investigar la linealización del sistema (*) para los distintos valores de $p$ y $q$ , cuando $f$ y $g$ son holomorfas en una vecindad del origen de $\mathbb{C}^3$ y toman valores en $\mathbb{C}^m$ .

La mayor dificultad que surge en este caso para conseguir la lineализación formal, radica principalmente en poder demostrar la completa integrabilidad de los sistemas $(*)_n$ , que ya en el caso $f$ y $g$ a valores en $\mathbb{C}$ , dió bastante trabajo

(5) Investigar la linealización del sistema $(*)$ , cuando $f$ y $g$ son holomorfas en $S_1 \times S_2 \times B_m(0,\varepsilon)$ , donde

$$S_i = \{x \in \mathbb{C} : \theta_{1,i} < \text{Arg } x < \theta_{2,i} \ ; \ 0 < |x| < r_i\} \ ,$$

$(i = 1,2)$ , y toman valores en $\mathbb{C}^m$ .

# B I B L I O G R A F I A

[1] Gérard, R., y Sibuya, Y., Etude de certains systemes de Pfaff avec singularités. Lecture Notes in Mathematics, 712, 131-288, 1979.

[2] Wasow, W., Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations. Interscience Publishers, U.S.A., 1965.

[3] Yoshida, M., y Takano, K., On a Linear System of Pfaffian Equations with Regular Singular Points. Funkcialaj Ekvacioj, 19 (1976) 175-189.

[4] Gérard, R., y Levelt, H.M., Sur les Connexions a Singularités Régulieres dans le cas de Plusieurs Variables. Funkcialaj Ekvacioj, 19 (1976) 149-173.

[5] Cartan, H., Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes. Hermann, Paris, 1961.

[6] Apostol, T.M., Análisis Matemático. Reverté, 1972.

[7] González, P., Determination de la dimension de l'espace vectoriel des solutions holomorphes de certains systemes différentiels singuliers. Thése 3eme cycle, Université Louis Pasteur, Strasbourg, 1983.

[8] Dieudonné, J., Fundamentos de Análisis Moderno. Reverte, 1966.

[9] Arnold, V., Chapitres Supplémentaires de la Théorie des Equations Différentielles Ordinaires. Traduction francaise, Editions MIR, 198(