

Violación de la invariancia Lorentz: Teoría y Fenomenología

Modelos más allá de la Relatividad Especial

Memoria de trabajo presentada por **Beatriz Romeo Zaragozano**
para optar al título de **Máster en Física Teórica** por la
Universidad Autónoma de Madrid

Trabajo dirigido por **José Luis Cortés Azcoiti** y **José Manuel Carmona Martínez** de
la
Universidad de Zaragoza

Departamento de Física Teórica
Universidad Autónoma de Madrid

Instituto de Física Teórica
CSIC-UAM

4 de Octubre de 2012

Índice

1. Introducción	1
1.1. Motivaciones para una teoría de la gravedad cuántica	1
1.2. Principales aproximaciones al problema	2
1.3. Fenomenología de la gravedad cuántica	4
1.3.1. Relaciones de dispersión modificadas	8
1.3.2. El papel de la escala de Planck	9
2. Desviaciones respecto a la invariancia Lorentz	12
2.1. ¿Por qué testear la invariancia Lorentz?	12
2.2. Lo que entendemos por violación de la invariancia Lorentz	13
2.3. Violación Lorentz y el principio de equivalencia	15
2.4. Modelos teóricos	17
2.4.1. Marcos dinámicos	18
2.4.2. Marcos cinemáticos	22
2.5. Violación Lorentz y naturalidad	24
2.6. Tests de Violación Lorentz	26
2.6.1. Umbrales de reacciones	27
2.6.2. Violación Lorentz en neutrinos	32
3. Teorías DSR	35
3.1. Motivación e idea principal de DSR	35
3.2. DSR como límite de Gravedad Cuántica	38
3.3. DSR y el álgebra de κ -Poincaré	42
3.3.1. Bases del álgebra cuántica κ -Poincaré	42
3.3.2. Espacio-tiempo en DSR	45
3.4. Observaciones relevantes sobre DSR	46
3.5. Problemas abiertos en teorías DSR	49
4. Cinemática relativista más allá de SR	51
4.1. Cinemática relativista BSR en 1+1 dimensiones	51
4.2. Cinemática relativista BSR en 3+1 dimensiones	56
4.3. Cinemática relativista BSR no universal	59
5. Resumen y conclusiones	69

1. Introducción

1.1. Motivaciones para una teoría de la gravedad cuántica

La formulación de un marco teórico en el que las ideas fundamentales de la Mecánica Cuántica y de la Relatividad General coexistan de una manera consistente ha preocupado a los físicos desde hace 80 años[1]. A pesar del gran esfuerzo dedicado a la construcción de una teoría de la gravedad cuántica, todavía no se ha alcanzado este objetivo. Sin embargo, tenemos razones para mentenernos interesados en el desarrollo de una teoría cuántica para el campo gravitatorio. Las principales motivaciones tienen una naturaleza conceptual[2]. En primer lugar los *teoremas de singularidad*[3] muestran que la teoría clásica de la relatividad general es incompleta. Estas singularidades muestran que la descripción fundamental del Universo primordial, en particular las condiciones iniciales cerca del ‘big bang’, o de las últimas etapas en la evolución de los agujeros negros requiere la construcción de una nueva teoría predictiva en estos regímenes. En analogía a la mecánica cuántica en la que la inestabilidad de los átomos en la teoría clásica desapareció, hay una convicción general de que esta teoría es una teoría cuántica. No podemos dar una explicación al origen de nuestro universo sin esta teoría, por lo que la cosmología permanecerá incompleta sin la teoría de la gravedad cuántica. Otro resultado interesante que envuelve la relatividad general y la teoría cuántica es el descubrimiento de Hawking sobre la radiación térmica producida por un agujero negro. Se conoce muy poco acerca del estado final de estos sistemas, por lo que esto constituye otra tarea para una teoría de la gravedad cuántica.

Otra motivación la encontramos desde el punto de vista de la *unificación*. El Modelo Estándar de la física de partículas es una teoría cuántica de campos que ha unificado en cierto sentido todas las interacciones no gravitatorias. Aunque ha sido un modelo muy exitoso experimentalmente, hay conceptos que no se entienden muy bien más allá del nivel perturbativo; en este sentido la teoría clásica de la relatividad general está en una mejor posición.

Todos los grados de libertad no gravitatorios se describen muy bien mediante campos cuánticos, por lo que el acoplamiento de la gravedad a todas las formas de energía hace posible que la gravedad pueda ser incorporada en un marco cuántico también. De hecho, no es fácil construir una teoría unificada de todas las interacciones en la que la gravedad se mantiene clásica y el resto de campos son cuánticos (teoría semiclásica). Esto muestra la dificultad a la hora de reconciliar los conceptos clásicos y cuánticos. Dado que una teoría de la gravedad es también una teoría del espacio-tiempo, una teoría de la gravedad cuántica debe hacer declaraciones definitivas sobre el comportamiento del espacio-tiempo a pequeñas escalas. Es por esta razón que los físicos han mantenido la esperanza de que la inclusión de la

gravedad pudiera resolver el problema de las divergencias en teoría cuántica de campos. Estas divergencias aparecen para momentos altos, es decir a cortas distancias. Teorías de campos no gravitatorias vienen descritas sobre una estructura del espacio-tiempo fija (fixed background space-time), es decir sobre una estructura sin dinámica. Gravedad Cuántica aborda el propio background, por lo que sería interesante encontrar una formulación independiente del background. Si las divergencias UV en realidad tienen que ver con las pequeñas escalas del espacio-tiempo, deberían desaparecer junto con el background en esta formulación.

Una tercera motivación es el *problema del tiempo*. La teoría cuántica y la relatividad general contienen conceptos del tiempo drásticamente diferentes (y del espacio-tiempo), de hecho son realmente incompatibles. Por un lado el tiempo es un elemento externo (absoluto) en la teoría cuántica, que no viene descrito por un operador, mientras que en RG el tiempo, como parte del espacio-tiempo, es un objeto dinámico (no absoluto). Resulta evidente que la unificación de la teoría cuántica y la RG dará lugar a una modificación de nuestro concepto de tiempo.

Otra motivación la encontramos en la posibilidad de un cambio radical en física básica. Las profundas incompatibilidades que se encuentran entre las estructuras fundamentales de la relatividad general y de la teoría cuántica sugieren que la construcción de una teoría consistente de la gravedad cuántica requiere una profunda revisión de la mayoría de las ideas fundamentales en las que se apoya la física moderna.

1.2. Principales aproximaciones al problema

Existen fuertes argumentos que apoyan la idea de que el campo gravitatorio tiene una naturaleza cuántica a nivel fundamental, por lo que el principal objetivo es la construcción de una teoría cuántica de la gravedad consistente y que esté sujeta a posibles tests experimentales.

Una cuestión fundamental que surge ahora es si es posible conseguir a partir de observaciones experimentales una guía para construir esta teoría. La idea de probar de manera directa efectos a la escala de Planck es absurda. Sin embargo, es posible tener efectos macroscópicos de gravedad cuántica a escalas de energía mucho más bajas que la escala de Planck (lo que se suele denominar *signaturas reliquia* de baja energía). También es posible observar efectos asociados a los términos que corrigen a las teorías existentes, tal como términos efectivos que violen el principio de equivalencia débil. Estos efectos podrían ser medidos en el espectro de anisotropías en la radiación cósmica de fondo.

Pero uno puede pensar que una teoría realmente fundamental¹ debería tener una estructura

¹Como Heisenberg le dijo a Einstein:

From a fundamental point of view it is totally wrong to aim at basing a theory only on observable quantities. For in reality it is just the other way around. Only the theory decides about what can be observed.

‘Aber vom prinzipiellen Standpunkt aus ist es ganz falsch, eine Theorie nur auf beobachtbare Größen gründen zu wollen. Denn es ist ja in Wirklichkeit genau umgekehrt. Erst die Theorie entscheidet darüber, was man beobachten kann’(Einstein according to Heisenberg (1985, p 92))

lo suficientemente sólida como para que todos los fenómenos de baja energía, tales como las masas de las partículas o las constantes de acoplamiento, puedan ser predichas de manera unívoca. En este sentido, y dado que no hay evidencias experimentales directas todavía, la mayor parte del trabajo en gravedad cuántica se ha focalizado en la construcción de un marco consistente desde el punto de vista matemático y conceptual.

Entre las principales aproximaciones a la construcción de esta teoría se suele distinguir entre ([4],[5])

- *Relatividad general cuántica*: es el formalismo más sencillo, tanto conceptualmente como históricamente. En él se aplican heurísticamente las reglas de cuantización a la teoría clásica de la relatividad general. Este tipo de aproximación se divide a su vez en
 - *Formalismos covariantes*: en ellos se emplea la covariancia cuadridimensional en alguna etapa del formalismo. Algunos ejemplos son la teoría de perturbaciones, teorías de campos efectivas, formalismo del grupo de renormalización, y métodos de la integral de camino.
 - *Formalismos canónicos*: en este caso uno utiliza el formalismo Hamiltoniano e identifica de manera apropiada las variables canónicas así como los momentos conjugados. Ejemplos dentro de este tipo son la geometrodinámica cuántica así como loop quantum gravity.
- *String theory*: en este tipo de escenarios uno empieza con un marco cuántico unificado de todas las interacciones. Los aspectos cuánticos del campo gravitatorio solo emergen en un determinado límite en el que se pueden distinguir entre las diferentes interacciones.
- Otro tipo de escenarios en los que tanto la teoría cuántica como la relatividad general aparecen solo como ciertas situaciones límite dentro del contexto de una teoría que se origina a partir de unas ideas radicalmente diferentes a las de las teorías convencionales.

Dentro de los formalismos en los que se hace una cuantización heurística de la teoría clásica surge una cuestión fundamental, que es cuál o cuáles de las estructuras clásicas deben someterse al principio de superposición y cuáles deben permanecer siendo estructuras clásicas (absolutas, no dinámicas). Isham[5] distingue la siguiente jerarquía de las estructuras matemáticas en el modelo de espacio-tiempo que se usa en la teoría clásica de la relatividad general:

Conjunto M de puntos/sucesos del espacio-tiempo \longrightarrow estructura topológica \longrightarrow variedad diferenciable \longrightarrow estructura causal \longrightarrow estructura Lorentziana

La cuestión clave es en qué medida se debe mantener fija esta estructura clásica en la teoría cuántica. Por ejemplo, en la mayoría de los escenarios del primer tipo que hemos mencionado, el conjunto de puntos del espacio-tiempo, la estructura topológica y diferenciable, se mantienen todas fijas y solo la estructura Lorentziana se somete a fluctuaciones cuánticas.

Pero incluso dentro de este tipo de formalismos se puede contemplar la posibilidad de que manteniendo el conjunto M y la topología fijas, permitir fluctuaciones cuánticas sobre todas las posibles estructuras diferenciables que sean compatibles con una determinada topología. Incluso podemos considerar la idea de solo mantener fijo el conjunto M de puntos, y permitir fluctuaciones cuánticas sobre las topologías que se puedan construir a partir de este conjunto M , incluyendo aquellas que puedan no ser del todo compatibles con la estructura de variedad diferenciable. Y por último, también es posible imaginar que el propio conjunto de puntos esté ‘cuantizado’.

Todas estas ideas son ejemplos de lo que se conoce como cuantización “horizontal” en la que las fluctuaciones cuánticas tienen lugar solo dentro de la categoría de objetos definidos en la teoría clásica. Sin embargo, también podemos contemplar la posibilidad de una cuantización “vertical” en la que las fluctuaciones tienen lugar en una categoría más amplia. Por ejemplo una posibilidad podría ser permitir fluctuaciones en la variedad diferenciable que incluyan variedades no-conmutativas.

Estas ideas de cuantización “vertical” u “horizontal” surgen en formalismos que caen dentro del primer tipo en los que un sistema clásico se cuantiza de algún modo. Sin embargo la cuestión de cuánto de la estructura clásica del espacio-tiempo permanece en los distintos niveles de la teoría completa, es una pregunta que sigue teniendo significado en cada una de las aproximaciones de la teoría de la gravedad cuántica. Esto está relacionado con la cuestión de cual es el papel de la longitud de Planck en estas teorías.

1.3. Fenomenología de la gravedad cuántica

Podemos entender una teoría física como una estructura conceptual que usamos en orden a organizar, leer y entender la Naturaleza, y hacer predicciones a cerca de la misma. En este sentido podemos afirmar que sin la guía de los experimentos y observaciones, todas las teorías están condenadas a ser meras construcciones matemáticas sin ninguna conexión con la realidad.

En la búsqueda de una teoría de la gravedad cuántica, no sólo nos enfrentamos a problemas teóricos profundos (como por ejemplo la renormalizabilidad de las teorías gravitatorias, la posible pérdida de la unitariedad en los fenómenos gravitatorios, el significado del tiempo en QG), sino también a la falta de un input experimental. Desafortunadamente es posible que los experimentos nunca nos den una pista clara hacia la construcción de esta teoría, particularmente si nuestra intuición acerca del papel que juega la longitud de Planck, $l_p \sim 10^{-35}\text{m}$, a la hora de establecer la magnitud de los efectos característicos de la nueva teoría es correcta. Pero aun en el caso de que estos nuevos efectos fueran realmente tan pequeños debemos intentar descubrir experimentalmente posibles manifestaciones de gravedad cuántica. De hecho, la Ciencia nos ha enseñado que nuestra visión naive del mundo muchas veces es imprecisa e incompleta.

Hay dos cuestiones que nos surgen ahora[6], dónde debemos buscar efectos de gravedad cuántica y cómo debemos buscar estos efectos. Puesto que RG y la teoría cuántica son aplicables a todo tipo de materia, y dado que estas dos teorías deberían ser reemplazadas por la nueva teoría, en principio todos los efectos deberían mostrar modificaciones respecto a los resultados estándar. Por lo tanto, una respuesta trivial a las cuestiones anteriores es que cualquier experimento es también un experimento en búsqueda de efectos de gravedad cuántica. Sin embargo, no todos los fenómenos son igualmente sensibles a posibles modificaciones introducidas por QG. Por lo tanto, debemos intentar construir algún tipo de estrategia que nos diga dónde es preferible buscar estos efectos, es decir, en qué situaciones esperamos que los efectos de QG aparezcan más pronunciados (amplificados).

Los datos experimentales actuales apoyan la física estándar, datos que han sido obtenidos dentro de los dominios accesibles experimentalmente, esto es, dentro de un rango de energías, para unas determinadas velocidades, distancias, temperaturas, etc. Por lo tanto un primer intento para buscar efectos de QG es explorar nuevos regímenes, ya sea yéndonos a muy altas energías, bajas temperaturas, largas distancias, cortas o largas escalas de tiempo, etc. Este tipo de búsqueda esencialmente siempre ha estado presente en la historia de la física; para buscar nuevos efectos necesitamos explorar nuevos regímenes que no sean los estándares desde el punto de vista experimental.

Sobre la base de estos argumentos la posibilidad de una fenomenología de la gravedad cuántica[29] siempre ha sido considerada ya desde los primeros días de QG; sin embargo, ha sido durante esta última década cuando se ha mostrado un mayor esfuerzo dirigido en esta dirección.

Aunque son muy pocos, los primeros ejemplos que podemos considerar que trataban de hacer un análisis que tuviera contacto con los experimentos y observaciones, eran relevantes para entender la interacción entre la relatividad general y la mecánica cuántica. En estos primeros estudios destacan los trabajos de Chandrasekhar en 1930. De hecho, el conocido límite de Chandrasekhar[8] se obtuvo introduciendo en el análisis del colapso gravitatorio algunas propiedades cuánticas de las partículas como el principio de exclusión de Pauli. Una derivación rigurosa de este límite se podría hacer con gravedad cuántica, pero sería suficiente con utilizar uno de sus límites: el límite de gravedad clásica, en el que uno considera las propiedades cuánticas de los campos de materia (partículas) en presencia de un campo gravitatorio intenso (tratado clásicamente). De modo que testeando experimentalmente el límite de Chandrasekhar se estaría probando en cierta medida el límite de gravedad clásica de gravedad cuántica.

También encontramos estudios algo más recientes acerca de la influencia del campo gravitacional terrestre en experimentos de interferometría con materia. Este tipo de análisis también se considera relevante para el estudio del límite clásico de la gravedad cuántica. Este tipo de experimentos que comenzaron a realizarse en los 70 se conocen con el nombre de “COW experiments”, de las iniciales de Colella, Overhauser y Werner que fueron quienes los

iniciaron. La idea central de estos experimentos era estudiar las consecuencias que se derivan de la ecuación de Schrödinger en presencia del campo gravitacional terrestre, aprovechándose del hecho de que el potencial gravitatorio terrestre tiene en cuenta las contribuciones de un número enorme de partículas (todas las que componen la Tierra) y en consecuencia el campo gravitatorio resultante es lo suficientemente intenso como para introducir efectos observables.

Durante los 80 y a principios de los 90 uno encuentra los primeros ejemplos de estudios fenomenológicos que consideran candidatos a efectos de gravedad cuántica que van más allá del límite de gravedad clásica. En este tipo de estudios se consideran violaciones de la simetría CPT inducidas a escalas de energía del orden de la escala de Planck[9], o violaciones de la mecánica cuántica que son relevantes a la hora de analizar la física del sistema de kaones neutros[10].

A pesar de la importancia de estos trabajos, apenas tuvieron impacto en el desarrollo de la investigación en gravedad cuántica. El hecho de que hasta mediados de los 90 no se dedicara mucha atención a la fenomenología de gravedad cuántica es en parte debido a que muchos de estos estudios se basaban en modelos en los que la magnitud de los efectos estaban fijados por un parámetro libre adimensional, y la sensibilidad del experimento podía considerarse al nivel de este parámetro adimensional descrito como el cociente entre la longitud de Planck y la longitud característica del contexto físico relevante para el experimento. Este tipo de análisis no contribuían a establecer que los efectos de gravedad cuántica se estuvieran probando con una sensibilidad a la escala de Planck, por lo que no se consideraban como pruebas en el campo de la gravedad cuántica.

Esta situación comenzó a cambiar a finales de los 90, cuando se produjo un desarrollo muy rápido en este área. Se realizaron diversos análisis donde se describían posibles situaciones físicas en las que los efectos introducidos realmente a la escala de Planck podían ser testeados. Estos trabajos comenzaron con los análisis de observaciones de gamma-rays bursts (GRB) a energías \lesssim MeV, análisis con grandes interferómetros de luz laser, un poco más tarde se realizaron las primeras discusiones de los efectos a la escala de Planck relevantes en el análisis de ultra-high-energy cosmic rays (UHECRs), así como los primeros análisis significativos para las observaciones de rayos gamma provenientes de Blazars de la escala del TeV.

La mayoría de estos análisis consideran efectos que caracterizan desviaciones a la escala de Planck de la simetría de Lorentz clásica. La simetría Lorentz es una manifestación de la estructura clásica del espacio-tiempo de Minkowski, de modo que si se introducen modificaciones a esta estructura tales como por ejemplo discretización o no conmutatividad de las coordenadas espaciotemporales, es posible que estos cambios afecten a la simetría Lorentz. Además es posible encontrar modelos en los que la idea de tener desviaciones respecto a la simetría Lorentz no requieran necesariamente violaciones de la mecánica cuántica ordinaria, modelos que a su vez permiten testear las teorías de gravedad cuántica a nivel cinemático. Nosotros nos centraremos en la fenomenología de estos modelos que caracterizan modificaciones respecto a las simetrías espaciotemporales, ya que constituyen una forma conveniente

de testear experimentalmente posibles desviaciones respecto a las transformaciones que consideramos que son *simetrías exactas* de la Naturaleza pero que podrían estar rotas por QG.

En Teoría Cuántica de Campos la simetría Lorentz está relacionada con la simetría CPT. El teorema CPT, formulado por J.S.Bell, G.Lüders y G.Pauli hace casi 60 años, está basado tanto en la invariancia Lorentz como en las propiedades de localidad y unitariedad de la teoría. La cuestión es si la ausencia de la invariancia Lorentz afectaría a la invariancia CPT. La respuesta a esta pregunta no está muy clara. Sin embargo, nos podemos preguntar cuál de los ingredientes del teorema CPT deberíamos eliminar si queremos investigar una violación de la simetría CPT. Evidentemente no todas las hipótesis se pueden dar simultáneamente ya que en su conjunto hacen que CPT sea exacta. La respuesta a esta cuestión es muy sensible a la física que cause la rotura de la simetría CPT. Una suposición que se suele hacer es que los efectos de nueva física dominantes a bajas energías sean descritos por una teoría de campos efectiva local. En este contexto parece inevitable relajar la hipótesis de invariancia Lorentz. Esto se puede probar en teoría cuántica de campos axiomática[11]. Este resultado es lo que se conoce como “teorema anti-CPT”, que esencialmente dice que en cualquier teoría de campos relativista que sea unitaria y local, la ruptura de la simetría CPT implica la violación de la invariancia Lorentz. Sin embargo, la afirmación inversa, es decir que la violación de la simetría Lorentz implique una violación de la simetría CPT, no es en general cierta². Entonces bajo esta suposición los tests de la simetría CPT también prueban la invariancia Lorentz.

Por otro lado a mediados de los 90 comienza una época importante desde el punto de vista de la fenomenología, ya que supone la transición hacia la construcción de modelos que nos permitan invalidar las propuestas teóricas así como modelos que nos proporcionen una forma de discriminar entre los diferentes escenarios de nueva física, y no sólo que nos permitan diferenciar los efectos de nueva física respecto a los efectos de las viejas teorías.

Ligado a este desarrollo de estrategias para invalidar modelos y discriminar entre ellos, en la última década el trabajo en fenomenología de QG ha mostrado que es posible encontrar ejemplos de contextos experimentales y observacionales en los que la sensibilidad a algunos efectos introducidos genuinamente a la escala de Planck pueden estar dentro de nuestro alcance. Se han desarrollado modelos más allá de GR y de QG que muestran que es posible encontrar lo que se conoce como “signaturas reliquia” a bajas energías que pueden dar lugar a desviaciones respecto a las predicciones estándares (SM y GR) en determinados regímenes que están a nuestro alcance. Entre estos nuevos fenómenos destacamos decoherencia cuántica y colapso de estados[12], huellas de QG sobre las condiciones iniciales en cosmología[13], producción de Black-Holes en large extra dimensions a la escala del TeV[14], violación de simetrías discretas[20] y violación de simetrías espaciotemporales[16], entre otros.

²Este teorema no es cierto para aquellas teorías que no admitan una descripción como teorías de campos.

1.3.1. Relaciones de dispersión modificadas

Veamos un ejemplo sencillo que nos permite poner de manifiesto cómo estos efectos que se introducen a la escala de Planck pueden ser observados. Para ello consideremos la siguiente relación de dispersión

$$m^2 \simeq E^2 - \vec{p}^2 + \eta \vec{p}^2 \left(\frac{E^2}{E_{Pl}^2} \right), \quad (1.1)$$

donde E_{Pl} es la energía de Planck y η es un parámetro fenomenológico. Estas relaciones de dispersión modificadas quizás sean el marco cinemático más sencillo con el que se tratan de poner ligaduras a las desviaciones respecto a la simetría Lorentz a altas energías. De hecho, en distintas aproximaciones al problema de QG, la violación de la invariancia Lorentz entra a través de modificaciones de las relaciones de dispersión. Entre ellos están VEVs tensoriales en teoría de cuerdas, space-time foam, cálculos de semiclassical spin-network en Loop QG y geometría no conmutativa.

Si esta relación de dispersión es parte del marco cinemático donde las leyes de conservación de la energía y del momento no se ven modificadas, es posible encontrar importantes implicaciones sobre el espectro de rayos cósmicos. En particular, el límite GZK[17], una característica esencial del espectro de rayos cósmicos, puede verse afectado por esta modificación de las relaciones de dispersión. Este límite básicamente determina la máxima energía que pueden tener los protones de rayos cósmicos para producir piones en las colisiones con los fotones del fondo de radiación cósmica de microondas (CMB). En el cálculo de la energía umbral para la reacción $p\gamma_{CMB} \rightarrow \Delta^+ \rightarrow p\pi^0(n\pi^+)$ la corrección $\eta \vec{p}^2 E^2 / E_{Pl}^2$ en (1.1) puede ser muy significativa. La predicción estandar (manteniendo la simetría Lorentz exacta) del límite GZK es de $E_{th} \simeq 5 \times 10^{19} (w_0/1,3\text{meV})^{-1} \text{eV}$ (donde w_0 es la energía del fotón que hace de blanco), a estas energías la corrección a la escala de Planck sobre este umbral es del orden de $\eta E^4 / (\epsilon E_{Pl}^2)$, donde ϵ es la típica energía de un fotón del CMB. Para valores positivos del parámetro η esta corrección puede causar un desplazamiento de la energía umbral apreciable, que podríamos ver una vez conozcamos bien el espectro de rayos cósmicos en el rango relevante.

Además, en este contexto de la física de rayos cósmicos se puede explicar lo que se entiende por “amplificación” en el campo de la fenomenología de QG. En este caso el factor numérico que actúa como amplificación de este efecto introducido a la escala de Planck es el cociente entre la energía del protón ultra energético, que puede llegar a ser del orden de 10^{20}eV , y su energía en reposo. En este caso la amplificación no se consigue mediante la acumulación de pequeños efectos, sino encontrando un contexto donde un único efecto de nueva física esté amplificado. Por ejemplo si utilizamos este mismo efecto de modificación de la relación de dispersión a la escala de Planck para el análisis del umbral para la reacción $p + \gamma \rightarrow p + \pi$, en el caso de protones producidos en el laboratorio, que su energía puede ser del orden de unos pocos TeV, esto produce una corrección despreciable ya que el factor de amplificación en este caso es de 10^3 .

1.3.2. El papel de la escala de Planck

Además de la velocidad de la luz c y la constante de Planck h , una tercera constante, la longitud de Planck $l_{Pl} \sim 10^{-35}m$, parece jugar un papel importante para la física³. La existencia de esta nueva escala fundamental parece ser una característica común en muchos modelos de gravedad cuántica. Los ingredientes esenciales para que aparezca esta longitud mínima son la mecánica cuántica, la relatividad especial y la relatividad general[18].

Sin embargo, la teoría de la relatividad especial (SR) es hostil a la introducción de una longitud universal como constante de la naturaleza, ya que para dos sistemas de referencia diferentes la longitud no es invariante bajo transformaciones de Lorentz. Se han realizado muchos intentos para introducir una escala de longitud universal en la física[19]. En 1933 Pauli, tras un discurso sobre el problema de las divergencias en electrodinámica cuántica (QED) concluyó diciendo que no sólo el concepto de campo sino también el de espacio-tiempo debía modificarse a cortas distancias⁴.

Inspirado por esta declaración, March en 1936 fue de los primeros que trató de modificar la geometría a pequeñas distancias manteniendo la invariancia relativista (referencias en [19]). Con su método esperaba obtener una forma de eliminar las divergencias en QED. Pero fue incapaz de conectar las ideas que había desarrollado con el experimento. Unos años más tarde Heisenberg escribió un artículo sobre el significado de una longitud universal en física. Él también estaba preocupado por el problema de las divergencias en las teorías de campos relativistas. La forma en la que se regula las integrales divergentes mediante la introducción de un cutoff ultravioleta (que define la escala por encima de la cual desconocemos cuáles son los grados de libertad UV relevantes en la teoría) hasta el cual se integra, destruye la invariancia traslacional de la teoría. En 1950 Heisenberg señaló que en un futuro las relaciones de conmutación renormalizadas que describiesen el espectro de masas de las partículas deberían de contener una longitud fundamental del orden de $10^{-13}cm$. Más tarde en 1955 Heisenberg *et al.* desarrollaron una teoría no lineal de la mecánica cuántica que también contenía una escala fundamental.

Aparecen dificultades en el tratamiento de teorías de una partícula cuando se convinan la mecánica cuántica y la relatividad especial. Cuando consideramos simultáneamente el principio de incertidumbre de Heisenberg y la velocidad de propagación finita de la luz, nos encontramos con la creación y aniquilación de partículas si uno intenta saber que es lo que está ocurriendo en una región dentro de la escala de la longitud de onda Compton de la

³Una teoría que prediga la masas de las partículas elementales debe contener también una escala de longitud por razones dimensionales. Utilizando la relación de De Broglie tenemos que $mass(gr) \times speed(cm s^{-1}) = h(erg s)/wavelength (cm)$.

⁴“Wir möchten hierin einen Hinweis dafür erblicken, dass nicht nur der Feldbegriff, sondern auch der Raum-Zeit Begriff im kleinen einer grund-sätzlichen Modifikation bedarf.”(We may see herein an indication that not only the field concept, but also the space-time concept in the microscale requires a principal modification.)

partícula bajo estudio. Para partículas relativistas ($p \sim E$) la relación de incertidumbre para la posición y el momento $\Delta x \Delta p \gtrsim 1$, se puede expresar en términos de la posición de la partícula x y de su energía como $\Delta x \Delta E \gtrsim 1$, de modo que si la incertidumbre en la posición es menor que la longitud de onda Compton, es decir si $\Delta x \lesssim E^{-1}$, obtenemos que $E^{-1} \Delta E \gtrsim 1$. Esto nos está diciendo que la incertidumbre en la energía de la partícula es mucho mayor que su masa en reposo y esto hace que el concepto de partícula no esté claro. De este modo encontramos una longitud mínima para la mecánica cuántica relativista, que aparece como un límite de resolución ya que no es posible localizar a una partícula con una precisión mayor a su longitud de onda Compton. Esto significa que necesitamos una teoría de muchas partículas, es decir una teoría cuántica de campos.

El siguiente paso es introducir gravedad. La dificultad ahora es que el espacio-tiempo es dinámico, es influenciado y también afecta a las partículas y objetos que éste contiene y que lo definen. Como consecuencia la expresión para la incertidumbre en la posición recibe una contribución adicional que constituye la respuesta del espacio tiempo a la presencia de esta incertidumbre en la posición. Para verlo basta considerar que la incertidumbre cuántica en la posición de la partícula implica una incertidumbre en su momento, y en consecuencia debido a la interacción gravedad-energía, esto se traduce en una incertidumbre en la geometría, que a su vez introduce una incertidumbre adicional en la posición. La geometría ahora está sujeta a fluctuaciones cuánticas. Para determinar la escala de estas fluctuaciones supondremos que queremos resolver una región esférica de radio l . Necesitaremos un fotón con una longitud de onda menor que l , su energía será mayor que $1/l$ y por lo tanto estaremos poniendo una densidad de energía ρ mayor que $1/l^4$. Según las ecuaciones de Einstein $\partial^2 g \sim l_p^2 \rho \gtrsim l_p^2/l^4$, donde l_p es la longitud de Planck ($c = \hbar = 1$), y por tanto el potencial gravitatorio (la métrica del espacio-tiempo) generado por este fotón es $g \gtrsim l_p^2/l^2$ y por lo tanto la longitud que queremos medir tendrá una incertidumbre $\sqrt{g l^2} \gtrsim l_p$. De este modo, independientemente de la forma particular en la que medimos la posición, la distancia entre dos sucesos tendrá una incertidumbre mínima dada por la longitud de Planck. Esta conclusión a la que se ha llegado usando argumentos cualitativos, puede obtenerse de una manera algo más rigurosa mediante análisis teóricos en distintos marcos de gravedad cuántica[18].

La determinación de esta escala característica de nueva física es el primer paso en la búsqueda de experimentos relevantes para testear QG. El siguiente paso requiere algo de intuición acerca del tipo de efectos que las teorías de QG pueden predecir. La mayoría de estos efectos se consideraban en el contexto de campos gravitacionales intensos (gran curvatura) tales como en la física de agujeros negros o en el universo primordial. Estos efectos son muy interesantes desde el punto de vista conceptual pero no son de gran ayuda a la hora de descubrir experimentalmente manifestaciones de las propiedades cuánticas del espacio-tiempo. Es por esto que en muchas ocasiones es preferible estudiar las implicaciones de QG en lo que se conoce como *límite de Minkowski* (sin curvatura al menos a la escala de distancias relevante del espacio-tiempo). Aunque los efectos son menos significativos respecto a los de la

física de agujeros negros, la calidad de los datos que se puede obtener es mucho más alta y en muchas situaciones realmente compensa a la gran supresión que se espera para estos efectos de gravedad cuántica, una supresión que suele tomar la forma de alguna potencia del cociente entre la longitud de Planck y la longitud de onda de las partículas sujetas a estudio ($[l_{Pl}/\lambda]^\alpha$). Por ejemplo, una posible estimación para experimentos de laboratorio se basa en considerar una supresión lineal (situación optimista), así como considerar como longitudes de onda de las partículas las longitudes de onda más pequeñas que somos capaces de generar, $\sim 10^{-19}\text{m}$, esto nos da un factor de supresión 10^{-16} . En astrofísica se pueden *observar* partículas con longitudes de onda mucho menores, por ejemplo los rayos cósmicos más energéticos que se han observado tienen una energía del orden de 10^{20}eV , lo que se corresponde con una longitud de onda $\sim 10^{-27}\text{m}$, que considerando una supresión lineal nos da un factor 10^{-8} .

Pero estos factores de supresión no deben desalentarnos, de hecho si miramos dentro de la física de partículas encontramos situaciones similares, como es el caso de los límites impuestos a la inestabilidad del protón. La desintegración del protón es una de las predicciones de algunos modelos de gran unificación, y constituye un efecto muy pequeño ya que está suprimido por la cuarta potencia del cociente entre la masa del protón y la escala de unificación ($\Lambda_{GUT} \sim 10^{16}\text{GeV}$). A pesar de esta enorme supresión, $(m_p/\Lambda_{GUT})^4 \sim 10^{-64}$, es posible encontrar una forma de incrementar la sensibilidad en la medida de la desintegración del protón acumulando una gran cantidad de protones. En este caso el número de protones que mantenemos bajo estudio es la cantidad física adimensional que actúa de *amplificador* de este efecto de nueva física.

2. Desviaciones respecto a la invariancia Lorentz

2.1. ¿Por qué testear la invariancia Lorentz?

Uno de los planteamientos más interesantes que encontramos en algunas de las aproximaciones a la unificación de la relatividad general y de la mecánica cuántica, está basado en la idea de que la descripción fundamental del espacio-tiempo requiere algún tipo de cuantización, tal como la discretización o la no conmutatividad de las coordenadas espaciotemporales. Esto hace que nos replanteemos qué es lo que ocurre con las simetrías del espacio-tiempo clásico a la escala de Planck, en particular con la simetría Lorentz.

La invariancia Lorentz es uno de los pilares básicos en los que se apoyan tanto el SM como la RG. Por lo tanto es natural preguntarnos por qué debemos sacrificar esta simetría en beneficio de QG. La respuesta a esta pregunta es doble. Por un lado toda simetría fundamental ha de ser testada. Precisamente debido a que la Invariancia Lorentz (LI) está en la base de nuestra comprensión de la naturaleza debemos ponerla a prueba hasta donde seamos capaces de hacerlo. Pero por otro lado hay razones que nos impulsan a investigar la compatibilidad de esta simetría con la física a la escala de Planck. Por ejemplo, hay distintos modelos de QG en los que encontramos algún tipo de discretización del espacio tiempo, algo que no es fácil de reconciliar, por ejemplo, con la invariancia bajo boosts. Aunque también es posible, si se reorganizan de manera *ad hoc* los elementos de esta estructura discretizada del espacio-tiempo, mantener las simetrías que teníamos en el espacio-tiempo continuo. Sin embargo, la invariancia Lorentz a la escala de Planck de una estructura dada de QG no garantiza que esta simetría se preserve para todas las escalas intermedias.

No es de extrañar, a la luz de su relevancia para la física moderna, encontrar investigaciones que estudien y cuestionen esta simetría fundamental a mediados del pasado siglo. Sin embargo no fue hasta finales de siglo que el interés de estos estudios se centró principalmente en el campo de la fenomenología. El planteamiento de una violación de la invariancia Lorentz (LIV) surge en los 60, mientras que en los 70 y 80 se desarrollan estudios acerca de cómo podemos establecer LI a bajas energías sin ser una simetría exacta en todas las escalas⁵. Dentro de la comunidad de científicos dedicados al campo de la relatividad general, no había un gran interés por estos estudios ya que por aquel entonces se esperaba que la posible ruptura de los esquemas de la física estándar por efectos de gravedad cuántica sólo apareciesen a energías del orden de la escala de Planck. Esto cambió en los 90 con el desarrollo en la fenomenología, ya parecía posible en situaciones muy especiales encontrar manifestaciones de estos efectos a bajas energías. Estas situaciones es lo que se conoce como *ventanas a la gravedad cuántica*.

Desde entonces una gran área de la investigación en gravedad cuántica se ha centrado en considerar posibles desviaciones respecto a la simetría de Lorentz/Poincaré a la escala de Planck. Una posibilidad es que esta simetría esté *espontáneamente rota*. Esta idea nace

⁵Esta línea ha influido en el desarrollo de algunos modelos que van más allá del SM.

dentro del marco de la teoría de cuerdas, lo cual llama la atención ya que se trata de una teoría formulada en un espacio-tiempo clásico, por lo que a priori no hay razones para esperar desviaciones respecto a la simetría clásica de Poincaré cuando se adopta como background el espacio-tiempo de Minkowski. Sin embargo, es posible dentro de este marco que algún tensor antisimétrico adquiriera un valor de expectación en el vacío (vev) no nulo de manera que esto puede dar lugar a desviaciones respecto a la simetría clásica de Poincaré[20]. Un poco más tarde, este trabajo dio lugar a la formulación de lo que se conoce como extensión mínima del SM (mSME)[21], que incorpora todos los posibles operadores que violan la simetría Lorentz, invariantes gauge y renormalizables por power counting. Esto nos proporciona un marco para calcular en teoría cuántica de campos efectiva observables para diversos experimentos y de este modo poner límites experimentales a los diversos parámetros del Lagrangiano que caracterizan las desviaciones respecto a la invariancia Lorentz.

Sin embargo, encontramos motivaciones para estudiar y poner límites a esta violación de la simetría Lorentz en otros escenarios de QG. Basados en la descripción del espacio-tiempo en Loop Quantum Gravity, que envuelve algún tipo de discretización, hay argumentos que sugieren que esta discretización termina originando desviaciones respecto a la simetría clásica de Poincaré. Aunque la mayoría de estos estudios indican violaciones de la simetría Lorentz, también es posible encontrar dentro de este tipo de escenarios mecanismos que sugieren *deformaciones* en lugar de ruptura de las simetrías. Y ésta es la idea alternativa a la de ruptura o violación de la simetría Lorentz. También encontramos estudios sobre el papel de la simetría de Poincaré en modelos de geometría no-conmutativa. Entre los ejemplos más estudiados destacamos la no conmutatividad canónica, $[x_\mu, x_\nu] = i\theta_{\mu\nu}$, o no conmutatividad en el espacio de κ -Minkowski, $[x_i, x_0] = ix_i/\kappa$ y $[x_i, x_j] = 0$, en los que la desviación respecto a las simetrías de Poincaré es inevitable.

2.2. Lo que entendemos por violación de la invariancia Lorentz

En este apartado trataremos de explicar lo que significa violación de la invariancia Lorentz. Dentro del marco de la teoría clásica de campos consideraremos el ejemplo dado en [16], en el que se introducen dos campos escalares massless, ϕ y φ ,

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} [g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + (g^{\alpha\beta} + \tau^{\alpha\beta}) \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi], \quad (2.1)$$

donde $\tau^{\alpha\beta}$ es un tensor simétrico arbitrario distinto de $g^{\alpha\beta}$. Ambos, $\tau^{\alpha\beta}$ y $g^{\alpha\beta}$ son campos background fijos (no dinámicos). En un punto siempre es posible elegir las coordenadas de manera que $g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}$. Ahora consideramos la acción local de una transformación de Lorentz en ese punto, que definimos como aquellas transformaciones de coordenadas que dejan la métrica de Minkowski invariante $\eta^{\alpha\beta}$ (y no la métrica $\eta^{\alpha\beta} + \tau^{\alpha\beta}$). Por otro lado la acción debe ser un escalar para que esté bien definida y tenga un significado físico. Los escalares

son por definición invariantes bajo todo difeomorfismo pasivo⁶, y las transformaciones locales de Lorentz son un subgrupo de este grupo general de coordenadas. Por lo tanto la acción también será invariante bajo una transformación local *pasiva* de Lorentz. La invariancia bajo estas transformaciones de coordenadas se suele denominar como *transformaciones de Lorentz del observador*, pero no nos dice mucho acerca del significado operacional que tiene la simetría Lorentz como una simetría física de la naturaleza.

La invariancia Lorentz de un sistema físico se apoya en la idea de transformaciones de Lorentz *activas*, que son un subgrupo del grupo de difeomorfismos activo que sólo actúan sobre los campos dinámicos (que en este caso suponemos que son ϕ y φ). Bajo una transformación de Lorentz estos campos transforman de acuerdo con

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(x) &= \phi((\Lambda^{-1})^\mu_\nu x^\nu), \\ \tilde{\varphi}(x) &= \varphi((\Lambda^{-1})^\mu_\nu x^\nu),\end{aligned}$$

siendo Λ^μ_ν la transformación de Lorentz, $\tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$. Mientras que las derivadas transforman como

$$\begin{aligned}\partial_\nu \tilde{\phi}(x) &= (\Lambda^{-1})^\mu_\nu \partial_\mu \phi((\Lambda^{-1})^\sigma_\rho x^\rho), \\ \partial_\nu \tilde{\varphi}(x) &= (\Lambda^{-1})^\mu_\nu \partial_\mu \varphi((\Lambda^{-1})^\sigma_\rho x^\rho),\end{aligned}$$

teniendo en cuenta que $\eta^{\sigma\rho}(\Lambda^{-1})^\mu_\rho(\Lambda^{-1})^\nu_\sigma = \eta^{\mu\nu}$ fácilmente vemos $\eta^{\sigma\rho}\partial_\sigma \tilde{\phi}(x)\partial_\rho \tilde{\phi}(x) = \eta^{\sigma\rho}\partial_\sigma \phi(x)\partial_\rho \phi(x)$, por lo que el término que va con $\eta^{\mu\nu}$ es invariante Lorentz, mientras que el que va con $\tau^{\mu\nu}$ no, ya que no es invariante bajo la acción de Λ^{-1} , y por lo tanto la acción viola invariancia Lorentz. Esto indica que las ecuaciones del movimiento van a ser diferentes cuando las expresemos en sistemas de coordenadas de observadores que esten rotados o boosteados unos respecto a otros.

Dado que para que una teoría física este bien definida la acción debe ser un escalar bajo transformaciones generales de coordenadas, el único tipo de violación Lorentz físicamente permitido es rompiendo la invariancia bajo transformaciones de Lorentz activas⁷, y esto es lo que entenderemos por LV. Puesto que en el mundo en que vivimos podemos considerar que la invariancia Lorentz es una muy buena simetría aproximada, este tensor $\tau^{\alpha\beta}$ debe ser muy pequeño en nuestro sistema de referencia. Esto se utiliza para definir el *sistema de referencia concordante* como aquel en el que los coeficientes de violación Lorentz son pequeños.

⁶Los difeomorfismos pasivos actúan sobre todos los campos que aparecen en el funcional de acción, dinámicos y no dinámicos.

⁷Los difeomorfismos se pueden interpretar al menos de dos maneras, como cambios de coordenadas y como transformaciones gauge que actúan sobre el espacio de configuraciones de los campos. Si interpretamos los difeomorfismos como transformaciones gauge, esta transformación gauge transformará una configuración de campos en otra físicamente indistinguible. Por lo que podemos cambiar la configuración de los campos (mientras todos los observables no cambien), pero también dejamos la descripción (por ejemplo el sistema de coordenadas) igual. Los difeomorfismos que se interpretan de este modo es lo que hemos definido como difeomorfismos activos.

La mayoría de los modelos que estudian LV entran dentro de esta categoría en la que hay un conjunto de sistemas de referencia concordantes, aunque no necesariamente admitan una descripción como teorías de campos. En estas teorías la invariancia Lorentz está rota, ya que hay un sistema de referencia en el que experimentalmente podemos determinar que la violación de la invariancia Lorentz es pequeña. Pero hay una alternativa a esta descripción que lo que hace es modificar la forma en la que el grupo de Lorentz actúa sobre los campos físicos. Hasta ahora estábamos suponiendo que todo transformaba linealmente bajo las representaciones correspondientes del grupo de Lorentz. La acción del grupo de Lorentz sobre los tensores que no eran invariantes bajo transformaciones de Lorentz activas es la misma.

Sin embargo, uno puede modificar la acción del propio grupo de alguna manera. Parte de esta idea viene realizada en lo que se conoce como “doubly special relativity” (DSR). En este tipo de escenarios se mantiene la invariancia Lorentz, pero el grupo de Lorentz actúa de manera no lineal sobre los campos físicos. Esta nueva acción del grupo da lugar a una escala de energía invariante, al mismo tiempo que la velocidad de la luz c se mantiene también invariante. Esta escala de energía, λ_{DSR} , se suele considerar como la energía de Planck. En este tipo de teorías no hay un sistema de referencia privilegiado, pero sigue habiendo efectos de “violación” Lorentz. Por ejemplo, una característica de estos modelos es que las partículas presentan una relación de dispersión modificada que da lugar a una velocidad de propagación que depende de su longitud de onda. Esto es solo una violación Lorentz “aparente”, en el sentido de que se trata de una violación de la acción usual *lineal* del grupo de Lorentz sobre las cantidades físicas.

En las teorías de campos relativistas, la *estabilidad* y la *causalidad* están estrechamente relacionadas con la invariancia Lorentz, por lo que debemos replantearnos estos conceptos cuando introducimos violación Lorentz. Sería difícil hacer predicciones consistentes en una teoría que además de ser inestable no mantuviera causalidad, pero una teoría causal y estable sin la simetría Lorentz todavía sería aceptable, por lo que resulta interesante considerar la posibilidad de una violación de la simetría Lorentz y estudiar en qué medida esta violación entra en conflicto con otras propiedades fundamentales de la teoría de campos. De hecho, sería interesante encontrar una clase de teorías que incorporan LV pero que mantienen tanto la estabilidad como la causalidad[22].

2.3. Violación Lorentz y el principio de equivalencia

Si estudiamos los efectos de violación Lorentz dentro del marco de una teoría de campos efectiva, los tensores que rompen esta simetría pueden mantenerse no dinámicos siempre que no incluyamos gravedad. Si ahora queremos introducir gravedad lo que nos interesa es preservar tantos principios fundamentales de la relatividad general como sea posible al mismo tiempo que introducimos una violación de Lorentz local (y así extraer las consecuencias a lo que esto conlleva). Encontramos tres principios generales en relatividad general relevantes

para la violación Lorentz, que son la covariancia general (invariancia bajo todo el grupo de difeomorfismos), el principio de equivalencia y la “falta de una geometría preferente”. Ya hemos discutido que la covariancia general es una propiedad que automáticamente se satisface en una teoría que viole la invariancia Lorentz y que se haya construido adecuadamente. El último principio, la falta de una geometría preferente, no es más que la afirmación de que la métrica es un campo dinámico al igual que los campos de materia. Junto con la invariancia bajo difeomorfismos esto da lugar a la conservación del tensor de energía impulso para la materia. Sin embargo, un tensor fijo que viola la invariancia Lorentz constituye una geometría preferente, de la misma forma que lo hacía la métrica. Pero si mantenemos estos tensores que violan la invariancia Lorentz fijos, obtenemos que el tensor de energía-impulso no se conserva y por lo tanto unas ecuaciones de Einstein inconsistentes. La solución es considerar todos los campos como dinámicos, de este modo la invariancia bajo difeomorfismos asegura la conservación del tensor energía-impulso.

Otra de las consecuencias de la violación de la invariancia Lorentz es la violación del principio de equivalencia a través de una no universalidad de los acoplos gravitatorios con la materia. Para que haya una violación Lorentz las partículas deben viajar en geodésicas que dependen de la especie de partícula. En modelos en los que tenemos relaciones de dispersión modificadas es posible encontrar como motivación mantener el principio de equivalencia considerando estas correcciones en las relaciones de dispersión independientes de la naturaleza de las partículas. Pero aun en este caso se viola el principio de equivalencia. Consideremos la siguiente relación de dispersión para una partícula libre

$$E^2 = m^2 + p^2 + \frac{f^{(4)}}{E_{Pl}^2} |p|^4 , \quad (2.1)$$

donde suponemos que $f^{(4)}$ es un factor adimensional e independiente de la naturaleza de las partículas. Si utilizamos la dinámica Hamiltoniana a bajas energías y usamos como energía el Hamiltoniano, entonces para una partícula no relativista en presencia de un campo gravitatorio débil encontramos

$$H = m + \frac{p^2}{2m} + f^{(4)} \frac{p^4}{2mE_{Pl}^2} + V(x) , \quad (2.2)$$

donde $V(x)$ es el potencial gravitatorio Newtoniano $m\Phi(x)$. Si aplicamos las ecuaciones de Hamilton obtenemos una aceleración para la partícula dada por

$$\ddot{x}^i = -\frac{\partial\Phi}{\partial x^i} \left(1 + 6f^{(4)} \frac{m^2 \dot{x}^i \cdot \dot{x}^i}{E_{Pl}} \right) . \quad (2.3)$$

a primer orden en $f^{(4)}/E_{Pl}$. Vemos que la aceleración depende de la masa de la partícula, por lo que el principio de equivalencia se viola levemente para partículas con masas diferentes con el mismo $f^{(4)}$. Está claro que si los términos $f^{(n)}$ son diferentes para partículas distinguibles, como para algunos modelos de violación Lorentz, también se viola el principio de equivalencia.

2.4. Modelos teóricos

Se han propuesto numerosos modelos cinemáticos que tratan de testear la violación de la invariancia Lorentz pero que no incluyen una descripción completa de la dinámica. Sin embargo para definir completamente una teoría debemos incluir la dinámica. Encontramos escenarios, como es el caso de DSR, en los que tenemos una descripción de la cinemática a bajas energías, pero la dinámica todavía no se entiende, por lo que con estos modelos sólo podemos hacer *estricto sensu* tests cinemáticos. Y en este sentido solo podemos hacer un conjunto limitado de observaciones que sean completamente insensibles a la dinámica (interferometría, birrefringencia,...). Sin embargo, la situación observacional es tal que a veces es posible aplicar tests que usan la interacción de las partículas a teorías en las que sólo conocemos bien la parte cinemática. Esto lo encontramos por ejemplo en medidas de umbrales de reacciones en observaciones astrofísicas.

Por otro lado, desde el punto de vista de la fenomenología las realizaciones dinámicas de LV son muy interesantes ya que proporcionan un marco en el que poder calcular reacciones. Un requisito obvio para cualquiera de estos modelos es que contengan las observaciones experimentales realizadas hasta el momento. Es por esto que una propuesta conveniente para estudiar LV es introduciéndola dentro de una teoría de campos efectiva que contenga el SM por construcción. La descripción en términos de una teoría de campos efectiva⁸ proporciona una estructura general para estudiar la nueva física LV sin estar limitados a conocer los detalles de los modelos de QG que dan lugar a estos efectos, esto es sin conocer la teoría en el UV. Por otra parte se han realizado estudios que muestran modelos de QG que se reducen a una EFT (Effective Field Theory) con LV.

Uno puede construir una EFT que incluya LV a la escala de Planck de dos maneras. Por un lado, se pueden introducir términos LV en el Lagrangiano del SM añadiendo solamente operadores renormalizables, o se puede romper explícitamente la invariancia Lorentz mediante operadores no renormalizables de dimensión mayor que 4. Una de las principales diferencias entre ambas aproximaciones es que los operadores renormalizables dan lugar a contribuciones que son relevantes a bajas energías, y por lo tanto necesitan de constantes de acoplo muy suprimidas para poder ajustar a los datos experimentales, mientras que los operadores no renormalizables son relevantes sólo a altas energías estando además naturalmente suprimidos a la escala de Planck.

En este punto cabe plantearnos si debemos o no asumir que la teoría que describa las

⁸La idea básica de EFT viene motivada por la aproximación de Wilson de la renormalización de una teoría con divergencias. Esencialmente este método nos permite pasar de una teoría definida a una (en principio alta) escala de energías Λ_{UV} a una teoría efectiva que describe la dinámica a una escala más baja de energías eliminando por integración los grados de libertad con momentos entre estas dos escalas. La teoría de altas energías (la teoría UV o microscópica) induce varios vértices de interacción en el Lagrangiano efectivo de bajas energías. Estas interacciones presentan una jerarquía de acuerdo a su dimensión de masa (cuanto mayor es la dimensión del operador, menos importante es).

desviaciones respecto a la invariancia Lorentz sea una teoría cuántica de campos efectiva. Aquí hay dos visiones distintas, por un lado hay científicos dentro de la comunidad de QG que son escépticos sobre los resultados que se obtienen utilizando EFT para análisis en el dominio de QG, mientras que otros están convencidos de que todos los efectos de gravedad cuántica de baja energía pueden describirse en términos de una teoría de campos efectiva. El problema con el que uno se encuentra es que los datos que se analizan dentro de la fenomenología de gravedad cuántica están en escalas de energía muy por debajo de la escala de Planck, y sabemos que en este límite tanto la descripción en términos de una teoría de campos como la invariancia Lorentz son consistentes. Por esta razón es importante tratar de establecer cuándo los experimentos que son sensibles a desviaciones a la escala de Planck de la simetría Lorentz, son también sensibles a desviaciones a la escala de Planck de la descripción de la dinámica en términos de teorías de campos.

2.4.1. Marcos dinámicos

Quizás la aproximación más conservativa para testear violación Lorentz sea mediante EFT. Tanto el SM como relatividad general se pueden considerar como teorías de campos efectivas, y en este marco de EFT la violación Lorentz se puede introducir fácilmente mediante interacciones con tensores no dinámicos

$$\mathcal{L}_{LV} = \mathcal{L}_{SM} + \sum_n c_n^{\mu\nu\dots} \frac{\mathcal{O}_{\mu\nu\dots}^n}{\Lambda^n}. \quad (2.1)$$

donde el parámetro con dimensión de masa Λ^n entra como el único parámetro dimensional asociado a la nueva física. Sin embargo, sin una simetría que proteja la teoría de operadores que violan la invariancia Lorentz con dimensión ≤ 4 , los operadores con dimensiones bajas dominan sobre los operadores irrelevantes de dimensión > 4 , por lo que en una primera aproximación basta con estudiar todos los términos LV renormalizables (con dimensión de masa 3 y 4) que se pueden añadir al SM. Este modelo se conoce como extensión mínima del SM (mSME) y fue propuesto por Colladay y Kostelecký[21]. La estructura de este modelo se basa en añadir al lagrangiano del SM todos los términos renormalizables, formados a partir de la contracción de operadores construidos con los campos del SM y unos coeficientes tensoriales que describen el vacío no trivial de la teoría, y que respetan la simetría gauge $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)$ del SM.

Dentro de los tests de violación Lorentz, probablemente las partículas con las que más comúnmente se trabaja sean los fotones y electrones, por lo que consideraremos como ejemplo un modelo simple de LV QED. Para simplificar las cosas supondremos invariancia rotacional. Esto se traduce en que todos los tensores LV se pueden reducir a productos de un campo vectorial, que se suele denotar por $u^{\alpha 9}$, que describe el sistema de referencia privilegiado. El

⁹Este campo vectorial, es un vector de tipo tiempo normalizado cuyas curvas integrales definen las líneas de mundo de observadores en reposo en este sistema de referencia.

Lagrangiano estable con operadores renormalizables que acoplan este campo vectorial u^α con los fermiones y fotones es

$$\mathcal{L}_f = \bar{\psi} (i\not{D} - m) \psi - E_{Pl} b u_\mu \bar{\psi} \gamma_5 \gamma^\mu \psi + \frac{1}{2} i u_\mu u_\nu \bar{\psi} (c + d\gamma_5) \gamma^\mu \overleftrightarrow{D}^\nu \psi, \quad (2.2)$$

y

$$\mathcal{L}_\gamma = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{4} (k_F) u_\alpha \eta_{\beta\mu} u_\nu F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu}, \quad (2.3)$$

respectivamente, y donde b , c , d y k_F son los coeficientes adimensionales que determinan la magnitud de la violación de la invariancia Lorentz, que en principio pueden ser diferentes para las distintas especies de fermiones. Las relaciones de dispersión a altas energías ($M_{Pl} \gg E \gg m$) para electrones y fotones respectivamente se pueden expresar como

$$E_e^2 = m_e^2 + p^2 + f_e^{(1)} p + f_e^{(2)} p^2, \quad (2.4)$$

$$E_\gamma^2 = (1 + f_\gamma^{(2)}) p^2, \quad (2.5)$$

donde los coeficientes $f_e^{(1)}$, $f_e^{(2)}$ y $f_\gamma^{(2)}$ dependen de los parámetros de acoplo de los operadores LV en el Lagrangiano. Si $s = \pm 1$ es la helicidad del electrón, entonces $f_e^{(1)} = -2bsE_{Pl}$, $f_e^{(2)} = -(c - ds)$ y $f_\gamma^{(2)} = k_F/2$. La relación de dispersión para los positrones es la misma que para los electrones pero cambiando $p \rightarrow -p$, por lo que solo cambia el término con $f_e^{(1)}$.

Si observamos, la energía típica p_{crit} a la cual la nueva fenomenología debería comenzar a apreciarse es muy baja. Por ejemplo, si $f_e^{(2)} \sim \mathcal{O}(1)$, el término extra es comparable a la masa del electrón para $p_{crit} \simeq m_e \simeq 511 keV$. Esto aún es peor si consideramos que $f_e^{(1)} \sim \mathcal{O}(1)$, ya que obtenemos que $p_{crit} \simeq (m_e^2)/M_{Pl} \sim 10^{-17} eV$. Sin embargo, el valor natural de estos parámetros, $f_e^{(n)}$, es mucho menor que $\mathcal{O}(1)$, de hecho se suele considerar que están suprimidos por factores de la forma $(m_e/M_{Pl})^\alpha$ para $\alpha > 0$. Otra cuestión que surge aquí es por qué se escoge como coeficiente dimensional la energía de Planck, y no por ejemplo la masa de la partícula. Por un lado lo podemos ver como una mera convención, sin embargo puesto que estamos buscando efectos de violación de la invariancia Lorentz que tienen su origen en teorías de gravedad cuántica, es natural esperar que sea la escala de Planck la escala característica que controla la magnitud de varios operadores. Veremos que esta elección da lugar dificultades a la hora de construir un modelo LV experimentalmente viable.

Los operadores no renormalizables de dimensión 5 dan lugar a relaciones de dispersión en las que aparece el término $n = 3$. Myers y Pospelov[23] demostraron se podían construir tres operadores de dimensión 5, cuadráticos en los campos, y que preserven la invariancia bajo rotaciones así como la invariancia gauge. Estos operadores son

$$\frac{1}{E_{Pl}} \bar{\psi} (\eta_L P_L + \eta_R P_R) \psi (u \cdot D)^2 \psi - \frac{1}{E_{Pl}} (u \cdot D)^2 \left(\alpha_L^{(5)} P_L + \alpha_R^{(5)} P_R \right) \psi \quad (2.6)$$

en el sector fermiónico, y

$$\frac{\xi}{E_{Pl}} u^\mu F_{\mu\nu} (u \cdot \partial) u_\alpha \tilde{F}^{\alpha\nu} \quad (2.7)$$

en el sector gauge. En la tabla 1 se muestra la clasificación de estos operadores en función de su dimensión y de cómo transforman bajo CPT.

Sin embargo, aparece un problema con este tipo de modelos, ya que incluso empezando con una teoría efectiva que contenga solo operadores LV de dimensión 5 y 6 para partículas libres, las correcciones radiativas debidas a interacciones entre partículas generan operadores LV de dimensión menor que son dominantes debido a que los coeficientes adimensionales son del mismo orden que los de dimensión alta. Por lo tanto, las correcciones radiativas no preservan la forma de las relaciones de dispersión de las partículas, sino que inducen unos términos LV extra lineales y cuadráticos en los momentos que dominan frente al término cúbico. Es por esto que debe haber una simetría, o algún otro mecanismo, que proteja los operadores LV de dimensión baja frente a los dimensión alta o la supresión de los operadores no renormalizables será mayor que la de los operadores renormalizables.

Dim	CPT odd	CPT even
Fermiones		
3	$-E_{Pl} b u_\mu \bar{\psi} \gamma_5 \gamma^\mu \psi$	\times
4	\times	$\frac{1}{2} i c u_\mu u_\nu \bar{\psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{D}^\nu \psi$ $\frac{1}{2} i d u_\mu u_\nu \bar{\psi} \gamma_5 \gamma^\mu \overleftrightarrow{D}^\nu \psi$
5	$\frac{1}{E_{Pl}} \bar{\psi} (\eta_L P_L + \eta_R P_R) \psi (u \cdot D)^2 \psi$	$-\frac{1}{E_{Pl}} (u \cdot D)^2 \left(\alpha_L^{(5)} P_L + \alpha_R^{(5)} P_R \right) \psi$
Fotón		
3	\times	\times
4	\times	$-\frac{1}{4} k_F u_\alpha \eta_{\beta\sigma} u_\rho F^{\alpha\beta} F^{\sigma\rho}$
5	$\frac{\xi}{E_{Pl}} u^\mu F_{\mu\nu} (u \cdot \partial) u_\alpha \tilde{F}^{\alpha\nu}$	\times

Tabla 1 Operadores cinéticos LV para fermiones y fotones. El símbolo \times significa que no existe ningún operador con esas propiedades.

En [32] se muestra un resumen de las ligaduras experimentales sobre estos operadores, y que mostramos en la siguiente tabla

Dim	CPT odd	CPT even
Fermiones		
3	Neutron: $ b < 10^{-46}$	×
4	×	Neutron: $ c, d < 10^{-27}$
5	Electron: $ \eta_{L,R} < 10^{-5}$	Proton: $\mathcal{O}(10^{-1})$
Fotón		
3	×	×
4	×	$ k_F < 10^{-15}$
5	$ \xi < 10^{-7}$	×

Tabla 2 Límites sobre operadores LV.

Otra posibilidad, que hemos mencionado anteriormente, es que la estructura del espacio-tiempo en gravedad cuántica sea tal que el álgebra de las coordenadas espaciotemporales sea no conmutativa. La violación de la invariancia Lorentz es una propiedad intrínseca de teorías definidas en este tipo de espacios[24]. El ejemplo más común lo encontramos cuando el conmutador de las coordenadas es proporcional a un tensor real y antisimétrico $\theta^{\mu\nu} \sim \mathcal{O}(1)$ (no-conmutatividad canónica)

$$[x^\mu, x^\nu] = i \frac{\theta^{\mu\nu}}{\Lambda_{NC}^2} . \quad (2.8)$$

donde Λ_{NC} es la escala de energías característica de la no conmutatividad. Esta escala está cerca de la escala de Planck si la no conmutatividad se deriva de gravedad cuántica. Las cotas experimentales¹⁰ sobre esta escala de no conmutatividad están en $\Lambda_{NC} \gtrsim 5 \times 10^{14} GeV$ para el sector de QCD, y $\Lambda_{NC} \gtrsim 10^{11} - 10^{12} GeV$ para el sector de QED[25].

Hay ciertas características generales originadas por el carácter no local de las teorías no conmutativas que dan lugar a problemas tanto en la formulación como en la predictibilidad de este tipo de teorías. Posiblemente la más seria de ellas es lo que se conoce como UV/IR mixing[26]¹¹. Es por eso que a la hora de conectar una teoría no conmutativa con la física de bajas energías, tenemos que suavizar de alguna manera este problema de modo que sea posible encontrar una expansión a bajas energías bien definida. No hay un método general para resolver este problema, pero en el caso de que este UV/IR mixing esté presente, pero

¹⁰Estas cotas están basadas en la comparación de frecuencias de transición ya sea en átomos como en iones, lo que se conoce como ‘clock-comparison experiments’, ya sea con relojes atómicos, magnetómetros u otras técnicas.

¹¹Las teorías cuánticas de campos definidas en espacios no conmutativos no presentan el desacoplamiento entre los grados de libertad infrarrojos y ultravioletas que es esencial en el programa de renormalización convencional. Las contribuciones a las integrales de loops a altos momentos pueden generar un comportamiento fuera de lo habitual a grandes distancias que puede destruir el funcionamiento de la teoría en el IR. Estas ‘anomalías’ suponen un comportamiento no analítico en el parámetro de no conmutatividad θ de manera que el límite $\theta \rightarrow 0$ es singular.

regulado por un cutoff, entonces la teoría de campos que se obtiene se puede reescribir en términos del mSME[24].

A pesar de que es factible calcular observables físicos utilizando una teoría de campos no conmutativa, existe una correspondencia entre una teoría gauge no conmutativa y una teoría gauge convencional que se conoce como el mapa de Seiberg-Witten[27]. Este mapa permite la construcción de una teoría ordinaria con las transformaciones gauge estándar, que a su vez presenta un contenido físico equivalente al de la teoría no conmutativa, mediante una expansión en términos del parámetro $\theta_{\mu\nu}/\Lambda_{NC}^2$. Cada término de la serie es un operador acoplado a $\theta_{\mu\nu}/\Lambda_{NC}^2$ y por lo tanto constituye una interacción LV. Utilizando la teoría efectiva resultante, se pueden poner límites a este parámetro Λ_{NC} utilizando tests de invariancia Lorentz.

2.4.2. Marcos cinemáticos

Uno de los escenarios más sencillos para estudiar desviaciones de la simetría Lorentz consiste en considerar relaciones de dispersión modificadas para las partículas así como mantener las leyes de conservación de la energía y del momento en su forma convencional. Este marco está muy limitado en cuanto a su aplicabilidad ya que sólo está pensado para describir efectos puramente cinemáticos, pero la ventaja que presenta es que se puede aplicar a cualquier modelo de gravedad cuántica que presente este tipo de cinemática independientemente de la descripción que hagamos de la dinámica. En este tipo de modelos la relación de dispersión invariante Lorentz $E^2 = m^2 + p^2$ se sustituye por una función $E^2 = F(m, p)$ que debe reducirse a la relación de dispersión invariante Lorentz a bajas energías y momentos. Por esta razón se suele expandir $F(m, p)$ en torno a $p = 0$, obteniendo

$$E^2 = m^2 + p^2 + F_i^{(1)} p^i + F_{ij}^{(2)} p^i p^j + F_{ijk}^{(3)} p^i p^j p^k + \dots, \quad (2.1)$$

donde los coeficientes $F_{ijk\dots n}^{(n)}$ son dimensionales, y en principio representan modificaciones arbitrarias pero pequeñas de la relación de dispersión habitual. El orden, n , del primer término no nulo en esta ecuación depende del modelo de QG que se utilice. Lo que se suele hacer en estos modelos es factorizar la energía de Planck en estos coeficientes, ya que estamos asumiendo que detrás de estos modelos hay un marco dinámico de QG, reescribiendo $F^{(n)} = f^{(n)} E_{Pl}^{2-n}$ donde los coeficientes $f^{(n)}$ son adimensionales.

Por otro lado se suele suponer invariancia rotacional¹², lo que simplifica la forma de la relación de dispersión

$$E^2 = m^2 + p^2 + E_{Pl} f^{(1)} |p| + f^{(2)} |p|^2 + \frac{f^{(3)}}{E_{Pl}} |p|^3 + \dots. \quad (2.2)$$

¹²No podemos tener invariancia bajo boost cuando la invariancia bajo rotaciones está rota, mientras que si que es posible tener invariancia bajo rotaciones cuando la invariancia bajo boosts está rota. En cualquiera de estos dos casos la simetría bajo boost está rota, por lo que en una primera aproximación al problema no supondremos una violación de la simetría rotacional.

En este punto surge la cuestión de si esta modificación es universal o podemos considerar modificaciones diferentes para las distintas partículas. Desde el punto de vista fenomenológico no hay una razón *a priori* para que los coeficientes en (2.2) sean universales. De hecho, desde el punto de vista de EFT no es posible imponer universalidad en las relaciones de dispersión para todo orden n . Por ejemplo, los operadores que dan lugar a los términos $n = 1, 3$ en las relaciones de dispersión para fotones violan CPT e inducen birrefringencia ya que inducen cambios de signo en estos términos en la relación de dispersión en función de la helicidad del fotón.

La invariancia Lorentz de las leyes físicas recae sobre un conjunto de principios básicos: el *principio de relatividad*, que afirma la equivalencia de las leyes físicas para todos observadores inerciales, la *homogeneidad e isotropía* del espacio-tiempo, que lo que nos dice es que no hay una localización o una dirección privilegiada, así como una noción de precausalidad, es decir que la ordenación temporal de un conjunto de sucesos locales en un sistema de referencia, se preserve.

La realización de la violación Lorentz mediante una teoría efectiva como hemos descrito en la sección anterior, viola el principio de relatividad ya que introduce un sistema de referencia privilegiado (el sistema concordante). Esto puede verse como un sacrificio demasiado grande a la hora de incluir efectos de gravedad cuántica en la física de bajas energías. Por eso debemos analizar otras alternativas que mantengan el principio de relatividad pero que cuestionen uno o varios de estos principios. Una de estas alternativas la propusieron Cohen y Glashow con el modelo *very special relativity*[28]. En este modelo los generadores del nuevo grupo de relatividad se reduce respecto del número de generadores en el grupo de Poincaré. En particular, hay una ruptura explícita de la invariancia bajo rotaciones.

La teoría de la relatividad deformada (DSR) es una idea relativamente nueva que propone una deformación, en lugar de la ruptura, de la simetría de Poincaré. Por el momento no se conoce su formulación en el espacio de coordenadas, pero sí que se ha propuesto esta generalización de la relatividad especial en el espacio de momentos. DSR por el momento no es una teoría completa, en el sentido de que todavía no hay un marco dinámico consistente para esta teoría y por lo tanto sólo es aplicable como una teoría cinemática. A pesar de los problemas que podemos encontrar en esta teoría, y que consideraremos más adelante, resulta interesante considerar este tipo de modelos en los que no hay un sistema de referencia privilegiado¹³ al mismo tiempo que modifica el concepto usual de invariancia Lorentz.

Consideremos el álgebra de Lorentz para los generadores de las rotaciones, L_i y de los boosts, B_i

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}L_k, \quad [L_i, B_j] = i\epsilon_{ijk}B_k, \quad [B_i, B_j] = -i\epsilon_{ijk}L_k \quad (2.3)$$

¹³Esto es ventajoso desde el punto de vista fenomenológico ya que con este tipo de modelos se pueden eludir por ejemplo las ligaduras que imponen los threshold en observaciones astrofísicas, así como las variaciones sidéreas que se buscan en experimentos terrestres.

mientras que los conmutadores entre los generadores de las transformaciones de Lorentz y los de las traslaciones espaciotemporales son

$$[L_i, P_0] = 0, \quad [L_i, P_j] = i\epsilon_{ijk}P_k, \quad (2.4)$$

$$[B_i, P_0] = if_1 \left(\frac{P}{\kappa} \right) P_i, \quad (2.5)$$

$$[B_i, P_j] = i \left[\delta_{ij}f_2 \left(\frac{P}{\kappa} \right) P_0 + f_3 \left(\frac{P}{\kappa} \right) \frac{P_i P_j}{\kappa} \right]. \quad (2.6)$$

donde κ es una escala de energía desconocida. Y finalmente tenemos que $[P_i, P_j] = 0$. Las relaciones de conmutación (2.5) y (2.6) se han expresado en términos de las funciones adimensionales f_1 , f_2 y f_3 , que son lo suficientemente generales como para incluir todos los modelos DSR propuestos (DSR1[29], DSR2[30] y DSR3[31]). Estas funciones son tales que se reducen a las de relatividad especial en el límite $\kappa \rightarrow +\infty$, es decir que f_1 y f_2 tienden a 1 mientras que f_3 tiende a un valor finito. Además son tales que preservan la simetría bajo rotaciones, $f_i(P_0/\kappa, \sum_{i=1}^3 P_i^2/\kappa)$.

DSR hace un conjunto de hipótesis de manera que el grupo de Lorentz sigue generando las simetrías del espacio-tiempo, pero actúa no linealmente sobre los campos, de tal manera que no sólo la velocidad de la luz es un invariante relativista sino que hay una nueva escala de momentos invariante, κ , que se suele tomar como la energía de Planck. Las características de este tipo de modelos también las encontramos en modelos de geometría no conmutativa, como por ejemplo en el modelo de κ -Minkowski, como veremos más adelante. Más adelante detallaremos la estructura de este tipo de teorías.

Para finalizar con esta sección comentaremos una última idea sobre estos marcos no dinámicos de violación Lorentz. Otra posibilidad que se contempla en QG es que la estructura del espacio-tiempo tenga una naturaleza estocástica cuando lo analizamos a pequeñas distancias. Cuando combinamos esta estructura con la violación de la invariancia Lorentz encontramos una modificación estocástica de la relación de dispersión que fluctúa en el tiempo. En este tipo de modelos las relaciones de dispersión se caracterizan por los términos usuales $f^{(n)}$, salvo que ahora estos coeficientes están pesados por una distribución de probabilidad que refleja la naturaleza estocástica del espacio-tiempo. En este tipo de modelos n no tiene por qué ser un entero.

2.5. Violación Lorentz y naturalidad

De las ligaduras sobre los operadores que describen LV dentro del marco de EFT, vemos que los límites sobre los operadores renormalizables y los operadores de dimensión 5 e impares bajo CPT son todas muy severos. Para evaluar qué es lo que significan estos límites para la teoría, deberíamos saber primero cuál es la magnitud de estos efectos LV predicha por la teoría de QG subyacente. Pero como hemos dicho, no hay por el momento una predicción

sólida de ninguna teoría de gravedad cuántica de una violación de la invariancia Lorentz y por lo tanto no podemos estimar la magnitud de esta violación a partir de esta teoría fundamental. Lo que sí podemos hacer es decir, utilizando las reglas de la teoría de campos efectiva, cuál debería ser la magnitud esperada de estos efectos.

Una pregunta esencial que surge es: si la invariancia Lorentz se viola por QG, ¿por qué la invariancia Lorentz es una muy buena simetría aproximada a bajas energías?[32] Supondremos que por alguna razón desconocida, los números adimensionales que aparecen en la teoría (de acuerdo con el criterio de Dirac) deben ser $\mathcal{O}(1)$. Puesto que en estos análisis hemos factorizado la escala de Planck en cada término del Lagrangiano (o de la relación de dispersión), que suponemos es la escala natural en la cual los efectos de gravedad cuántica comienzan a apreciarse, lo más natural es esperar que los coeficientes de los términos LV sean de orden uno. Hemos visto que no lo son, y por lo tanto debe haber una razón por la que sean muy pequeños o cero.

Considerando los operadores no renormalizables, como están suprimidos por la escala de Planck es natural que sean pequeños. Sin embargo, via correcciones radiativas (que vienen de integrar hasta el cutoff E_{Pl}) se generan operadores renormalizables con coeficientes grandes. Estos coeficientes son $\mathcal{O}(1)$ ya que puesto que los operadores no renormalizables están suprimidos por E_{Pl} entran dentro de las integrales divergentes. Estas integrales se pueden regular introduciendo un cutoff en la teoría efectiva, que también es E_{Pl} , por lo que al final los factores E_{Pl} se cancelan. Sin embargo, no se ha encontrado ninguna evidencia de esta violación, por lo que la ausencia de operadores de dimensión baja (renormalizables) implica que o bien existe un ajuste fino en el sector LV (hay alguna otra simetría que protege los operadores de dimensión baja), o bien que la simetría Lorentz es exacta.

Sin embargo este argumento presupone que no hay nueva física entre la escala de bajas energías accesible experimentalmente y la escala de Planck, ya que hemos integrado las integrales a loops solo con la física que conocemos, a diferencia de lo que la experiencia en la historia de la física nos muestra. La presencia de nueva física en este rango intermedio de energías modificaría nuestro razonamiento. Supongamos que existe una combinación de simetrías diferentes de la invariancia Lorentz, que sean incompatibles con todos los operadores LV renormalizables y con los operadores no renormalizables impares bajo CPT. Las correcciones radiativas que envuelven operadores de dimensión alta, en lugar de generar estos términos peligrosos, se cancelan o son cero. De este modo esta teoría sería viable experimentalmente.

Puesto que no vemos una simetría extra a bajas energías, esto significa que debe estar rota a alguna escala $\Lambda_b \gtrsim 1TeV$. Por debajo de Λ_b esta simetría no existe, por lo que podemos tener los mismos términos que en la teoría efectiva original. Pero ahora, si tenemos un término no renormalizable suprimido por E_{Pl} con un coeficiente $\mathcal{O}(1)$ no generaremos radiativamente términos renormalizables grandes. Las integrales de loops sólo contribuyen hasta la escala de ruptura de la simetría Λ_b , lo que da lugar a operadores renormalizables de dimensión 3 con una supresión Λ_b^2/E_{Pl} y a operadores renormalizables de dimensión 4 con una supresión

Λ_b^2/E_{Pl}^2 . En la tabla 1 se muestran los límites experimentales sobre varios de estos operadores (para más detalles ver [35], donde se encuentran resumidos los resultados experimentales de búsquedas de LV y CPTV en los distintos sectores del SME).

¿Qué simetría hace que este mecanismo funcione? Supersimetría tiene el comportamiento necesario para que esto funcione. SUSY prohíbe la presencia de operadores LV renormalizables, mientras que permite que tengamos operadores de dimensión 5 y 6, y para que sea compatible con los límites actuales la escala de ruptura de esta simetría debe estar aproximadamente por debajo de $1PeV$. Esto nos proporciona una forma de testear SUSY en una teoría con LIV. Si en la búsqueda de LV a bajas energías vemos una señal positiva, esto implicaría no solo la violación de la invariancia Lorentz sino que existe otra simetría, que nosotros hemos supuesto que es SUSY como una posible hipótesis, que debe existir a más bajas energías que la escala de Planck.

2.6. Tests de Violación Lorentz

Con esta breve introducción a varios de los escenarios que estudian desviaciones respecto a la invariancia Lorentz, podemos pasar a tratar algunos de los experimentos en los que se pueden estudiar efectos de violación Lorentz así como los límites experimentales sobre los parámetros que caracterizan estas desviaciones. En este análisis surgen dificultades inherentes al propio formalismo que hemos elegido para describir la fenomenología. Por ejemplo, en el caso de las teorías en las que sólo se ha desarrollado de manera consistente un marco cinemático, aparecen dificultades a la hora distinguir cuándo un efecto es originado por modificaciones en la dinámica o es puramente un efecto cinemático, o cuando uno analiza efectos que parecen sensibles sólo a la cinemática es posible que en algún momento a la hora de pasar a poner límites experimentales aparezca en cierto grado la dependencia con la dinámica. Un ejemplo característico en el que surgen este tipo de dificultades lo encontramos en los umbrales de desintegración de partículas.

Cuando adoptamos un marco dinámico no surgen este tipo de problemas, pero aparecen otras dificultades relacionadas con la no renormalizabilidad de la teoría de campos subyacente. En una teoría cuántica de campos efectiva en la que tenemos a nivel árbol efectos suprimidos de las desviaciones de la simetría Lorentz a la escala de Planck, es posible que aparezcan en la expansión perturbativa términos adicionales que dan lugar a modificaciones (radiativas) a las relaciones de dispersión que no están suprimidas por el cutoff de la teoría original (no renormalizable).

Con esto no queremos decir que ambos marcos sean inconsistentes, sino que todavía no se han desarrollado lo suficiente por lo que hay que buscar la fenomenología en la que poder aplicarlos así como ser cuidadosos en ello.

Hay muchos tests experimentales de la simetría Lorentz [16, 34, 33], tanto al nivel de experimentos terrestres como de observaciones astrofísicas, pero nosotros sólo vamos a analizar

dos de ellos: umbrales de reacciones (estabilidad del fotón, efecto Čerenkov en el vacío, GZK cutoff con UHECRs), que imponen ligaduras sobre diversos sectores del SM, y oscilaciones de neutrinos.

2.6.1. Umbrales de reacciones

Una cinemática en la que tenemos una violación de la invariancia Lorentz da lugar a una serie de cambios en las reacciones entre partículas. Estos cambios pueden manifestarse mediante un desplazamiento en la energía umbral de ciertas reacciones, añadiendo nuevos umbrales a los que ya existen, o incluso permitiendo reacciones nuevas que no se dan en la física en la que la simetría Lorentz es exacta. Estos efectos son de gran interés ya que son sensibles a términos LV suprimidos por la escala de Planck a energías muy por debajo de la energía de Planck, permitiendo el uso de observaciones astrofísicas para imponer límites a estos parámetros LV[36].

Dado que las relaciones de dispersión determinan cómo se propagan las partículas y, vía las leyes de conservación de la energía y del momento, cómo sus interacciones están cinemáticamente constreñidas, las relaciones de dispersión que violan la invariancia Lorentz proporcionan una forma de investigar la física de LV de una manera relativamente independiente del modelo teórico que tenemos detrás. En este apartado trataremos de analizar las consecuencias observacionales de estas relaciones de dispersión modificadas en un espacio plano, es decir despreciando efectos gravitacionales.

Inestabilidad del fotón

Como un primer ejemplo para poner de manifiesto el problema consideraremos la desintegración del fotón, $\gamma \rightarrow e^+e^-$. En la física estándar en la que la simetría Lorentz es exacta el fotón es estable. Es la ley de conservación de la energía y del momento lo que prohíbe esta reacción. Consideremos que la invariancia Lorentz está rota y que la relación de dispersión del fotón es de la forma

$$E_\gamma^2 = p^2 + f_\gamma^{(3)} \frac{p^3}{E_{Pl}}, \quad (2.1)$$

mientras que el electrón y el positrón satisfacen las relaciones de dispersión habituales invariantes Lorentz; entonces es posible satisfacer la ley de conservación de la energía para $f_\gamma^{(3)} > 0$ ¹⁴, de modo que esta reacción puede darse por encima de una cierta energía umbral $E_{th} \sim (m_e^2 E_{Pl} / f_\gamma^{(3)})^{1/3}$. Esta energía umbral se traslada en una ligadura para $f_\gamma^{(3)}$. Se observan fotones provenientes de la nebulosa del Cangrejo(CN) con energías de 50 TeV, por lo que esta reacción no tiene lugar por lo menos con fotones por debajo de estas energías, ya que se han propagado desde CN hasta nosotros sin decaer. Si la probabilidad de desintegración es lo

¹⁴Cualitativamente podemos entender esto si vemos el término extra en la relación de dispersión como una masa efectiva para el fotón a altas energías.

suficientemente alta, entonces podemos suponer que E_{th} está por encima de los 50TeV y poner límites sobre $f_\gamma^{(3)}$. Si suponemos $f_\gamma^{(3)} \sim \mathcal{O}(1)$ entonces $E_{th} \sim 10TeV$, por lo que podemos imponer ligaduras más fuertes que $\mathcal{O}(1)$ sobre $f_\gamma^{(3)}$ para fotones de 50TeV. Sin embargo si la probabilidad de desintegración es muy pequeña, entonces es posible que el fotón por encima del umbral sea detectado. Si usamos el elemento de matriz invariante Lorentz \mathcal{M} , es decir que sólo consideramos efectos de LV en la cinemática, se puede ver que conforme aumenta la energía por encima de la energía umbral la probabilidad de desintegración en la unidad de tiempo es proporcional a $f_\gamma^{(3)} E^2/E_{Pl}^2$. Un fotón de 50TeV está por encima del umbral y el tiempo de decaimiento es aproximadamente $10^{-11}/f_\gamma^{(3)}$ s, mientras que el tiempo que tarda un fotón en viajar hasta nosotros desde CN es del orden de 10^{11} s. Luego un fotón por encima del umbral decaerá de forma prácticamente instantánea respecto al tiempo necesario para que sea observado, y por lo tanto no es necesario considerar las correcciones en la dinámica a \mathcal{M} .

Para reacciones rápidas, es necesario un cambio enorme en los elementos de la matriz de transición como para considerarlos a la hora de derivar una ligadura cinemática. En este ejemplo, dado que la amplitud de probabilidad va con $|\mathcal{M}|^2$, sólo un cambio superior a 10^{11} en \mathcal{M} respecto al elemento de matriz invariante Lorentz invalidaría las ligaduras en $f^{(3)} \sim \mathcal{O}(1)$ que sólo se basan en estas consideraciones cinemáticas. Evidentemente esta situación cambia para reacciones en las que el tiempo de viaje de la partícula en cuestión es del orden del tiempo de desintegración. Por esta razón, reacciones en las que intervienen partículas que interactúan débilmente, como el neutrino, son más sensibles a cambios en \mathcal{M} .

Un análisis más detallado de la desintegración del fotón lo encontramos en [36]. Aquí encontramos que para $n=2$ el límite para los parámetros de las relaciones de dispersión es $f_e^{(2)} - f_\gamma^{(2)} \lesssim 10^{-16}$ cuando se utiliza como umbral los fotones de 50TeV provenientes de CN. También se deriva el espacio de parámetros $(\xi, \eta) \equiv (f_e^{(3)}, f_\gamma^{(3)})$ excluidos por la observación de fotones de estas energías, que mostramos en la figura 1. En el caso de que adoptemos el marco de EFT, estos límites sobre los parámetros en las relaciones de dispersión se traducen en límites sobre los operadores LV que generan estas modificaciones.

Desde el punto de vista de las teorías en las que la simetría Lorentz está deformada, los umbrales en las desintegraciones de partículas no se pueden introducir como cantidades independientes del observador, por lo que no son compatibles con los principios de modelos del tipo DSR. Diferentes observadores asignan valores distintos a las energías, por lo que la existencia de umbrales en este caso haría que el proceso estuviera permitido para unos observadores y prohibido para otros. De hecho, si se analiza la reacción $\gamma \rightarrow e^+e^-$ en un modelo DSR, en el que las leyes de conservación de la energía y del momento se ven modificadas uno obtiene que siempre $\cos \theta > 1$, donde θ es el ángulo de apertura entre el par e^+e^- , consistentemente con el resultado de que el proceso $\gamma \rightarrow e^+e^-$ está prohibido en DSR. Sin embargo, ya que cualquier teoría compatible con los principios de DSR no permite umbrales en las desintegraciones, mediante la búsqueda de estos umbrales se puede invalidar la idea

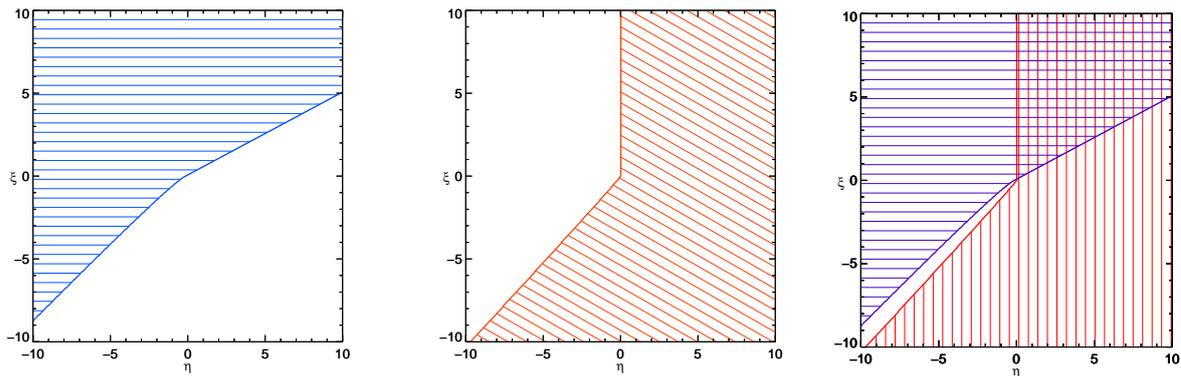


Figura 1 Ligaduras a partir de la ausencia de la desintegración del fotón, la región azul representa el espacio de parámetros excluidos por la observación de rayos gamma a energías del orden 50TeV (panel izquierdo). Ligaduras a partir de la ausencia del efecto Čerenkov en el vacío para $n = 3$, la región roja representa el espacio de parámetros incompatible con la existencia de electrones $\sim 100\text{TeV}$ detectados indirectamente via la radiación sincrotrón procedente de remanentes de supernova (panel central). Combinación de ambas ligaduras (panel derecho).

de DSR.

Efecto Čerenkov en el vacío

Como hemos visto la energía umbral en la desintegración $\gamma \rightarrow e^+e^-$ dependía de m_e , que es un número suficientemente pequeño como para compensar la energía de Planck. Este efecto podemos apreciarlo mejor si consideramos el efecto Čerenkov en el vacío, $A \rightarrow A\gamma$, donde A es una partícula cargada con masa no nula. De nuevo esta reacción no es posible en presencia de invariancia Lorentz debido a la conservación de la energía y del momento. Consideraremos una relación de dispersión modificada del tipo (2.2) para la partícula A con $f_A^{(n)} > 0$, mientras que para el fotón mantenemos la relación de la física invariante Lorentz $E = p$.

La radiación Čerenkov se produce generalmente¹⁵ cuando la velocidad de propagación de la partícula en un medio excede la velocidad de propagación de la luz en ese medio. Esta condición se puede aplicar también en teorías LV, de manera que la velocidad de grupo de la

¹⁵Esta condición en la velocidad de las partículas sólo es aplicable para la emisión de fotones de baja energía (soft photon emission). Sin embargo, en teorías LV si el cuadrimomento del fotón es de tipo espacio y tenemos una relación de dispersión con $n > 2$ es posible la emisión de fotones de alta energía (hard Čerenkov emission).

partícula A, $v = dE/dp$ ¹⁶, es igual a la unidad para el momento

$$p_{th} = \left(\frac{m_A^2 E_{Pl}^{n-2}}{(n-1)f_A^{(n)}} \right)^{1/n}, \quad (2.2)$$

donde vemos que el umbral está controlado por la masa de la partícula. Esta ecuación la podemos reescribir en términos de $f_A^{(n)}$, y verla como una ligadura procedente de la estabilidad de A para un momento p_{obs}

$$f_A^{(n)} \leq \frac{m_A^2 E_{Pl}^{n-2}}{(n-1)p_{obs}^n}. \quad (2.3)$$

De manera que cuanto menor es la masa de la partícula, así como mayor sea su energía, más fuertes serán las ligaduras sobre estos parámetros. En la tabla 1 se estima el orden de magnitud de las ligaduras sobre $f_A^{(n)}$ sin tener en cuenta efectos dinámicos para varios tipos de partículas

	ν	e^-	μ^-	p^+
m	$\lesssim 1eV$	$0,511MeV$	$105MeV$	$938MeV$
p_{obs}	$\sim 1TeV - 10^{20}eV$	$\sim 100TeV$	$\sim 1PeV$	$\sim 5 \cdot 10^{19}eV$
$f_A^{(2)}$	$\sim 10^{-24} - 10^{-40}$	$\sim 3 \cdot 10^{-17}$	$\sim 10^{-14}$	$\sim 4 \cdot 10^{-22}$
$f_A^{(3)}$	$\sim 10^{-8} - 10^{-32}$	$\sim 3 \cdot 10^{-3}$	$\sim 10^{-1}$	$\sim 8 \cdot 10^{-14}$
$f_A^{(4)}$	$\sim 10^8 - 10^{-24}$	$\sim 3 \cdot 10^{11}$	$\sim 10^{12}$	$\sim 2 \cdot 10^{-5}$

Tabla 3 Órdenes de magnitud de los límites que impone la no observación del efecto Čerenkov en el vacío para distintas partículas.

El valor de p_{obs} para los neutrinos se obtiene de los datos de AMANDA (Antarctic Muon And Neutrino Detector Array). Para los electrones el valor de p_{obs} viene de considerar la energía que se espera que deben tener los electrones responsables de la creación de rayos gamma de $\sim 50TeV$ procedentes de la nebulosa del cangrejo vía el scattering Compton inverso. Para los muones estas energías son las energías de los muones que se espera detectar provenientes de neutrinos cósmicos, mientras que las energías de los protones son las obtenidas a partir de UHECRs.

En principio estábamos considerando este efecto para partículas cargadas, y sin embargo estamos incluyendo ligaduras para los neutrinos, ya que aunque los neutrinos sean neutros

¹⁶La validez de esta fórmula para derivar la velocidad de propagación a partir de la relación de dispersión, requiere esencialmente que la teoría de QG que hay detrás de esta relación de dispersión sea “Hamiltoniana”, en el sentido de que la velocidad a lo largo del eje x se pueda obtener del Hamiltoniano a partir de $v \sim [x, H]$, y de que el conmutador estándar, $[x, p] \sim \hbar$ y por tanto $x \sim \partial/\partial p$, preserva su forma. Este último requerimiento es relevante ya que hay análisis en QG que sugieren una modificación de la relación de dispersión en los que el conmutador $[x, p]$ se ve modificado.

tienen una estructura de carga en el SM que hace que tengan una amplitud de interacción no nula con los fotones.

El cutoff GZK y UHECRs

Los rayos cósmicos de muy altas energías (UHECRs) proporcionan una forma de probar las relaciones de dispersión modificadas inducidas por efectos de violación Lorentz. Si estos UHECRs son protones interaccionan con los fotones del fondo de radiación cósmica y producen piones, principalmente mediante el proceso $p + \gamma_{CMB} \rightarrow \Delta^+(1232) \rightarrow \pi^0 + p$ ¹⁷. Conforme la energía del protón aumenta, esta reacción puede darse con fotones cada vez menos energéticos. A muy altas energías, $\sim 5 \cdot 10^{19} eV$, la longitud de interacción es del orden de 50Mpc. Si consideramos que las fuentes de rayos cósmicos están a distancias superiores a esta longitud, entonces el espectro de protones de altas energías muestra un cutoff en torno a los $\sim 5 \cdot 10^{19} eV$.

La energía umbral de este proceso en la física invariante Lorentz se deriva de considerar la situación en la que las partículas en el estado final están en reposo, es decir cuando $(p_p + p_\gamma)^2 = (m_p + m_\pi)^2$, donde $p_{p,\gamma}$ son los cuadrimomentos del protón y del fotón iniciales. Ya que $E_p \gg m_p$, y que $m_\pi \ll 2m_p$, obtenemos la energía umbral para el protón

$$E_{GZK} \simeq \frac{m_p m_\pi}{2E_\gamma} \simeq 3 \cdot 10^{20} eV \left(\frac{2,7K}{E_\gamma} \right) \quad (2.4)$$

En el cutoff que hemos mencionado de $5 \cdot 10^{19} eV$ se tienen en cuenta los efectos debidos a la cola del espectro de radiación CMB, así como la forma de la sección eficaz cuando se incluye la resonancia. La presencia de violación Lorentz lo que hace es modificar la localización de este cutoff, de manera que se puede obtener una gran información a partir de la medida del espectro de rayos cósmicos. Si se observa una supresión en el flujo de UHECRs esto impone importantes ligaduras sobre los parámetros LV en el sector de QED, mientras que si se observasen rayos cósmicos por encima de este umbral podría constituir una señal positiva.

Diversos experimentos han tratado y tratan de determinar este cutoff. Dos de los experimentos para la detección del flujo de UHECRs comunicaron resultados que estaban en desacuerdo. AGASA encontró eventos más allá del cutoff GZK, confirmando la ausencia del cutoff con una desviación estadística de 2.5σ [37], mientras que High Resolution Fly's Eye (HiRes) y Pierre Auger Observatory (PAO) encontraron una supresión en el flujo de rayos cósmicos con una significancia estadística de 5σ y 6σ respectivamente[38, 39].

Con estos datos es posible imponer ligaduras para los parámetros que caracterizan las modificaciones en las relaciones de dispersión. En [40] se deriva a partir de estos datos una ligadura para $f_\pi^{(2)} - f_p^{(2)} < \mathcal{O}(10^{-23})$. Por otro lado en [36] obtienen la ligadura $f_p^{(3)} < \mathcal{O}(10^{-14})$

¹⁷Si la formación de la resonancia no es posible, entonces tenemos una versión más débil del GZK cutoff que viene de considerar la fotoproducción no resonante de uno o más piones $p + \gamma_{CMB} \rightarrow N\pi + p$.

suponiendo que el cutoff está situado en $5 \cdot 10^{19} eV$. Estas ligaduras deben entenderse como límites en el orden de magnitud de estas desviaciones, ya que unos límites más precisos requieren un análisis detallado de la reacción en LV EFT, así como un análisis de la forma del espectro incluyendo LV cerca del cutoff. Aunque desafortunadamente se conoce muy poco los mecanismos de aceleración que generan estos rayos cósmicos de altas energías, por lo que no podemos ver cómo afecta LV en esta parte del problema.

2.6.2. Violación Lorentz en neutrinos

Debido a su pequeña masa, los neutrinos proporcionan una prueba muy sensible de desviaciones respecto a la simetría Lorentz. Una forma sencilla de ver esto es considerando el escenario de las relaciones de dispersión modificadas. Por ejemplo, en procesos de emisión Čerenkov en el vacío, para relaciones de dispersión del tipo $n = 3$ y $n = 4$, las energías a las cuales los efectos de violación Lorentz son apreciables ($f^{(3,4)} \sim \mathcal{O}(1)$) para electrones son $10 TeV$ y $10^5 TeV$, respectivamente, mientras que para los neutrinos, si consideramos que su masa es $\sim 1 eV$, las energías correspondientes son sólo $1 GeV$ y $1 TeV$, que están dentro del rango de energías accesible en la física de aceleradores. Los tests de violación de la invariancia Lorentz más sensibles en el sector de los neutrinos se obtienen de experimentos de oscilaciones de neutrinos.

Los efectos de violación Lorentz en el sector de los neutrinos son muy diversos (ver [41, 42, 43] entre otros muchos estudios). Para discutir brevemente cómo afecta la violación Lorentz a la propagación de los neutrinos, consideraremos un caso sencillo en el que las velocidades límite de los autoestados de masa de los neutrinos son diferentes, es decir que los neutrinos tienen diferentes relaciones de dispersión

$$E^2 = (1 + f_{\nu_i}^{(2)}) p^2 + m_i^2, \quad (2.1)$$

donde i etiqueta los autoestados de energía. En este caso los autoestados de energía también son autoestados de masa, esto se corresponde con un caso especial en el sector neutrino de mSME para el que el coeficiente c_{ν}^{00} es diagonal en el espacio de sabor y es el único término no nulo.

Consideremos que un neutrino es producido en una determinada reacción en un autoestado de sabor definido α con una energía E . La amplitud de que este neutrino esté en un autoestado de energía i viene dada por la matriz de mezcla de Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata (PMNS), $U_{\alpha i}$. De modo que la amplitud de probabilidad de que el neutrino sea observado en otro autoestado de sabor β a una distancia L y a un tiempo t , de la fuente vienen dada por

$$A_{\alpha\beta} = \sum_i U_{\beta i}^\dagger \exp[-i(Et - pL)] U_{\alpha i} \approx \sum_i U_{\beta i}^\dagger \exp\left[-i\left(\frac{f_{\nu_i}^{(2)}}{2}E + \frac{m_i^2}{2E}\right)\right] U_{\alpha i}, \quad (2.2)$$

donde hemos considerado que para neutrinos relativistas

$$E = \left(1 + \frac{f_{\nu_i}^{(2)}}{2}\right) p + \frac{m_i^2}{2p}. \quad (2.3)$$

Se suele definir una masa efectiva N_i como

$$N_i^2 = m_i^2 + f_{\nu_i}^{(2)} E^2, \quad (2.4)$$

de manera que la probabilidad de que un autoestado de sabor ν_α oscile a un autoestado de sabor ν_β , $P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = |A_{\alpha\beta}|^2$, se puede expresar como

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = & \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{j>i} \text{Re} [U_{\beta i}^* U_{\alpha i} U_{\beta j} U_{\alpha j}^*] \sin^2 \left(\frac{\delta N_{ij}^2 L}{4E} \right) \\ & + 2 \sum_{j>i} \text{Im} [U_{\beta i}^* U_{\alpha i} U_{\beta j} U_{\alpha j}^*] \sin \left(\frac{\delta N_{ij}^2 L}{2E} \right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde $\delta N_{ij}^2 = N_i^2 - N_j^2$. Una consecuencia inmediata de la violación Lorentz en el sector de los neutrinos es que tenemos oscilaciones incluso cuando la masa de los neutrinos sea nula. Las oscilaciones debidas a este tipo de LV varían como función de LE y no como función de L/E como apoyan los datos sobre oscilaciones de neutrinos[44], por lo que no es fácil encontrar modelos en los que LV sea la única fuente de oscilación de neutrinos. Sin embargo han surgido problemas para explicar algunos de los datos experimentales de oscilaciones de neutrinos en base al modelo $3\nu\text{SM}$, lo que constituye una motivación para desarrollar modelos LV que lo expliquen. Por ejemplo se han propuesto modelos LV para explicar la anomalía en los datos de LSND¹⁸(Liquid Scintillator Neutrino Detector), y que también se ajustan al resto de datos experimentales. Esto es posible ya que, a diferencia de este ejemplo sencillo que hemos puesto, en el mSME es posible tener dependencias en la energía más complejas; también es posible tener una dependencia direccional en la probabilidad de oscilación, lo que da lugar a variaciones sidéreas, así como nuevas oscilaciones $\nu \rightarrow \bar{\nu}$ o $\bar{\nu} \rightarrow \nu$, que violan la conservación del número leptónico[42]. Se han realizado diversos análisis de datos por parte de distintas colaboraciones de este tipo de efecto de variación sidérea en las probabilidades de oscilación ([45, 46, 47, 49, 48]), en los que sólo se imponen límites sobre los parámetros que caracterizan las desviaciones de la simetría Lorentz ya que no hay una señal positiva a favor de LV.

En [50] se da una cota a la diferencia entre las velocidades de los neutrinos electrónicos y muónicos, $\left| f_{\nu_e}^{(2)} - f_{\nu_\mu}^{(2)} \right| < 10^{-22}$, mientras que a partir de los datos de Super Kamiokande

¹⁸El experimento LSND encontró un exceso de sucesos $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ que no se pueden ajustar dentro del modelo $3\nu\text{SM}$ ya que los parámetros de oscilación no están de acuerdo con los medidos por otros experimentos, difiriendo en varios órdenes de magnitud. Para aclarar este resultado anómalo se construyó el experimento MiniBooNE (Booster Neutrino Experiment), cuyas medidas a baja energía (\sim cientos de MeV) tampoco se pueden entender dentro del modelo $3\nu\text{SM}$.

es posible obtener cotas entre la diferencia de velocidades entre los neutrinos muónicos y tauónicos $\left|f_{\nu_\mu}^{(2)} - f_{\nu_\tau}^{(2)}\right| < 10^{-24}$ [51]. Los experimentos de oscilaciones de neutrinos son lo suficientemente sensibles como para testear operadores no renormalizables (de dimensión 5 y 6) que violan la invariancia Lorentz.

3. Teorías DSR

Cuando investigamos acerca de qué es lo que ocurre con la simetría Lorentz a la escala de Planck nos encontramos con tres posibles destinos para esta simetría: que la simetría Lorentz permanezca sin modificar, es decir que la simetría Lorentz sea una simetría exacta, que esté rota o que esta simetría esté deformada. Hasta el momento hemos descrito muy brevemente estas dos últimas posibilidades; sin embargo, en lo que nos queda de este estudio queremos dar una descripción más detallada de esta última posibilidad. En 2001, Giovanni Amelino-Camelia[52, 29] propuso un escenario que generalizaba la Relatividad Especial y que añadía otro invariante relativista además de la velocidad de la luz. Esta generalización es lo que se conoce por el nombre de Doubly (or Deformed) Special Relativity, cuyo postulado central es que a pesar de que se introduzcan correcciones a la Relatividad Especial a escalas de energía cercanas a la escala de Planck, el principal mensaje de la teoría de la relatividad, es decir la equivalencia de todos los observadores inerciales, permanece intacto. Un modelo DSR diferente fue propuesto posteriormente por Joao Magueijo y Lee Smolin[30]. Existe una fuerte motivación detrás de estos modelos ya que en la teoría de gravedad cuántica la masa de Planck (o equivalentemente la longitud de Planck) juegan un papel relevante, ya que esta es la escala a la cual los efectos de gravedad cuántica comienzan a ser comparables con los de otras interacciones. Por lo tanto todos los observadores deberían observar estos efectos a la misma escala.

3.1. Motivación e idea principal de DSR

La idea de DSR se propuso como una alternativa a otros estudios que describían desviaciones a la escala de Planck respecto de la simetría Lorentz. Estos análisis estaban caracterizados por la modificación de las relaciones de dispersión de las partículas en la forma $E^2 = m^2 + p^2 + \eta p^2 L_{Pl}^n E^n + \mathcal{O}(L_{Pl}^{n+1} E^{n+3})$, y cuyo origen estaba motivado por los resultados de algunos formalismos teóricos de gravedad cuántica. En la mayoría de los análisis se solía asumir que esta modificación en las relaciones de dispersión daba lugar a una ruptura de la invariancia Lorentz, y con ello la emergencia de una clase de observadores inerciales privilegiada. Observamos una clara analogía entre estos desarrollos y los que dieron lugar al surgimiento de la Relatividad Especial. En la Relatividad de Galileo no hay una escala que sea independiente del observador, y de hecho la relación entre la energía y el momento viene dada por $E = p^2/2m$. Cuando se propuso la formulación de los fenómenos electromagnéticos en términos de las ecuaciones de Maxwell, el hecho de que en estas ecuaciones apareciese una escala fundamental con dimensiones de velocidad parecía sugerir la introducción de una clase de observadores inerciales privilegiada. Sin embargo, basado en las observaciones experimentales¹⁹, Einstein formuló la teoría de la Relatividad Especial en la que introdujo una escala

¹⁹La constancia, es decir igualdad para todos observadores inerciales, de la velocidad de la luz en el vacío y la imposibilidad de detectar el movimiento absoluto de la materia respecto al “ether”

independiente del observador (la velocidad de la luz c), y en la que la relación de dispersión tomaba la forma $E^2 = c^2 p^2 + c^4 m^2$. Ahora la presencia de la velocidad de la luz en las ecuaciones de Maxwell se interpretaba bajo los dos postulados de la relatividad especial como la manifestación de la necesidad de modificar (deformar) las transformaciones de Galileo.

Resulta interesante contemplar la posibilidad de estar ante un escenario análogo. Así los distintos estudios que en gravedad cuántica dan lugar a este tipo de modificaciones en las relaciones de dispersión, se pueden interpretar no como la motivación para introducir un sistema de referencia privilegiado (el ether de gravedad cuántica) sino como motivación para modificar las leyes de transformación entre observadores inerciales, donde ahora las nuevas transformaciones estarán caracterizadas por dos escalas, c y L_{Pl} .

En DSR hay que reformular los postulados de Relatividad al igual que se hizo en la transición Galileo→Einstein. Así como para la descripción de partículas que se movían a altas velocidades fue necesario revisar la Relatividad de Galileo, en la que no hay una velocidad característica invariante, y reemplazarla por la Relatividad Especial, caracterizada por una velocidad invariante c , es posible que para describir partículas ultra energéticas tengamos que revisar la Relatividad Especial y reemplazarla por una nueva teoría de relatividad, DSR, con dos escalas invariantes características, de manera que una teoría será compatible con los principios de DSR si contempla una equivalencia entre todos los observadores inerciales (Principio de Relatividad, RP) y las leyes de transformación entre estos observadores están caracterizadas por dos escalas, una de velocidad (high-velocity) y otra de alta-energía/longitud-pequeña. Con esta teoría DSR lo que se está proponiendo es una modificación en el sector de alta energía, por lo que resulta seguro asumir que la definición operativa de la escala c se mantenga como hasta ahora, es decir debemos mantener c como la velocidad de las partículas de masa nula a bajas energías, mientras que para dar una definición operativa del segundo invariante, L_{DSR} , necesitamos la guía de los experimentos.

Todo esto lo podemos resumir en lo que se conoce como “principios de DSR” [52]. En primer lugar el principio de relatividad de Galileo sigue siendo válido:

- (RP): Las leyes de la física son las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales; en particular, los parámetros que aparecen en las leyes de la física toman el mismo valor en todos los sistemas inerciales y, equivalentemente, si dos observadores inerciales en movimiento relativo estructuran el mismo procedimiento experimental, obtendrán exactamente el mismo valor numérico de sus medidas experimentales.

Por otro lado debe haber un principio que dé una definición operativa a la escala de longitud L_{DSR} . Puesto que por el momento no disponemos de un input experimental que nos guíe, sólo podemos dar una descripción general de esta ley:

- (L1): Las leyes de la física, y en particular las leyes de transformación entre observadores inerciales, envuelven una escala fundamental (independiente del observador) de longitud

pequeña (posiblemente Planckiana) L_{DSR} , que puede ser medida por cada observador inercial siguiendo el procedimiento de medida \mathcal{M}_{DSR} .

Y por último el principio para la escala de velocidad:

- (L2): Las leyes de la física, y en particular las leyes de transformación entre observadores inerciales, envuelven una escala fundamental (independiente del observador) de velocidad c , que puede ser medida por cada observador inercial como la velocidad de la luz con una longitud de onda $\lambda \gg L_{DSR}$. Más rigurosamente, c se obtiene como el límite infrarrojo $\lambda/L_{DSR} \rightarrow \infty$ de la velocidad de la luz.

Evidentemente el postulado (L1) está incompleto ya que no se especifica el procedimiento de medida de L_{DSR} por falta de suficiente información experimental. Hasta ahora sólo encontramos argumentos teóricos acerca del papel de la longitud de Planck, pero ninguno de ellos cuentan con el apoyo de resultados experimentales. Por esta razón y basándose en los estudios que se realizaron a finales de los 90 sobre la modificación a la escala de Planck de las relaciones de dispersión, en [52] se reformula este principio como

- (L1*): Las leyes de la física, y en particular las leyes de transformación entre observadores inerciales, envuelven una escala fundamental (independiente del observador) de longitud pequeña (posiblemente Planckiana) L_{DSR} , que puede ser medida por cada observador inercial mediante la determinación de la relación de dispersión para los fotones. Esta relación es de la forma $E^2 - c^2 p^2 + f(E, p; L_{DSR}) = 0$, donde la función f es la misma para todos los observadores inerciales y en particular todos los observadores inerciales están de acuerdo en la dependencia dominante en L_{DSR} de f : $f(E, p; L_{DSR}) \approx L_{DSR} c p^2 E$.

aunque es posible fijar otro procedimiento de medida \mathcal{M}_{DSR} . Además se trata de una propuesta cuyo contenido físico hace que pueda ser refutada.

No es un problema trivial cómo se pueden realizar en la práctica estos postulados. Sabemos, tanto desde el punto de vista teórico como experimental que en SR observadores diferentes atribuyen longitudes y energías diferentes a las mismas medidas (contracción de Lorentz-FitzGerald y correcciones relativistas a la masa de las partículas). Por lo que ahora es natural preguntarse acerca de cómo es posible tener al mismo tiempo el Principio de Relatividad y una escala de longitud (o energía) independiente del observador. Esto es posible; sin embargo el precio que hay que pagar es alto, ya que posiblemente esto requiera la descripción del espacio-tiempo en términos de geometría no conmutativa, y para hablar de las simetrías del espacio-tiempo, se debe usar el lenguaje de los grupos cuánticos[53].

3.2. DSR como límite de Gravedad Cuántica

Resulta natural esperar, si la idea de DSR es correcta, que DSR emerja de alguna manera como un límite de gravedad cuántica[53, 54]. Por un lado el formalismo de la Relatividad Especial es hostil e inflexible a la introducción de otra escala de longitud o masa, mientras que en gravedad cuántica tenemos, además de la escala de velocidad c , tres constantes dimensionales, G , \hbar (que fijaremos a 1 en lo que sigue) y en algunos casos la constante cosmológica, Λ . De manera natural surge la idea de que en este paso de tomar el límite pueda quedar alguna traza de estas constantes de tal forma que emerja una nueva constante independiente del observador con dimensiones de energía o longitud.

Se suele considerar que el límite $G \rightarrow 0$ (y también $\Lambda \rightarrow 0$ si se empieza en una teoría con constante cosmológica no nula) de gravedad (cuántica) se corresponde con el espacio-tiempo de Minkowski. Pero es posible que esta interpretación no sea del todo correcta y en realidad tengamos que tomar alguno de estos límites

- i) campo gravitatorio débil, límite de gravedad cuántica en que la constante cosmológica es pequeña:

$$\lim_{G, \Lambda \rightarrow 0} \sqrt{\frac{G}{\Lambda}} = \frac{1}{\kappa} \neq 0$$

o

- ii) campo gravitatorio débil, límite semiclásico de gravedad cuántica:

$$\lim_{G, \hbar \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\hbar}{G}} = \kappa \neq 0$$

donde κ tiene dimensiones de masa. Aunque no está claro cuál de estas realizaciones tiene lugar en la Naturaleza, nosotros seguiremos los argumentos que se presentan en [55], donde se considera la primera situación. Aquí se considera una teoría de gravedad cuántica 2+1 dimensional con $\Lambda > 0$.

Se puede demostrar que las excitaciones del estado fundamental de esta teoría de gravedad cuántica transforman bajo representaciones del álgebra cuántica deformada (álgebra de Hopf) de deSitter $SO_q(3, 1)$, con $z = \ln q$ comportándose en el límite de $\Lambda \hbar^2 / \kappa^2$ pequeño como $z \approx \sqrt{\Lambda} \hbar / \kappa$. No entraremos a describir lo que es un álgebra cuántica, de hecho para lo que necesitamos basta con decir que se trata de una generalización de la estructura de álgebra de Lie en la que los conmutadores entre los elementos del álgebra son funciones analíticas de los mismos y que se reduce a esta última cuando tomamos un límite apropiado. Para dar una formulación explícita debemos adoptar una base para $SO_q(3, 1)$; en particular, describiremos esta estructura en términos de los seis generadores $M_{0,i}$ ($i = 1, 2, 3$), $M_{1,2}$, $M_{1,3}$

y $M_{2,3}$ satisfaciendo las siguientes relaciones de conmutación:

$$\begin{aligned}
 [M_{2,3}, M_{1,3}] &= \frac{1}{z} \sinh(zM_{1,2}) \cosh(zM_{0,3}) \\
 [M_{2,3}, M_{1,2}] &= M_{1,3} \\
 [M_{2,3}, M_{0,3}] &= M_{0,2} \\
 [M_{2,3}, M_{0,2}] &= \frac{1}{z} \sinh(zM_{0,3}) \cosh(zM_{1,2}) \\
 [M_{1,3}, M_{1,2}] &= -M_{2,3} \\
 [M_{1,3}, M_{0,3}] &= M_{0,1} \\
 [M_{1,3}, M_{0,1}] &= \frac{1}{z} \sinh(zM_{0,3}) \cosh(zM_{1,2}) \\
 [M_{1,2}, M_{0,2}] &= -M_{0,1} \\
 [M_{1,2}, M_{0,1}] &= M_{0,2} \\
 [M_{0,3}, M_{0,2}] &= M_{2,3} \\
 [M_{0,3}, M_{0,1}] &= -M_{1,3} \\
 [M_{0,2}, M_{0,1}] &= \frac{1}{z} \sinh(zM_{1,2}) \cosh(zM_{0,3})
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

El resto de conmutadores son todos triviales. Lo primero que se observa es que estos conmutadores no son funciones lineales de los generadores, como en el caso de las álgebras de Lie, sino que son funciones analíticas de ellos. Sin embargo siguen siendo antisimétricos y se satisface la identidad de Jacobi. Es fácil ver que en el límite $z \rightarrow 0$ el álgebra (3.1) se reduce al álgebra estándar $SO(3, 1)$, que es el álgebra de Lie de de Sitter. Ahora ya sabemos cómo obtener el álgebra de Poincaré a partir de esta última. Para ello tenemos que identificar los generadores con las dimensiones físicas correctas (los generadores $M_{\mu\nu}$ son adimensionales) a partir de las constantes presentes en la definición del parámetro z

$$\begin{aligned}
 E &= \sqrt{\Lambda} \hbar M_{0,3} \\
 P_i &= \sqrt{\Lambda} \hbar M_{0,i}, \quad i = 1, 2 \\
 M &= M_{1,2} \\
 N_i &= M_{i,3}
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

si ahora tomamos el límite $\Lambda \rightarrow 0$ (contracción de Inönü-Wigner) del álgebra de de Sitter se obtiene el álgebra clásica de Poincaré $\mathcal{P}(2 + 1)$. Sin embargo en gravedad cuántica no es posible tomar primero el límite clásico $z \rightarrow 0$ y luego la contracción $\Lambda \rightarrow 0$ ya que según la relación $z \approx \sqrt{\Lambda} \hbar / \kappa$ estos dos parámetros son proporcionales. El límite se ha de tomar de manera que la fracción $z / (\sqrt{\Lambda} \hbar) = \kappa^{-1}$ se mantenga fija. Como resultado de este límite lo que se obtiene no es el álgebra clásica de Poincaré, sino el álgebra de κ -Poincaré. Para verlo,

reescribimos el álgebra (3.1) usando (3.2) y asumiendo que $z \approx \sqrt{\Lambda}\hbar/\kappa$ se obtiene

$$\begin{aligned}
 [N_2, N_1] &= \frac{\kappa}{\hbar\sqrt{\Lambda}} \sinh\left(\frac{\hbar\sqrt{\Lambda}}{\kappa}M\right) \cosh\left(\frac{E}{\kappa}\right) \\
 [M, N_i] &= \epsilon_{ij}N^j \\
 [N_i, E] &= P_i \\
 [N_i, P_j] &= \delta_{ij}\kappa \sinh\left(\frac{E}{\kappa}\right) \cosh\left(\frac{\hbar\sqrt{\Lambda}}{\kappa}M\right) \\
 [M, P_i] &= \epsilon_{ij}P^j \\
 [E, P_i] &= \Lambda N_i \\
 [P_1, P_2] &= \sqrt{\Lambda}\hbar\kappa \sinh\left(\frac{\sqrt{\Lambda}\hbar}{\kappa}M\right) \cosh\left(\frac{E}{\kappa}\right)
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

si ahora tomamos el límite $\Lambda \rightarrow 0$ manteniendo κ constante obtenemos el álgebra $\mathcal{P}_\kappa(2+1)$ κ -Poincaré en la base estándar. De nuevo obtenemos un álgebra en la que los conmutadores de los generadores no son funciones lineales de los mismos. Es curioso el hecho de que los límites $z \rightarrow 0$ y $\Lambda \rightarrow 0$, que debemos tomar simultáneamente por razones físicas, no dejen otra alternativa que obtener el álgebra de Poincaré deformada. Y esto es porque la fracción $\kappa^{-1} \sim z/\sqrt{\Lambda}$ se mantiene constante durante la contracción y por tanto permanece en el álgebra resultante.

Vemos que en el límite $\kappa \rightarrow \infty$ del álgebra κ -Poincaré (3.3) obtenemos el álgebra de Poincaré clásica. También observamos que en este álgebra tanto el sector Lorentz como el de las traslaciones están deformados. Sin embargo en el caso de las álgebras cuánticas uno es libre de elegir la base de generadores de una manera arbitraria, pero analítica. De hecho, existe una base en la que el sector Lorentz se mantiene sin deformar. Si en lugar de hacer las redefiniciones que se han hecho en (3.2), consideramos

$$\begin{aligned}
 E &= \sqrt{\Lambda}\hbar M_{0,3} \\
 e^{zE/(2\hbar\sqrt{\Lambda})}P_i &= \hbar\sqrt{\Lambda}M_{0,i} \quad i = 1, 2 \\
 M &= M_{1,2} \\
 e^{zE/(2\hbar\sqrt{\Lambda})}\left(N_1 - \frac{z}{2\hbar\sqrt{\Lambda}}MP_2\right) &= M_{1,3} \\
 e^{zE/(2\hbar\sqrt{\Lambda})}\left(N_2 + \frac{z}{2\hbar\sqrt{\Lambda}}MP_1\right) &= M_{2,3}
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

De nuevo tomamos la contracción manteniendo la fracción $\kappa^{-1} \sim z/\sqrt{\Lambda}$ fija. Ahora las

relaciones de conmutación de $\mathcal{P}_\kappa(2+1)$ en el límite $\Lambda \rightarrow 0$ vienen dadas por

$$\begin{aligned}
 [N_i, N_j] &= -\epsilon_{ij}M \\
 [M, N_i] &= \epsilon_{ij}N^j \\
 [N_i, E] &= P_i \\
 [N_i, P_j] &= \delta_{ij} \frac{\kappa}{2} \left(1 - e^{-2E/\kappa} + \frac{\mathbf{P}^2}{\kappa^2} \right) - \frac{1}{\kappa} P_i P_j \\
 [M, P_i] &= \epsilon_{ij}P^j \\
 [E, P_i] &= 0 \\
 [P_1, P_2] &= 0 .
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

que se conoce como la base bicross-product. Vemos que los generadores de Lorentz forman una álgebra de Lie, mientras que los generadores del momento transforman no linealmente, de modo que el álgebra (3.5) es justo de la forma requerida por las teorías DSR (el modelo DSR basado en éste álgebra se denomina DSR1). Por construcción esta es el álgebra de las simetrías del espacio plano, siendo un límite apropiado del álgebra de simetrías de los estados de gravedad cuántica y que además contiene un escala de masa κ que es independiente del observador. Esto nos muestra que en principio es posible construir una teoría que satisfice los principios de DSR, aunque para construir una teoría que describa la cinemática relativista de las partículas basada en las simetrías definidas por (3.3), (3.5), necesitamos desarrollar otros conceptos, como por ejemplo cómo componer momentos en sistemas de más de una partícula, cuáles son las leyes de conservación, etc.

Las álgebras (3.3), (3.5) se han obtenido a partir del límite del álgebra de simetrías de gravedad en 2+1 dimensiones, cuya característica principal es que es una teoría de campos topológica sin grados de libertad dinámicos. Falta ver cómo funciona este argumento para gravedad en 3+1 dimensiones. En esta situación para obtener el límite apropiado (SR) debemos desconectar los grados de libertad dinámicos de gravedad, y en el límite en que la constante gravitatoria tiende a cero, gravedad en 3+1 dimensiones es de nuevo una teoría de campos topológica. Sin embargo, no se conoce un límite de gravedad cuántica en 3+1 dimensiones que resulte en una teoría de DSR, aunque hay evidencias a favor de esta posibilidad.

En el caso 4-dimensional podemos suponer que las excitaciones del estado fundamental de gravedad cuántica transforman bajo representaciones del álgebra cuántica deformada de de Sitter, $SO_q(3,2)$, con $z = \ln q$ comportándose en el límite de $\Lambda\kappa^{-2}$ pequeño como $z \approx \Lambda\kappa^{-2}$. Ahora la contracción $\Lambda\kappa^{-2} \rightarrow 0$ se hace escalando q de acuerdo a $z \approx \Lambda\kappa^{-2}$, pero en este caso el límite es algo más complejo porque el reescalado de los generadores, ha de acompañarse con la renormalización simultánea de los generadores de energía momento. Esto es de esperar, ya que a diferencia del caso en 2+1 dimensiones, en 3+1 tenemos grados de libertad locales que son dinámicos, cuyo efecto sobre los operadores de la teoría de campos efectiva debe tenerse en cuenta en el proceso de contracción. De manera que ahora nos encontramos con una familia de contracciones etiquetadas por un parámetro positivo real r , que caracteriza

la prescripción de renormalización escogida. Así que para $0 < r < 1$, como resultado de la contracción se obtiene el álgebra de Poincaré, para $r > 1$ la contracción no existe y para $r = 1$ la contracción da lugar al álgebra 4 dimensional deformada κ -Poincaré. Por lo tanto tenemos el problema abierto de tratar de explicar si realmente gravedad cuántica singulariza el valor de este parámetro a 1, y cómo hacerlo.

3.3. DSR y el álgebra de κ -Poincaré

Tras los artículos pioneros en DSR [29, 52] enseguida se realizaron análisis[56] que señalaban que el álgebra cuántica κ -Poincaré proporciona un formalismo matemático adecuado para describir la cinemática relativista de una partícula en DSR, de manera que el álgebra de κ -Poincaré está en la misma relación con DSR que el álgebra de Poincaré con la Relatividad Especial, es decir, que DSR es una teoría física en la que la descripción del sector energía-momento viene dado por el álgebra κ -Poincaré. Sin embargo, el conocimiento de este álgebra sólo nos proporciona el primer paso en la construcción de la teoría DSR[57] por varias razones.

En primer lugar, como hemos visto el álgebra de κ -Poincaré es un álgebra cuántica no lineal, y por lo tanto a diferencia del álgebra clásica de Poincaré no hay restricciones sobre las transformaciones lineales entre momentos, lo que significa que desde el punto de vista matemático diferentes bases para el álgebra relacionadas por transformaciones arbitrarias (pero analíticas) de los momentos son equivalentes. La cuestión que surge ahora es cuál de estas bases matemáticamente equivalentes son físicamente equivalentes, o si es posible singularizar alguna de ellas por consideraciones físicas.

Por otro lado, este álgebra sólo describe el sector de energía-momento de la teoría DSR. Sin embargo, el conocimiento de sólo este sector es insuficiente para considerar muchos problemas físicos. Una salida a este problema lo da la co-álgebra, ya que permite derivar la forma del álgebra de conmutadores de todo el espacio de fases, como veremos más adelante. Lo importante aquí es distinguir qué propiedades son universales, es decir independientes de la base de energía-momento que escojamos y cuáles no.

3.3.1. Bases del álgebra cuántica κ -Poincaré

Veamos un conjunto de álgebras que proporcionan el sector de energía-momento requerido por DSR. En este punto es importante destacar que en la base estándar, para la cual el álgebra κ -Poincaré viene dada por (3.3), el sector Lorentz está deformado, mientras que en la base bicrossproduct (3.5) no. Por lo tanto para distinguir entre estos dos casos se introduce la noción de κ -DSR álgebra[57] la cual es un álgebra κ -deformada de Heisenberg sobre el espacio de fases del sistema en la que la base es tal que se satisfacen:

- (i) el sector Lorentz de esta álgebra no está deformado,

- (ii) la acción de las rotaciones sobre los momentos es la clásica,
- (iii) los conmutadores del espacio-tiempo y los conmutadores entre las posiciones y los momentos están definidos de manera unívoca mediante el co-producto y el “pairing” adecuado (como veremos más adelante), y
- (iv) en el límite en el que el parámetro de deformación $\kappa \rightarrow \infty$, el álgebra tiene como límite el álgebra clásica del espacio de fases, es decir el álgebra de Poincaré junto con las relaciones de conmutación canónicas entre las posiciones y los momentos (con una co-álgebra trivial)

Analizaremos tres bases de κ -DSR álgebras, de manera que para todas ellas, de acuerdo con (i) y (ii), tenemos para las rotaciones M_i y para los boosts N_i que

$$[M_i, M_j] = i\epsilon_{ijk}M_k, \quad [M_i, N_j] = i\epsilon_{ijk}N_k, \quad [N_i, N_j] = -i\epsilon_{ijk}M_k, \quad (3.1)$$

y

$$[M_i, p_j] = i\epsilon_{ijk}p_k, \quad [M_i, p_0] = 0, \quad (3.2)$$

se satisfacen.

I. Álgebra κ -Poincaré en la base bicrossproduct (DSR1)

El resto del álgebra en esta base ya lo habíamos obtenido en (3.5)

$$[N_i, p_j] = i\delta_{ij} \left[\frac{\kappa}{2} (1 - e^{-2p_0/\kappa}) + \frac{1}{2\kappa} \vec{p}^2 \right] - i\frac{1}{\kappa} p_i p_j, \quad (3.3)$$

y

$$[N_i, p_0] = ip_i. \quad (3.4)$$

Es fácil comprobar que el primer operador de Casimir para este álgebra es

$$m^2 = \left(2\kappa \sinh \left(\frac{p_0}{2\kappa} \right) \right)^2 - \vec{p}^2 e^{p_0/\kappa}. \quad (3.5)$$

de donde podemos ver que para $\kappa > 0$ el momento tridimensional \vec{p} está acotado superiormente $\vec{p}^2 \leq \kappa^2$, y que el valor máximo del momento se corresponde con una energía infinita. Además este parámetro m no se corresponde con la masa física que podemos definir²⁰ mediante la ecuación

$$m_{phys}^{-1} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p} \frac{dp_0}{dp}, \quad \text{con } p = |\vec{p}| \quad (3.6)$$

de donde se obtiene que

$$m_{phys}^2 = \frac{\kappa^2}{4} \left[1 - \left(-\frac{m}{2\kappa} + \sqrt{1 + \frac{m^2}{4\kappa^2}} \right)^4 \right]^2 \quad (3.7)$$

²⁰Esta es una definición razonable para la masa en reposo de la partícula, que funciona tanto en relatividad especial, donde $m^2 = E^2 - p^2$, como en la mecánica no relativista, donde $m^2 = p^2/(2m)$.

II. Álgebra κ -Poincaré en la base Magueijo-Smolín (DSR2)

En [30] Magueijo y Smolin propusieron otro modelo DSR, en el que los generadores de los boosts se construyen como combinaciones lineales de los generadores de Lorentz estándar y los generadores de las dilataciones, pero de tal manera que sigan verificando (3.1) y (3.2). En esta base el conmutador entre el cuádrimomento P_μ y los boosts está dado por

$$[N_i, P_j] = i \left(\delta_{ij} P_0 - \frac{1}{\kappa} P_i P_j \right), \quad (3.8)$$

y

$$[N_i, P_0] = i \left(1 - \frac{P_0}{\kappa} \right). \quad (3.9)$$

En este caso el Casimir de este álgebra es

$$M^2 = \frac{P_0^2 - \vec{P}^2}{\left(1 - \frac{P_0}{\kappa}\right)^2}, \quad (3.10)$$

donde esta masa M se corresponde con la masa física. Es sencillo ver que la relación entre los cuádrimomentos P_μ y p_μ de esta base y de la anterior viene dada por

$$P_i = p_i, \quad P_0 = \frac{\kappa}{2} \left(1 - e^{-2p_0/\kappa} + \frac{\vec{p}^2}{\kappa} \right). \quad (3.11)$$

III. Álgebra κ -Poincaré en la base clásica

Por último queremos presentar la base que se conoce como la base clásica en la que los conmutadores de los boosts y los momentos, así como el sector Lorentz, forman el álgebra clásica de Poincaré,

$$[N_i, \mathcal{P}_j] = i\delta_{ij}\mathcal{P}_0, \quad [N_i, \mathcal{P}_0] = i\mathcal{P}_i. \quad (3.12)$$

y el Casimir evidentemente coincide con el de Relatividad Especial

$$\mathcal{M}^2 = \mathcal{P}_0^2 - \vec{\mathcal{P}}^2 \quad (3.13)$$

Los generadores clásicos \mathcal{P}_μ están relacionados con los de la base bicrossproduct p_μ mediante las siguientes relaciones

$$\mathcal{P}_0 = \kappa \sinh\left(\frac{p_0}{\kappa}\right) + e^{p_0/\kappa} \frac{\vec{p}^2}{2\kappa}, \quad (3.14)$$

$$\mathcal{P}_i = e^{p_0/\kappa} p_i. \quad (3.15)$$

Por último veremos cómo podemos obtener de manera general todas estas bases.

IV. Álgebra κ -DSR general

Consideremos un álgebra que satisface las condiciones (i)-(iv). El sector Lorentz de esta álgebra viene dado por (3.1), como ya hemos dicho, de modo que la expresión más general para los conmutadores entre los boosts y los momentos es

$$[N_i, p_j] = A\delta_{ij} + Bp_i p_j + D\epsilon_{ijk} p_k, \quad (3.16)$$

$$[N_i, p_0] = Cp_i, \quad (3.17)$$

donde A , B , C y D son funciones de p_0 y \vec{p}^2 , y en el límite $\kappa \rightarrow \infty$ A y C tienden a 1, mientras que B y D tienden a 0. Además, considerando la representación diferencial para los boosts (3.19), para que se satisfaga la identidad de Jacobi para (3.17) necesariamente $D = 0$, mientras que la identidad de Jacobi para (3.16) requiere que se satisfaga

$$\frac{\partial A}{\partial p_0} C + 2 \frac{\partial A}{\partial \vec{p}^2} (A + \vec{p}^2 B) - AB = 1. \quad (3.18)$$

que podemos utilizar para expresar por ejemplo B en términos de A y C . La representación diferencial para los boosts se deriva de (3.16) y (3.17), viene dada por

$$N_i = Cp_i \frac{\partial}{\partial p_0} + A \frac{\partial}{\partial p_i} + Bp_i p_j \frac{\partial}{\partial p_j} + D\epsilon_{ijk} p_j \frac{\partial}{\partial p_k}. \quad (3.19)$$

Por otro lado definimos la transformación más general que nos lleve de la base estándar a cualquier otra base y que satisfaga invariancia rotacional de la forma

$$p_i = F(\mathcal{P}_0, \vec{\mathcal{P}}^2) \mathcal{P}_i, \quad p_0 = G(\mathcal{P}_0, \vec{\mathcal{P}}^2), \quad (3.20)$$

donde las funciones F y G son ‘arbitrarias’, y tras sustituir en las ecuaciones (3.12) obtenemos unos conmutadores de la forma (3.16) y (3.17), por lo que cualquier base se puede obtener a partir de la clásica de este modo. Realmente las funciones F y G no son completamente arbitrarias, sino que están sujetas al requerimiento físico de que el álgebra que obtengamos en cualquiera de estas bases debe de reducirse al álgebra estándar de Poincaré en el límite $\kappa \rightarrow \infty$. Esto significa que, para κ grande tenemos

$$\begin{aligned} F(\mathcal{P}_0, \vec{\mathcal{P}}^2) &\sim 1 + \alpha \frac{\mathcal{P}_0}{\kappa} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\kappa^2}\right), \\ G(\mathcal{P}_0, \vec{\mathcal{P}}^2) &\sim \mathcal{P}_0 \left(1 + \beta \frac{\mathcal{P}_0}{\kappa} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\kappa^2}\right)\right), \end{aligned} \quad (3.21)$$

donde α y β son dos parámetros numéricos.

3.3.2. Espacio-tiempo en DSR

Puede parecer que DSR se ha construido de una manera un tanto inusual, ya que primero se construye el espacio de energía-momento y después se considera el problema de la construcción

del espacio-tiempo, ya que DSR es incompleta sin una estructura que describa el espacio-tiempo. Normalmente se hace lo contrario, como es el caso de la formulación estándar de Relatividad Especial, en la que primero se definen operacionalmente conceptos ligados al espacio tiempo, como distancia, intervalo temporal, etc, y solo entonces se construye el espacio de energía-momento y el espacio de fases.

Hay varias formas de construir el espacio de fases, una de ellas es la que se utiliza en [53]. Esencialmente esta construcción se basa en que el álgebra κ -Poincaré es un álgebra de Hopf, por lo que posee estructuras adicionales a la estructura de álgebra que hemos visto. Se puede construir lo que se conoce como los *co-productos* de las rotaciones, los boosts y los generadores del momento, que son de gran importancia física ya que permiten construir el espacio de fases de una manera unívoca, y también el sector espacio-tiempo, mediante un procedimiento en etapas[58].

El co-producto es una aplicación del álgebra \mathcal{A} en el producto tensorial de álgebras $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$, que esencialmente proporciona una regla acerca de cómo el álgebra actúa sobre productos de funciones, y para aplicaciones de carácter físico, sobre estados multipartícula. Para el álgebra κ -Poincaré en la base bicrossproduct los coproductos para el momento se definen como

$$\begin{aligned}\Delta(p_0) &= p_0 \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes p_0 \\ \Delta(p_i) &= p_i \otimes e^{-p_0/\kappa} + \mathbb{1} \otimes p_i\end{aligned}\tag{3.1}$$

La importancia de este esquema es que una vez se construye el espacio de fases, se observa que la estructura del sector del espacio-tiempo es no-conmutativa

$$[x_0, x_i] = -\frac{i}{\kappa} x_i.\tag{3.2}$$

que se corresponde con el espacio-tiempo no conmutativo de κ -Minkowski. Pero además se puede demostrar[58] que la forma de esta no conmutatividad (3.2) es independiente de la base en el espacio de momentos en la que expresamos el álgebra κ -Poincaré. Esta construcción también permite derivar las leyes de transformación que gobiernan la acción de los boosts sobre las variables espacio-temporales, y de una forma que también es independiente de la base de partida en el espacio de energía-momento. Por otro lado, las leyes de conservación de la energía y del momento están directamente relacionadas con la homogeneidad del espacio-tiempo, por lo que no es fácil conciliar ambos conceptos. La presencia de esta escala de longitud κ^{-1} , sugiere que a escalas de longitud mucho más grandes que κ^{-1} el espacio-tiempo es homogéneo. Todavía no está claro cómo definir la conservación de la energía y del momento para un espacio no conmutativo, pero posiblemente en esta definición debamos incluir los ingredientes que encontramos en la no conmutatividad del espacio-tiempo.

3.4. Observaciones relevantes sobre DSR

En este apartado haremos una serie de observaciones que complementan la descripción que hasta de ahora hemos hecho de DSR.

- *Inequivalencia con Relatividad Especial.* Hemos visto que en las teorías DSR la simetría Lorentz no esta rota, sino que se realiza de manera no lineal en su acción sobre los momentos. Esto hace que podamos malinterpretar la idea física de DSR, argumentando que DSR no es más que una realización no lineal de SR, es decir, que mediante una transformación no lineal de algunos generadores (como el que hemos visto en la base clásica) es posible mantener los conmutadores entre boosts y momentos así como el sector Lorentz exactamente igual que el álgebra clásica de Poincaré. Esto es totalmente incorrecto, ya que el sector energía-momento (3.1)-(3.4) sólo describe la mitad del espacio de fases de la partícula, y el álgebra de todo el espacio de fases no se puede reducir al de SR.
- *No necesariamente el álgebra de Hopf κ -Poincaré.* El formalismo de las álgebras de Hopf que acabamos de ver es un formalismo prometedor en el sentido de que es compatible con los principios de DSR[59]. Sin embargo, todavía es temprano para identificar este marco matemático de las álgebras de Hopf con la idea de DSR. De hecho, el argumento que hemos dado en favor de la emergencia de DSR como un límite de gravedad cuántica en 2+1 dimensiones (o de 3+1 para un valor de parámetros determinado) hay que interpretarlo con cuidado. Este análisis sólo muestra que el álgebra κ -Poincaré tiene un papel en el límite de espacio-tiempo plano, sin proporcionar la imagen física de este papel. La presencia del álgebra de Hopf en algún lugar dentro del formalismo de la teoría, aunque nos proporciona ingredientes que son adecuados para DSR, no justifica el basar toda la idea de DSR en este formalismo, solo apoyándose en este argumento.
- *No cualquier deformación de Relatividad Especial.* La definición que hemos dado sobre el concepto de DSR nos proporciona una imagen física que cubre una clase de deformaciones de Relatividad Especial muy específica, alternativa a otras posibilidades. Es posible *deformar* la Relatividad Especial de manera que sea incompatible con el concepto de DSR. Una posible deformación de Relatividad Especial la encontramos en la relatividad de De Sitter, que es una deformación de SR pero a través de una escala de curvatura. El espacio-tiempo de De Sitter es una deformación del espacio-tiempo de Minkowski y el álgebra de De Sitter es una deformación del álgebra de Poincaré, pero este formalismo no constituye ningún ejemplo de teoría DSR. En realidad el espacio-tiempo de De Sitter es una deformación del espacio-tiempo de Minkowski mediada por una escala de largas distancias, es decir que Minkowski se obtiene a partir de De Sitter como límite en el que la longitud que caracteriza la deformación se envía al infinito, mientras que uno de los requerimientos de DSR es que la longitud de deformación sea pequeña (altas energías), es decir que Relatividad Especial se obtiene a partir de DSR como límite en el que la longitud de deformación se envía a cero. Este ejemplo ilustra que no cualquier *deformación* de Relatividad Especial proporciona una realización del concepto de DSR.

- *Posibilidad de que DSR sea una simetría aproximada.* Es lícito considerar la posibilidad de que las simetrías DSR sean realmente simetrías aproximadas incluso en el régimen de observaciones físicas donde esperamos que sean relevantes. Para apoyar esta hipótesis en [59] Giovanni Amelino-Camelia elabora una imagen para la estructura del espacio-tiempo a distintas escalas. Esta imagen se caracteriza por: (I) a escalas de distancia superPlanckianas la única descripción de los grados de libertad del espacio-tiempo debe ser ‘fuertemente cuántica’, de tal manera que el concepto de coordenadas del espacio-tiempo y simetrías continuas dejen de tener sentido, (II) a escalas subPlanckianas pero cerca de la escala de Planck algún tipo de estructura geométrica del espacio-tiempo podría surgir, de forma que podríamos introducir algún tipo de coordenadas espacio-temporales no clásicas (por ejemplo coordenadas no conmutativas), y las simetrías en este tipo de espacio-tiempo podrían ser simetrías DSR, (III) en el IR nuestra descripción clásica del espacio-tiempo pasa a ser una muy buena descripción. De modo que si DSR es relevante sólo a escalas de energía subPlanckianas cerca de la escala de Planck, a la hora de dar una descripción del espacio-tiempo y de sus simetrías por encima de la escala de Planck, quizás sea suficiente realizar los desarrollos matemáticos a primer orden, o a orden finito, en la expansión en potencias de la longitud de Planck.
- *No cualquier escala de longitud.* El término “escala fundamental” se suele utilizar de manera natural para describir una clase particular de escalas. Sin embargo, este término engloba una gran riqueza de conceptos que debe ser cuidadosamente analizada, en particular en DSR. La idea de DSR involucra la presencia de una escala de cortas distancias (altas energías) que sea fundamental desde el punto de vista relativista, en el mismo sentido que lo es la escala de velocidad c en SR. Hay escalas que no son menos fundamentales, pero que poseen propiedades diferentes de las que tiene c en SR. Por ejemplo, la masa del electrón es una escala “fundamental” de la Naturaleza, pero es trivial desde el punto de vista relativista en el sentido de que es una propiedad del sistema de referencia en reposo. Otro ejemplo lo constituye la escala asociada a la mecánica cuántica \hbar . Esta escala, por ejemplo, fija el valor mínimo no nulo del momento angular, pero de una forma que no requiera una modificación de la acción de las rotaciones. Las transformaciones bajo boosts de Galileo son inconsistentes con la introducción de la velocidad c para las partículas de masa nula²¹ y que sea independiente del observador. Las transformaciones de Lorentz difieren de las de Galileo, de manera que la escala c aparece en la definición de la acción de los generadores de las transformaciones Lorentz. Lo que queremos decir es que tanto c como \hbar son ambas escalas fundamentales que caracterizan las propiedades de los resultados de la medida de determinados observables (máximo valor de la velocidad, mínimo valor del momento angular). Sin embargo \hbar no juega ningún papel en las transformaciones entre observadores inerciales, mientras que sí lo hace c . En este sentido se dice que \hbar es una escala *trivial* desde el punto de vista

²¹Y la máxima velocidad que puedan alcanzar las partículas masivas.

relativista. Con esta explicación lo que se pretende es aclarar que la nueva escala de longitud-pequeña (o altas-energías) es una escala fundamental no trivial desde el punto de vista relativista.

3.5. Problemas abiertos en teorías DSR

En esta sección veremos algunos problemas que acompañan a las interpretaciones que se suelen hacer de DSR.

1. El problema del balón de fútbol

Una vez se ha obtenido el espacio de fases de una partícula en DSR el siguiente paso es tratar de generalizar este resultado para encontrar los espacios de fases de dos o más partículas. Esto no es una tarea fácil, y de hecho muy poco se conoce acerca de la cinemática relativista de muchas partículas.

Para sumar momentos se utiliza la estructura del coproducto asociado al algebra de simetrías²². Sabemos que en mecánica cuántica el estado de dos partículas viene descrito por el producto tensorial de los estados individuales de cada una de ellas²³. Sin embargo, detrás de esto hay una suposición física importante y es que las partículas preservan su identidad en estados multipartícula²⁴. Supondremos que también en DSR para obtener un estado multipartícula tensorizamos los estados individuales de las partículas.

Por ejemplo, en el álgebra de Poincaré usual el coproducto es trivial, es decir $\Delta P = \mathbb{1} \otimes P + P \otimes \mathbb{1}$, lo que se traduce en que la acción del grupo sobre el estado de dos partículas respeta la regla de Leibnitz

$$\begin{aligned} \Delta(P_\mu)|1 + 2\rangle &= \Delta(P_\mu) [|P^{(1)}\rangle \otimes |P^{(2)}\rangle] \\ &= (\mathbb{1} \otimes P + P \otimes \mathbb{1}) [|P^{(1)}\rangle \otimes |P^{(2)}\rangle] \\ &= (P_\mu^{(1)} + P_\mu^{(2)}) [|P^{(1)}\rangle \otimes |P^{(2)}\rangle] \end{aligned} \quad (3.1)$$

pero en el caso de las álgebras cuánticas la estructura de coproducto no es trivial y no simétrica, lo que resultará ser fuente de problemas.

²²Si recordamos el coproducto es una aplicación que nos lleva del álgebra al producto tensorial ($\Delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$) por lo que proporciona una pauta de cómo el álgebra actúa sobre el producto tensorial de sus representaciones.

²³De hecho hay más estructuras posibles que la del producto tensorial individual de estados, si se supone algún tipo de estadística.

²⁴Aunque es posible que los estados multipartícula difieran significativamente de los estados individuales por ejemplo como consecuencia de una interacción no local.

Si ahora calculamos el momento y energía total de un sistema de dos partículas utilizando el coproducto en la base bicrossproduct (DSR1)

$$\begin{aligned}\Delta(p_0) &= \mathbb{1} \otimes p_0 + p_0 \otimes \mathbb{1} & \longrightarrow p_0^{(1+2)} &= p_0^{(1)} + p_0^{(2)} \\ \Delta(p_k) &= p_k \otimes e^{-p_0/\kappa} + \mathbb{1} \otimes p_k & \longrightarrow p_k^{(1+2)} &= p_k^{(1)} e^{-p_0^{(2)}/\kappa} + p_k^{(2)}\end{aligned}\quad (3.2)$$

Por lo tanto el orden en que etiquetamos las partículas es relevante. De (3.2) también se sigue que el momento total del sistema de dos partículas satisface la misma relación de dispersión que las partículas individuales. La cuestión es que así como una deformación de la relación energía-momento es aceptable fenomenológicamente para partículas elementales, ya que si la escala de deformación es Planckiana los efectos son extremadamente pequeños, es evidente que la misma modificación de la relación energía-momento es inaceptable para cuerpos macroscópicos con una energía en reposo mucho más grande que la energía de Planck, como un planeta o un balón de fútbol, por lo que tenemos una prueba experimental de que al menos este procedimiento de atribuir momentos a sistemas compuestos de muchas partículas tensorizando y aplicando el coproducto no puede ser del todo correcto.

2. El problema del espectador

Hay otro puzle interesante que afecta a la validez de la ley de adición de momentos basada en la estructura del coproducto. Supongamos que utilizamos (3.2) para formular la ley de conservación de un scattering de dos a dos partículas, esto es

$$p_0^{(1)} + p_0^{(2)} = p_0^{(3)} + p_0^{(4)} \quad (3.3)$$

$$p_k^{(1)} e^{-p_0^{(2)}/\kappa} + p_k^{(2)} = p_k^{(3)} e^{-p_0^{(4)}/\kappa} + p_k^{(4)} \quad (3.4)$$

Esto inmediatamente nos lleva a preguntarnos ¿qué es lo que ocurre con el resto de partículas (espectadoras) en el Universo? Su presencia podría contribuir no trivialmente a las leyes de conservación (3.3), (3.4), es decir que

$$p_0^{(1)} + p_0^{(2)} + p_0^{(\text{univ})} = p_0^{(3)} + p_0^{(4)} + p_0^{(\text{univ})} \quad (3.5)$$

$$\left(p_k^{(1)} e^{-p_0^{(2)}/\kappa} + p_k^{(2)} \right) e^{-p_0^{(\text{univ})}/\kappa} + p_k^{(\text{univ})} = \left(p_k^{(3)} e^{-p_0^{(4)}/\kappa} + p_k^{(4)} \right) e^{-p_0^{(\text{univ})}/\kappa} + p_k^{(\text{univ})} \quad (3.6)$$

En Relatividad Especial se desprecia la influencia del resto del universo ya que consideramos que los procesos son *locales*, pero en este caso tenemos una influencia no local. Esto está en clara contradicción con nuestra intuición física y la formulación final de DSR debería resolver este problema del espectador.

4. Cinemática relativista más allá de SR

Se ha discutido que la idea de DSR surge como una forma alternativa de considerar desviaciones de la invariancia Lorentz pero manteniendo intacto el Principio de Relatividad. Como consecuencia, las transformaciones de Lorentz no son las de Relatividad Especial sino que están deformadas, y esta deformación es tal que se preserva la forma de la relación de dispersión modificada, la cual es una característica de estas teorías DSR. Como hemos visto, los generadores de los boosts satisfacen el álgebra de Lorentz usual, pero se representan de manera no lineal en el espacio de momentos. Esta no linealidad en el espacio de momentos tiene importantes consecuencias sobre el sector multipartícula de las teorías DSR, ya que no es posible definir el momento total de un sistema de dos partículas como la suma de los momentos individuales de las partículas. Esto hace necesario la introducción de una ley de composición deformada que depende del segundo invariante relativista de la teoría.

El objetivo de esta sección es presentar las ligaduras que el Principio de Relatividad impone sobre los coeficientes que caracterizan las modificaciones en la relación de dispersión y de la ley de composición entre momentos en una teoría más allá de SR (BSR), basándonos en el análisis desarrollado en [60]. Supondremos que las modificaciones a SR son invariantes bajo rotaciones, y nos quedaremos a primer orden en el desarrollo en la escala ultravioleta de nueva física Λ . Se considerarán modificaciones en las transformaciones de Lorentz de manera que el álgebra de Lorentz sea la usual. Veremos que este análisis establece unas relaciones algebraicamente sencillas entre los coeficientes que implementan las desviaciones respecto a SR a primer orden. Se rederivará de una forma totalmente diferente la *regla de oro* que se obtiene en [61] como resultado de una compatibilidad entre la implementación del principio de relatividad con una deformación de la relación de dispersión y de la ley de composición entre momentos. Este conjunto de relaciones nos va a permitir determinar el conjunto más general de desviaciones de SR que es compatible con el principio de relatividad a primer orden en el la expansión $1/\Lambda$.

4.1. Cinemática relativista BSR en 1+1 dimensiones

Consideraremos que las desviaciones de SR se pueden expresar en forma de una expansión en potencias de los momentos y de la inversa de la escala ultravioleta Λ , que tiene dimensiones de energía. Por otro lado supondremos que las energías de las partículas son mucho más pequeñas que esta escala Λ , por lo que bastará con quedarnos a primer orden en la expansión $1/\Lambda$ para capturar las correcciones dominantes a la modificación de la cinemática de SR. Además supondremos que estas correcciones son universales, es decir, independientes de la naturaleza de las partículas cuya cinemática estamos describiendo.

La modificación de la relación energía-momento para la partícula (dada por la relación de dispersión modificada), así como la modificación en la ley de composición de momentos (y su

ley de conservación de la energía-momento asociada) son los ingredientes principales de esta cinemática generalizada.

Primero realizaremos el desarrollo para la situación no física de 1+1 dimensiones. En este caso supondremos invariancia bajo las transformaciones de paridad $p_0 \rightarrow p_0$ y $p_1 \rightarrow -p_1$, puesto que esto hace que sea más sencillo la comparación entre esta situación y el caso en 3+1 dimensiones.

La ley de composición “ \oplus ” entre dos momentos, p y q , más general a primer orden en $1/\Lambda$ es

$$[p \oplus q]_0 = p_0 + q_0 + \frac{\beta_1}{\Lambda} p_0 q_0 + \frac{\beta_2}{\Lambda} p_1 q_1, \quad [p \oplus q]_1 = p_1 + q_1 + \frac{\gamma_1}{\Lambda} p_0 q_1 + \frac{\gamma_2}{\Lambda} p_1 q_0, \quad (4.1)$$

donde los coeficientes $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ son adimensionales. Notar que se está implementando la condición

$$p \oplus q|_{q=0} = p \quad p \oplus q|_{p=0} = q. \quad (4.2)$$

Por otro lado, la forma general de la relación de dispersión para una partícula a primer orden en $1/\Lambda$ es

$$C(p) = p_0^2 - p_1^2 + \frac{\alpha_1}{\Lambda} p_0^3 + \frac{\alpha_2}{\Lambda} p_0 p_1^2 = \mu^2. \quad (4.3)$$

Vemos que la generalización de la cinemática relativista está parametrizada por un conjunto de seis coeficientes adimensionales $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \alpha_1, \alpha_2$. Veamos ahora cómo implementar el Principio de Relatividad de una manera consistente con esta generalización de la cinemática relativista. Para ello lo que necesitamos es dar las transformaciones bajo boosts del sistema de dos partículas con momentos p y q . El ingrediente nuevo que encontramos en la implementación del principio de relatividad es que las transformaciones de Lorentz no actúan separadamente sobre el momento de cada partícula.

Denotaremos por $T_q^L(p)$ y $T_p^R(q)$ los momentos transformados de las partículas con momentos p y q respectivamente. Aquí el subíndice q en la transformación T^L indica que el transformado del momento p puede depender del momento asociado a la otra partícula q , y análogamente para el índice p en T^R , mientras que los índices L, R , nos indican que podemos tener transformaciones diferentes (no conmutativas) para los dos momentos en función de la posición que ocupen en la ley de composición.

Lo primero que haremos será derivar la transformación de Lorentz para una sola partícula, $p \rightarrow T(p)$, para lo cual nos apoyaremos en la condición (4.2) que nos dice que un sistema de una sola partícula es equivalente al sistema de dos partículas en el que una de las dos partículas tiene momento nulo, lo que nos permite escribir

$$T(p) = T_0^L(p) = T_0^R(p). \quad (4.4)$$

Ahora sólo queda escribir la forma más general para la transformación de Lorentz de una partícula (parametrizada por ξ_1) que transforme de la manera adecuada bajo paridad, es

decir $[T(p)]_0 \rightarrow [T(p)]_0$ y $[T(p)]_1 \rightarrow -[T(p)]_1$. A primer orden en $1/\Lambda$ la podemos expresar como

$$\begin{aligned} [T(p)]_0 &= p_0 + p_1 \xi_1 + \frac{\lambda_1}{\Lambda} p_0 p_1 \xi_1 \\ [T(p)]_1 &= p_1 + p_0 \xi_1 + \frac{\lambda_2}{\Lambda} p_0^2 \xi_1 + \frac{\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3}{\Lambda} p_1^2 \xi_1 . \end{aligned} \quad (4.5)$$

La forma en la que aparecen los coeficientes adimensionales λ_1 , λ_2 y λ_3 puede parecer *ad hoc*, pero esta elección está justificada para hacer la comparación entre los resultados en 1+1 dimensiones y 3+1 dimensiones.

Para que la relación de dispersión (4.3) sea invariante bajo boosts se requiere que

$$C(T(p)) = C(p) . \quad (4.6)$$

A primer orden en $1/\Lambda$ esta condición se traduce en un conjunto de ligaduras para los coeficientes adimensionales

$$\alpha_1 = -2(\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3) , \quad \alpha_2 = 2(\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3) , \quad (4.7)$$

que fijan los coeficientes α_1 , α_2 de la relación de dispersión modificada en términos de los coeficientes λ_1 , λ_2 y λ_3 en las leyes de transformación bajo boosts.

Ahora veamos cuál es la forma más general de las transformaciones de Lorentz para el sistema de dos partículas. A orden $1/\Lambda$ tenemos

$$T_q^L(p) = T(p) + \bar{T}_q^L(p) \quad T_p^R(q) = T(q) + \bar{T}_p^R(q) \quad (4.8)$$

donde

$$[\bar{T}_q^L(p)]_0 = \frac{\eta_1^L}{\Lambda} q_0 p_1 \xi_1 + \frac{\sigma_1^L}{\Lambda} q_1 p_0 \xi_1 \quad [\bar{T}_q^L(p)]_1 = \frac{\sigma_2^L}{\Lambda} q_0 p_0 \xi_1 + \frac{\sigma_3^L}{\Lambda} q_1 p_1 \xi_1 \quad (4.9)$$

$$[\bar{T}_p^R(q)]_0 = \frac{\eta_1^R}{\Lambda} p_0 q_1 \xi_1 + \frac{\sigma_1^R}{\Lambda} p_1 q_0 \xi_1 \quad [\bar{T}_p^R(q)]_1 = \frac{\sigma_2^R}{\Lambda} q_0 p_0 \xi_1 + \frac{\sigma_3^R}{\Lambda} q_1 p_1 \xi_1 \quad (4.10)$$

De nuevo, la invariancia de la relación de dispersión requiere que

$$C(T_q^L(p)) = C(p) \quad C(T_p^R(q)) = C(q) \quad (4.11)$$

de donde se obtienen las ligaduras

$$\sigma_1^L = \sigma_3^L = \sigma_1^R = \sigma_3^R = 0 \quad \sigma_2^L = \eta_1^L \quad \sigma_2^R = \eta_1^R \quad (4.12)$$

junto con las que ya obtuvimos para el sistema de una sola partícula (4.7). Por lo tanto la parte de la transformación de Lorentz que depende de los momentos de las dos partículas se reduce a

$$[\bar{T}_q^L(p)]_0 = \frac{\eta_1^L}{\Lambda} q_0 p_1 \xi_1 \quad [\bar{T}_q^L(p)]_1 = \frac{\eta_1^L}{\Lambda} q_0 p_0 \xi_1 \quad (4.13)$$

$$[\bar{T}_p^R(q)]_0 = \frac{\eta_1^R}{\Lambda} p_0 q_1 \xi_1 \quad [\bar{T}_p^R(q)]_1 = \frac{\eta_1^R}{\Lambda} q_0 p_0 \xi_1 \quad (4.14)$$

por lo que sólo tenemos dos parámetros nuevos η_1^L, η_1^R en las transformaciones de Lorentz del sistema de dos partículas.

Ahora sólo queda imponer un último requerimiento en nuestra implementación del principio de relatividad (RP), que es

$$T(p \oplus q) = T_q^L(p) \oplus T_p^R(q) . \quad (4.15)$$

que asegura la invariancia bajo boosts de la ley de conservación de la energía-momento en la desintegración de una partícula en dos. Esta ecuación impone ligaduras sobre los coeficientes adimensionales de las transformaciones de Lorentz y en la ley de composición de momentos, de modo que

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 2(\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3) & \beta_2 &= -2\lambda_3 - \eta_1^L - \eta_1^R \\ \gamma_1 &= \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 - \eta_1^L & \gamma_2 &= \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 - \eta_1^R \end{aligned} \quad (4.16)$$

Esto nos dice que las transformaciones de Lorentz del sistema de una y dos partículas, que están determinadas mediante los coeficientes λ y η , fijan completamente la ley de composición de momentos, determinada por los coeficiente β y γ . Es importante notar que el hecho de que aparezcan en estas relaciones los coeficientes que caracterizan las transformaciones bajo boosts del sistema de dos partículas, η_1^L y η_1^R , juega un papel crucial a la hora de entender por qué en los modelos DSR, para los que las transformaciones de Lorentz de una partícula está bien definidas, hay una ambigüedad en la conservación de la energía-momento en procesos que involucran varias partículas. Esta ambigüedad se resuelve cuando se introduce en la transformación de Lorentz de un sistema de partículas la dependencia con los momentos de otras partículas (mediada por los parámetros η).

Vemos que las leyes de composición del sistema de dos partículas quedan completamente fijadas una vez damos las transformaciones de Lorentz para una partícula y para el sistema de dos partículas. Sin embargo, podemos plantear el problema inverso, es decir, si es posible determinar las leyes de transformación a partir de las leyes de composición. Este planteamiento se apoyaría en la observación física de que las leyes de conservación en un sistema en interacción son más fundamentales que las leyes de transformación entre observadores. De este modo, para una ley de composición dada (β y γ conocidos), se encuentra una familia uniparamétrica de transformaciones de Lorentz deformadas. Estas leyes de transformación se definen mediante los coeficientes

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{4} (3\beta_1 + 2\beta_2 - 2\gamma_1 - 2\gamma_2) + \lambda \\ \lambda_2 &= -\frac{1}{4} (3\beta_1 + 2\beta_2 - 2\gamma_1 - 2\gamma_2) + \lambda \\ \lambda_3 &= \frac{\beta_1}{4} - \lambda \\ \eta_1^L &= -\frac{1}{4} (\beta_1 + 2\beta_2 + 2\gamma_1 - 2\gamma_2) + \lambda \\ \eta_1^R &= -\frac{1}{4} (\beta_1 + 2\beta_2 - 2\gamma_1 + 2\gamma_2) + \lambda \end{aligned} \quad (4.17)$$

donde $\lambda = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$. Si sustituimos estos coeficientes en la ecuación (4.7) obtenemos

$$\alpha_1 = -\beta_1 \quad \alpha_2 = \gamma_1 + \gamma_2 - \beta_2 . \quad (4.18)$$

Por lo tanto el principio de relatividad implementado mediante (4.6), (4.11) y (4.15) fija la modificación en la relación de dispersión en términos de la modificación de la ley de composición. Este es uno de los principales resultados que se obtienen en [60], lo que representa un resultado importante en este ámbito de DSR.

De este modo, como resultado de la elección de una modificación en la relación de dispersión consistente con la modificación en la ley de composición de momentos se obtiene la siguiente relación

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 - \gamma_1 - \gamma_2 = 0 , \quad (4.19)$$

que es justo la *regla de oro* que se deriva en [61] para que no haya un umbral a muy altas energías que permita la desintegración del fotón $\gamma \rightarrow e^+e^-$ ni a muy bajas energías que prohíba la producción de pares²⁵ $\gamma\gamma \rightarrow e^+e^-$. En [61] se conjetura sobre la base de unos pocos ejemplos, que la regla de oro (4.19) no es sólo una condición necesaria sino también una condición suficiente para la compatibilidad de estas desviaciones de SR con el principio de relatividad.

Aquí esta regla de oro surge como una consecuencia de la consistencia entre las modificaciones en las relaciones de dispersión y las leyes de composición compatibles con el principio de relatividad, independientemente de los razonamientos basados en umbrales de reacciones particulares. Además vemos que la regla de oro (4.19) no es una condición suficiente para una cinemática relativista más allá de SR compatible con el principio de relatividad, sino que es exactamente la combinación de las dos relaciones (4.18) que fijan la modificación en la relación de dispersión compatible con la ley de composición.

Veamos como uno de los ejemplos que se utiliza en [61], aunque se podrían estudiar todos como se hace en [60], para testear la validez de la regla de oro es un caso particular de este estudio que acabamos de realizar. Este ejemplo está basado en estudios realizados sobre el álgebra de κ -Poincaré. La ley de composición de momentos es tal que

$$[p \oplus q]_0 = p_0 + q_0 \quad [p \oplus q]_1 = p_1 + q_1 + \frac{1}{\Lambda} p_0 q_1 , \quad (4.20)$$

por lo que tenemos una ley de composición aditiva para las energías, mientras que la ley de composición de momentos es no conmutativa. A partir de (4.20) se obtienen

$$\beta_1 = 0 \quad \beta_2 = 0 \quad \gamma_1 = 1 \quad \gamma_2 = 0 . \quad (4.21)$$

²⁵Considerando que uno de los fotones tiene una energía ϵ mucho menor que la energía E del otro fotón, en SR es posible que se dé este proceso siempre que $E \geq m_e^2/\epsilon$. Sin embargo, en una teoría en la que se introducen estas modificaciones en las leyes de conservación y en las relaciones de dispersión es posible encontrar valores para la energía del fotón IR (soft photon) que hagan que esta relación no esté energéticamente permitida incluso cuando $E \geq m_e^2/\epsilon$.

Por otro lado tenemos que las transformaciones de Lorentz vienen dadas por

$$[T(p)]_0 = p_0 + p_1 \xi_1 \quad [T(p)]_1 = p_1 + p_0 \xi_1 + \frac{1}{\Lambda} p_0^2 \xi_1 + \frac{1}{2\Lambda} p_1^2 \xi_1, \quad (4.22)$$

de donde se obtiene

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = -\frac{1}{2}. \quad (4.23)$$

La relación de dispersión modificada que resulta invariante bajo estas transformaciones es

$$C(p) = p_0^2 - p_1^2 + \frac{1}{\Lambda} p_0 p_1^2, \quad \alpha_1 = 0 \quad \alpha_2 = 1 \quad (4.24)$$

que como podemos comprobar satisfacen (4.18), por lo que tenemos una relación de dispersión compatible con la modificación en la ley de composición. Por otro lado podemos encontrar a partir de (4.16) los coeficientes que caracterizan las transformaciones de Lorentz para el sistema de dos partículas

$$\eta_1^L = 0 \quad \eta_1^R = 1 \quad (4.25)$$

luego $\bar{T}_q^L(p) = 0$ y

$$T(p \oplus q) = T(p) \oplus T_p^R(q) \quad [\bar{T}_p^R(q)]_0 = \frac{1}{\Lambda} p_0 q_1 \xi_1 \quad [\bar{T}_p^R(q)]_1 = \frac{1}{\Lambda} p_0 q_0 \xi_1, \quad (4.26)$$

A partir de (4.16) también se obtiene que

$$\gamma_1 - \gamma_2 = \eta_1^L - \eta_1^R \quad (4.27)$$

Por lo tanto necesariamente una no conmutatividad en la ley de composición de momentos, $\gamma_1 \neq \gamma_2$, tiene como consecuencia una no trivialidad en la ley de transformación en el sistema de dos partículas. Lo inverso no siempre es cierto, solo en el caso en que la no trivialidad en los boosts sea tal que $\eta_1^L \neq \eta_1^R$.

4.2. Cinemática relativista BSR en 3+1 dimensiones

En 3+1 dimensiones la forma general de la ley de composición de momentos compatible con la invariancia bajo rotaciones es

$$[p \oplus q]_0 = p_0 + q_0 + \frac{\beta_1}{\Lambda} p_0 q_0 + \frac{\beta_2}{\Lambda} \vec{p} \cdot \vec{q} \quad [p \oplus q]_i = p_i + q_i + \frac{\gamma_1}{\Lambda} p_0 q_i + \frac{\gamma_2}{\Lambda} p_i q_0 + \frac{\gamma_3}{\Lambda} \epsilon_{ijk} p_j q_k \quad (4.1)$$

y la relación de dispersión modificada

$$C(p) = p_0^2 - \vec{p}^2 + \frac{\alpha_1}{\Lambda} p_0^3 + \frac{\alpha_2}{\Lambda} p_0 \vec{p}^2 = \mu^2. \quad (4.2)$$

Hasta aquí la única diferencia respecto al caso 1+1 dimensional es la introducción del coeficiente γ_3 en la parte espacial de la ley de composición, que no debería estar presente en una

teoría invariante bajo paridad puesto que $p_0 \rightarrow p_0$, $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$, $q_0 \rightarrow q_0$, $\vec{q} \rightarrow -\vec{q}$ conduce a $[p \oplus q]_i \rightarrow -[p \oplus q]_i$ solo si $\gamma_3 = 0$.

En el sistema de una partícula la transformación Lorentz más general compatible con la invariancia rotacional a primer orden en $1/\Lambda$ es

$$\begin{aligned} [T(p)]_0 &= p_0 + \vec{p} \cdot \vec{\xi} + \frac{\lambda_1}{\Lambda} p_0 (\vec{p} \cdot \vec{\xi}) \\ [T(p)]_i &= p_i + p_0 \xi_i + \frac{\lambda_2}{\Lambda} p_0^2 \xi_i + \frac{\lambda_3}{\Lambda} \vec{p}^2 \xi_i + \frac{\lambda_4}{\Lambda} p_i (\vec{p} \cdot \vec{\xi}) + \frac{\lambda_5}{\Lambda} p_0 \epsilon_{ijk} p_j \xi_k . \end{aligned} \quad (4.3)$$

siendo $\vec{\xi}$ el parámetro que caracteriza la transformación. A diferencia del caso 1+1 dimensional, ahora tenemos una restricción adicional sobre la transformación de Lorentz de una partícula, y es que se ha de verificar el álgebra de Lorentz. Para ello la composición de dos transformaciones de Lorentz, $T^{(1)}$ y $T^{(2)}$, con parámetros $\vec{\xi}^{(1)}$ y $\vec{\xi}^{(2)}$, respectivamente satisfacen

$$\begin{aligned} [T^{(1)}(T^{(2)}(p)) - T^{(2)}(T^{(1)}(p))]_0 &= 0 \\ [T^{(1)}(T^{(2)}(p)) - T^{(2)}(T^{(1)}(p))]_i &= (\vec{p} \cdot \vec{\xi}^{(1)}) \xi_i^{(2)} - (\vec{p} \cdot \vec{\xi}^{(2)}) \xi_i^{(1)} . \end{aligned} \quad (4.4)$$

Esto implica que a primer orden en $1/\Lambda$ se deben cumplir

$$\lambda_5 = 0 \quad \lambda_4 = \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 \quad (4.5)$$

por lo que las transformaciones de Lorentz para el sistema de una partícula vienen dadas por

$$\begin{aligned} [T(p)]_0 &= p_0 + \vec{p} \cdot \vec{\xi} + \frac{\lambda_1}{\Lambda} p_0 (\vec{p} \cdot \vec{\xi}) \\ [T(p)]_i &= p_i + p_0 \xi_i + \frac{\lambda_2}{\Lambda} p_0^2 \xi_i + \frac{\lambda_3}{\Lambda} \vec{p}^2 \xi_i + \frac{\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3}{\Lambda} p_i (\vec{p} \cdot \vec{\xi}) . \end{aligned} \quad (4.6)$$

Ahora impondremos la invariancia bajo boosts de la relación de dispersión (4.2), lo que conduce a

$$\alpha_1 = -2(\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3) \quad \alpha_2 = 2(\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3) \quad (4.7)$$

exactamente igual que en el caso 1+1 dimensional (esta es la razón por la que en (4.5) elegimos esos coeficientes).

Ahora escribiremos la transformación más general para el sistema de dos partículas de manera análoga a como lo hicimos en 1+1 dimensiones

$$\begin{aligned} [\bar{T}_q^L(p)]_0 &= \frac{\eta_1^L}{\Lambda} q_0 (\vec{p} \cdot \vec{\xi}) + \frac{\sigma_1^L}{\Lambda} p_0 (\vec{q} \cdot \vec{\xi}) + \frac{\eta_2^L}{\Lambda} (\vec{p} \wedge \vec{q}) \cdot \vec{\xi} \\ [\bar{T}_q^L(p)]_i &= \frac{\eta_3^L}{\Lambda} q_i (\vec{p} \cdot \vec{\xi}) + \frac{\sigma_2^L}{\Lambda} p_i (\vec{q} \cdot \vec{\xi}) + \frac{\eta_4^L}{\Lambda} q_0 \epsilon_{ijk} p_j \xi_k + \frac{\sigma_3^L}{\Lambda} (\vec{p} \cdot \vec{q}) \xi_i + \frac{\sigma_4^L}{\Lambda} p_0 \epsilon_{ijk} q_j \xi_k + \frac{\sigma_5^L}{\Lambda} p_0 q_0 \xi_i \end{aligned} \quad (4.8)$$

y una expresión similar para $\bar{T}_p^R(q)$, que podemos obtener a partir de la anterior mediante el intercambio de los índices $L \rightarrow R$ y $p \leftrightarrow q$. La invariancia de la relación de dispersión $C(T_q^L(p)) = C(p)$ requiere que

$$\sigma_1^L = \sigma_2^L = 0 \quad \sigma_3^L = -\eta_3^L \quad \sigma_4^L = \eta_2^L \quad \sigma_5^L = \eta_1^L, \quad (4.9)$$

por lo que tenemos

$$\begin{aligned} [\bar{T}_q^L(p)]_0 &= \frac{\eta_1^L}{\Lambda} q_0 (\vec{p} \cdot \vec{\xi}) + \frac{\eta_2^L}{\Lambda} (\vec{p} \wedge \vec{q}) \cdot \vec{\xi} \\ [\bar{T}_q^L(p)]_i &= \frac{\eta_1^L}{\Lambda} p_0 q_0 \xi_i + \frac{\eta_2^L}{\Lambda} p_0 \epsilon_{ijk} q_j \xi_k + \frac{\eta_3^L}{\Lambda} [q_i (\vec{p} \cdot \vec{\xi}) - p_i (\vec{q} \cdot \vec{\xi})] \end{aligned} \quad (4.10)$$

y lo mismo para $\bar{T}_p^R(q)$, cuya expresión se puede obtener a partir de la anterior reemplazando $L \leftrightarrow R$ y $p \leftrightarrow q$. Pero todavía falta considerar la condición de que estas transformaciones de Lorentz deben ser consistentes con el álgebra de Lorentz (como hicimos en (4.4)), que da lugar a las ligaduras

$$\eta_3^L = \eta_1^L \quad \eta_4^L = -\eta_2^L \quad (4.11)$$

por lo que finalmente las transformaciones de Lorentz del sistema de dos partículas son

$$\begin{aligned} [\bar{T}_q^L(p)]_0 &= \frac{\eta_1^L}{\Lambda} q_0 (\vec{p} \cdot \vec{\xi}) + \frac{\eta_2^L}{\Lambda} (\vec{p} \wedge \vec{q}) \cdot \vec{\xi} \\ [\bar{T}_p^R(q)]_0 &= \frac{\eta_1^R}{\Lambda} p_0 (\vec{q} \cdot \vec{\xi}) - \frac{\eta_2^L}{\Lambda} (\vec{p} \wedge \vec{q}) \cdot \vec{\xi} \\ [\bar{T}_q^L(p)]_i &= \frac{\eta_1^L}{\Lambda} p_0 q_0 \xi_i + \frac{\eta_2^L}{\Lambda} [p_0 \epsilon_{ijk} q_j \xi_k - q_0 \epsilon_{ijk} p_j \xi_k] + \frac{\eta_1^L}{\Lambda} [q_i (\vec{p} \cdot \vec{\xi}) - p_i (\vec{q} \cdot \vec{\xi})] \\ [\bar{T}_p^R(q)]_i &= \frac{\eta_1^R}{\Lambda} p_0 q_0 \xi_i + \frac{\eta_2^R}{\Lambda} [q_0 \epsilon_{ijk} p_j \xi_k - p_0 \epsilon_{ijk} q_j \xi_k] + \frac{\eta_1^R}{\Lambda} [p_i (\vec{q} \cdot \vec{\xi}) - q_i (\vec{p} \cdot \vec{\xi})] \end{aligned} \quad (4.12)$$

de donde vemos que sólo hemos tenido que añadir los coeficientes η_2^L y η_2^R respecto al caso 1+1 dimensional, así como que estas transformaciones se reducen a las de 1+1 dimensiones.

Lo único que nos queda es terminar con la implementación del principio de relatividad, imponiendo la invariancia bajo boosts de las leyes de conservación en el decaimiento de una partícula en otras dos a través de

$$T(p \oplus q) = T_q^L(p) \oplus T_p^R(q). \quad (4.13)$$

A partir de esta condición podemos determinar los coeficientes $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ que determinan las leyes de composición, como función de los coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \eta_1^L, \eta_1^R, \eta_2^L, \eta_2^R$ de las transformaciones de Lorentz. Lo que se obtiene es

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 2(\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3) & \beta_2 &= -2\lambda_3 - \eta_1^L - \eta_1^R \\ \gamma_1 &= \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 - \eta_1^L & \gamma_2 &= \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 - \eta_1^R & \gamma_3 &= \eta_2^L - \eta_2^R \end{aligned} \quad (4.14)$$

que son exactamente los mismos resultados que se obtienen en 1+1 dimensiones, salvo la condición que relaciona el nuevo coeficiente en la ley de composición en 3+1 dimensiones γ_3 con los nuevos coeficientes que aparecen en las transformaciones de Lorentz η_2^R y η_2^L .

Por otro lado, la relación entre los coeficientes α_1 y α_2 de la relación de dispersión y los coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de las transformaciones de Lorentz no cambia respecto de la que habíamos obtenido en 1+1 dimensiones, por lo que podemos concluir que la derivación de la relación de dispersión modificada a partir de la modificación de la ley de composición es igualmente válida en 3+1 dimensiones sin ninguna modificación. El único cambio que se produce al ir a 3+1 dimensiones es que aparece una nueva fuente de no conmutatividad en la ley de composición de momentos cuando $\gamma_3 \neq 0$, que se suma a la existente en 1+1 dimensiones $\gamma_1 - \gamma_2 \neq 0$. De nuevo concluimos que como consecuencia de esta no conmutatividad en la ley de composición, las transformaciones de Lorentz para el sistema de dos partículas son no triviales ($\bar{T}_q^L(p) \neq 0$ y $\bar{T}_p^R(q) \neq 0$). Sin embargo la inversa no siempre es cierta, solo en el caso de que se verifique $\eta_1^L \neq \eta_1^R$ o $\eta_2^L \neq \eta_2^R$, o ambas. Por último vemos que en 3+1 dimensiones para una ley de composición dada tenemos una familia biparamétrica de leyes de transformación deformadas que implementan el principio de relatividad.

4.3. Cinemática relativista BSR no universal

Desde el punto de vista fenomenológico no encontramos ninguna razón por la que estas deformaciones en la cinemática relativista sean universales, es decir independientes de la naturaleza de las partícula. Sin embargo, sí que encontramos motivaciones fenomenológicas por las que sugerir una cinemática relativista en las que las leyes de composición y la relación de dispersión sean no universales, en particular en lo que se refiere a la descripción de objetos macroscópicos (como los planetas) o partículas compuestas como los átomos.

Como hemos mencionado, en las teorías DSR nos encontramos con problemas que afectan a la cinemática relativista generalizada, como es el problema del balón de fútbol. Esencialmente, una relación de dispersión como la dada en (4.2) es aceptable para una partícula microscópica (siempre que Λ sea del orden de la masa de Planck), mientras que es claramente inaceptable para un objeto macroscópico. La escala de Planck es enorme en comparación con las energías en reposo de las partículas elementales, pero es pequeña si la comparamos con la masa en reposo de un cuerpo macroscópico; como consecuencia, deberíamos haber observado estas correcciones en la cinemática de los objetos macroscópicos (lo que evidentemente no es cierto). Se ha argumentado que mediante un ajuste fino de la deformación a orden superior en la expansión $1/\Lambda$ es posible mantener las propiedades de los objetos macroscópicos compatibles con la introducción de esta deformación.

Por lo tanto tenemos evidencias empíricas de que al menos las partículas compuestas deben de tener propiedades relativistas generalizadas diferentes de las de sus constituyentes, en el sentido de que las deformaciones introducidas necesariamente deben ser mucho más

débiles. En este sentido cabe plantearse, basándonos en esta observación de que las partículas compuestas deben tener propiedades relativistas diferentes de las de sus constituyentes, si es posible tener una teoría relativista que atribuya diferentes leyes cinemáticas a las distintas partículas.

En [62] se muestran algunos ejemplos de leyes de cinemática relativista generalizada que dotan de diferentes propiedades de deformación a las distintas partículas. Lo que queremos estudiar en esta sección es si podemos identificar una extensión no universal al marco general que se ha introducido en las dos secciones precedentes.

1. Cinemática relativista no universal en 1+1 dimensiones

Primero comenzaremos por estudiar una cinemática relativista generalizada en 1+1 dimensiones. Para ello primero consideraremos el sistema más sencillo compuesto por una sola partícula de “tipo a ” con momento p . La relación de dispersión para esta partícula viene dada por

$$C^{(a)}(p) = p_0^2 - p_1^2 + \frac{\alpha_1^{(a)}}{\Lambda} p_0^3 + \frac{\alpha_2^{(a)}}{\Lambda} p_0 p_1^2 = m^2 \quad (4.1)$$

donde ahora los coeficientes $\alpha_1^{(a)}$, $\alpha_2^{(a)}$ en la relación de dispersión son característicos de las partículas de tipo a . En un principio también consideraremos una no universalidad en las transformaciones de Lorentz, denotando por $T^{(a)}$ la transformación de Lorentz del sistema de una partícula de tipo a , de modo que la expresión más general a orden $1/\Lambda$ compatible con la invariancia bajo paridad es

$$\begin{aligned} [T^{(a)}(p)]_0 &= p_0 + p_1 \xi_1 + \frac{\lambda_1^{(a)}}{\Lambda} p_0 p_1 \xi_1 \\ [T^{(a)}(p)]_1 &= p_1 + p_0 \xi_1 + \frac{\lambda_2^{(a)}}{\Lambda} p_0^2 \xi_1 + \frac{\lambda_1^{(a)} + 2\lambda_2^{(a)} + 3\lambda_3^{(a)}}{\Lambda} p_1^2 \xi_1 . \end{aligned} \quad (4.2)$$

En este sistema, la implementación del principio de relatividad sólo conlleva imponer la invariancia en la relación de dispersión (4.1), lo cual requiere que

$$C^{(a)}(T^{(a)}(p)) = C^{(a)}(p) \quad (4.3)$$

lo que conduce a las ligaduras

$$\alpha_1^{(a)} = -2(\lambda_1^{(a)} + \lambda_2^{(a)} + 2\lambda_3^{(a)}) \quad \alpha_2^{(a)} = 2(\lambda_1^{(a)} + 2\lambda_2^{(a)} + 3\lambda_3^{(a)}) \quad (4.4)$$

que coincide con (4.7) salvo que ahora estos coeficientes dependen del tipo de partícula. Esto es lo que cabe esperar ya que por el momento no hemos añadido ningún ingrediente nuevo respecto a la cinemática de una partícula en 1+1 universal, ya que tan solo hemos reetiquetado los coeficientes $\{\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} \rightarrow \{\alpha_1^{(a)}, \alpha_2^{(a)}, \lambda_1^{(a)}, \lambda_2^{(a)}, \lambda_3^{(a)}\}$, aunque este reetiquetado tiene un significado físico.

Ahora consideremos el sistema de dos partículas, una de tipo “a” y otra de tipo “b”, con momentos p y q respectivamente. La relación de dispersión para la partícula de tipo b, así como la transformación de Lorentz del sistema en que sólo tenemos a esta segunda partícula, es idéntica que la de tipo a, pero reetiquetando los superíndices $a \rightarrow b$. En este sistema denotaremos a las transformaciones de Lorentz como $T^{(i)}(k^{(i)})$, donde ahora el índice i está denotando la posición que ocupa la partícula i -ésima en la ley de conservación. Supondremos que p es la primera partícula en la ley de composición de momentos, mientras que q es la segunda, de manera que la transformación de Lorentz más general para el sistema de dos partículas es

$$\begin{aligned}
 [T^{(1)}(p)]_0 &= [T^{(a)}(p)]_0 + \frac{\eta_1^{L(ab)}}{\Lambda} q_0 p_1 \xi_1 + \frac{\sigma_1^{L(ab)}}{\Lambda} p_0 q_1 \xi_1 \\
 [T^{(1)}(p)]_1 &= [T^{(a)}(p)]_1 + \frac{\sigma_2^{L(ab)}}{\Lambda} p_0 q_0 \xi_1 + \frac{\sigma_3^{L(ab)}}{\Lambda} p_1 q_1 \xi_1 \\
 [T^{(2)}(q)]_0 &= [T^{(b)}(q)]_0 + \frac{\eta_1^{R(ab)}}{\Lambda} p_0 q_1 \xi_1 + \frac{\sigma_1^{R(ab)}}{\Lambda} q_0 p_1 \xi_1 \\
 [T^{(2)}(q)]_1 &= [T^{(b)}(q)]_1 + \frac{\sigma_2^{R(ab)}}{\Lambda} p_0 q_0 \xi_1 + \frac{\sigma_3^{R(ab)}}{\Lambda} p_1 q_1 \xi_1
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

donde los superíndices L, R tienen el mismo significado que en el caso universal. La invariancia en la relación de dispersión requiere que

$$C^{(a)}(T^{(1)}(p)) = C^{(a)}(p) \quad C^{(b)}(T^{(2)}(q)) = C^{(b)}(q) \tag{4.6}$$

de donde se obtiene

$$\sigma_1^{L(ab)} = \sigma_3^{L(ab)} = \sigma_1^{R(ab)} = \sigma_3^{R(ab)} = 0 \quad \eta_1^{L(ab)} = \sigma_2^{L(ab)} \quad \eta_1^{R(ab)} = \sigma_2^{R(ab)} \tag{4.7}$$

junto con las ligaduras (4.4) y sus análogas para las partículas de tipo b (si no se ha empleado (4.4) para expresar las $\lambda_i^{(a,b)}$ en términos de $\alpha_i^{(a,b)}$ y $\lambda^{(a,b)}$). Así, las transformaciones de Lorentz en el sistema de dos partículas sólo incluyen dos coeficientes nuevos $\eta_1^{L(ab)}, \eta_1^{R(ab)}$,

$$\begin{aligned}
 [T^{(1)}(p)]_0 &= [T^{(a)}(p)]_0 + \frac{\eta_1^{L(ab)}}{\Lambda} q_0 p_1 \xi_1 & [T^{(1)}(p)]_1 &= [T^{(a)}(p)]_1 + \frac{\eta_1^{L(ab)}}{\Lambda} p_0 q_0 \xi_1 \\
 [T^{(2)}(q)]_0 &= [T^{(b)}(q)]_0 + \frac{\eta_1^{R(ab)}}{\Lambda} p_0 q_1 \xi_1 & [T^{(2)}(q)]_1 &= [T^{(b)}(q)]_1 + \frac{\eta_1^{R(ab)}}{\Lambda} p_0 q_0 \xi_1
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Hasta el momento no hemos añadido ningún ingrediente nuevo respecto al caso universal. El ingrediente nuevo aparece a la hora de definir la ley de composición de momentos, ya que aquí distinguiremos diferentes leyes de composición en función de si las partículas que componemos son de la misma naturaleza o no. En este sistema de dos partículas, una de tipo a con momento p y otra de tipo b con momento q se define la ley de composición \oplus_{ab}

$$[p \oplus_{ab} q]_0 = p_0 + q_0 + \frac{\beta_1^{(ab)}}{\Lambda} p_0 q_0 + \frac{\beta_2^{(ab)}}{\Lambda} p_1 q_1 \quad [p \oplus_{ab} q]_1 = p_1 + q_1 + \frac{\gamma_1^{(ab)}}{\Lambda} p_0 q_1 + \frac{\gamma_2^{(ab)}}{\Lambda} p_1 q_0 \tag{4.9}$$

El siguiente paso en la implementación del principio de relatividad es imponer la invariancia de la ley de conservación²⁶

$$p \oplus_{ab} q = 0 \longrightarrow T^{(1)}(p) \oplus_{ab} T^{(2)}(q) = 0 \quad (4.10)$$

Esto permite llegar a las siguientes relaciones entre los coeficiente que caracterizan la modificación en la ley de composición con los coeficientes que describen la no linealidad en las transformaciones de Lorentz

$$\begin{aligned} \beta_1^{(ab)} &= \lambda_1^{(a)} + \lambda_2^{(a)} + 2\lambda_3^{(a)} + \lambda_1^{(b)} + \lambda_2^{(b)} + 2\lambda_3^{(b)} \\ \beta_2^{(ab)} &= -\lambda_3^{(a)} - \lambda_3^{(b)} - \eta_1^{L(ab)} - \eta_1^{R(ab)} \\ \gamma_1^{(ab)} + \gamma_2^{(ab)} &= \lambda_1^{(a)} + 2\lambda_2^{(a)} + 2\lambda_3^{(a)} + \lambda_1^{(b)} + 2\lambda_2^{(b)} + 2\lambda_3^{(b)} - \eta_1^{L(ab)} - \eta_1^{R(ab)} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Teniendo en cuenta las relaciones que determinaban los coeficientes en la relación de dispersión en función de los coeficientes en las transformaciones de Lorentz en (4.4), y sus relaciones análogas para las partículas de tipo b, se obtiene

$$\beta_1^{(ab)} = -\frac{1}{2} \left(\alpha_1^{(a)} + \alpha_1^{(b)} \right) \quad \gamma_1^{(ab)} + \gamma_2^{(ab)} - \beta_2^{(ab)} = \frac{1}{2} \left(\alpha_2^{(a)} + \alpha_2^{(b)} \right), \quad (4.12)$$

que también podemos ver escribir como

$$\beta_1^{(ab)} = \frac{1}{2} \left(\beta_1^{(a)} + \beta_1^{(b)} \right) \quad \gamma_1^{(ab)} + \gamma_2^{(ab)} - \beta_2^{(ab)} = \frac{1}{2} \left(\gamma_1^{(a)} + \gamma_2^{(a)} - \beta_2^{(a)} \right) + \frac{1}{2} \left(\gamma_1^{(b)} + \gamma_2^{(b)} - \beta_2^{(b)} \right), \quad (4.13)$$

donde se ha considerado que la universalidad dentro de cada grupo (con partículas de la misma naturaleza) al igual que en la cinemática universal lleva a $\alpha_1^{(a,b)} = -\beta_1^{(a,b)}$ y $\alpha_2^{(a,b)} = \gamma_1^{(a,b)} + \gamma_2^{(a,b)} - \beta_2^{(a,b)}$. Por lo tanto vemos que el principio de relatividad implementado a través de las ecuaciones (4.3), (4.6), (4.10) restringe las modificaciones en las leyes de composición de partículas de distinto tipo a partir de las modificaciones en las leyes de composición de las partículas del mismo tipo. Vemos que en el límite en el que esta cinemática generalizada no depende de la naturaleza de las partículas, $\left\{ \alpha_1^{(a,b)}, \alpha_2^{(a,b)}, \beta_1^{(a,b)}, \beta_2^{(a,b)}, \gamma_1^{(a,b)}, \gamma_2^{(a,b)} \right\} \longrightarrow \left\{ \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 \right\}$ recuperamos las mismas relaciones que para la cinemática relativista universal (4.18), donde la modificación en la relación de dispersión está unívocamente determinada por las modificaciones en la ley de composición.

Veamos si al añadir otra partícula obtenemos algún ingrediente nuevo respecto del sistema de dos partículas. Primero trataremos el caso sencillo de que esta tercera partícula sea de la misma naturaleza que alguna de las dos anteriores, en particular supondremos que es de

²⁶Cuando tenemos un proceso con n partículas en el estado inicial y m partículas en el estado final, la ley de conservación $\sum_{\text{in states}} p^{(i)} = \sum_{\text{out states}} p^{(i)}$ es equivalente a $\bar{\sum}_{\text{all states}} p^{(i)} = 0$, donde $\bar{\sum}$ denota la composición sucesiva de los momentos de las partículas en el estado inicial con las antípodas de los momentos en el estado final. La antípoda “ \ominus ” de un momento se define como $p \oplus (\ominus p) = 0$. Por ejemplo en un proceso dos a dos, $a + b \rightarrow c + d$, tenemos que $\left(((p^{(a)} \oplus p^{(b)}) \oplus [\ominus p^{(c)}]) \oplus [\ominus p^{(d)}] \right)_0 = 0 \Leftrightarrow (p^{(a)} \oplus p^{(b)})_0 = (p^{(c)} \oplus p^{(d)})_0$ y $\left(((p^{(a)} \oplus p^{(b)}) \oplus [\ominus p^{(c)}]) \oplus [\ominus p^{(d)}] \right)_1 = 0 \Leftrightarrow (p^{(a)} \oplus p^{(b)})_1 = (p^{(c)} \oplus p^{(d)})_1$.

tipo a (aunque el caso en que fuera de tipo b es esencialmente análogo). Ahora tenemos que definir la ley de composición entre partículas del mismo tipo, en el caso de que sean de tipo a tenemos

$$[p \oplus_a q]_0 = p_0 + q_0 + \frac{\beta_1^{(a)}}{\Lambda} p_0 q_0 + \frac{\beta_2^{(a)}}{\Lambda} p_1 q_1 \quad (4.14)$$

$$[p \oplus_a q]_1 = p_1 + q_1 + \frac{\gamma_1^{(a)}}{\Lambda} p_0 q_1 + \frac{\gamma_2^{(a)}}{\Lambda} p_1 q_0 \quad (4.15)$$

Por otro lado también supondremos que cuando compongamos las tres partículas, agruparemos primero las de tipo a y luego las de tipo b, es decir para tres partículas con momentos $\{p, q, k\}$ y que son de tipo a, a, b respectivamente tenemos a primer orden en $1/\Lambda$

$$\begin{aligned} [(p \oplus_a q) \oplus_{ab} k]_0 &= (p \oplus_a q)_0 + \frac{\beta_1^{(ab)}}{\Lambda} (p \oplus_a q)_0 k_0 + \frac{\beta_2^{(ab)}}{\Lambda} (p \oplus_a q)_1 k_1 \\ &= p_0 + q_0 + \frac{\beta_1^{(a)}}{\Lambda} p_0 q_0 + \frac{\beta_2^{(a)}}{\Lambda} p_1 q_1 + \frac{\beta_1^{(ab)}}{\Lambda} (p_0 + q_0) k_0 + \frac{\beta_2^{(ab)}}{\Lambda} (p_1 + q_1) k_1 \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} [(p \oplus_a q) \oplus_{ab} k]_1 &= (p \oplus_a q)_1 + \frac{\gamma_1^{(ab)}}{\Lambda} (p \oplus_a q)_0 k_1 + \frac{\gamma_2^{(ab)}}{\Lambda} (p \oplus_a q)_1 k_0 \\ &= p_1 + q_1 + \frac{\gamma_1^{(a)}}{\Lambda} p_0 q_1 + \frac{\gamma_2^{(a)}}{\Lambda} p_1 q_0 + \frac{\gamma_1^{(ab)}}{\Lambda} (p_0 + q_0) k_1 + \frac{\gamma_2^{(ab)}}{\Lambda} (p_1 + q_1) k_0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Falta dar la expresión más general para las transformaciones de Lorentz en este sistema de tres partículas. Por ejemplo, en este caso el momento transformado de la primera partícula que entra en la ley de conservación $(p \oplus_a q) \oplus_{ab} k = 0$ dependerá de los momentos de las otras partículas a través de los coeficientes $\eta_1^{L(aa)}$ y $\eta_1^{L(ab)}$ que son los únicos que sobreviven tras imponer la invariancia en la relación de dispersión $C^{(a)}(T^{(1)}(p)) = C^{(a)}(p)$, donde el superíndice 1 en la ley de transformación indica la posición que ocupa el momento p en la ley de composición. Así, las transformaciones de Lorentz más generales a orden $1/\Lambda$ y

compatibles con la invariancia de las relaciones de dispersión de las partículas son

$$\begin{aligned}
 [T^{(1)}(p)]_0 &= [T^{(a)}(p)]_0 + \frac{\eta_1^{L(aa)}}{\Lambda} q_0 p_1 \xi_1 + \frac{\eta_1^{L(ab)}}{\Lambda} k_0 p_1 \xi_1 \\
 [T^{(1)}(p)]_1 &= [T^{(a)}(p)]_1 + \frac{\eta_1^{L(aa)}}{\Lambda} p_0 q_0 \xi_1 + \frac{\eta_1^{L(ab)}}{\Lambda} p_0 k_0 \xi_1 \\
 [T^{(2)}(q)]_0 &= [T^{(a)}(q)]_0 + \frac{\eta_1^{R(ab)}}{\Lambda} p_0 q_1 \xi_1 + \frac{\eta_1^{L(ab)}}{\Lambda} k_0 q_1 \xi_1 \\
 [T^{(2)}(q)]_1 &= [T^{(a)}(q)]_1 + \frac{\eta_1^{R(ab)}}{\Lambda} p_0 q_0 \xi_1 + \frac{\eta_1^{L(ab)}}{\Lambda} q_0 k_0 \xi_1 \\
 [T^{(3)}(k)]_0 &= [T^{(b)}(k)]_0 + \frac{\eta_1^{R(ab)}}{\Lambda} (p_0 + q_0) k_1 \xi_1 \\
 [T^{(3)}(k)]_1 &= [T^{(b)}(k)]_1 + \frac{\eta_1^{R(ab)}}{\Lambda} (p_0 + q_0) k_0 \xi_1
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

donde los superíndices L , R están escritos en función de si el momento transformado aparece a la izquierda o la derecha del momento de la otra partícula en la ley de composición $p \oplus q \oplus k$.

Si implementamos el principio de relatividad imponiendo la invariancia de la ley de conservación

$$(p \oplus_a q) \oplus_{ab} k = 0 \longrightarrow (T^{(1)}(p) \oplus_a T^{(2)}(q)) \oplus_{ab} T^{(3)} = 0 \tag{4.19}$$

se obtiene

$$\begin{aligned}
 \beta_1^{(ab)} &= \lambda_1^{(a)} + \lambda_2^{(a)} + 2\lambda_3^{(a)} + \lambda_1^{(b)} + \lambda_2^{(b)} + 2\lambda_3^{(b)} \\
 \beta_2^{(ab)} &= -\lambda_3^{(a)} - \lambda_3^{(b)} - \eta_1^{L(ab)} - \eta_1^{R(ab)} \\
 \beta_1^{(a)} &= 2(\lambda_1^{(a)} + \lambda_2^{(a)} + 2\lambda_3^{(a)}) \\
 \beta_2^{(a)} &= -2\lambda_3^{(a)} - \eta_1^{L(aa)} - \eta_1^{R(aa)} \\
 \gamma_1^{(a)} &= \lambda_1^{(a)} + 2\lambda_2^{(a)} + 2\lambda_3^{(a)} - \eta_1^{L(aa)} \\
 \gamma_2^{(a)} &= -\lambda_1^{(a)} + 2\lambda_2^{(a)} + 2\lambda_3^{(a)} - \eta_1^{R(aa)} \\
 \gamma_1^{(ab)} + \gamma_2^{(ab)} &= -\eta_1^{L(ab)} - \eta_1^{R(ab)} + \lambda_1^{(a)} + \lambda_2^{(a)} + 2\lambda_3^{(a)} + \lambda_1^{(b)} + \lambda_2^{(b)} + 2\lambda_3^{(b)}
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

A partir de estas ecuaciones y utilizando (4.4), junto con la relación análoga para las partículas de tipo b, tenemos que

$$\beta_1^{(a)} = -\alpha_1^{(a)} \quad \beta_1^{(b)} = -\alpha_1^{(b)} \quad \beta_1^{(ab)} = -\frac{1}{2} \left(\alpha_1^{(a)} + \alpha_1^{(b)} \right) \tag{4.21}$$

$$\gamma_1^{(a)} + \gamma_2^{(a)} - \beta_2^{(a)} = \alpha_2^{(a)} \quad \gamma_1^{(ab)} + \gamma_2^{(ab)} - \beta_2^{(ab)} = \frac{1}{2} \left(\alpha_2^{(a)} + \alpha_2^{(b)} \right). \tag{4.22}$$

que es justo lo que obtuvimos para el sistema de dos partículas en (4.13), por lo que la conclusión es la misma.

Veamos qué es lo que ocurre cuando suponemos que esta tercera partícula tiene una naturaleza distinta del resto etiquetándola como de tipo c. De nuevo esto hace que tengamos que añadir nuevos coeficientes a las transformaciones de Lorentz ya que ahora, por ejemplo, el transformado del momento asociado a la partícula de tipo a dependerá no sólo del momento de la partícula de tipo b a través del coeficiente $\eta_1^{L(ab)}$ sino que también será función del momento k de la partícula de tipo c a través de un nuevo coeficiente $\eta_1^{L(ac)}$, de manera que las transformaciones de Lorentz para el sistema de tres partículas más generales posibles y compatibles con el principio de relatividad implementado a través de $C^{(i)}(T^{(i)}(k^{(i)})) = C^{(i)}(k^{(i)})$ son

$$\begin{aligned}
 [T^{(1)}(p)]_0 &= [T^{(a)}(p)]_0 + \frac{\eta_1^{L(ab)}}{\Lambda} q_0 p_1 \xi_1 + \frac{\eta_1^{L(ac)}}{\Lambda} k_0 p_1 \xi_1 \\
 [T^{(1)}(p)]_1 &= [T^{(a)}(p)]_1 + \frac{\eta_1^{L(ab)}}{\Lambda} p_0 q_0 \xi_1 + \frac{\eta_1^{L(ac)}}{\Lambda} p_0 k_0 \xi_1 \\
 [T^{(2)}(q)]_0 &= [T^{(b)}(q)]_0 + \frac{\eta_1^{R(ab)}}{\Lambda} p_0 q_1 \xi_1 + \frac{\eta_1^{L(bc)}}{\Lambda} k_0 q_1 \xi_1 \\
 [T^{(2)}(q)]_1 &= [T^{(b)}(q)]_1 + \frac{\eta_1^{R(ab)}}{\Lambda} p_0 q_0 \xi_1 + \frac{\eta_1^{L(bc)}}{\Lambda} q_0 k_0 \xi_1 \\
 [T^{(3)}(k)]_0 &= [T^{(c)}(k)]_0 + \frac{\eta_1^{R(ac)}}{\Lambda} p_0 k_1 \xi_1 + \frac{\eta_1^{R(bc)}}{\Lambda} q_0 k_1 \xi_1 \\
 [T^{(3)}(k)]_1 &= [T^{(c)}(k)]_1 + \frac{\eta_1^{R(ac)}}{\Lambda} p_0 k_0 \xi_1 + \frac{\eta_1^{R(bc)}}{\Lambda} q_0 k_0 \xi_1
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

donde los superíndices L, R están escritos en función de si el momento transformado aparece a la izquierda o la derecha del momento de la otra partícula en la ley de composición $p \oplus q \oplus k$. Ahora tenemos que dar una definición para esta composición de momentos. La expresión más general que podemos dar para esta composición de momentos es

$$\begin{aligned}
 [p \oplus q \oplus k]_0 &= p_0 + q_0 + k_0 + \frac{\beta_1^{(ab)}}{\Lambda} p_0 q_0 + \frac{\beta_1^{(ac)}}{\Lambda} p_0 k_0 + \frac{\beta_1^{(bc)}}{\Lambda} q_0 k_0 + \frac{\beta_2^{(ab)}}{\Lambda} p_1 q_1 + \frac{\beta_2^{(ac)}}{\Lambda} p_1 k_1 + \frac{\beta_2^{(bc)}}{\Lambda} q_1 k_1 \\
 [p \oplus q \oplus k]_1 &= p_1 + q_1 + k_1 + \frac{\gamma_1^{(ab)}}{\Lambda} p_0 q_1 + \frac{\gamma_1^{(ac)}}{\Lambda} p_0 k_1 + \frac{\gamma_1^{(bc)}}{\Lambda} q_0 k_1 + \frac{\gamma_2^{(ab)}}{\Lambda} p_1 q_0 + \frac{\gamma_2^{(ac)}}{\Lambda} p_1 k_0 + \frac{\gamma_2^{(bc)}}{\Lambda} q_1 k_0 .
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

Si implementamos el principio de relatividad a través de la invariancia de la ley de conservación

$$p \oplus q \oplus k = 0 \longrightarrow T^{(1)}(p) \oplus T^{(2)}(q) \oplus T^{(3)}(k) = 0 \tag{4.25}$$

se obtiene

$$\begin{aligned}
 \beta_1^{(ab)} &= \lambda_1^{(a)} + \lambda_2^{(a)} + 2\lambda_3^{(a)} + \lambda_1^{(b)} + \lambda_2^{(b)} + 2\lambda_3^{(b)} & \beta_2^{(ab)} &= -\lambda_3^{(a)} - \lambda_3^{(b)} - \eta_1^{L(ab)} - \eta_1^{R(ab)} \\
 \beta_1^{(ac)} &= \lambda_1^{(a)} + \lambda_2^{(a)} + 2\lambda_3^{(a)} + \lambda_1^{(c)} + \lambda_2^{(c)} + 2\lambda_3^{(c)} & \beta_2^{(ac)} &= -\lambda_3^{(a)} - \lambda_3^{(c)} - \eta_1^{L(ac)} - \eta_1^{R(ac)} \\
 \beta_1^{(bc)} &= \lambda_1^{(b)} + \lambda_2^{(b)} + 2\lambda_3^{(b)} + \lambda_1^{(c)} + \lambda_2^{(c)} + 2\lambda_3^{(c)} & \beta_2^{(bc)} &= -\lambda_3^{(b)} - \lambda_3^{(c)} - \eta_1^{L(bc)} - \eta_1^{R(bc)}
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_1^{(ab)} + \gamma_2^{(ab)} &= \lambda_1^{(a)} + 2\lambda_2^{(a)} + 2\lambda_3^{(a)} + \lambda_1^{(b)} + 2\lambda_2^{(b)} + 2\lambda_3^{(b)} - \eta_1^{L(ab)} - \eta_1^{R(ab)} \\
 \gamma_1^{(ac)} + \gamma_2^{(ac)} &= \lambda_1^{(a)} + 2\lambda_2^{(a)} + 2\lambda_3^{(a)} + \lambda_1^{(c)} + 2\lambda_2^{(c)} + 2\lambda_3^{(c)} - \eta_1^{L(ac)} - \eta_1^{R(ac)} \\
 \gamma_1^{(bc)} + \gamma_2^{(bc)} &= \lambda_1^{(b)} + 2\lambda_2^{(b)} + 2\lambda_3^{(b)} + \lambda_1^{(c)} + 2\lambda_2^{(c)} + 2\lambda_3^{(c)} - \eta_1^{L(bc)} - \eta_1^{R(bc)}
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

junto con

$$(\gamma_1^{(ac)} - \gamma_2^{(ac)}) - (\gamma_1^{(bc)} - \gamma_2^{(bc)}) - (\gamma_1^{(ab)} - \gamma_2^{(ab)}) = (\eta_1^{R(ac)} - \eta_1^{L(ac)}) - (\eta_1^{R(bc)} - \eta_1^{L(bc)}) - (\eta_1^{R(ab)} - \eta_1^{L(ab)}). \tag{4.28}$$

Vemos que esta última relación no la obteníamos en el sistema con dos tipos distintos de partículas. De hecho es una relación que ya habíamos obtenido. Para verlo, reetiquetemos las partículas $c \rightarrow b$ y $b \rightarrow a$, es decir volvemos a componer tres partículas (a, a, b), en este caso esta relación se reduce a $\gamma_1^{(a)} - \gamma_2^{(a)} = \eta_1^{R(a)} - \eta_1^{L(a)}$, que ya la habíamos obtenido en el caso universal, y que aquí se verifica dentro de cada grupo de partículas del mismo tipo. En el caso de añadir más partículas de alguna de las clases que ya tenemos no se añade ningún ingrediente nuevo, simplemente habrá un cierto grado de degeneración en las ecuaciones obtenidas. Análogamente si añadimos más partículas con naturaleza distinta de las anteriores, tampoco obtendremos relaciones nuevas. Algebraicamente esto es consecuencia de que nos estamos quedando a orden $1/\Lambda$ en el desarrollo de las correcciones de esta cinemática relativista generalizada.

Utilizando (4.26), (4.27) y las relaciones entre las $\alpha_{1,2}^{(a,b,c)}$ y las $\lambda_{1,2,3}^{(a,b,c)}$ que se obtienen de imponer la invariancia en la relación de dispersión, llegamos a

$$\beta_1^{(ab)} = -\frac{1}{2} \left(\alpha_1^{(a)} + \alpha_1^{(b)} \right) \quad \beta_1^{(ac)} = -\frac{1}{2} \left(\alpha_1^{(a)} + \alpha_1^{(c)} \right) \quad \beta_1^{(bc)} = -\frac{1}{2} \left(\alpha_1^{(b)} + \alpha_1^{(c)} \right) \tag{4.29}$$

y

$$\begin{aligned}
 \gamma_1^{(ab)} + \gamma_2^{(ab)} - \beta_2^{(ab)} &= \frac{1}{2} \left(\alpha_2^{(a)} + \alpha_2^{(b)} \right) \\
 \gamma_1^{(ac)} + \gamma_2^{(ac)} - \beta_2^{(ac)} &= \frac{1}{2} \left(\alpha_2^{(a)} + \alpha_2^{(c)} \right) \\
 \gamma_1^{(bc)} + \gamma_2^{(bc)} - \beta_2^{(bc)} &= \frac{1}{2} \left(\alpha_2^{(b)} + \alpha_2^{(c)} \right)
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

que son el equivalente no universal a las reglas de oro. De nuevo, si utilizamos la reglas de oro dentro de cada grupo $\alpha_1^{(i)} = -\beta_1^{(i)}$, $\alpha_2^{(i)} = \gamma_1^{(i)} + \gamma_2^{(i)} - \beta_2^{(i)}$ con $i = a, b, c$, las ecuaciones

(4.29) y (4.30) limitan las modificaciones en las leyes de composición entre partículas de distinto tipo a partir de las modificaciones en las leyes de composición de las partículas del mismo tipo. Por otro lado, vemos que la implementación del principio de relatividad a través de $C^{(i)}(T^{(i)}(k^{(i)})) = C^{(i)}(k^{(i)})$ y (4.25) presenta una ligadura adicional (4.28) que han de satisfacer los parámetros de las transformaciones de Lorentz para una ley de composición dada.

Análogamente se han repetido los cálculos para el caso en 3+1 dimensiones, pero el único ingrediente nuevo es la introducción del parámetro en las transformaciones de Lorentz $\eta_2^{L,R(ij)}$, de la misma manera que en (4.12). El único cambio respecto al análisis en 1+1 es que aparece la ligadura adicional

$$\gamma_3^{(ac)} - \gamma_3^{(bc)} - \gamma_3^{(ab)} = (\eta_2^{R(ac)} - \eta_2^{L(ac)}) - (\eta_2^{R(bc)} - \eta_2^{L(bc)}) - (\eta_2^{R(ab)} - \eta_2^{L(ab)}), \quad (4.31)$$

cuya estructura de índices es análoga a la que encontramos en (4.28).

Por último veamos que este formalismo no universal que acabamos de desarrollar contempla como casos particulares los ejemplos considerados en [62]. Aquí a modo de ejemplo sólo estudiaremos uno de ellos. Un caso sencillo se basa en considerar por un lado que las partículas de tipo a, cuyos momentos convencionalmente denotaremos por p, p', p'' etc, están afectados por una deformación DSR dependiente del parámetro $1/\Lambda$ de tal manera que

$$m^2 = p_0^2 - p_j^2 + \frac{2}{\Lambda} p_0 p_j^2 \longrightarrow \alpha_1^{(a)} = 0 \quad \alpha_2^{(a)} = 2 \quad (4.32)$$

junto con la ley de composición

$$[p \oplus_a p']_0 = p_0 + p'_0 \quad [p \oplus_a p']_1 = p_1 + p'_1 + \frac{1}{\Lambda} p_0 p'_1 + \frac{1}{\Lambda} p_1 p'_0 \quad (4.33)$$

de donde se obtiene que

$$\beta_1^{(a)} = \beta_2^{(a)} = 0 \quad \gamma_1^{(a)} = \gamma_2^{(a)} = 1 \quad (4.34)$$

donde efectivamente comprobamos que se verifican las reglas de oro para este sector a dadas en (4.21), y (4.22). Las transformaciones de Lorentz de este sector son

$$[T^{(a)}(p)]_0 = p_0 + p_1 \xi_1 - \frac{1}{\Lambda} p_0 p_1 \xi_1 \quad [T^{(a)}(p)]_1 = p_1 + p_0 \xi_1 + \frac{1}{\Lambda} p_0^2 \xi_1 + \frac{1}{\Lambda} p_1^2 \xi_1 \quad (4.35)$$

de donde obtenemos

$$\lambda_1^{(a)} = -1 \quad \lambda_2^{(a)} = 1 \quad \lambda_1^{(a)} + 2\lambda_2^{(a)} + 3\lambda_3^{(a)} = 1 \longrightarrow \lambda_3^{(a)} = 0 \quad (4.36)$$

que es compatible con $\alpha_1^{(a)} = -2(\lambda_1^{(a)} + \lambda_2^{(a)} + 2\lambda_3^{(a)})$ y $\alpha_1^{(a)} = 2(\lambda_1^{(a)} + 2\lambda_2^{(a)} + 3\lambda_3^{(a)})$. Por otro lado consideramos que el sector de partículas de tipo b verifica una cinemática relativista ordinaria (SR) sin deformación. En este sector por convención tomaremos los momentos como k, k', k'' , etc, de modo que tanto la relación de dispersión como las leyes de composición son las ordinarias

$$\mu^2 = k_0^2 - k_j^2 \longrightarrow \alpha_1^{(b)} = \alpha_2^{(b)} = 0 \quad (4.37)$$

y

$$[k \oplus_b k']_0 = k_0 + k'_0 \quad [k \oplus_b k']_1 = k_1 + k'_1 \longrightarrow \beta_1^{(b)} = \beta_2^{(b)} = \gamma_1^{(b)} = \gamma_1^{(b)} = 0 \quad (4.38)$$

y las transformaciones de Lorentz son las ordinarias, por lo que $\lambda_i^{(b)} = 0$. Ahora se define la ley de composición entre partículas de distinto tipo como

$$[p \oplus_{ab} k]_0 = p_0 + k_0 \quad [p \oplus_{ab} k]_1 = p_1 + k_1 + \frac{1}{2\Lambda} p_0 k_1 + \frac{1}{2\Lambda} p_1 k_0 \quad (4.39)$$

lo que conduce a

$$\beta_1^{(ab)} = \beta_2^{(ab)} = 0 \quad \gamma_1^{(ab)} = \gamma_2^{(ab)} = \frac{1}{2} \quad (4.40)$$

de nuevo esta ley de composición es consistente con las modificaciones en las relaciones de dispersión ya que satisfacen las reglas de oro (4.21), (4.22).

5. Resumen y conclusiones

En este trabajo hemos querido estudiar una de las posibles consecuencias fenomenológicas que se deriva de algunos modelos de gravedad cuántica, que es la violación de la invariancia Lorentz (LIV). Por el momento, no disponemos de ninguna evidencia experimental de que la simetría Lorentz no sea una simetría exacta en la Naturaleza, lo cual se puede utilizar para constreñir fuertemente estos modelos que incluyen LIV motivados por escenarios de QG. Hemos visto que incluso unas muy suprimidas violaciones de la invariancia Lorentz pueden tener sus efectos detectables a energías muy por debajo de la escala de Planck. De los distintos formalismos teóricos que describen desviaciones respecto a la simetría Lorentz, hemos discutido brevemente un marco dinámico, el mSME[21], basado en una teoría efectiva de campos. El SME, basado en lo que ocurre en algunos modelos de cuerdas en los que unos campos de la teoría adquieren unos vevs no nulos[20], LV se realiza mediante el mecanismo de ruptura espontánea de la simetría en un modelo que inicialmente es covariante Lorentz. En estos modelos las leyes de conservación de la energía y del momento se satisfacen en la teoría efectiva de bajas energías, sin embargo se introduce un sistema de referencia privilegiado rompiendo la equivalencia entre las leyes que derivan de esta teoría efectiva los diferentes observadores inerciales (ruptura del principio de relatividad). Hay distintos resultados experimentales en los que la violación Lorentz puede jugar un papel importante como en la anomalía LSND, que ha sido confirmada (a 3.8σ) por el experimento MiniBooNE, en la posible ausencia del cutoff GZK, o mediante la observación de rayos gammas de energías extremas (GRBs) por GLAST (Gamma-ray Large Area Space Telescope). En cualquier caso se requiere una mayor acumulación de estadística, para mejorar los límites sobre parámetros LV y no llegar, así mismo, a ninguna conclusión errónea.

Hemos visto que hay una alternativa a considerar violaciones de la invariancia Lorentz, que es considerar que la simetría Lorentz esté deformada en lugar de rota. Esta idea dio lugar a la propuesta de las teorías DSR[29, 30, 52]. Estas teorías incluyen un segundo invariante relativista con dimensiones de longitud (o energía) pero de tal manera que todavía se puede formular las leyes de la física de manera que no dependan del observador, es decir, manteniendo el principio de relatividad. La introducción de este segundo invariante relativista que caracteriza la deformación en la relación de dispersión de las partículas, necesariamente implica que debemos deformar las transformaciones de Lorentz, si mantenemos sin deformar las rotaciones. Esta deformación en las transformaciones de Lorentz se hace de manera que se preserve el álgebra usual de Lorentz, pero de tal manera que los boosts se representan de manera no lineal en el espacio de momentos. Esta no linealidad es una fuente de problemas en estos modelos, como hemos visto, lo que hace necesario la introducción de una ley de composición deformada que también depende de este nuevo invariante introducido en la Teoría. Hemos visto que la presencia de cualquier signatura experimental que señale la presencia de un sistema de referencia privilegiado refutaría por completo la idea de DSR, y es este sentido

podemos ver DSR como un modelo que es posible invalidar experimentalmente.

Por último hemos analizado un marco completamente general que permite analizar desviaciones respecto a la Relatividad Especial expresadas como un desarrollo en momentos en la inversa de una escala de energías UV, Λ [60]. Se han derivado las ligaduras que el principio de relatividad impone sobre los coeficientes que caracterizan las modificaciones en la relación de dispersión, la ley de composición de momentos y las transformaciones de Lorentz a orden $1/\Lambda$. De hecho, uno de los resultados más importantes que debemos señalar, es que en una cinemática relativista más allá de Relatividad Especial universal, las modificaciones en la relación de dispersión están unívocamente determinadas por las modificaciones en la ley de composición de momentos a primer orden en $1/\Lambda$. También se ha estudiado una cinemática relativista más allá de Relatividad Especial no universal, ya que este marco permitiría resolver algunos de los problemas presentes en las teorías DSR que involucran el sector de muchas partículas. En esta cinemática relativista generalizada no universal, hemos visto que podemos identificar un conjunto de ligaduras que limitan las modificaciones en la ley de composición de partículas de distinto tipo en términos de las modificaciones en las leyes de composición entre partículas del mismo tipo. Así mismo, hay un conjunto de ecuaciones remanente entre los coeficientes en las transformaciones de Lorentz y los coeficientes en la ley de composición.

Para completar este análisis de una cinemática relativista más allá de Relatividad Especial no universal, falta estudiar posibles ejemplos de su aplicación a situaciones físicas para decidir en qué puntos debemos centrarnos a la hora de investigar posibles señales de este tipo de fenomenología.

Referencias

- [1] C. Rovelli, *Notes for a brief history of quantum gravity*, gr-qc/0006061v3.
- [2] C. Kiefer, *Quantum Gravity*, Oxford University Press, Third Edition, 2012.
- [3] S. Hawking and R. Penrose, *The Nature of Space and Time*, Princeton University Press, 1996.
- [4] C. Kiefer, *Quantum gravity: Mathematical Models and Experimental Bounds*, Birkhäuser Verlag, 2007.
- [5] C.J.Isham, *Prima Facie Questions in Quantum Gravity*, gr-qc/9310031v1, 1993.
- [6] C.Lämmerzahl, *The Search for Quantum Gravity Effects*, in C. Kiefer, “*Quantum gravity: Mathematical Models and Experimental Bounds*”, Birkhäuser Verlag, 2007.
- [7] G. Amelino-Camelia, *Are we at the dawn of quantum-gravity phenomenology?*, gr-qc/9910089, Lect.Notes Phys. 541, 1 (2000).
- [8] S. Chandrasekhar, *The Highly Collapsed Configurations of a Stellar Mass*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 91 (1931) 456; *The Highly Collapsed Configurations of a Stellar Mass* (second paper), Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 95 (1935) 207.
- [9] J. Ellis, J.L. Lopez, N.E. Mavromatos and D.V. Nanopoulos, *Precision tests of CPT symmetry and quantum mechanics in the neutral kaon system*, Phys. Rev. D.53, 3846 (1996).
- [10] J. Ellis, J.S. Hgelin, D.V. Nanopoulos and M. Srednicki, Nucl. Phys. B241, 381 (1984).
- [11] O.W.Greenberg, *CPT violation implies violation of lorentz invariance*, Phys. Rev. Lett. **89**, 231602 (2002).
- [12] N.E. Mavromatos, *CPT violation and decoherence in quantum gravity*, Lect. Notes Phys. **669**, 245 (2005).
- [13] S. Weinberg, *Quantum contributions to cosmological correlations*, Phys. Rev. **D72**, 043514 (2005).
- [14] M. Bleicher, S. Hofmann, S. Hossenfelder, and H. Stoecker, *Black hole production in large extra dimensions at the Tevatron: a chance to observe a first glimpse of TeV scale gravity*, Phys. Lett. **B548**, 73 (2002).
- [15] V. A. Kostelecky, *Gravity, Lorentz violation, and the standard model*, Phys. Rev. **D69**, 105009, (2004).

- [16] D. Mattingly, *Modern Tests of Lorentz Invariance*, Living Rev. Rel. **8**, 5 (2005).
- [17] Kenneth Greisen, *End to the cosmic ray spectrum?*, Phys. Rev. Lett., 16:748-750, 1966; G. T. Zatsepin and V. A. Kuzmin, *On the interaction of cosmic rays with photons*, In Cosmic rays, Moscow, No. 11, p. 45-47, volume 11, pages 45-47, 1969.
- [18] L.J. Garay, *Quantum gravity and minimum length*, gr-qc/9403008, 1995.
- [19] T.G. Pavlopoulos, *Breakdown of Lorentz Invariance*, Phys. Rev. **159**, 1106 (1967).
- [20] V. Alan Kostelecky and S. Samuel, *Spontaneous breaking of lorentz symmetry in string theory*, Phys. Rev., **D39**,683 (1989).
- [21] D. Colladay and V. Alan Kostelecky, *Lorentz violating extension of the standard model*, Phys.Rev., **D58**, 116002 (1998), arXiv:hep-ph/9809521; *CPT violation and the standard model*, D. Colladay and V. A. Kosteleck'y, Phys. Rev. D 55, 6760 (1997).
- [22] V.A. Kostelecky and R. Lehnert, *Stability, Causality, and Lorentz and CPT Violation*, Phys.Rev. D, **163**, 065008 (2001), arXiv:hep-th/0012060.
- [23] R.C. Myers and M. Pospelov, *Ultraviolet modifications of dispersion relations in effective field theory*, Phys. Rev. Lett., **90**, 211601, (2003).
- [24] Sean M. Carroll, Jeffrey A. Harvey, V. Alan Kostelecký, Charles D. Lane, and Take-mi Okamotoa, *Noncommutative Field Theory and Lorentz Violation*, hep-th/0105082v1, 2001.
- [25] I. Mocioiu, M.Pospelov and R. Roiban, *Limits on the non-commutativity scale*, hep-ph/0110011v2, 2001.
- [26] A. Matusis, L. Susskind and N. Toumbas, *The IR/UV Connection in Non-Commutative Gauge Theories*, hep-th/0002075v2, 2000.
- [27] N. Seiberg and E. Witten, JHEP 09, 032 (1999).
- [28] Andrew G. Cohen and Sheldon L. Glashow, *Very Special Relativity*, hep-ph/0601236v1, 2006.
- [29] G. Amelino-Camelia, *Relativity in space-times with short-distance structure governed by an observer-independent (Planckian) length scale*, gr-qc/0012051, 2000.
- [30] J. Magueijo and L. Smolin, *Generalized Lorentz invariance with an invariant energy scale*, Phys. Rev. **D67**, 044017 (2003), gr-qc/0207085, 2002; *Lorentz invariance with an invariant energy scale*, Phys. Rev. Lett. **88**, 190403 (2002), hep-th/0112090 (2001).

- [31] G. Amelino-Camelia, *Kinematical solution of the UHE-cosmic-ray puzzle without a preferred class of inertial observers*, Int. J. Mod. Phys. **D12**, 1211-1226 (2003), astro-ph/0209232 (2002).
- [32] D. Mattingly, *Have we tested Lorentz invariance enough?*, gr-qc/0802.1561v1, 2008.
- [33] G. Amelino-Camelia, *Quantum Gravity Phenomenology*, gr-qc/0806.0339v1, 2008.
- [34] S. Liberati, *Tests of Lorentz invariance: a 2013 update*, gr-qc/1304.5795v2, 2013.
- [35] V. A. Kostelecký and N. Russell, *Data Tables for Lorentz and CPT Violation*, Rev.Mod.Phys. **83**,11 (2011), hep-ph/0801.0287v6.
- [36] T. Jacobson, S. Liberati, and D. Mattingly, *Threshold effects and Planck scale Lorentz violation: combined constraints from high energy astrophysics*, Phys.Rev. **D67**, 124011 (2003), hep-ph/0209264, 2002.
- [37] Daniel De Marco, Pasquale Blasi, Angela V. Olinto, *On the statistical significance of the GZK feature in the spectrum of ultra high energy cosmic rays*, Astropart.Phys. **20**, 53-65 (2003), astro-ph/0301497, 2003.
- [38] J. Abraham *et al.* (The Pierre Auger Collaboration), *Observation of the suppression of the flux of cosmic rays above $4 \times 10^{19} eV$* , Phys.Rev.Lett.**101**,061101 (2008), astro-ph/0806.4302v1; M. Roth (Pierre Auger Collaboration), astro-ph/0706.2096.
- [39] P. Sokolsky for the HiRes Collaboration, *Observation of the GZK cutoff by the HiRes Experiment*, Nuclear Physics B (Proc. Suppl.) **196** 67-73 (2009); R. Abbasi et al. (HiRes Collaboration), astro-ph/0703099.
- [40] F.W Stecker, and S. T Scully, *Searching for New Physics with Ultrahigh Energy Cosmic Rays*, New J.Phys.**11**, 085003 (2009), astro-ph.HE/0906.1735.
- [41] S.R. Coleman, and S.L. Glashow, *Cosmic ray and neutrino tests of special relativity*, Phys.Lett.B,**405**,249-252 (1997), hep-ph/9703240.
- [42] V. A. Kostelecký and M. Mewes, *Lorentz and CPT violation in neutrinos*, Phys. Rev. D **69**, 016005 (2004); V. A. Kostelecký and M. Mewes, *Lorentz and CPT violation in the neutrino sector*, Phys. Rev. D **70**, 031902 (2004).
- [43] J. S. Díaz, V. A. Kostelecký and M. Mewes, *Perturbative Lorentz and CPT violation for neutrino and antineutrino oscillations*, Phys. Rev. D **80**, 076007 (2009).
- [44] J. Beringer *et al.* (PDG), PR D86, 010001 (2012) (<http://pdg.lbl.gov>)

- [45] R. Abbasi *et al.* (IceCube Collaboration), *Search for a Lorentz-violating sidereal signal with atmospheric neutrinos in IceCube*, Phys.Rev. D, **82**, 112003 (2010), astro-ph.HE/1010.4096.
- [46] P. Adamson *et al.* (MINOS Collaboration), *Search for Lorentz Invariance and CPT Violation with the MINOS Far Detector*, Phys. Rev. Lett., **105**, 151601 (2010), hep-ex/1007.2791; *Testing Lorentz Invariance and CPT Conservation with NuMI Neutrinos in the MINOS Near Detector*, Phys.Rev.Lett. **101**, 151601 (2008), hep-ex/0806.4945.
- [47] L.B. Auerbach *et al.* (LSND Collaboration), *Tests of Lorentz violation in $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ oscillations*, Phys.Rev.D **72**, 076004 (2005), hep-ex/0506067v2.
- [48] A. A. Aguilar-Arevalo *et al.* (MiniBooNE Collaboration), *Test of Lorentz and CPT violation with short baseline neutrino oscillation excesses*, Physics Letters B **718** 1303-1308 (2013), hep-ex/1109.3480.
- [49] Y. Abe *et al.* (Double Chooz Collaboration), *First Test of Lorentz Violation with a Reactor-based Antineutrino Experiment*, hep-ex/1209.5810 (2012).
- [50] S.R. Coleman, and S.L. Glashow, *High-energy tests of Lorentz invariance*, Phys.Rev.D, **59**, 116008 (1999).
- [51] G. L. Fogli, E. Lisi, A. Marrone, and G. Scioscia, *Testing violations of special and general relativity through the energy dependence of $\nu_\mu \leftrightarrow \nu_\tau$ oscillations in the Super-Kamiokande atmospheric neutrino experiment*, Phys.Rev.D **60**, 053006 (1999), hep-ph/9904248.
- [52] G. Amelino-Camelia, *Testable scenario for Relativity with minimum length*, Phys. Lett.B **510**, 255-263 (2001).
- [53] J. Kowalski-Glikman, *Introduction to Doubly Special Relativity*, Lect. Notes. Phys. **669**, 131-159 (2005), hep-th/0405273v1.
- [54] F. Girelli, E.R. Livine, and D. Oriti, *Deformed Special Relativity as an effective flat limit of quantum gravity*, Nucl.Phys. B **708**, 411-433 (2005), gr-qc/0406100.
- [55] G. Amelino-Camelia, L. Smolin, A. Starodubtsev, *Quantum symmetry, the cosmological constant and Planck scale phenomenology*, Class.Quant.Grav. **21** 3095-3110 (2004), hep-th/0306134.
- [56] N.R. Bruno, G. Amelino-Camelia, J. Kowalski-Glikman, *Deformed Boost Transformations That Saturate at the Planck Scale*, Phys.Lett. B **522** 133-138 (2001), hep-th/0107039.
- [57] J. Kowalski-Glikman and S. Nowak, *Non-commutative space-time of Doubly Special Relativity theories*, Int.J.Mod.Phys. D **12** 299-316 (2003), hep-th/0204245.

- [58] J. Lukierski and A. Nowicki, *Heisenberg Double Description of κ -Poincaré Algebra and κ -deformed Phase Space*, in Proceedings of XXI International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics, (Goslar 1996), q-alg/9702003.
- [59] G. Amelino-Camelia, *Doubly-Special Relativity: Facts, Myths and Some Key Open Issues*, Symmetry 2010, 2(1), 230-271.
- [60] J.M. Carmona, J.L. Cortés, and F. Mercati, *Relativistic kinematics beyond Special Relativity*, Phys.Rev.D **86**, 084032 (2012), hep-th/1206.5961.
- [61] G. Amelino-Camelia, *On the fate of Lorentz symmetry in relative-locality momentum spaces*, Phys.Rev.D **85**, 084034 (2012), hep-th/1110.5081.
- [62] G. Amelino-Camelia, *Particle-Dependent Deformations of Lorentz Symmetry*, Symmetry **4**, 344-378 (2012), hep-ph/1111.5643 (2011).