FURG
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE

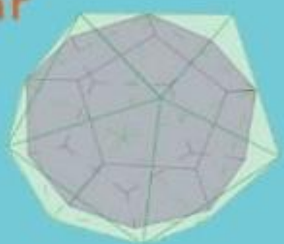
PPGECE

Programa de Pós-Graduação
em Ensino de Ciências Exatas




UMA PROPOSTA PARA O ESTUDO DOS POLIEDROS REGULARES E SEUS DUAIS

Ana Regina da Rocha Mohr
karin Ritter Jelinek
Patrícia Lima da Silva






2019

Ficha catalográfica

M699p Mohr, Ana Regina da Rocha.

Uma proposta para o estudo dos poliedros regulares e seus duais [Recurso Eletrônico] / Ana Regina da Rocha Mohr. – Santo Antônio da Patrulha, RS: [FURG], 2019.

86 f. : il. color.

Produto Educacional da Dissertação de mestrado do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas, para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências Exatas, sob a orientação da Dra. Karin Ritter Jelinek e coorientação da Me. Patrícia Lima da Silva.

Disponível em: https://ppgece.furg.br/
http://repositorio.furg.br/

1. Ensino de Geometria 2. Movimento da Matemática Moderna 3. Poliedros Regulares 4. Poliedros de Platão 5. Poliedros Duais I. Jelinek, Karin Ritter II. Silva, Patrícia Lima da III. Título.

CDU 37:514

Catalogação na Fonte: Bibliotecário José Paulo dos Santos CRB 10/2344

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Caro colega...

Este produto educacional faz parte de uma dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas da Universidade Federal do Rio Grande (FURG) “campus Santo Antônio da Patrulha” intitulada “Os Poliedros Duais e suas potencialidades para o ensino de Geometria”. Ele é destinado a professores de Matemática do Ensino Fundamental e do Ensino Médio que pretendem trabalhar o ensino de Geometria com materiais manipuláveis.

Acreditamos que a proposta apresentada neste produto educacional possibilita um ensino de Geometria mais interessante, atrativo e prazeroso, proporcionando ao aluno perceber que a Matemática vai além de teoremas e argumentações dedutivas.

Este produto educacional está dividido em quatro momentos. No primeiro momento, realizamos a comprovação da existência de apenas cinco tipos de Poliedros Regulares através da ideia de ângulo poliédrico. No segundo momento, desenvolvemos a construção dos cinco tipos de Poliedros Regulares utilizando polígonos de papel. No terceiro momento, apresentamos o conceito de Poliedro Dual e realizamos as deduções das relações entre a medida da aresta de um Poliedro Regular e a medida da aresta do seu dual. O quarto e último traz a construção dos esqueletos dos Poliedros Regulares e a união com os seus Poliedros Duais. Os momentos foram organizados de forma que o professor poderá optar por realizar todos ou apenas aqueles que considerar adequados para o conteúdo a ser abordado no seu plano de aula.

Informações

- ✓ Neste produto educacional, optou-se por colocar as referências como nota de rodapé.
- ✓ Os conceitos pertinentes às construções foram trazidos durante o desenvolvimento das atividades.
- ✓ Em alguns momentos do texto, a história da Matemática é trazida como forma de contextualizar como aqueles conceitos surgiram.
- ✓ Todas as imagens e figuras deste produto educacional foram criadas pelas autoras.

1º MOMENTO – EXISTEM APENAS CINCO TIPOS DE POLIEDROS REGULARES!

OBJETIVO

- ✓ Construir ângulos poliédricos com polígonos regulares para comprovar a existência de apenas cinco tipos de Poliedros Regulares.

CONCEITOS QUE PODEM SER EXPLORADOS COM A ATIVIDADE

- ✓ Definição de poliedros
- ✓ Definição de poliedros convexos e não convexos
- ✓ Definição de face, aresta e vértice de um poliedro
- ✓ Conceito de ângulo poliédrico
- ✓ Características de um poliedro regular

MATERIAIS NECESSÁRIOS

- ✓ Molde dos polígonos
- ✓ Fita adesiva
- ✓ Tesoura

TEMPO DE DURAÇÃO

- ✓ 2 horas/aula

UM POUCO DE HISTÓRIA...[1]

Dentre os povos da Antiguidade, foram os gregos que mais se dedicaram ao estudo dos poliedros e suas propriedades. O interesse dos gregos recaiu, principalmente, nos poliedros que eles denominaram **Poliedros Regulares**.

O fato de existir um número muito restrito de Poliedros Regulares chamou a atenção de muitos filósofos. Platão, por exemplo, um filósofo grego que viveu por volta do século VI antes da Era Comum - a.E.C., era conhecedor desse fato e estudou algumas interessantes propriedades dos poliedros. Ele tratou especialmente de uma classe bem caracterizada de poliedros, conhecidos hoje como **Poliedros de Platão**, entre os quais se encontram os **Poliedros Regulares**.

[1] MACHADO, N. J. **Os Poliedros de Platão e os Dedos da Mão**. São Paulo: Scipione, 1989.

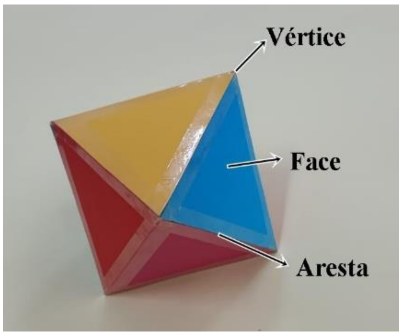
CONCEITOS PRELIMINARES

Poliedro[2]

Os **poliedros** são sólidos limitados por superfícies planas poligonais. Em um poliedro, podemos destacar os seguintes elementos:

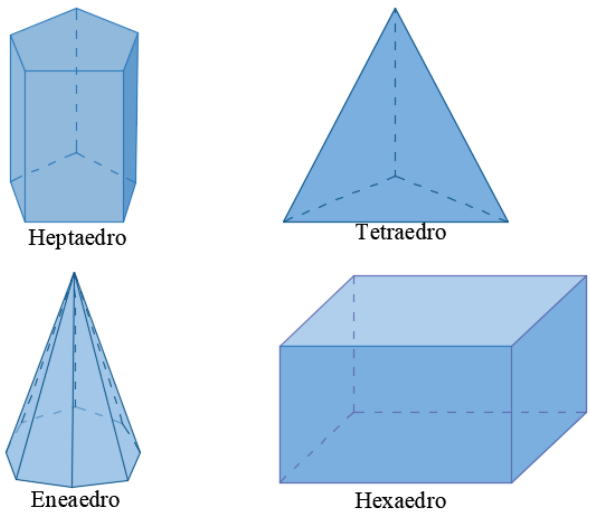
- As **faces** são os polígonos que limitam os poliedros. A quantidade de faces de um poliedro é finita.
- As **arestas** são os lados de cada face do poliedro, sendo que cada aresta é comum a somente duas faces.
- Os **vértices** são os pontos de intersecção de três ou mais arestas, sendo que os vértices de cada face são também os vértices do poliedro.

Na figura a seguir, podemos visualizar os conceitos de faces, arestas e vértices em um poliedro.



Podemos classificar um poliedro de acordo com o seu número de faces. Seguem alguns exemplos:

Número de faces	Classificação
4	Tetraedro
5	Pentaedro
6	Hexaedro
7	Heptaedro
8	Octaedro
9	Eneaedro
10	Decaedro
11	Undecaedro
12	Dodecaedro
...	...
20	Icosaedro



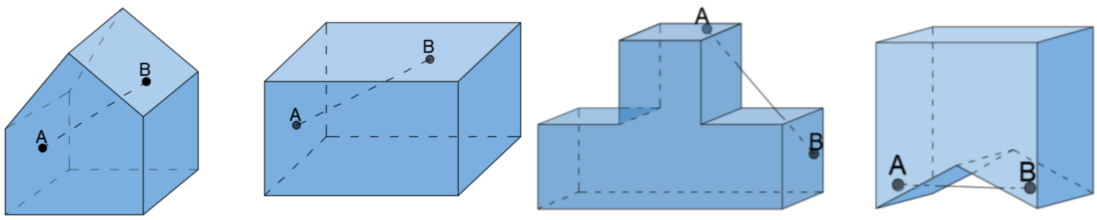
2 SOUZA, Joamir Roberto de; GARCIA, Jacqueline da Silva Ribeiro. **#Contato matemática**, 2º ano. São Paulo: FTD, 2016.

Poliedro convexo e não convexo

Dizemos que um poliedro é convexo quando todo segmento de reta que liga quaisquer dois pontos de um poliedro está inteiramente contido nele. Caso contrário, dizemos que o poliedro é não convexo.

Exemplos:

Poliedros convexos e Poliedros não convexos



CONHECENDO OS CINCO TIPOS DE POLIEDROS REGULARES

Um **poliedro convexo** é considerado **regular** quando**:**

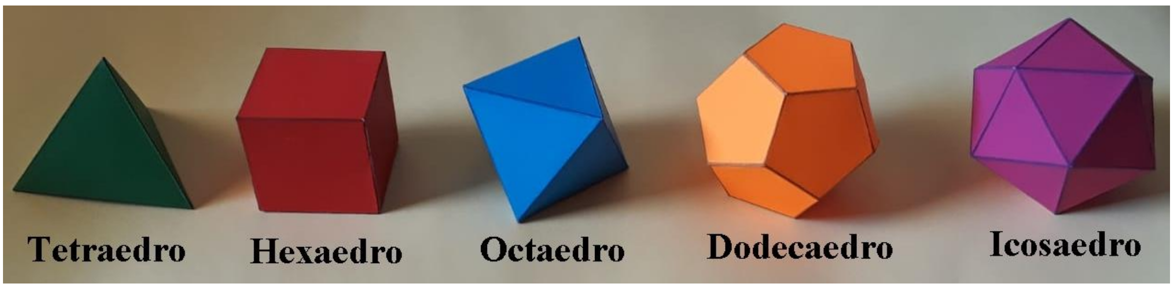
- Suas faces são polígonos regulares e congruentes entre si;
- De cada vértice do poliedro parte o mesmo número de arestas.

Em relação aos Poliedros Regulares, temos a seguinte propriedade:

Existem somente cinco tipos de Poliedros Regulares.

Dica: você pode utilizar para este momento as planificações que se encontram no apêndice A.

Poliedros Regulares



Por que será que não existem mais do que cinco tipos de Poliedros Regulares?

Você não acha intrigante essa limitação na quantidade de Poliedros Regulares? Qual seria a razão deste número tão pequeno?

É exatamente isso que vamos verificar a partir de agora. Vamos recortar polígonos regulares e, com eles, construir possíveis ângulos poliédricos que aqui chamamos de “bicos”. Para formar um bico, é necessário unir, no mínimo, três polígonos por um de seus lados, mas podem ser utilizados mais de três polígonos, se necessário. É importante observarmos que a soma dos ângulos internos desse bico não pode ser igual ou maior do que 360º. A figura a seguir traz o passo a passo de como formar um bico.

Agora que você já sabe construir um bico, divida a turma em grupos de três a cinco alunos e entregue os polígonos regulares (triângulos, quadrados, pentágonos, hexágonos e heptágonos) que estão no apêndice B. Lá se encontram cinco páginas das quais você poderá fazer impressão em folhas de papel A4, com uma gramatura de no mínimo 180g/m². Assim, basta imprimir e entregar para cada grupo recortar uma cópia da folha que contém os triângulos, 1/2 da cópia da folha com quadrados, uma cópia da folha com pentágonos, 1/3 da cópia da folha com hexágonos e 1/3 da cópia da folha com heptágono.

Alternativamente, você pode utilizar os polígonos do apêndice C para desenhá-los em folhas de papel cartaz. Nesse caso, entregue um molde para cada grupo que terá que riscar para, depois, recortar trinta e seis triângulos, doze quadrados, dezoito pentágonos, quatro hexágonos e quatro heptágonos. Depois de recortar os polígonos, com o auxílio da fita adesiva, solicite aos alunos que construam ângulos poliédricos (bicos), de todas as maneiras possíveis, de modo que cada bico seja composto apenas por polígonos congruentes entre si.

Obeservações:

- ✓ As quantidades de polígonos são sugestões que cada grupo poderá receber, pois, como vamos trabalhar por tentativas, os alunos podem usar quantidades diferentes de polígonos.
- ✓ Ao realizar as impressões, é necessário ter um cuidado de fazê-las em escala real, visto que esses polígonos serão utilizados para a construção dos Poliedros Duais. Dessa maneira, os triângulos devem ter lado medindo cinco centímetros, os quadrados devem ter lado medindo quatro centímetros, e os pentágonos devem ter lado medindo três centímetros.

- ✓ Dividir a turma em grupo auxilia na otimização do tempo, visto que cada grupo construirá de uma única vez os possíveis bicos e, no próximo momento, os Poliedros Regulares.
- ✓ Para calcular a medida do ângulo interno de um Polígono Regular, podemos utilizar a seguinte expressão[3]:

  Considerando,

  a_i = ângulo interno

  n = número de lados do polígono

$$a_i = \frac{(n-2)\,.\,180°}{n}$$

Outra sugestão é calcular primeiro o ângulo externo (a_e), utilizando a expressão:

$$a_e = \frac{360°}{n}$$

E, depois pelo seu suplemento, calcular o valor do ângulo interno:

$$a_i = 180° - a_e$$

Durante as construções, solicite aos alunos que anotem as tentativas realizadas e os resultados obtidos no quadro que segue. Esse quadro encontra-se também no apêndice D – Folha do A1uno.

Essas são possíveis respostas. Uma vez que os alunos estão trabalhando por tentativas, nada impede, por exemplo, deles tentarem construir um bico com sete triângulos.

Quadro – Comprovação geométrica da existência de apenas cinco tipos de Poliedros Regulares

Polígono Regular	**Medida do ângulo interno do polígono**	**Quantidade de polígonos usados**	**Soma dos ângulos que formam o bico**	**Poliedro formado**
Triângulos	60°	3	180°	Tetraedro
Triângulos	60°	4	240°	Octaedro
Triângulos	60°	5	300°	Icosaedro
Triângulos	60°	6	360°	Não existe
Quadrados	90°	3	270°	Hexaedro
Quadrados	90°	4	360°	Não existe
Pentágonos	108°	3	324°	Dodecaedro
Pentágonos	108°	4	432°	Não existe
Hexágonos	120°	3	360°	Não existe
Heptágonos	≅ 128,57°	3	3	≅ 385,71°	Não existe

[3]DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar**: Geometria plana. 7 ed. São Paulo: Atual, 1993.

Ao final das construções, questione os alunos sobre quais bicos conseguiram formar. Nesse momento, eles podem usar o quadro que preencheram para responder às perguntas. Esses questionamentos também se encontram no Apêndice D.

É possível formar um bico com três triângulos?

Resposta: Sim (o bico do Tetraedro)

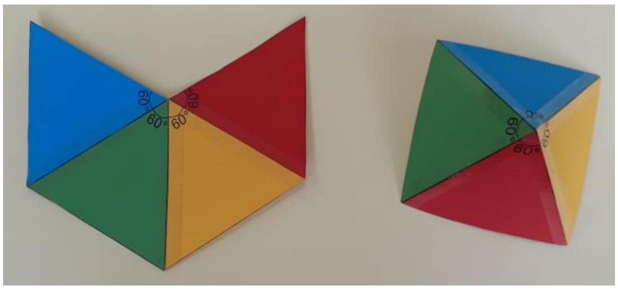
Bico com três triângulos

Com três triângulos, conseguimos formar um bico, pois a soma dos ângulos internos que formam o bico resulta em 180°.

E com quatro?

Resposta: Sim (o bico do Octaedro)

Bico com quatro triângulos

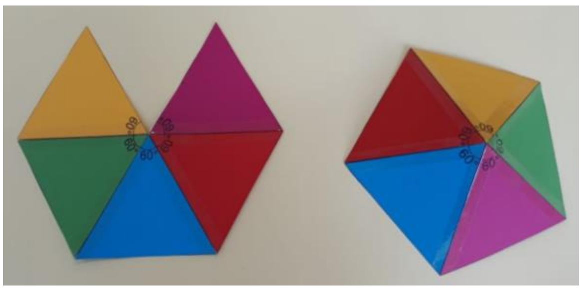


Com quatro triângulos, conseguimos formar um bico, pois a soma dos ângulos internos que formam o bico resulta em 240°.

E com cinco?

Resposta: Sim (o bico do Icosaedro)

Bico com cinco triângulos



Com cinco triângulos, conseguimos formar um bico, pois a soma dos ângulos internos que formam o bico resulta em 300°.

E com seis?

Resposta: Não

Ângulo plano formado com seis triângulos

Com seis triângulos, não conseguimos formar um bico, pois a soma dos ângulos internos que formaria o bico resulta em 360°, ou seja, um ângulo plano.

Quantos tipos de bicos você construiu com triângulos?

Resposta: três (o bico do Tetraedro, do Octaedro e do Icosaedro)

Bicos do Tetraedro, Octaedro e Icosaedro

E com quadrados?

Resposta: um (o bico do Hexaedro)

Bico com três quadrados

Com três quadrados, conseguimos formar um bico, pois a soma dos ângulos internos que formam o bico resulta em 270°.

Ângulo formado com quatro quadrados

Com quatro quadrados, não conseguimos formar um bico, pois a soma dos ângulos internos que formaria o bico resulta em 360°, ou seja, um ângulo plano.

E com pentágonos?

Resposta: um (o bico do Dodecaedro)

Bico com três pentágonos

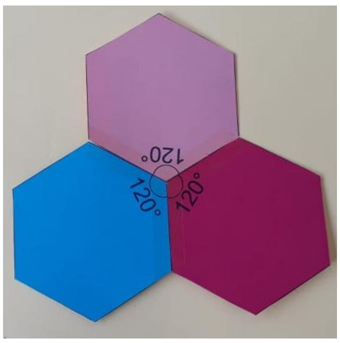
Com três pentágonos, conseguimos formar um bico, pois a soma dos ângulos internos que formam o bico resulta em 324°.

Não é possível formar mais nenhum tipo de bico, pois, com quatro pentágonos, a soma dos ângulos internos que formam o bico resulta em 432º. E, para formar o bico, a soma dos ângulos internos dos polígonos em torno do ponto que constituirá o bico não pode ser igual ou maior do que 360º.

E com hexágonos?

Resposta: Não é possível construir bicos com hexágonos.

Ângulo plano formado com três hexágonos



Com três hexágonos, não conseguimos formar um bico, pois a soma dos ângulos internos que formaria o bico resulta em 360°, ou seja, um ângulo plano.

Como você explica a impossibilidade de construir um bico com hexágonos?

Possível resposta: Não conseguimos formar um bico, pois a soma dos ângulos internos que formaria o bico resulta em 360°, ou seja, um ângulo plano, e não um bico.

E com heptágonos?

Resposta: Não é possível construir bicos com heptágonos.

Figura formada com três heptágonos

Com três heptágonos, não conseguimos formar um bico, pois a soma dos ângulos internos que formaria o bico resulta em aproximadamente 385,71°, ou seja, maior a 360º.

Atenção professor! Neste momento, a ideia de bico precisa estar bem clara para o aluno. É indispensável que ele saiba identificar quais e quantas faces formam o bico, pois, no próximo momento, vamos construir os Poliedros Regulares, utilizando a ideia de bico.

Portanto, na tentativa de construir Poliedros Regulares, verificamos, na prática, que não é possível fazê-los nem com hexágonos nem com polígonos que tenham mais do que seis lados. Enfim, só é possível construir cinco tipos de Poliedros Regulares:

- De três modos distintos, utilizando triângulos;
- De um só modo, utilizando quadrados;
- De um só modo, utilizando pentágonos.

2º MOMENTO – CONSTRUÇÃO DOS CINCO TIPOS DE POLIEDROS REGULARES

OBJETIVO

- ✓ Construir os cinco tipos de Poliedros Regulares e trabalhar o conceito de Poliedro de Platão.

CONCEITOS QUE PODEM SER EXPLORADOS COM A ATIVIDADE

- ✓ Poliedros Regulares
- ✓ Poliedros de Platão
- ✓ Relação de Euler

MATERIAIS NECESSÁRIOS

- ✓ Moldes dos polígonos regulares
- ✓ Fita adesiva
- ✓ Tesoura

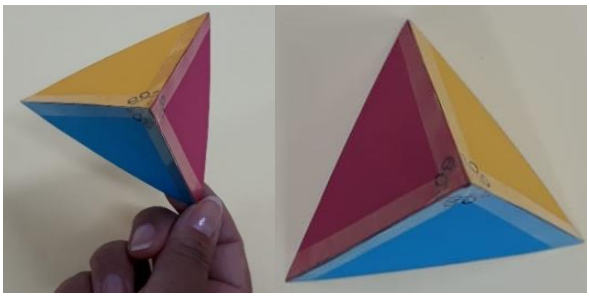
TEMPO DE DURAÇÃO

- ✓ 2 horas/aula

CONSTRUINDO OS POLIEDROS REGULARES

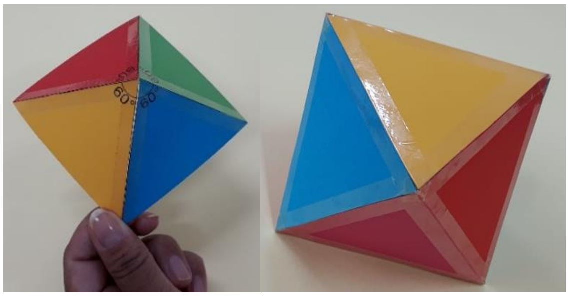
Agora que já compreendemos por que existem apenas cinco tipos de Poliedros Regulares, vamos construí-los. Sugerimos utilizar os polígonos que sobraram do 1º momento e os bicos já construídos.

Formando o primeiro poliedro



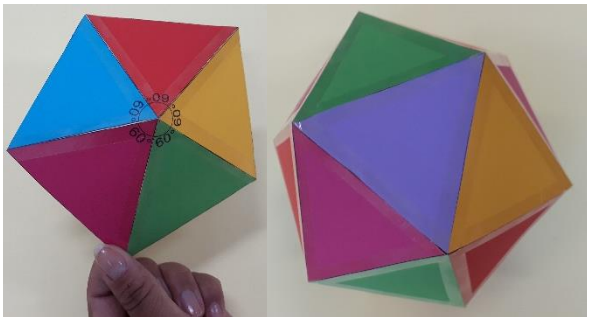
Utilizando o bico com três triângulos e completando com mais um triângulos, obtemos um poliedro com quatro faces triangulares: **o Tetraedro Regular.**

Formando o segundo poliedro



Utilizando o bico com quatro triângulos e completando com os triângulos que estão faltando para que todos os bicos tenham quatro triângulos, obtemos um poliedro com oito faces triangulares: **o Octaedro Regular.**

Formando o terceiro poliedro

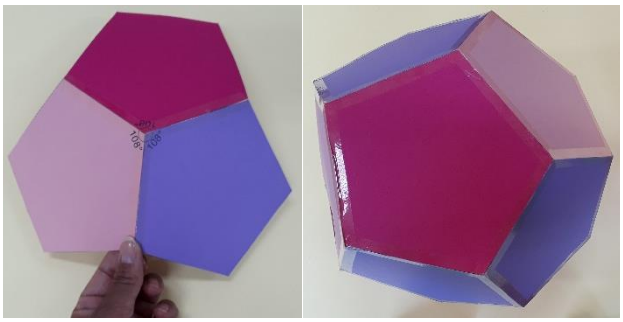


Utilizando o bico com cinco triângulos e completando com os triângulos que estão faltando para que todos os bicos tenham cinco triângulos, obtemos um poliedro com vinte faces triangulares: **o Icosaedro Regular.**

Formando o quarto poliedro

Utilizando o bico com três quadrados e completando com os quadrados que estão faltando para que todos os bicos tenham três quadrados, obtemos um poliedro com seis faces quadradas: **o Hexaedro Regular.**

Formando o quinto poliedro

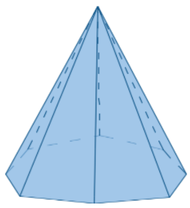
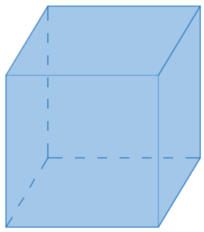
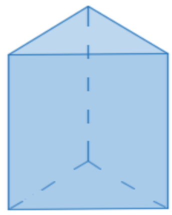
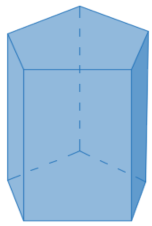


Utilizando o bico com três pentágonos e completando com os pentágonos que estão faltando para que todos os bicos tenham três pentágonos, obtemos um poliedro com doze faces pentagonais: **o Dodecaedro Regular.**

Como acabamos de perceber, existem apenas cinco tipos de Poliedros Regulares. Anteriormente, dissemos que Platão, por volta do século VI a.E.C., já conhecia esse fato, tendo estudado especialmente certa classe de poliedros, hoje conhecidos como **Poliedros de Platão,** entre os quais se incluem os **Poliedros Regulares.**

RELAÇÃO DE EULER[4]

A relação de Euler envolve o número de faces (F), o número de arestas (A) e o número de vértices (V) de um poliedro. Essa relação é válida para todos os poliedros convexos (e alguns poliedros não convexos), recebendo esse nome em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783). Veja:

Poliedro				
F	9	6	5	7
A	16	12	9	15
V	9	8	6	10
V – A + F = 2	9 - 16 + 9 = 2	8 – 12 + 6 = 2	6 – 9 + 5 = 2	10 – 15 + 7 = 2

Pelos resultados, podemos observar que a relação V – A + F = 2 se mantém constante para os poliedros considerados. A relação de Euler pode ser empregada para determinar o número de um dos elementos (faces, arestas ou vértices) de um poliedro convexo, desde que os outros dois sejam conhecidos. Os poliedros em que é válida a relação de Euler são conhecidos como **Poliedros Eulerianos.**

Agora, vamos utilizar todos os poliedros regulares construídos e, contando o número de vértices, de faces e de arestas, verificar se a relação Euler é válida. Nesse momento, peça para os alunos preencherem o quadro que segue, presente também no Apêndice D.

Quadro – Comprovando a relação de Euler

Poliedro Regular	**Polígonos usados**	**Nº de faces (F)**	**Nº de vértices (V)**	**Nº de arestas (A)**	**V – A + F = 2**
Tetraedro	triângulos	4	4	6	4 – 6 + 4 = 2
Hexaedro	quadrados	6	8	12	8 – 12 + 6 = 2
Octaedro	triângulos	8	6	12	6 – 12 + 8 = 2
Dodecaedro	pentágonos	12	20	30	20 – 30 + 12 = 2
Icosaedro	triângulos	20	12	30	12 – 30 + 20 = 2

[4] GIOVANNI, José Ruy; et al. **360° Matemática.** Volume 2. São Paulo: FTD, 2018.

Nesse momento, comprovamos que a relação de Euler é válida para os Poliedros Regulares (isso também é justificável pelo fato de os Poliedros Regulares serem convexos).

UM POUCO DE HISTÓRIA...[5]

Comumente é dito que Platão passou a ter uma visão matemática por influência de um amigo, Arquitas. Acredita-se, também, que foi a partir daí que ele soube da existência de cinco poliedros especiais: o Tetraedro, o Hexaedro, o Octaedro, o Icosaedro e o Dodecaedro. Nessa época, esses poliedros eram associados aos quatro elementos considerados primordiais: ar, associado ao Octaedro; terra, associada ao Hexaedro; fogo, associado ao Tetraedro; e água, associada ao Icosaedro. O quinto e último poliedro foi o Dodecaedro, que Platão considerou o símbolo do universo.

POLIEDROS DE PLATÃO

Um poliedro é chamado de Poliedro de Platão se contemplar, simultaneamente, as seguintes condições:

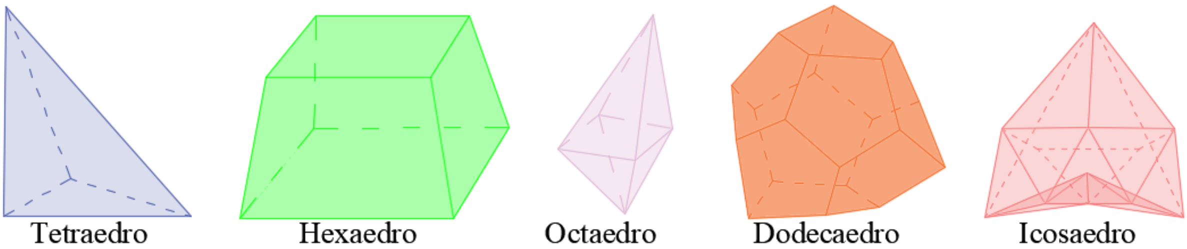
- Todas as faces têm o mesmo número de arestas;
- De cada vértice parte o mesmo número de arestas;
- A relação de Euler é válida.

Em relação aos Poliedros de Platão, temos a seguinte propriedade:

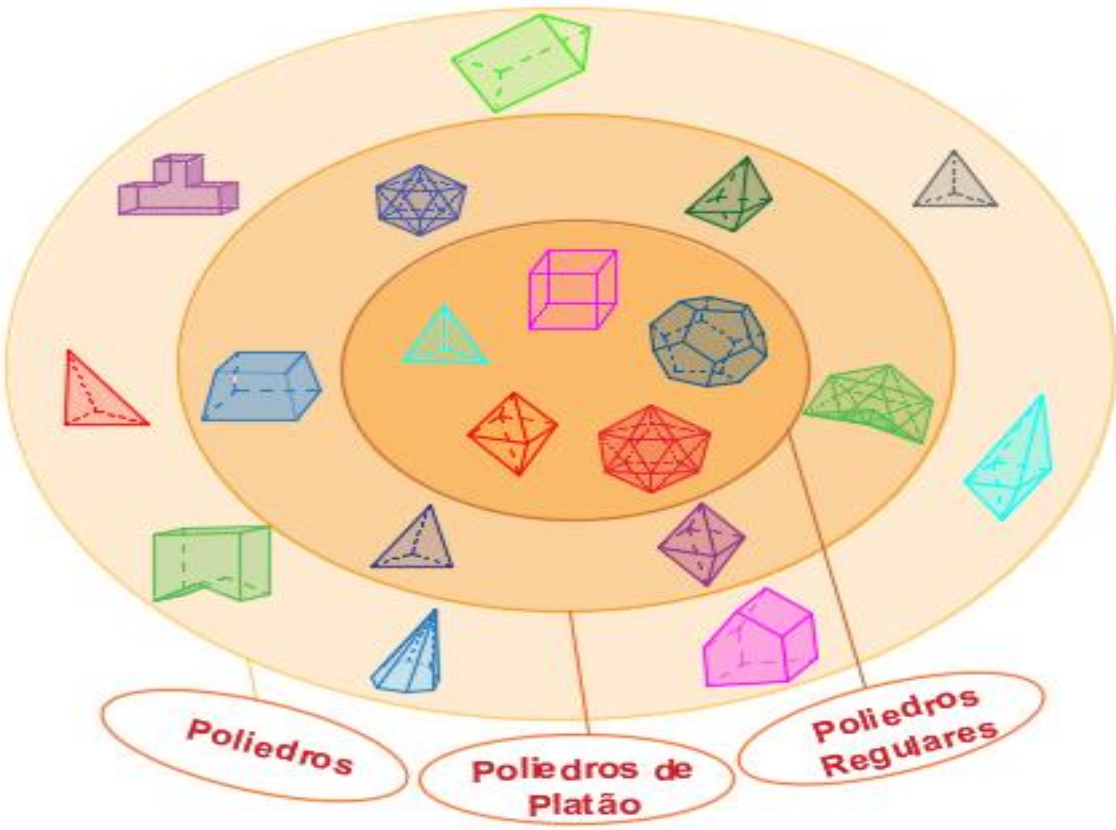
Existem cinco classes de Poliedros de Platão.

Assim, é possível dizermos que todo Poliedro Regular é um Poliedro de Platão, mas nem todo Poliedro de Platão é regular. Notamos que existem cinco **tipos** de Poliedros Regulares e cada um deles pertence a uma das cinco **classes** de Poliedros de Platão. Porém, em cada uma das classes de Poliedros de Platão, também existem poliedros que não são regulares e alguns não convexos. Veja alguns exemplos de Poliedros de Platão que não são regulares.

[5]SOUZA, Joamir Roberto de; GARCIA, Jacqueline da Silva Ribeiro. **#Contato matemática**, 2º ano. São Paulo: FTD, 2016.



Essas imagens trazem alguns exemplos de Poliedros de Platão que não são regulares e também um Icosaedro não convexo, visto que ser convexo não é uma condição para os Poliedros de Platão. Para auxiliar esse entendimento, o diagrama a seguir nos fornece uma interessante visualização das propriedades dos Poliedros Regulares e dos Poliedros de Platão.



Assim, dizemos que, no conjunto dos poliedros, o conjunto dos Poliedros Regulares está contido no conjunto dos Poliedros de Platão que, por sua vez, está contido no conjunto dos poliedros. Ou seja: {**poliedros regulares}⊂{poliedros de Platão}⊂{poliedros}.**

3º MOMENTO – INTRODUÇÃO AOS POLIEDROS DUAIS

OBJETIVOS

- ✓ Conceituar os Poliedros Duais;
- ✓ Deduzir as relações entre a medida da aresta dos Poliedros Regulares e de seus Poliedros Duais.

CONCEITOS QUE PODEM SER EXPLORADOS COM A ATIVIDADE

- ✓ Características dos Poliedros Regulares
- ✓ Semelhança de triângulos
- ✓ Baricentro de um triângulo

TEMPO DE DURAÇÃO

- ✓ 2 horas/aula

CONCEITOS PRELIMINARES

Iniciamos apresentando alguns conceitos de Geometria que serão usados ao trabalharmos com os Poliedros Duais.

Algumas simbologias importantes

$\Leftrightarrow$ se, e somente se

$\Rightarrow$ implica

$\equiv$ congruente

$\sim$ semelhante

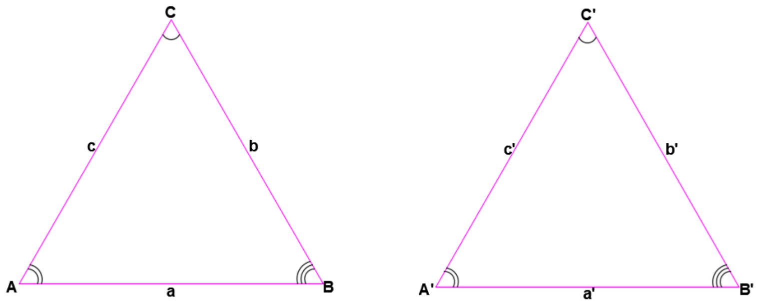
Semelhança de triângulos[6]

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais.

Homólogos: que têm a mesma posição relativa; correspondentes.

Observe os triângulos ABC e A'B'C':

[6]DANTE, Luiz Roberto. **Matemática:** Contexto & Aplicações, 1° ano. São Paulo: Ática, 2017.



$\Delta\, ABC\ e\ \Delta\, A'B'C'$ são semelhantes. Indicamos, assim, $\Delta\, ABC \sim \Delta\, A'B'C'$.

$$\Delta\, ABC \sim \Delta\, A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{A} & \equiv \widehat{A'} \\ \widehat{B} & \equiv \widehat{B'} \\ \widehat{C} & \equiv \widehat{C'} \end{cases} \text{e} \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = (\text{ razão de semelhança})$$

Lembre-se:

a é a medida do lado **ABe** **a'** é a medida do lado **A'B'**

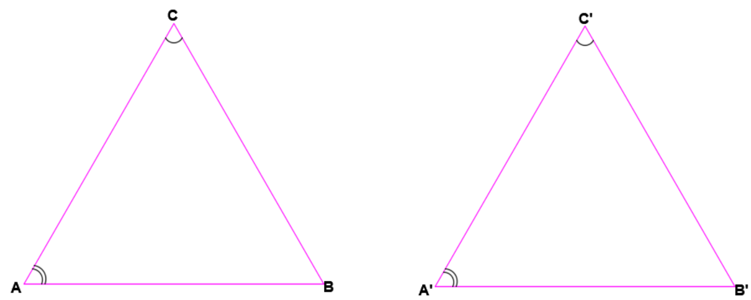
b é a medida do lado **BCe** **b'** é a medida do lado **B'C'**

c é a medida do lado **CAe** **c'** é a medida do lado **C'A'**

Para saber se dois triângulos são semelhantes, basta verificar alguns de seus elementos específicos, ou seja, ao verificar apenas algumas informações sobre dois triângulos, podemos garantir a semelhança entre eles. Esses são chamados **casos de semelhanças de triângulos:**

1° caso: critério AA (ângulo, ângulo)

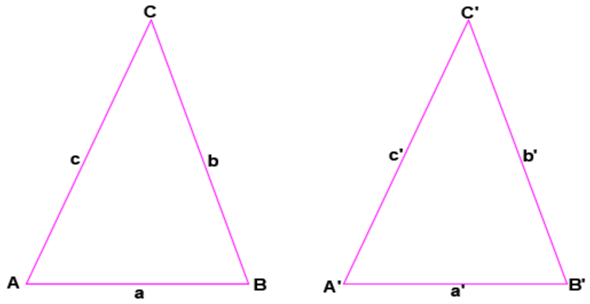
Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, dois ângulos de um são congruentes a dois ângulos do outro.



$$\begin{cases} \widehat{A} & \equiv \widehat{A'} \\ \widehat{C} & \equiv \widehat{C'} \end{cases} \Longrightarrow \Delta\, ABC \sim \Delta\, A'B'C'$$

2° caso: critério LLL (lado, lado, lado)

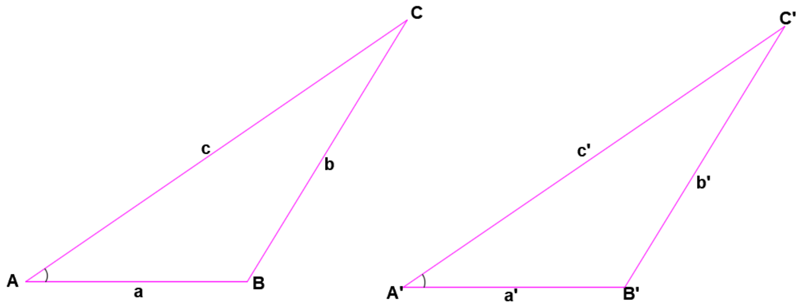
Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, os lados de um são proporcionais aos do outro.



$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Longrightarrow \Delta\, ABC \sim \Delta\, A'B'C'$$

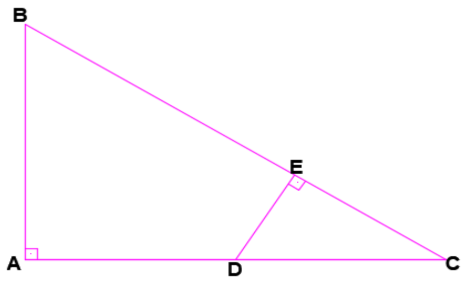
3° caso: critério LAL (lado, ângulo, lado)

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem um ângulo congruente compreendido entre lados proporcionais.



$$\begin{cases} \widehat{A} \equiv \widehat{A}' \\ \dfrac{c}{c'} = \dfrac{a}{a'} \end{cases} \Longrightarrow \Delta\, ABC \sim \Delta\, A'B'C'$$

Vamos observar um exemplo de aplicação dos casos de semelhança de triângulos: considere o triângulo ABC, retângulo em A, e seja D um ponto de $\overline{AC}$ e$\overline{DE}$ perpendicular ao lado BC. Vamos verificar se $\Delta ABC \sim \Delta EDC$:

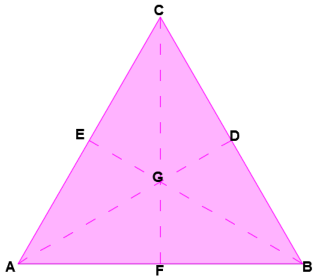


$$\begin{cases} \hat{E} \equiv \hat{A}\ (retos) \\ \hat{C}\ \text{é}\ comum \end{cases} \Longrightarrow\ \Delta\, EDC \sim \Delta\, ABC\ (caso\ AA)$$

Baricentro de um triângulo[7]

Em um triângulo, as **medianas** correspondem aos segmentos de reta cujas extremidades são o ponto médio de um dos lados e o vértice oposto a esse lado. As três medianas do triângulo se cruzam em um único ponto denominado **baricentro**. O baricentro divide cada mediana em dois segmentos. O segmento cujas extremidades são o vértice do triângulo e o baricentro tem o dobro do comprimento do outro, cujas extremidades são o baricentro e o ponto médio do lado oposto ao vértice considerado. Vejamos no exemplo apresentado:

$$\overline{AG} = 2 \,.\, \overline{GD},\ \overline{BG} = 2 \,.\, \overline{GE} \text{ e } \overline{CG} = 2 \,.\, \overline{GF}$$



Pontos médios: D, E e F

Medianas: $\overline{AD}$,$\overline{BE}$ e $\overline{CF}$

Baricentro: G

Observamos, também, que, em um triângulo equilátero, o baricentro coincide com o incentro, que é o encontro das bissetrizes internas.

Poliedros Duais[8]

Para conceituarmos o Poliedro Dual de um Poliedro Regular, podemos utilizar a seguinte definição:

> **Se considerarmos um Poliedro Regular qualquer e unirmos o ponto central de cada face adjacente através de segmentos de reta, obtemos um novo poliedro. Esse novo poliedro será definido como o dual do Poliedro original.**

Podemos também utilizar uma definição equivalente que diz que "dois poliedros são duais quando um está inscrito no outro de tal forma que os vértices do poliedro inscrito são os

---

[7] SOUZA, Joamir Roberto de; GARCIA, Jacqueline da Silva Ribeiro. **#Contato matemática**, 3º ano. São Paulo: FTD, 2016.

[8] As definições apresentadas aqui são inspiradas nas referências de:

KALEFF, Ana Maria. **Vendo e entendendo poliedros:** do desenho ao cálculo através de quebra-cabeças e outros materiais concretos. 2. ed. Niterói: Editora UFF, 2003.

ALMEIDA, Cristian Roberto Miccerino. **Sólidos de Platão e seus duais:** Construção com material concreto e representações por GeoGebra**.** 64f. Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. Campinas, São Paulo. 2015.

centros das faces[9] do poliedro circunscrito”. Dessa maneira, fica evidenciado que o número de faces do poliedro original é o mesmo número de vértices do seu dual. Ou seja, construir um Poliedro Dual de um Poliedro Regular é inscrever um poliedro em outro de modo que os vértices do poliedro inscrito coincidam com os centros das faces do poliedro original.

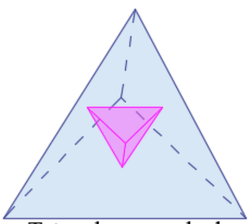
Observando as relações entre o número de faces e de vértices[10]

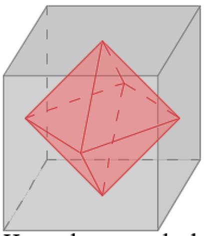
Observando o quadro a seguir, podemos identificar se existem casos em que o número de faces de um Poliedro Regular é igual ao número de vértices de outro. Para auxiliar nas visualizações, podemos utilizar os poliedros já construídos anteriormente.

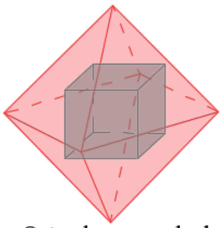
Quadro - relações entre o número de faces e de vértices

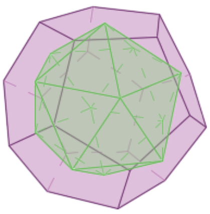
Poliedro Regular	Número de faces	Número de vértices	Número de arestas
Tetraedro	4	4	6
Hexaedro	6	8	12
Octaedro	8	6	12
Dodecaedro	12	20	30
Icosaedro	20	12	30

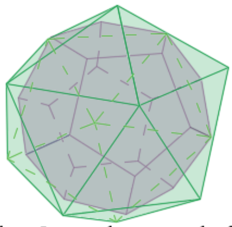
Notamos que as células da coluna do número de faces e do número de vértices que têm a mesma cor mostram que existem poliedros que possuem o mesmo número faces e vértices, porém com os dados “trocados”. Nesse caso, eles possuem o mesmo número de arestas. São eles: o “Hexaedro e Octaedro” e o “Dodecaedro e Icosaedro”.


Tetraedro e seu dual


Hexaedro e seu dual


Octaedro e seu dual

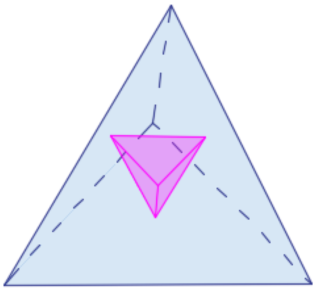

Dodecaedro e seu dual


Icosaedro e seu dual

Se analisarmos a definição de Poliedros Duais e o quadro anterior, podemos observar que é possível construir (ligando o centro das faces adjacentes através de segmentos de reta) um Hexaedro inscrito em um Octaedro e vice-versa. Também, um Dodecaedro inscrito em um Icosaedro e vice-versa. No caso do Tetraedro, como ele possui o número de faces igual ao número de aresta, é possível construir um Tetraedro inscrito em um Tetraedro.

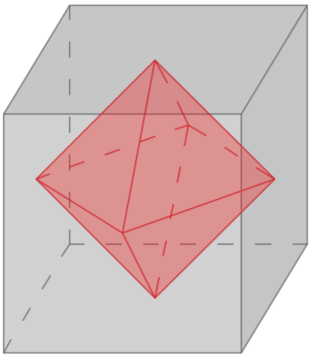
[9]Note que todo polígono regular possui uma circunferência inscrita, cujo centro pode ser determinado pelo encontro das bissetrizes internas. A esse ponto chamamos de centro do polígono ou centro da face do Poliedro Regular.
[10] CÂNDIDO, Suzana Laino. Formas num mundo de formas. São Paulo: Moderna, 1997.

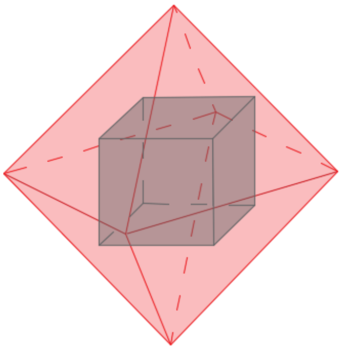
Agora, vamos conceituar cada um dos Poliedros Regulares com seus duais:



O dual do Tetraedro Regular é o próprio Tetraedro Regular, pois, quando unimos o ponto central de cada face adjacente através de segmentos de reta, obtemos outro Tetraedro Regular inscrito. Dessa maneira, cada vértice do Tetraedro Regular inscrito coincide com o centro de uma face do Tetraedo original.

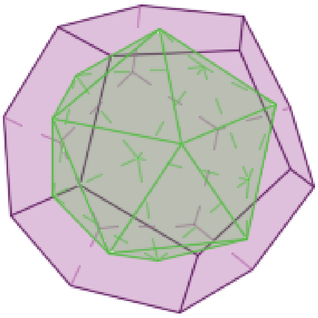
O dual do Hexaedro Regular é o Octaedro Regular, pois, quando unimos o ponto central de cada face adjacente do Hexaedro Regular, atráves de segmentos de reta, obtemos um Octaedro Regular inscrito. Dessa maneira, cada vértice do Octaedro Regular inscrito coincide com o centro de uma face do Hexaedro Regular.

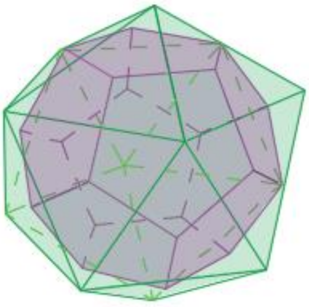




O dual do Octaedro Regular é o Hexaedro Regular, pois, quando unimos o ponto central de cada face adjacente do Octaedro Regular através de segmentos de reta, obtemos um Hexaedro Regular inscrito. Dessa maneira, cada vértice do Hexaedro Regular inscrito coincide com o centro de uma face do Octaedro Regular.

O dual do Dodecaedro Regular é o Icosaedro Regular, pois, quando unimos o ponto central de cada face adjacente do Dodecaedro Regular, através de segmentos de reta, obtemos um Icosaedro Regular inscrito. Dessa maneira, cada vértice do Icosaedro Regular inscrito coincide com o centro de uma face do Dodecaedro Regular.





O dual do Icosaedro Regular é o Dodecaedro Regular, pois, quando unimos o ponto central de cada face adjacente do Icosaedro Regular, através de segmentos de reta, obtemos um Dodecaedro Regular inscrito. Dessa maneira, cada vértice do Dodecaedro Regular inscrito coincide com o centro de uma face do Icosaedro Regular.

Os Poliedros Duais são também chamados recíprocos, pois o número de faces do dual corresponde ao número de vértices do original, assim como o número de vértices do dual corresponde ao número de faces do original. Portanto, um Poliedro e seu dual têm o mesmo número de arestas, porém, o número de vértice e de faces fica invertido, exceto no Tetraedro Regular, no qual eles coincidem.

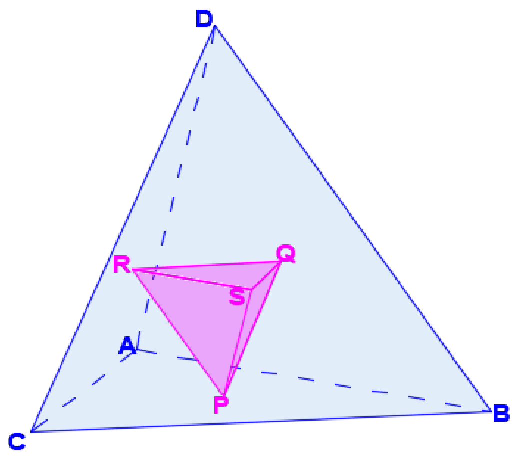
TRABALHANDO COM OS POLIEDROS DUAIS

As deduções aqui realizadas serão importantes para o quarto momento, em que vamos construir com materiais concretos os cinco Poliedros Regulares e seus Poliedros Duais.

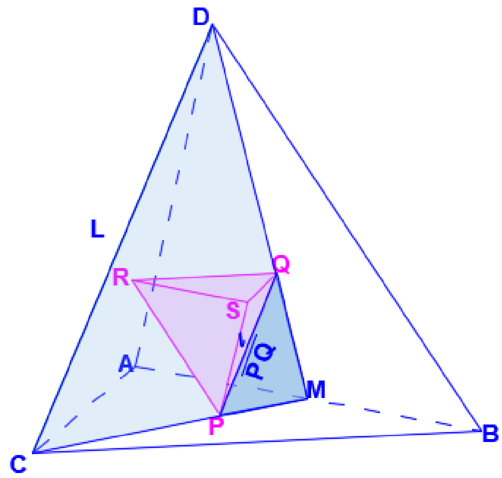
A partir de agora, vamos considerar os Poliedros Regulares originais com as suas arestas medindo L e os Poliedros Duais com as suas arestas medindo l. Dessa maneira, vamos construir expressões que relacionem as medidas de L e de l. No final dessa etapa, organizaremos as relações encontradas em uma tabela. Esse processo de dedução tem diversos conceitos matemáticos que podem ser explorados durante a aula, conectando diferentes ramos da Matemática. Alternativamente, o professor pode optar por utilizar as relações aqui apresentadas sem deduzi-las e ir direto para o próximo momento.

Tetraedro Regular e seu dual

Iniciamos considerando o Tetraedro Regular ABCD de aresta L e vamos deduzir uma expressão para a medida da aresta l do seu dual em função de L. Lembramos que um Tetraedro Regular possui as suas faces formadas por quatro triângulos equiláteros. Denotamos P, Q, R e S o centro de cada uma das faces desse Tetraedro. Observamos que, como cada face é um triângulo equilátero, então o centro de cada face coincide com o baricentro.



Para escrevermos uma expressão para l em função de L, observamos que, como o ponto P é o baricentro do triângulo ΔABC, temos que $\overline{CP} = 2\overline{PM}$. Equivalentemente, $\overline{PM} = \frac{1}{3}\overline{CM}$ e, analogamente, $\overline{QM} = \frac{1}{3}\overline{DM}$.



Pelo caso de semelhança de triângulos LAL, os triângulos ΔDCM e ΔQPM são semelhantes. Logo:

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{QP}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{PM}} \Longrightarrow \frac{L}{l} = \frac{\overline{CM}}{\frac{1}{3}\overline{CM}} \Longrightarrow l = \frac{1}{3}L.$$

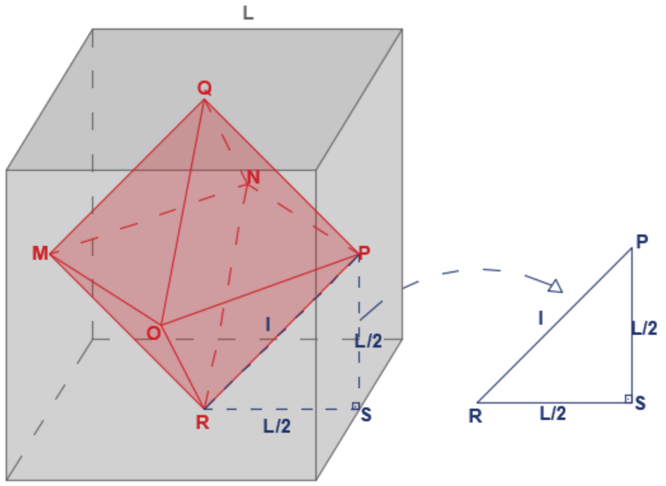
Dessa maneira, para construir o Tetraedro Regular e seu dual, são necessários dois Tetraedros Regulares: um (o Tetraedro original) com aresta L e o outro (o dual) com aresta l. Nesse caso, l tem um terço da medida de L.

Hexaedro Regular e seu dual

A segunda dedução que faremos é a relação entre a medida da aresta do Hexaedro Regular e do seu dual. Iniciamos considerando o Hexaedro Regular de aresta L. Recordamos que o Hexaedro Regular tem suas faces formadas por quadrados.

Consideramos o triângulo retângulo ΔPRS, destacado na figura, em que S é o ponto médio de uma aresta do Hexaedro. Nesse caso, os catetos medem $L/2$e a hipotenusa mede l. Pelo Teorema de Pitágoras, temos que:

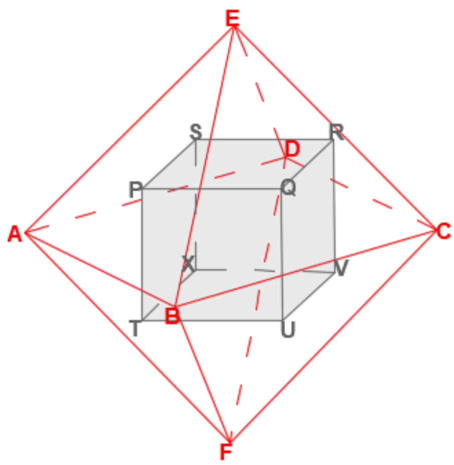
$$l^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 \Longrightarrow l = \sqrt{\frac{L^2}{4} + \frac{L^2}{4}} \Longrightarrow l = \sqrt{\frac{2L^2}{4}} \Longrightarrow l = \frac{L\sqrt{2}}{2}$$



Dessa maneira, para construir o Hexaedro Regular e seu dual, é necessário um Hexaedro Regular com aresta L e um Octaedro Regular com aresta $l = \frac{L\sqrt{2}}{2}$.

Octaedro Regular e seu dual

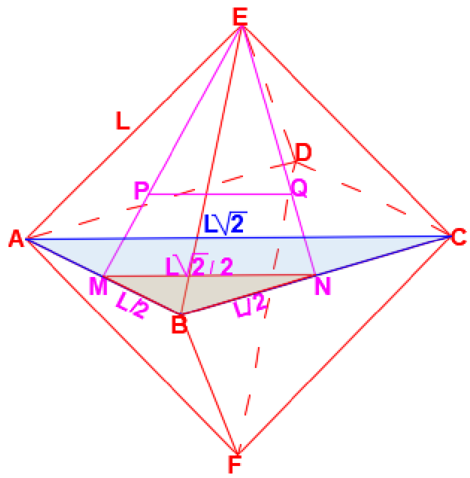
A terceira dedução que realizamos é a relação entre a aresta L do Octaedro Regular e a aresta l do seu Dual, o Hexaedro Regular. Observamos que o Octaedro Regular possui as suas faces formadas por triângulos equiláteros. Dessa forma, o centro de cada face coincide com o baricentro. Denotamos o ponto central de cada face por P, Q, R, S, T, U, V e X, conforme a figura a seguir.



O nosso objetivo aqui é escrever a medida de $\overline{PQ}$ em função de L. Para isso, construímos algumas relações que nos auxiliam nesse objetivo.

Iniciamos observando que ABCD é um quadrado com seu lado medindo L.

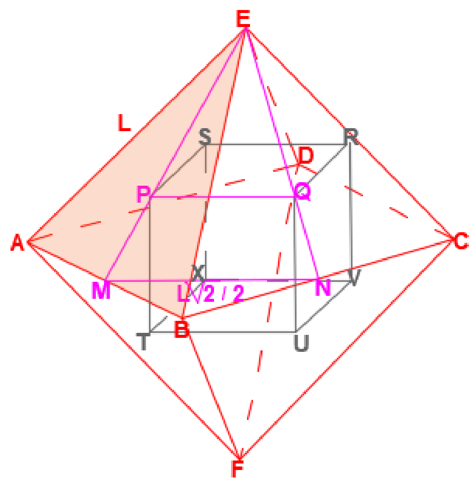
Seja M o ponto médio de $\overline{AB}$ e N o ponto médio de $\overline{BC}$, vamos escrever a medida de $\overline{MN}$ em função de L.



Os triângulos ΔABC e ΔMBN são semelhantes pelo caso de semelhança de triângulos LAL. Portanto,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{MN}} \Longrightarrow \frac{L}{\frac{L}{2}} = \frac{L\sqrt{2}}{\overline{MN}} \Longrightarrow \overline{MN} \cdot L = \frac{L}{2} \cdot L\sqrt{2} \Longrightarrow \overline{MN} = \frac{L\sqrt{2}}{2}.$$

Como P é o baricentro do triângulo equilátero ΔABE e Q é o baricentro do triângulo equilátero ΔBCE, então $\overline{EP} = 2\overline{PM}$ e $\overline{EQ} = 2\overline{QN}$. Equivalentemente, $\overline{EP} = \frac{2}{3}\overline{EM}$ e $\overline{EQ} = \frac{2}{3}\overline{EN}$. Logo, pelo caso de semelhança de triângulos LAL, os triângulos ΔPEQ e ΔMEN são semelhantes.



Agora vamos escrever a medida de $\overline{EM}$ em função de L.

Como o triângulo ΔABE é equilátero, e M é ponto médio de $\overline{AB}$, então o triângulo ΔAME é retângulo. Pelo Teorema de Pitágoras temos que:

$$(\overline{EA})^2 = (\overline{AM})^2 + (\overline{EM})^2 \Longrightarrow (L)^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + (\overline{EM})^2$$

$$\Longrightarrow (L)^2 = \frac{L^2}{4} + (\overline{EM})^2 \Longrightarrow (\overline{EM})^2 = L^2 - \frac{L^2}{4} \Longrightarrow (\overline{EM})^2 = \frac{4L^2 - L^2}{4}$$

$$\Longrightarrow (\overline{EM})^2 = \frac{3L^2}{4} \Longrightarrow \overline{EM} = \sqrt{\frac{3L^2}{4}} \Longrightarrow \overline{EM} = \frac{L\sqrt{3}}{2}.$$

Para escrevemos a medida de $\overline{EP}$ em função de L, recordamos que $\overline{EP} = \frac{2}{3}\overline{EM}$. Dessa forma:

$$\overline{EP} = \frac{2}{3} \cdot L\frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \overline{EP} = \frac{L\sqrt{3}}{3}.$$

Agora que temos as medidas de $\overline{MN}, \overline{EM}$ e $\overline{EP}$ em função de L, vamos usar o fato de que os triângulos ΔPEQ e ΔMEN são semelhantes para escrever a medida de $\overline{PQ}$ em função de L.

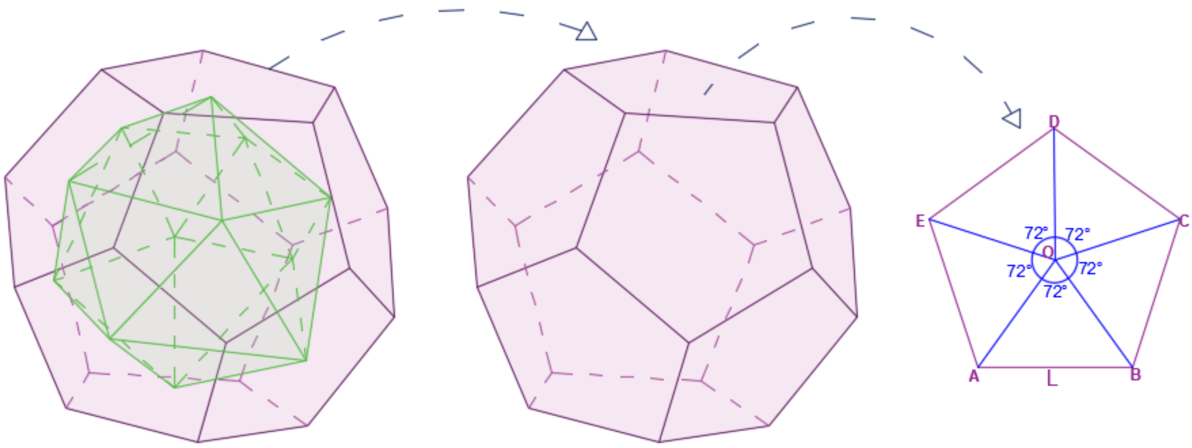
$$\frac{\overline{EM}}{\overline{EP}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{PQ}} \Longrightarrow \frac{\frac{L\sqrt{3}}{2}}{\frac{L\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{L\sqrt{2}}{2}}{\overline{PQ}} \Longrightarrow \overline{PQ} \cdot \frac{L\sqrt{3}}{2} = \frac{L\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{L\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \overline{PQ} = \frac{L\sqrt{2}}{3}.$$

Uma vez que $\overline{PQ} = l$, temos que $l = \frac{L\sqrt{2}}{3}$.

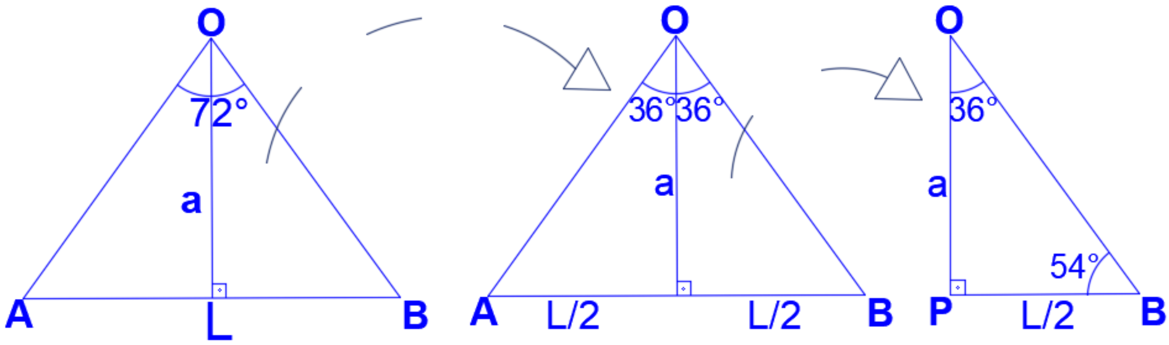
Dessa maneira, para construir o Octaedro Regular e seu dual, é necessário um Octaedro Regular com aresta L e um Hexaedro Regular com aresta $l = \frac{L\sqrt{2}}{3}$.

Dodecaedro Regular e seu dual

A quarta dedução que apresentamos é a relação entre a medida da aresta L do Dodecaedro Regular e a medida da aresta l do seu dual, o Icosaedro Regular. Iniciamos observando uma das faces do Dodecaedro Regular, que é composto por doze pentágonos regulares. Nosso objetivo inicial, será encontrar uma expressão para a medida do apótema a dessa face em função de L. Para tanto, marcamos o centro desse pentágono e o dividimos em cinco triângulos isósceles congruentes entre si.



Agora, vamos considerar o triângulo ΔAOB destacado. Como o pentágono foi dividido em cinco triângulos isósceles congruentes entre si, então o ângulo AÔB mede 72° e está dividido ao meio pelo apótema do pentágono ABCDE, gerando dois triângulos retângulos congruentes. Como no triângulo ΔPOB já temos um ângulo de 36° e um ângulo reto, então o outro ângulo mede 54°.



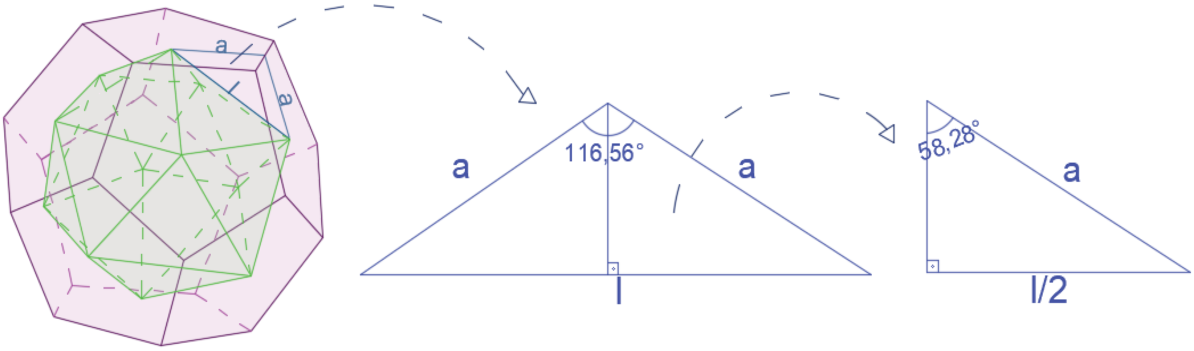
Pelas relações métricas do triângulo retângulo, temos que $tg\ \alpha = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$.

Portanto:

$$tg\ 36° = \frac{\frac{L}{2}}{a} \Longrightarrow tg\ 36° = \frac{L}{2\ a} \Longrightarrow 2a \cdot tg\ 36° = L \Longrightarrow a = \frac{L}{2\ tg\ 36°}.$$

Agora, para escrevermos l em função de L, vamos considerar no Dodecaedro o triângulo destacado na figura a seguir. Esse triângulo possui sua base medindo l e os dois lados congruentes entre si medindo a. Observamos, sem demonstrar, que o ângulo diédrico [11]do Dodecaedro mede $arc\cos\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) \cong 116{,}56°$. Traçamos a altura relativa ao lado que mede l nesse triângulo, obtendo dois triângulos retângulos congruentes, como na imagem que segue.

[11] O ângulo diédrico de um poliedro é o ângulo interno formado por duas de suas faces. Em um Poliedro Regular, todos os ângulos diédricos são congruentes.



Pelas relações métricas do triângulo retângulo, temos que $sen\ \alpha = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$. Assim,

$$sen\ 58{,}28° = \frac{\frac{l}{2}}{a} \implies sen\ 58{,}28° = \frac{l}{2\ a} \implies l = (2a) \cdot sen\ 58{,}28°.$$

Uma vez que $a = \frac{L}{2\ tg\ 36°}$, temos:

$$l = 2 \cdot \frac{L}{2\ tg\ 36°} \cdot sen\ 58{,}28° \implies l = \frac{L}{tg\ 36°} \cdot sen\ 58{,}28° \implies l \cong 1{,}17L.$$

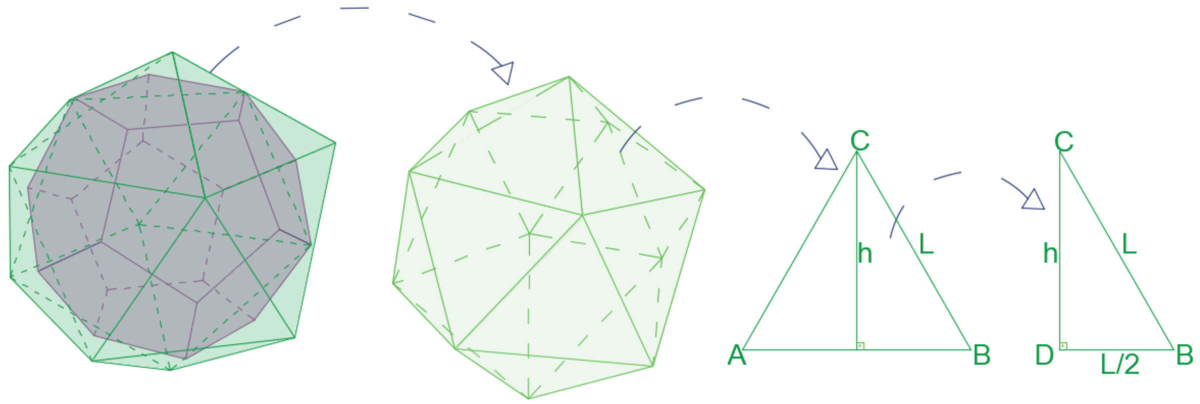
Logo, para construir o Dodecaedro Regular e o seu dual, é necessário um Dodecaedro Regular com aresta L e um Icosaedro Regular com aresta $l \cong 1{,}17L$.

Icosaedro Regular e seu dual

A última construção que apresentamos é a relação entre a aresta L do Icosaedro Regular e a aresta l do seu dual, o Dodecaedro Regular. Lembramos que o Icosaedro Regular possui as suas faces formadas por vinte triângulos equiláteros de forma que o centro de cada face coincide com o baricentro. Além disso, em um triângulo equilátero, as medianas coincidem com as alturas.

Iniciamos voltando a nossa atenção para uma das faces do Icosaedro Regular para escrevermos uma expressão para a altura dessa face em função de L. Utilizando propriedades da mediana dessa face, escreveremos uma relação útil para a próxima etapa.

Seja ΔABC uma face do Icosaedro Regular, vamos traçar a altura relativa ao lado $\overline{AB}$ e dividi-lo em dois triângulos retângulos.

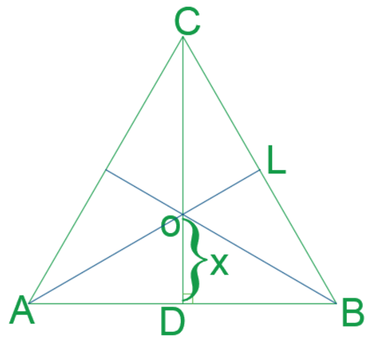


Pelo Teorema de Pitágoras, temos:

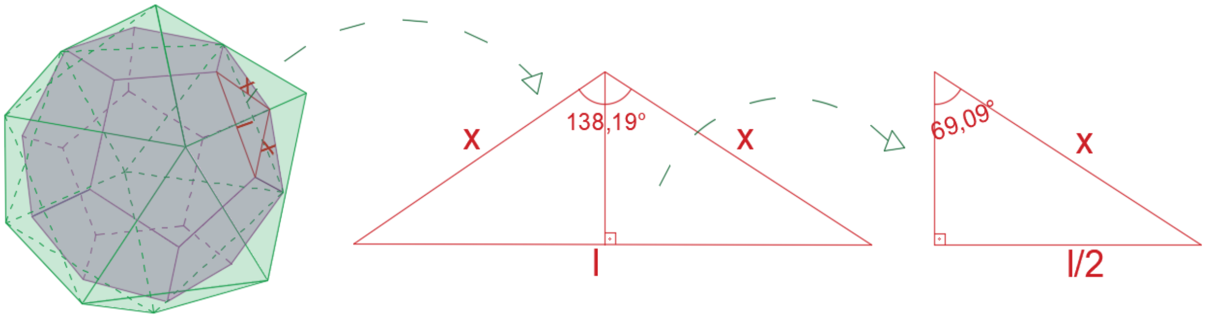
$$(\overline{CB})^2 = (\overline{CD})^2 + (\overline{DB})^2 \implies (L)^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + (h)^2 \implies h = \frac{L\sqrt{3}}{2}.$$

Outra relação que também podemos visualizar no triângulo ΔABC envolve o baricentro. Denotando o baricentro desse triângulo por O, temos que $\overline{CO} = 2 \cdot \overline{OD}$ ou analogamente $\overline{OD} = \frac{1}{3}\overline{CD}$. Denotando $\overline{OD} = x$ e$\overline{CD} = h$, podemos escrever $x = \frac{1}{3}h$. Como $h = \frac{L\sqrt{3}}{2}$, então:

$$x = \frac{1}{3} \cdot \frac{L\sqrt{3}}{2} \implies x = \frac{L\sqrt{3}}{6}.$$



Agora, para escrevermos l em função de L, vamos considerar no Dodecaedro o triângulo destacado na figura que segue. Esse triângulo possui sua base medindo l e os dois lados congruentes entre si medindo x. Observamos, sem demonstrar, que o ângulo diédrico do Icosaedro mede $arc\cos\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \cong 138{,}19°$. Nesse triângulo, traçamos a altura relativa ao lado que mede l, obtendo dois triângulos retângulos congruentes, como na imagem a seguir.



Pelas relações métricas do triângulo retângulo, temos: $sen\ \alpha = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$. Assim:

$$sen\ 69{,}09° = \frac{\frac{l}{2}}{x} \Rightarrow sen\ 69{,}09° = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{L\sqrt{3}}{6}} \Rightarrow sen\ 69{,}09° = \frac{l}{2} \cdot \frac{6}{L\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow sen\ 69{,}09° = \frac{3l}{L\sqrt{3}} \Rightarrow 3l = L\sqrt{3} \cdot sen\ 69{,}09°$$

$$\Rightarrow l = \frac{L\sqrt{3} \cdot sen\ 69{,}09°}{3} \Rightarrow l \cong 0{,}54L.$$

Dessa maneira, para construir o Icosaedro Regular e o seu dual, é necessário um Icosaedro Regular com aresta L e um Dodecaedro Regular com aresta $l \cong 0{,}54L$.

Expressões para o cálculo dos Poliedros Regulares e seus duais

Com o intuito de organizar as construções apresentadas no decorrer do terceiro momento, organizamos um quadro com as expressões deduzidas. As expressões aqui apresentadas serão usadas no quarto momento, quando utilizaremos materiais manipuláveis para construir os Poliedros Regulares e seus duais. O professor pode optar por realizar, em sala de aula, todas as deduções que apresentamos aqui ou escolher algumas delas para desenvolver com seus estudantes. Alternativamente, também pode utilizar a tabela que segue sem realizar as deduções, indo direto para o próximo momento.

Quadro - Expressões para o cálculo das arestas dos Poliedros Regulares e seus duais

Poliedro Original (aresta *L*)	**Poliedro Dual (aresta *l*)**	**Expressão em função da aresta do Poliedro Original**	**Expressão em função da aresta do Poliedro Dual**
Tetraedro Regular	Tetraedro Regular	$l = \frac{1}{3} L$	$L = 3l$
Hexaedro Regular	Octaedro Regular	$l = \frac{L\sqrt{2}}{2}$	$L = l\sqrt{2}$
Octaedro Regular	Hexaedro Regular	$l = \frac{L\sqrt{2}}{3}$	$L = \frac{3l\sqrt{2}}{2}$
Dodecaedro Regular	Icosaedro Regular	$l \cong 1{,}17L$	$L \cong \frac{1}{1{,}17} l$
Icosaedro Regular	Dodecaedro Regular	$l \cong 0{,}54L$	$L \cong \frac{1}{0{,}54} l$

Observamos que escolhemos apresentar as expressões que envolvem o Dodecaedro e o Icosaedro com seus valores aproximados para simplificar a manipulação dessas relações. Uma vez que em aula trabalharemos com materiais manipuláveis e régua, então não teremos prejuízos com as aproximações que adotamos.

4º MOMENTO – CONSTRUÇÃO DOS CINCO POLIEDROS REGULARES E SEUS DUAIS

OBJETIVOS

- ✓ Construir os esqueletos dos cinco tipos de Poliedros Regulares;
- ✓ Montar os Poliedros Regulares e seus duais, utilizando os esqueletos dos Poliedros Regulares que serão construídos nesse momento e os Poliedros Regulares já construídos com polígonos no segundo momento.

CONCEITOS QUE PODEM SER EXPLORADOS COM A ATIVIDADE

- ✓ Características dos Poliedros Regulares
- ✓ Baricentro de um triângulo

MATERIAIS NECESSÁRIOS

- ✓ Canudos
- ✓ Linha de costura
- ✓ Tesoura
- ✓ Palitos de churrasco
- ✓ Poliedros Regulares construído anteriormente com polígonos

TEMPO DE DURAÇÃO

- ✓ 2 horas/aula para a construção do esqueleto do Tetraedro Regular com seu dual.
- ✓ 2 horas/aula para a construção do esqueleto do Hexaedro Regular com seu dual.
- ✓ 2 horas/aula para a construção do esqueleto do Octaedro Regular com seu dual.
- ✓ 3 horas/aula para a construção do esqueleto do Dodecaedro Regular com seu dual.
- ✓ 2 horas/aula para a construção do esqueleto do Icosaedro Regular com seu dual.

CONSTRUINDO OS POLIEDROS REGULARES E SEUS DUAIS

No quarto momento, vamos utilizar o quadro construído no final do terceiro momento que apresenta as expressões que relacionam a medida da aresta de cada Poliedro Regular com a medida da aresta do seu Poliedro Dual.

Vamos construir agora os esqueletos[12] dos Poliedros Regulares com canudos e linhas para figurarem como os Poliedros originais. Para os Poliedros Duais, vamos aproveitar as construções feitas com polígonos[13] no momento dois. De posse do poliedro e do seu dual, faremos a união deles utilizando linhas de costura. Após fazermos construções com diferentes materiais manipuláveis, percebemos que construir o Poliedro original no modelo esqueleto e o dual no modelo casca favorece a visualização das relações existentes entre eles. Também percebemos que é conveniente utilizar uma linha com uma espessura semelhante à de um barbante para a construção do modelo casca, uma vez que linhas finas podem danificar a estrutura do canudo.

Uma dica é utilizar o palito de churrasco para servir como agulha e facilitar a passagem da linha. Veja a seguir como construir sua agulha. Faça uma marquinha na ponta do palito e enrole a linha em torno dessa marca. Depois, use fita adesiva para firmar a linha. A figura a seguir traz esses passos.

Outra opção é utilizar uma agulha de costura, mas essa precisa ter um buraco para passar a linha proporcional à espessura da linha escolhida.

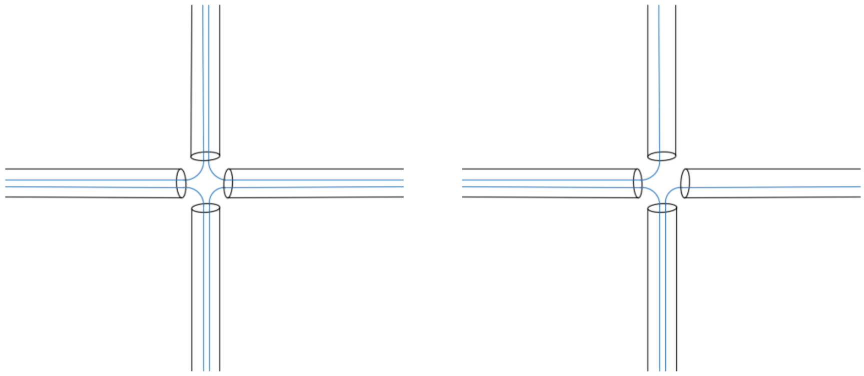
Agora, para realizar a construção dos esqueletos dos poliedros, basta acompanhar os esquemas de montagem a seguir, nos quais é indicado o sentido em que a linha deve passar. Nos esquemas, a flecha azul com um traço (→) indica o sentido em que a linha deve ser inserida num canudo vazio, e a flecha roxa com dois traços (⇒) indica o sentido em que ela dever ser

[12]Segundo o site Matemática multimídia, no arquivo "Guia do professor", o esqueleto do poliedro é o conjunto de arestas e vértices de um poliedro. Para que o esqueleto se transforme no poliedro, é preciso adicionar-lhe todas as faces. Neste sentido, aqui neste produto educacional, quando nos referimos a algum objeto construído com canudos, vamos utilizar o termo esqueleto do poliedro.
Matemática multimídia: Esqueletos no espaço. Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1013>. Acesso em: 30 de jun. de 2019.

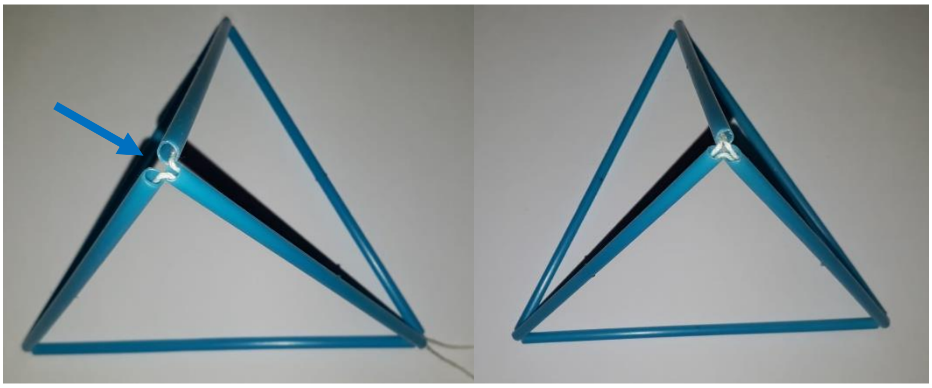
[13] Esse tipo de construção também é conhecido como modelo casca.

inserida num canudo já ocupado por algum pedaço de linha. O número em cima de cada flecha indica a ordem em que a linha deve ser passada pelos canudos.

Ao final das construções das estruturas, é interessante não deixar somente um fio ligando um canudo a outro canudo adjacente. Isso porque, para se dar firmeza aos vértices de uma estrutura com canudos, é necessário que passe o fio de linha mais de uma vez pelo pedaço de canudo, ligando-o aos adjacentes, conforme a figura a seguir.



No primeiro desenho, o vértice está bem firme, pois a linha liga cada canudo a todos os outros adjacentes. Já no segundo desenho, existem dois canudos adjacentes que ainda não estão ligados por um fio. Nesse caso, basta ir passando o fio até chegar nesses canudos e realizar o acabamento necessário. Veja a figura que segue:



Na primeira imagem, temos canudos adjacentes que precisam ser unidos. A segunda imagem traz a forma correta para que os canudos tenham firmeza. Agora que já temos informações básicas sobre os esqueletos dos poliedros vamos dar início às construções.

Construção do esqueleto do Tetraedro Regular com seu dual[14]

Dica: os esquemas a serem seguidos se encontram em tamanho maior no Apêndice

Para a construção do Tetraedro Regular com seu dual, vamos precisar de dois Tetraedros Regulares como vimos no momento anterior. O Poliedro Dual será o Tetraedro Regular construído anteriormente com polígonos, em que temos que sua aresta mede 5 cm. Logo, para calcularmos a medida da aresta do seu Poliedro original, vamos utilizar a expressão deduzida anteriormente:

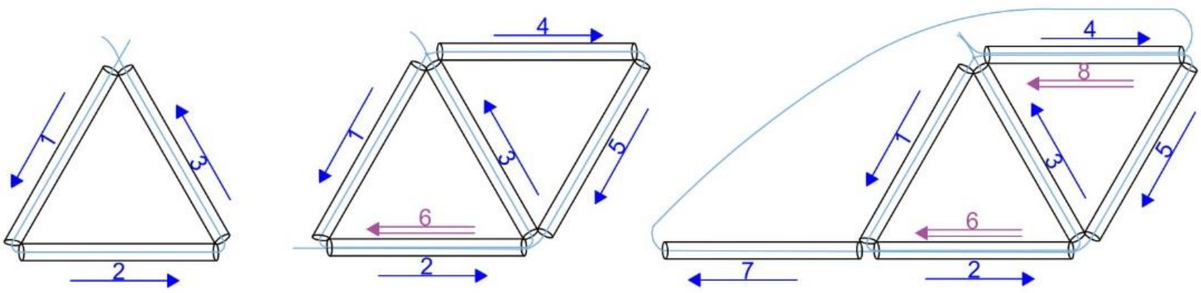
$$L = 3l$$

Substituindo, temos

$$L = 3 \cdot 5$$

$$L = 15cm$$

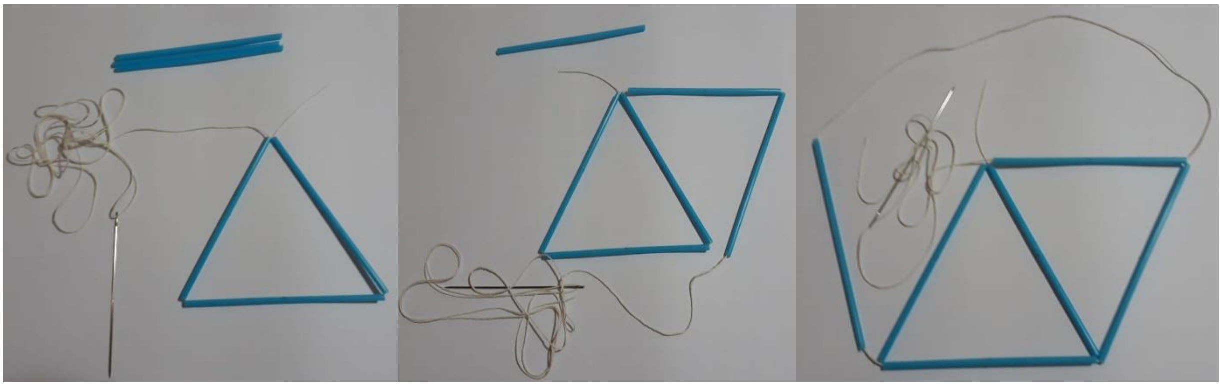
Portanto, a aresta do Poliedro original mede 15 cm. Dessa maneira, vamos precisar de dois metros de linha e seis pedaços de canudo de mesma cor com 15 cm de comprimento. A figura a seguir traz o esquema que deve ser seguido para essa construção.



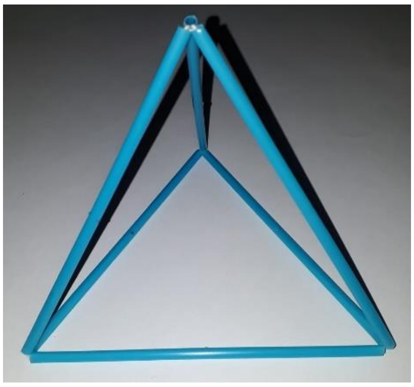
Tome o fio de linha e passe-o através de três pedaços de canudo (passos 1, 2 e 3), construindo um triângulo e fechando-o por meio de um nó. Agora, passe o restante de linha por mais dois pedaços de canudo (passos 4 e 5). Passe a linha novamente pelo canudo do passo 2, formando, assim, mais um triângulo (passo 6). Finalmente, passe a linha por mais um pedaço de canudo (passo 7) e pelo canudo do passo 4 (passo 8). Para melhor ilustrar os passos a serem

[14]Para realizar as construções dos esqueletos dos Poliedros Regulares, foi utilizado o esquema fornecido por Kaleff (2003) e realizadas algumas adaptações.
KALEFF, Ana Maria. **Vendo e entendendo poliedros:** do desenho ao cálculo através de quebra-cabeças e outros materiais concretos. 2. ed. Niterói: Editora UFF, 2003.

seguidos, seguem figuras que representam esses passos.



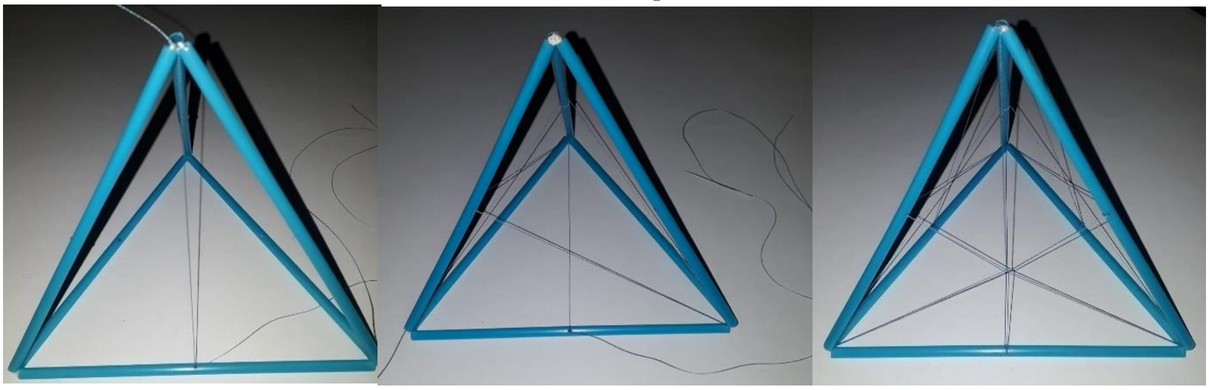
Agora, basta puxar a linha e fechar a estrutura com um nó. A figura que segue traz o esqueleto do Tetraedro construído.



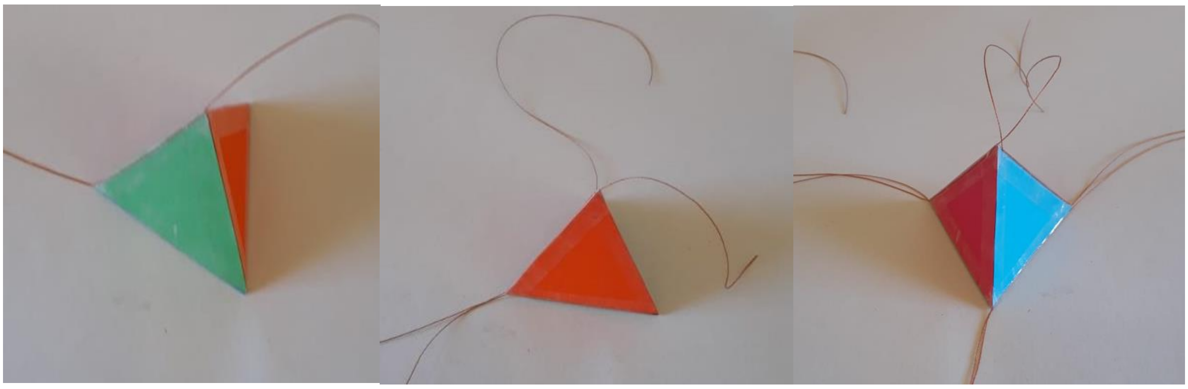
Revise se a estrutura está bem firme, ou seja, se, em todos os vértices, os canudos adjacentes estão ligados. Caso não estejam, utilize um novo pedaço de linha e passe pelos canudos que ainda não estão com seus lados unidos.

Agora que já temos o Poliedro original e o seu dual construídos, vamos uni-los ligando o vértice do Poliedro Dual ao centro da face do Poliedro original. No caso do Tetraedro Regular, como as suas faces são triângulos, então o centro de sua face corresponde ao baricentro que é o ponto de encontro das três medianas (a mediana é o segmento de reta cujas extremidades são o ponto médio de um dos lados e o vértice oposto a esse lado).

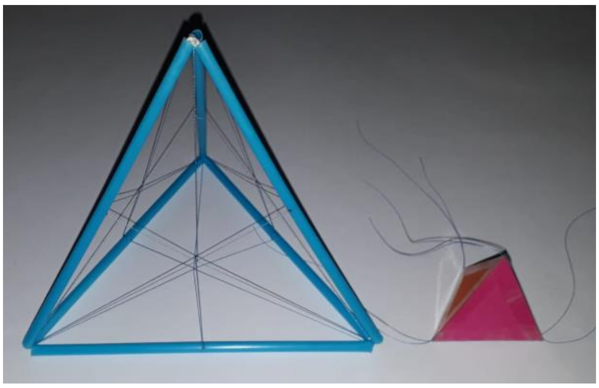
Para construirmos as medianas das faces do Tetraedro, vamos marcar o ponto médio de cada aresta e utilizar linha de costura para demarcá-las, conforme a figura a seguir.



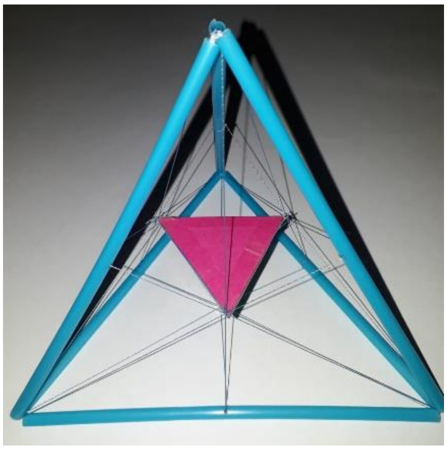
Após traçarmos todas as medianas no Poliedro original, vamos precisar, com o auxílio da fita adesiva, adicionar pedaços de linha de costura no Poliedro Dual, para, assim, conseguir amarrar o Poliedro Dual ao centro da face do Poliedro original. Dessa forma, é preciso passar a fita adesiva em uma das suas arestas, fixando um pedaço da linha de costura. Em seguida, escolha uma aresta adjacente para repetir o processo até que, em todos os vértices do Tetraedro, tenham dois fios. Seguem as figuras ilustrando esses passos.



Agora que já temos dois fios de linha em cada vértice do Tetraedro, é possível amarrar o Poliedro Dual no Poliedro original, obtendo o Tetraedro Regular com seu dual.



Dessa maneira, finalizamos a construção do Tetraedro Regular com seu dual.



Construção do esqueleto do Hexaedro Regular com seu dual

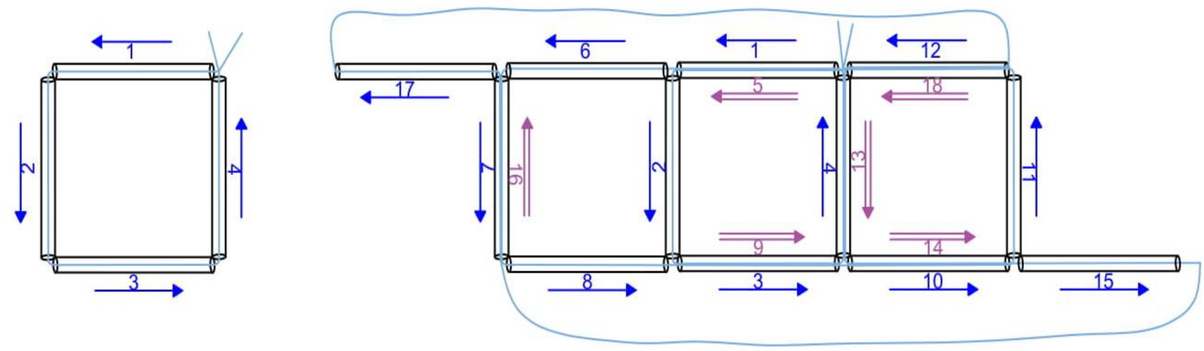
Para a construção do Hexaedro Regular com seu dual, vamos precisar de um Hexaedro Regular para ser o Poliedro original e um Octaedro Regular para ser o Poliedro Dual, como vimos no momento anterior. O Poliedro Dual será o Octaedro Regular construído anteriormente com polígonos, em que temos que sua aresta mede 5 cm. Logo, para calcularmos a medida da aresta do seu Poliedro original, vamos utilizar a expressão deduzida anteriormente:

$$L = l\sqrt{2}$$

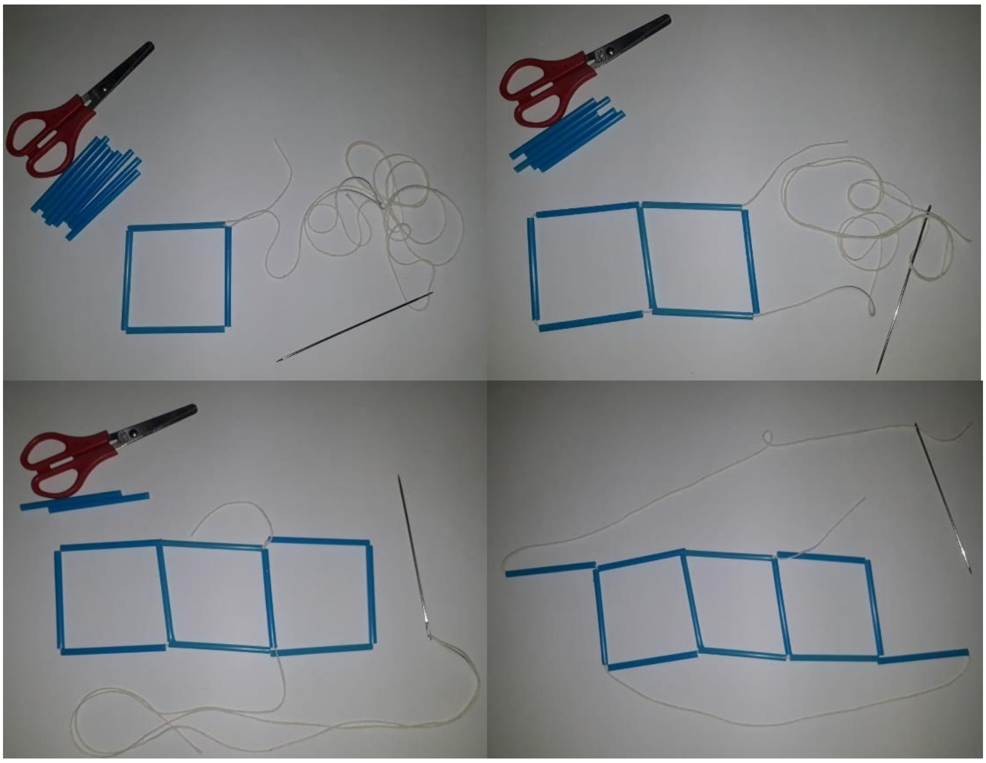
Substituindo, temos

$$L = 5\sqrt{2}$$
$$L \cong 7{,}0710678119cm$$

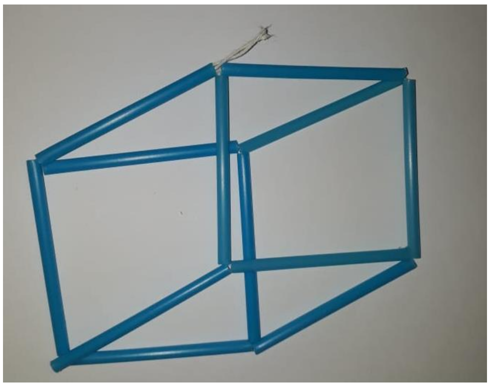
Como estamos trabalhando com régua, tesoura, canudo e papel, podemos arredondar L para 7 cm, uma vez que, por mais precisos que tentemos ser, as medidas cortadas não conseguem expressar exatidão. Dessa maneira, vamos precisar de um metro e meio de linha e doze pedaços de canudo de mesma cor com 7 cm de comprimento. A figura abaixo traz o esquema que deve ser seguido para essa construção.



Pegue o metro e meio de linha e passe a linha por quatro pedaços de canudo (passos 1, 2, 3, e 4), construindo um quadrado e fechando-o por meio de um nó. Agora, passe o restante de linha novamente pelo canudo do passo 1 (passo 5). Passe a linha por mais três pedaços de canudo (passos 6,7 e 8) e retorne pelo canudo do passo 3 (passo 9). Passe a linha por mais três pedaços de canudo (passos 10, 11 e 12) e retorne pelo canudo do passo 4 (passo 13). Retorne pelo canudo do passo 10 (passo 14). Passe a linha por mais um pedaço de canudo (passos 15). Retorne pelo canudo do passo 7 (passo 16). Passe a linha por mais um pedaço de canudo (passos 17). Retorne pelo canudo do passo 12 (passo 18). Para melhor ilustrar os passos a serem seguidos, seguem figuras que representam esses passos.



Agora, basta puxar a linha e fechar a estrutura com um nó. A figura a seguir traz o esqueleto do Hexaedro construído.



Revise se, em todos os vértices, os canudos adjacentes estão ligados. Caso não estejam, utilize um novo pedaço de linha e passe pelos canudos que ainda não estão com seus lados unidos. Ao finalizar essa construção, é possível perceber que o esqueleto construído não permanece em pé sem se deformar. Dizemos que o esqueleto do Hexaedro não é uma estrutura rígida, pois pode ser facilmente achatada.

Atenção professor: é necessário tomarmos alguns cuidados ao prosseguimos com as investigações, pois o esqueleto do Hexaedro não é rígido e não o poliedro em si.

Diante dessa situação, surge a possibilidade de realizarmos alguns questionamentos aos alunos, como, por exemplo:

- Por que o esqueleto do Hexaedro Regular não é uma estrutura rígida?
- Que procedimento seguir para tornar o esqueleto do Hexaedro Regular uma estrutura rígida?

Explorando a rigidez dos poliedros[15]

Vamos discutir o conceito de rigidez, iniciando por sua definição: “dizemos que um objeto é rígido se ele não puder ser deformado continuamente, de modo a se transformar em outro. Um objeto que não é rígido é denominado flexível”. Dizer que um objeto rígido não pode ser deformado continuamente significa dizer que tal objeto não pode ser transformado em outro sem que haja rupturas, ou seja, sem quebrá-lo ou dobrá-lo. Deformar significa “modificar a forma”. Um exemplo de polígono rígido é o triângulo, porque só podemos transformá-lo em outro polígono se rompermos um de seus lados.

O estudo da rigidez de poliedros tem despertado o interesse de muitos matemáticos ao longo da história. Em 1766, o matemático Leonhard Euler formulou a seguinte conjectura sobre a rigidez de poliedros: “Se as faces de um poliedro forem feitas com uma chapa de metal e as arestas substituídas por dobradiças, o poliedro será rígido.”

Em 1813, Cauchy demonstrou que a conjectura de Euler era verdadeira para todos os poliedros convexos. Com o teorema para rigidez de poliedros de Cauchy, temos que: “todo poliedro convexo cujas faces são feitas com uma chapa de metal e cujas arestas são substituídas por dobradiças é rígido”.

Pelo Teorema de Cauchy, sabemos que todos os poliedros convexos são rígidos. Assim, o Hexaedro é rígido. No entanto, durante a construção do seu esqueleto com canudos,

[15]**Matemática multimídia:** Esqueletos no espaço. Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1013>. Acesso em: 30 de jun. de 2019.

observamos um fato que, em primeira análise, parece conflitante com esse resultado matemático: o esqueleto do Hexaedro não é rígido, ou seja, após unir as arestas e os vértices do Hexaedro utilizando canudos e linha, obtemos um objeto flexível.

Isso acontece porque existe uma sutil diferença entre o termo esqueleto e o termo poliedro. Um poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos planos, que são denominados faces do poliedro, de forma que: a) cada lado de um desses polígonos, denominado aresta, é também lado de um, e apenas um, outro polígono; b) a intersecção de duas faces quaisquer ou é vazia, ou é uma aresta comum a duas faces, ou é um vértice do poliedro. Por outro lado, o esqueleto do poliedro consiste apenas no conjunto dos vértices e arestas do poliedro.

Por exemplo, se recortássemos seis quadrados de papel com lados de medidas iguais às arestas do Hexaedro e os colássemos nas faces do esqueleto de maneira a construir um poliedro, produziríamos uma figura rígida, por mais fino que fosse o papel. Assim, não há nada de errado em afirmar que o Hexaedro é um poliedro rígido e que o esqueleto do Hexaedro, construído com canudos e linha, é flexível.

Dessa maneira, embora o recobrimento das faces com papel possa ser uma interessante solução, o desenvolvimento que damos a esse produto é outro. Escolhemos colocar algumas das diagonais de algumas de suas faces, a fim de tornar suas faces rígidas, visto que o Poliedro original precisa ter faces que facilitem a visualização do seu dual.

Assim, como consequência imediata do Teorema de Cauchy, podemos enunciar o seguinte corolário: “todo esqueleto convexo no espaço cujas faces são rígidas é rígido”. Além disso, “a rigidez das faces do esqueleto convexo implica na rigidez do poliedro. Como o esqueleto é convexo e rígido, então o poliedro é rígido”.

Após discutimos esses conceitos, já podemos dar sequência à construção do esqueleto do Hexaedro Regular, pois percebemos que uma alternativa para tornar o esqueleto do Hexaedro uma estrutura rígida é tornar suas faces estruturas rígidas. Assim, acrescentar algumas das diagonais das faces do Hexaedro é uma solução.

Para obter a medida da diagonal da face do Hexaedro (que é um quadrado), vamos utilizar a expressão para a diagonal do quadrado. Dessa forma, temos que:

$$d = L\sqrt{2}$$

Onde,

$d = diagonal\ do\ quadrado$

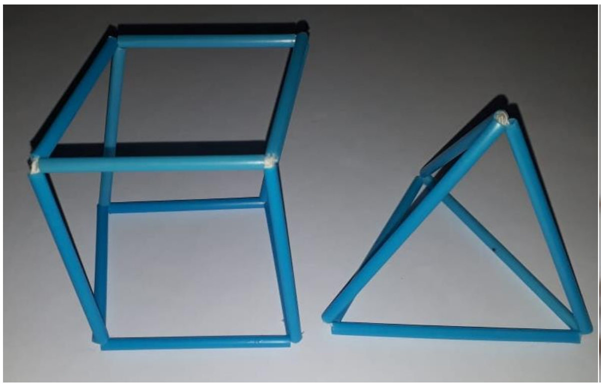
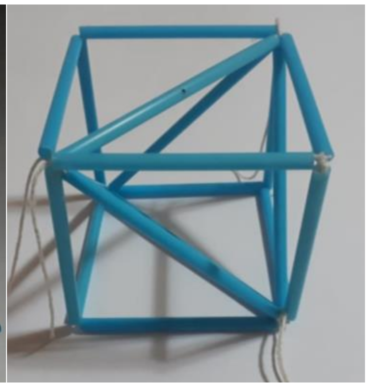
$L = aresta\ da\ face\ do\ quadrado$

Substituindo, temos

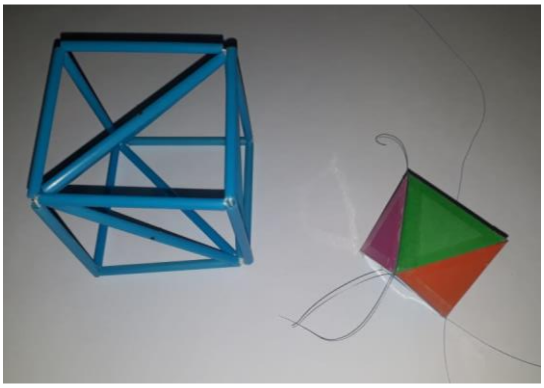
$$d = 7\sqrt{2}$$

$$d = 9{,}8994949366cm$$

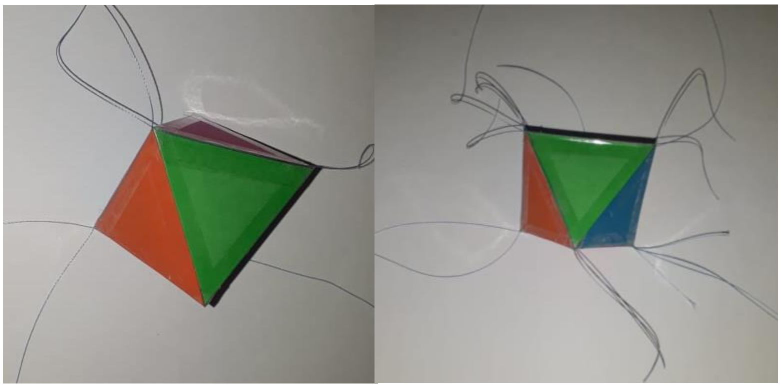
Assim, escolhemos utilizar o arredondamento para 9,8cm. É importante perceber que, dependendo da espessura do canudo, podem ser necessários alguns ajustes. Foram colocadas as seis diagonais (note que, dependendo da forma como as diagonais são empregadas, elas formam um Tetraedro, portanto, optamos por construir o Tetraedro separado e depois amarrar os seus vértices nos vértices do Hexaedro). A figura a seguir traz o esqueleto do Hexaedro Regular e do Tetraedro que formarão as diagonais das faces do Hexaedro.

Agora que já temos o Poliedro original e o seu dual construídos, vamos uni-los ligando o vértice do Poliedro Dual ao centro da face do Poliedro original, conforme a figura que segue.



Como no Hexaedro Regular as suas faces são quadradas e o centro da face coincide com o ponto médio da diagonal, basta amarrar o Octaedro Regular no ponto médio das diagonais. Para conseguir amarrar, vamos precisar colocar, no Octaedro construído com polígonos, dois pedaços de linha em cada vértice. Devemos colocar essa linha repetindo o mesmo procedimento que realizamos com o dual do Tetraedro Regular. Veja a figura a seguir.



Dessa maneira, finalizamos a construção do Hexaedro Regular com seu dual.

Construção do esqueleto do Octaedro Regular com seu dual

Para a construção do Octaedro Regular com seu dual, vamos precisar de um Octaedro Regular para ser o Poliedro original e um Hexaedro Regular para ser o Poliedro Dual, como vimos no momento anterior. O Poliedro Dual será o Hexaedro Regular construído anteriormente com polígonos, em que temos que sua aresta mede 4 cm. Logo, para calcularmos a medida da aresta do seu Poliedro original, vamos utilizar a expressão deduzida anteriormente:

$$L = \frac{3l\sqrt{2}}{2}$$

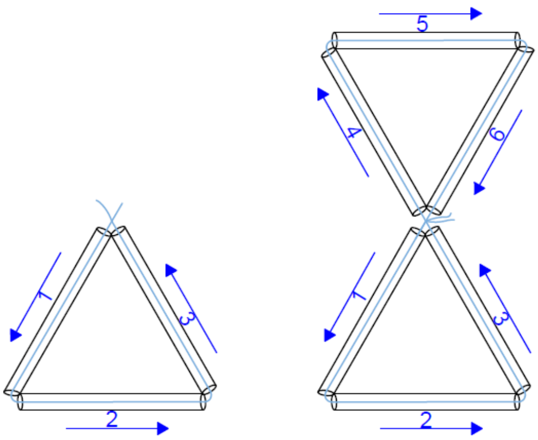
Substituindo, temos

$$L = \frac{3 \cdot 4\sqrt{2}}{2}$$

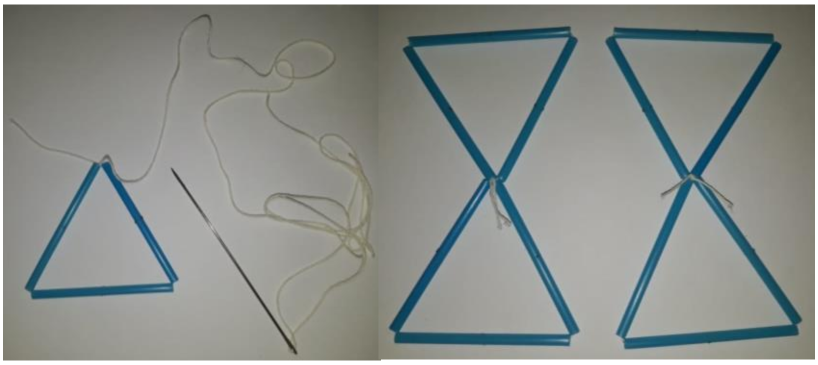
$$L = \frac{12\sqrt{2}}{2}$$

$$L = 8{,}4852813742cm$$

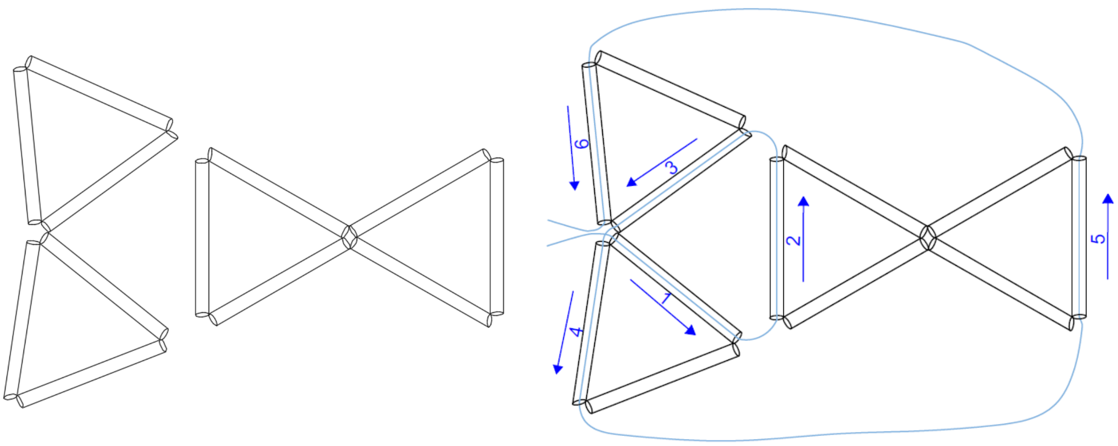
Escolhemos arredondar para 8,4 cm, em função de estarmos trabalhando com materiais manipuláveis. Assim, a aresta do Poliedro original medirá 8,4 cm. Dessa maneira, vamos precisar de dois metros de linha e doze pedaços de canudo de mesma cor com 8,4cm de comprimento. A figura que segue traz o esquema que deve ser seguido para essa construção.



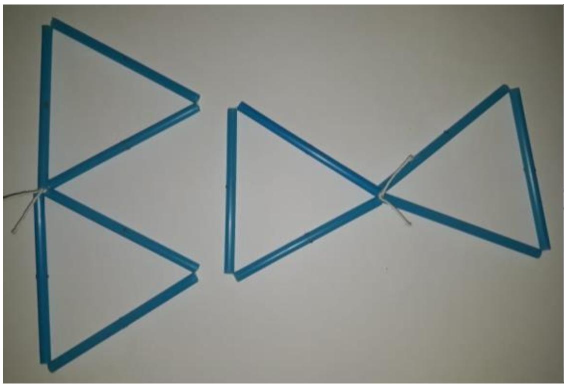
Na primeira etapa do esquema, vamos usar um metro de linha e seis canudos. Passe a linha através de três pedaços de canudo (passos 1, 2 e 3), construindo um triângulo e fechando-o por meio de um nó. Agora, passe o restante de linha por mais três pedaços de canudo (passos 4, 5 e 6), fechando-o por meio de outro nó. Dessa forma, obtemos dois triângulos. Repita esse processo. Para melhor ilustrar os passos a serem seguidos, seguem as figuras a seguir.

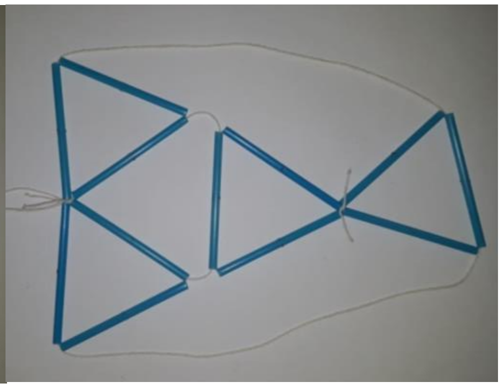


Os próximos passos devem ser realizados conforme esquema que segue.

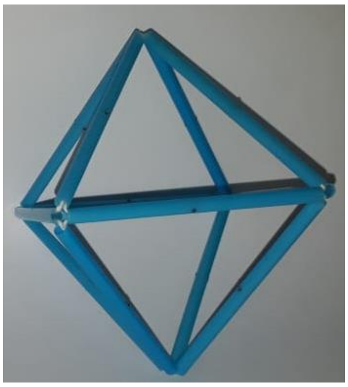


Com o restante da linha, vamos finalizar nosso poliedro. Organize os triângulos para que fiquem conforme o primeiro desenho da figura apresentada. Passe a linha conforme os passos 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Para melhor ilustrar os passos a serem seguidos, seguem as figuras que representam esses passos.





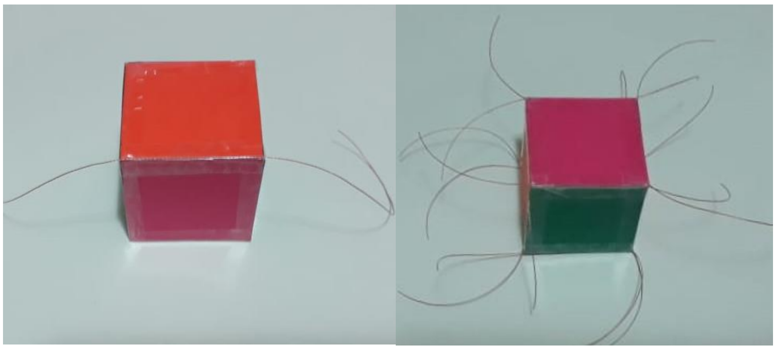
Agora, basta puxar a linha e fechar a estrutura com um nó. A figura a seguir traz o esqueleto do Octaedro pronto.



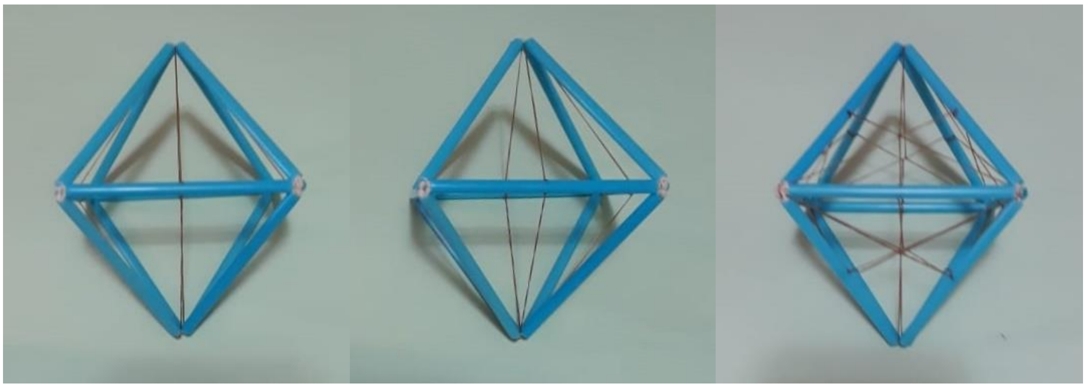
Revise se a estrutura está bem firme, ou seja, se em todos os vértices os canudos adjacentes estão ligados. Caso não estejam, utilize um novo pedaço de linha e passe pelos canudos que ainda não estão com seus lados adjacentes unidos.

Agora que já temos o Poliedro original e o seu dual construídos, vamos uni-los ligando o vértice do Poliedro Dual ao centro da face do Poliedro original. No caso do Octaedro Regular, como as suas faces são triângulos equiláteros, o centro de cada face corresponde ao baricentro, que é o ponto de encontro das três medianas, (a mediana é o segmento de reta cujas extremidades são o ponto médio de um dos lados e o vértice oposto a esse lado).

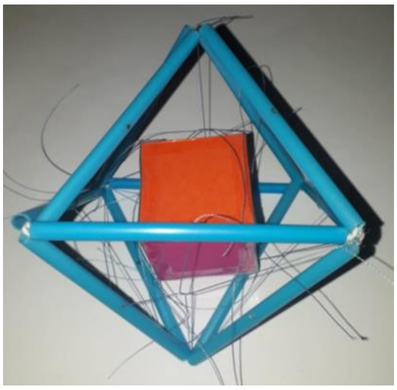
Outra dica importante é com relação a como amarrar o Poliedro Dual ao Poliedro original. Para isso, vamos precisar de fita adesiva e vamos adicionar pedaços de linha de costura no Poliedro Dual, para conseguir amarrá-lo ao centro da face do Poliedro original. Dessa forma, é preciso passar a fita adesiva em uma das suas arestas e depois colocar o pedaço da linha de costura. Em seguida, escolha uma aresta adjacente para repetir o processo até que, em todos os vértices do Hexaedro, se tenha dois fios. Seguem as figuras ilustrando esses passos.



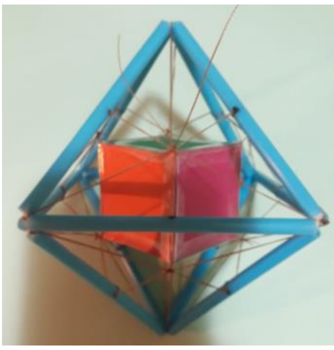
Após adicionar os fios de linha, já podemos retornar ao Poliedro original e traçar suas medianas. Lembrando que, para construirmos as medianas das faces do Octaedro, vamos marcar o ponto médio de cada aresta e utilizar linha de costura para construí-las. Antes de construir as medianas com linha, é preciso colocar o Poliedro Dual na parte interna do Poliedro original, uma vez que, depois das medianas traçadas, não conseguimos mais fazer isso (optamos por construir as medianas sem o Poliedro Dual dentro apenas para ilustrar como ficará o Poliedro original com suas medianas). Seguem as figuras ilustrando esse passo.



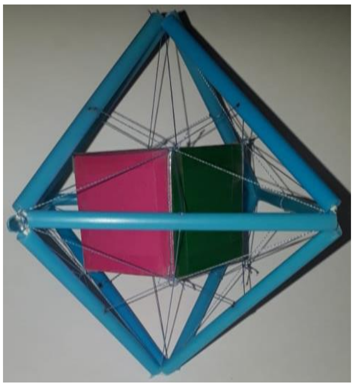
Após ilustrar o Poliedro original com suas medianas, segue a forma correta de começar a construção das medianas.



Após traçarmos todas as medianas no Poliedro original e com o Poliedro Dual já tendo dois fios de linha em cada vértice, vamos amarrar o Poliedro Dual no Poliedro original.



Dessa maneira, finalizamos a construção do Octaedro Regular com seu dual.



Construção do esqueleto do Dodecaedro Regular e seu dual

Para a construção do Dodecaedro Regular com seu dual, vamos precisar de um Dodecaedro Regular para ser o Poliedro original e um Icosaedro Regular para ser o Poliedro Dual, como vimos no momento anterior. O Poliedro Dual será o Icosaedro Regular construído anteriormente com polígonos, em que temos que sua aresta mede 5 cm. Logo, para calcularmos a medida da aresta do seu Poliedro original, vamos utilizar a expressão deduzida anteriormente:

$$L \cong \frac{1}{1,17}\, l$$

Substituindo, temos

$$L \cong \frac{1}{1,17} \cdot 5$$

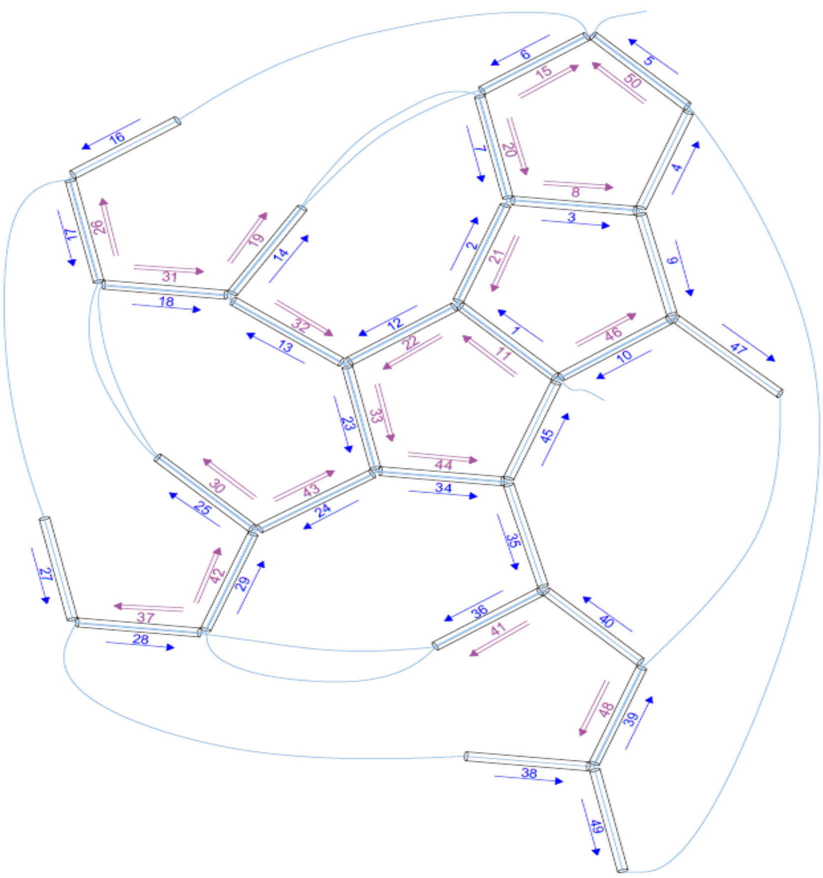
$$L \cong 4,273504274cm$$

Escolhemos arredondar para 4,2 cm, em função de estarmos trabalhando com materiais manipuláveis. Assim, a aresta do Poliedro original medirá 4,2 cm. Dessa maneira, vamos precisar de quatro metros de linha e trinta pedaços de canudo de mesma cor com 4,2 cm de comprimento.

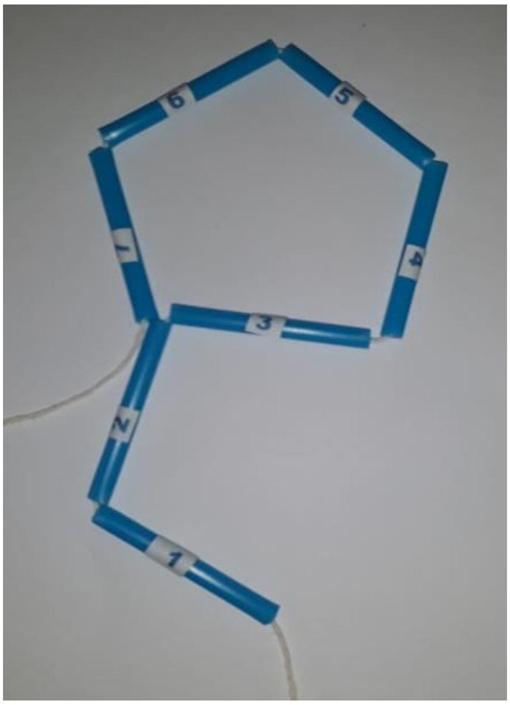
A construção desse esqueleto torna-se bastante trabalhosa em função da quantidade de passos necessários para realizá-la. Para facilitar, sugerimos numerar os canudos conforme for passando a linha por eles. No Apêndice F, encontram-se os números digitados e organizados por cor. Os números que estão em azul são colados em canudos nos quais a linha será passada pela primeira vez. Os números na cor roxa são aqueles que serão colados em canudos que já possuem uma linha. Esse apêndice pode ser impresso em papel adesivo, facilitando a colagem no canudo. Alternativamente, ele pode ser impresso em papel comum e colado no canudo com o auxílio de uma fita adesiva. Segue a figura que se encontra no apêndice.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17
18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45
46 47 48 49 50

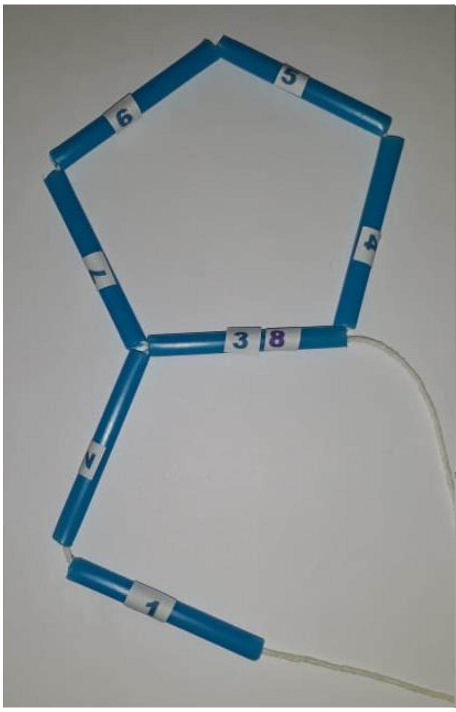
Outra dica é trabalhar com os quatro metros de linha na agulha. Dessa forma, vamos ter linha a mais para conseguir trabalhar com os canudos sempre em cima de um local plano. Coloque um *clips* na ponta inicial da linha para que ela não escape, desmanchando os passos realizados. A figura que segue traz os passos a serem seguidos para a construção do esqueleto do Dodecaedro.

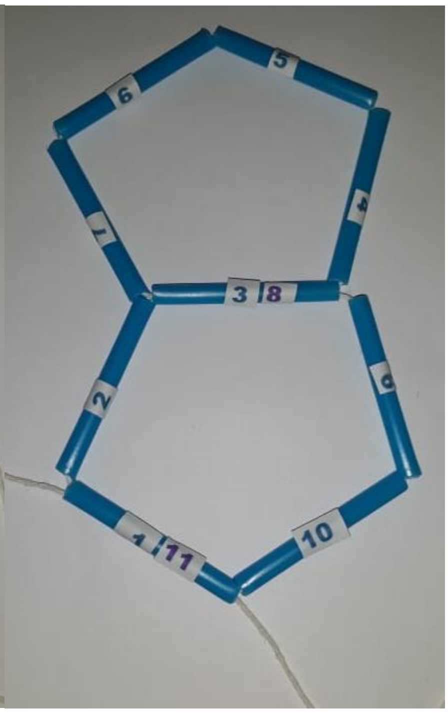


Pegue os quatro metros de linha e passe-os através de sete pedaços de canudo (passos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7) e os organize para ficarem sempre na posição que se encontram no esquema. Para melhor ilustrar os passos a serem seguidos, observe a figura a seguir.

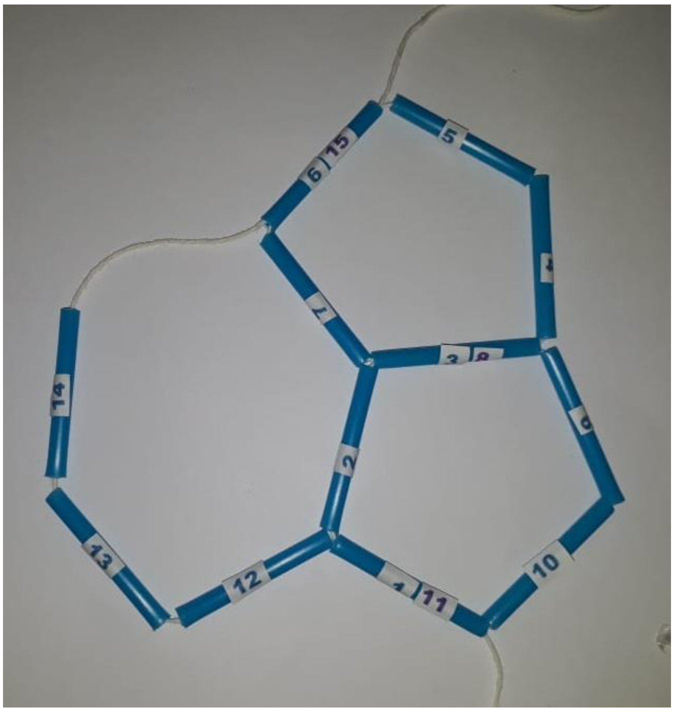


Retorne a linha pelo canudo do passo 3 (passo 8). Passe a linha por mais dois pedaços de canudo (passos 9 e 10) e passe novamente pelo canudo do passo 1 (passo 11). Seguem as figuras ilustrando esses passos.

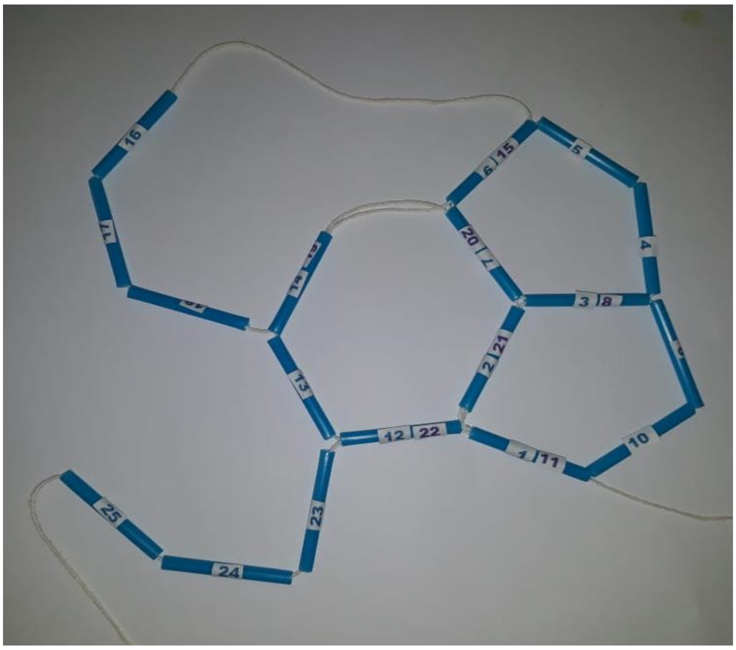




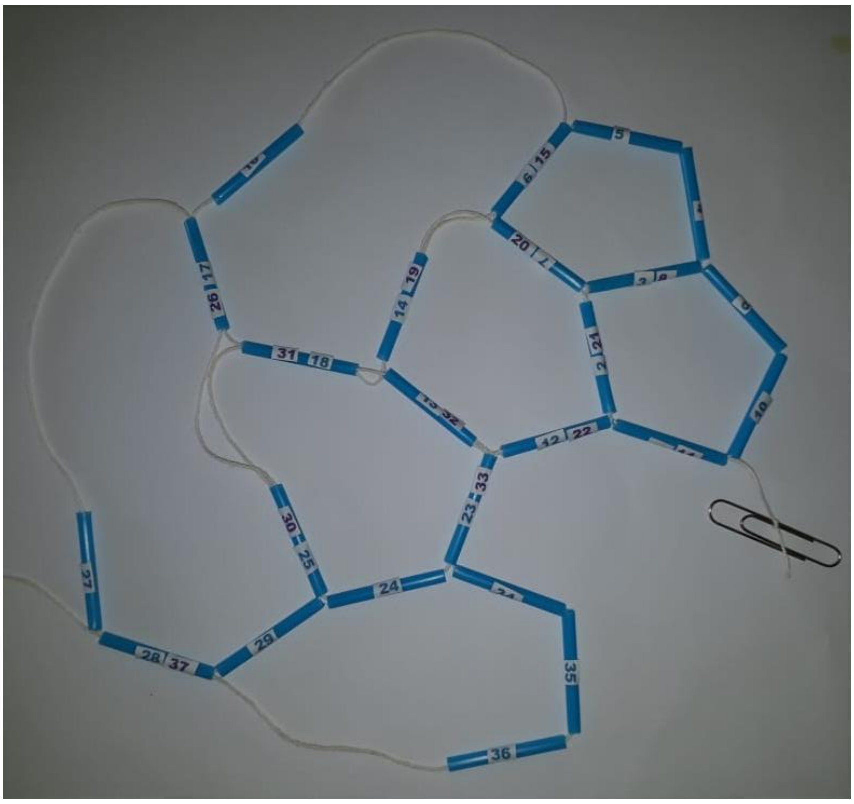
Passe a linha por mais três pedaços de canudo (passos 12, 13 e 14) e retorne pelo canudo do passo 6 (passo 15). Entre o canudo do passo 14 e o canudo do passo 15, deixe sobrando um pedaço de linha, conforme aparece no esquema da montagem. Segue a figura ilustrando esses passos.



Passe a linha por mais três pedaços de canudo (passos 16, 17 e 18) e retorne pelo canudo do passo 14 (passo 19). Retorne novamente pelo canudo do passo 7 (passo 20), pelo canudo do passo 2 (passo 21) e pelo canudo do passo 12 (passo 22). Passe a linha por mais três pedaços de canudo (passos 23, 24 e 25) e retorne pelo canudo do passo 17 (passo 26).

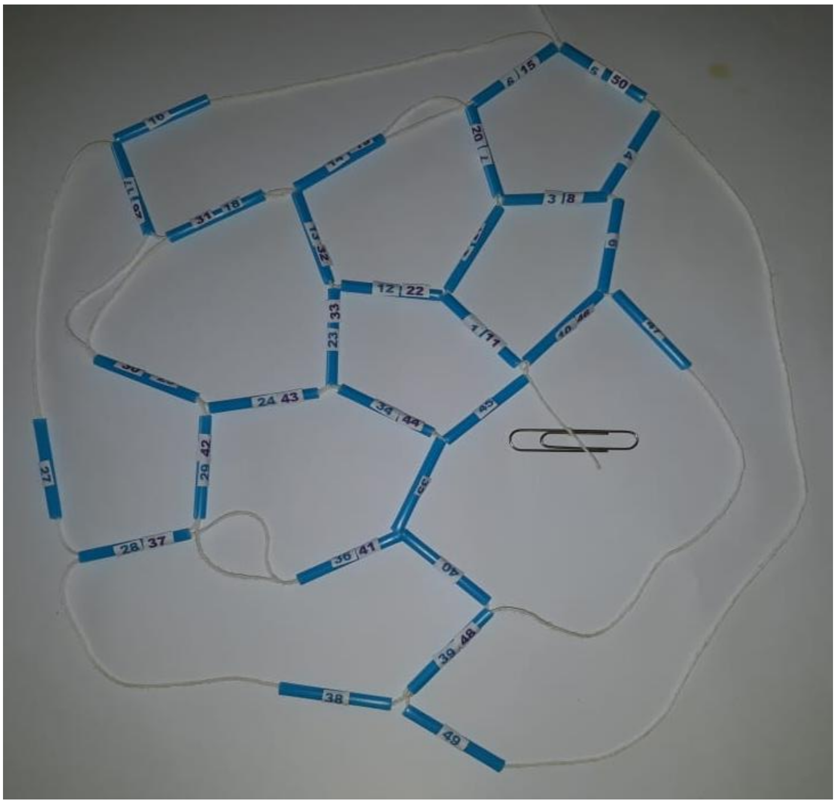


Passe a linha por mais três pedaços de canudo (passos 27, 28 e 29) e retorne pelo canudo do passo 25 (passo 30), retorne novamente pelo canudo do passo 18 (passo 31), pelo canudo do passo 13 (passo 32) e pelo canudo do passo 23 (passo 33). Passe a linha por mais três pedaços de canudo (passos 34, 35 e 36) e retorne pelo canudo do passo 28 (passo 37).



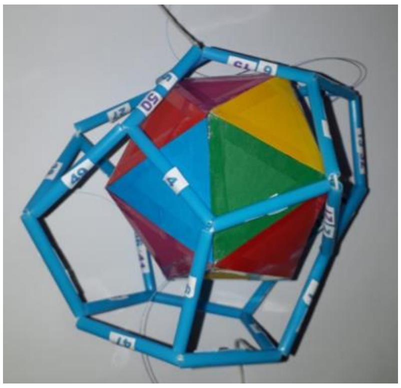
Passe a linha por mais três pedaços de canudo (passos 38, 39 e 40) e retorne pelo canudo do passo 36 (passo 41). Retorne novamente pelo canudo do passo 29 (passo 42), pelo canudo do passo 24 (passo 43) e pelo canudo do passo 34 (passo 44). Passe a linha por mais um pedaço de canudo (passo45) e retorne pelo canudo do passo 10 (passo 46).

Passe a linha por mais um pedaço de canudo (passo 47) e retorne pelo canudo do passo 39 (passo 48). Passe a linha por mais um pedaço de canudo (passo 49) e retorne pelo canudo do passo 5 (passo 50).



Dessa forma, finalizamos os passos do esquema. Agora você deverá puxar a linha, mas antes é necessário colocar o Poliedro Dual dentro do esqueleto do Dodecaedro construído. O dual deverá ter, em dois vértices opostos, dois fios de linhas, para, mais tarde, realizar a união com o Poliedro original. Segue a figura com os fios de linha.

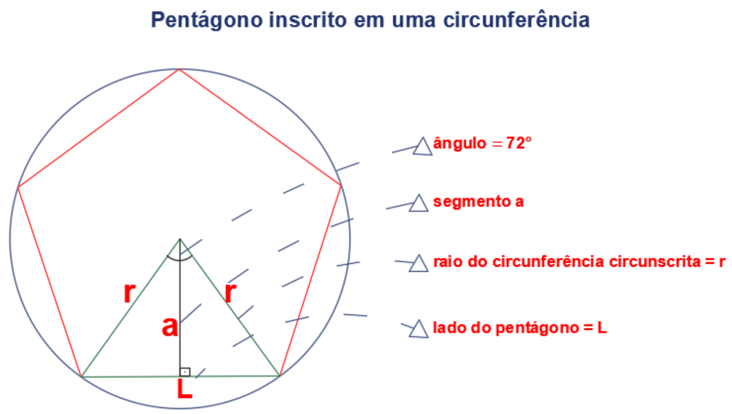
Esse processo requer alguns cuidados, pois são muitos passos e a linha acaba trancando em alguns momentos. Dessa maneira, a sugestão é puxar a linha canudo por canudo do início ao fim. Ao finalizar, você perceberá que a linha do passo 1 não ficou próxima do passo 50. Logo, já aproveite e passe a linha ligando os vértices adjacentes até chegar ao passo 1. Agora que terminamos de puxar a linha, já podemos retirar os adesivos com os números colocados nos canudos. Segue a figura do Dodecaedro Regular com linha já puxada.



Revise se, em todos os vértices, os canudos adjacentes estão ligados. Caso não estejam, utilize um novo pedaço de linha e passe pelos canudos que ainda não estão com seus lados unidos.

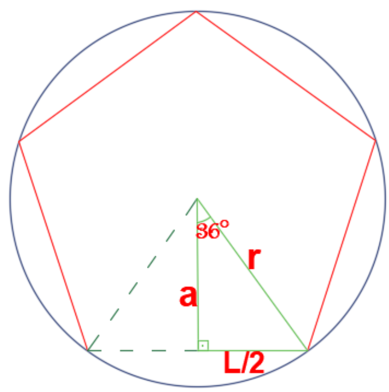
Terminando esse processo, percebemos que o esqueleto do Dodecaedro não é rígido. Já observamos um fato semelhante a esse ao realizar a construção do esqueleto do Hexaedro. Pelo Teorema de Cauchy, sabemos que o Dodecaedro Regular é um poliedro rígido; o que não é rígido é o esqueleto do Dodecaedro Regular. Assim, para tornar o esqueleto do Dodecaedro Regular rígido, escolhemos uma alternativa diferente da encontrada para o Hexaedro, visto que a face do Dodecaedro Regular é um pentágono, e o centro de cada face do Dodecaedro Regular corresponde ao centro da circunferência circunscrita e não ao encontro das diagonais, como no caso do Hexaedro Regular cujas faces são quadrados. Dessa maneira, o caminho encontrado para esse poliedro foi acrescentar miçangas aos vértices do esqueleto Dododecaedro Regular.

Agora que já temos o Poliedro original e o seu dual construídos, vamos uni-los ligando o vértice do Poliedro Dual ao centro da face do Poliedro original. Vamos acrescentar dois pedaços de canudos que correspondem à altura da face. Para obter a medida da altura da face do Dodecaedro (que é um pentágono), vamos utilizar as expressões do Pentágono inscrito em uma circunferência. Dessa forma, temos a seguinte figura.



O segmento a coincide com a bissetriz e a mediana do triângulo. Ele divide o ângulo central em dois ângulos iguais, e o lado em duas medidas iguais.

Portanto,



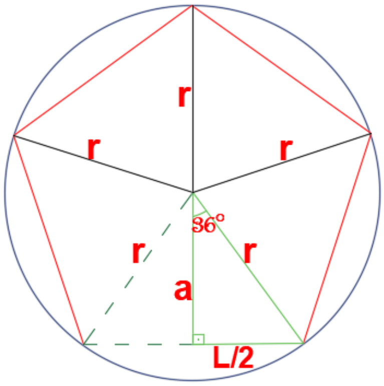
Pelas relações métricas do triângulo retângulo, podemos deduzir a expressão para a medida do segmento a. Temos: $cos\ \alpha = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}$. Assim:

$$cos\ 36° = \frac{a}{r} \Longrightarrow a = r\ cos\ 36°$$

Podemos, também, deduzir a expressão para o raio da circunferência circunscrita. Temos: $sen\ \alpha = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$. Assim:

$$sen\ 36° = \frac{\frac{L}{2}}{r} \Longrightarrow r = \frac{L}{2sen\ 36°}$$

Voltando ao Dodecaedro Regular, temos as seguintes medidas.



Assim,

$$r = \frac{L}{2sen\ 36°} \Longrightarrow r = \frac{4,2}{2sen\ 36°} \Longrightarrow r = 3,572733395cm$$

Logo,

$$a = r\ cos\ 36° \Longrightarrow a = 3,572733395\ \cdot\ cos\ 36° \Longrightarrow a = 2,890402482cm$$

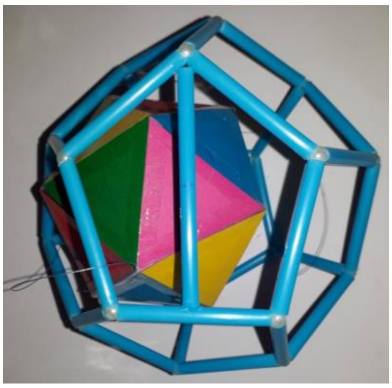
Voltando para a figura anterior, podemos perceber que a medida da altura corresponde à medida do segmento a mais a medida do raio. Assim,

$$altura\ do\ pentágono = a + r$$

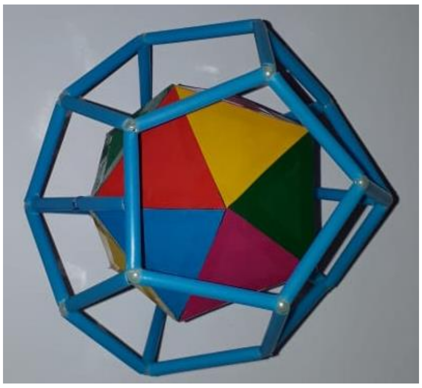
$$altura\ do\ pentágono = 2,890402482 + 3,572733395$$

$$altura\ do\ pentágono = 6,463135877cm$$

Assim, escolhemos utilizar o arredondamento para 6,5cm. É importante perceber que, dependendo da espessura do canudo, podem ser necessários alguns ajustes. Foram colocadas as duas alturas em faces opostas, em que foram amarrados os dois vértices do Icosaedro que adicionamos às linhas no momento anterior. A figura a seguir traz o esqueleto do Dodecaedro Regular com a altura do pentágono já colada no Dodecaedro Regular.



Agora, vamos unir o Poliedro original ao seu dual, amarrando o vértice do Poliedro Dual ao centro da face do Poliedro original que, nesse poliedro, corresponde a uma distância r do vértice. Após marcar essa medida e amarrar o Poliedro Dual, finalizamos a construção do Dodecaedro Regular com seu dual.



Construção do esqueleto do Icosaedro Regular com seu dual

Para a construção do Icosaedro Regular com seu dual, vamos precisar de um Icosaedro Regular para ser o Poliedro original e um Dodecaedro Regular para ser o Poliedro Dual, como vimos no momento anterior. O Poliedro Dual será o Dodecaedro Regular construído anteriormente com polígonos, em que temos que sua aresta mede 3 cm. Logo, para calcularmos a medida da aresta do seu Poliedro original, vamos utilizar a expressão deduzida anteriormente:

$$L \cong \frac{1}{0{,}54}\, l$$

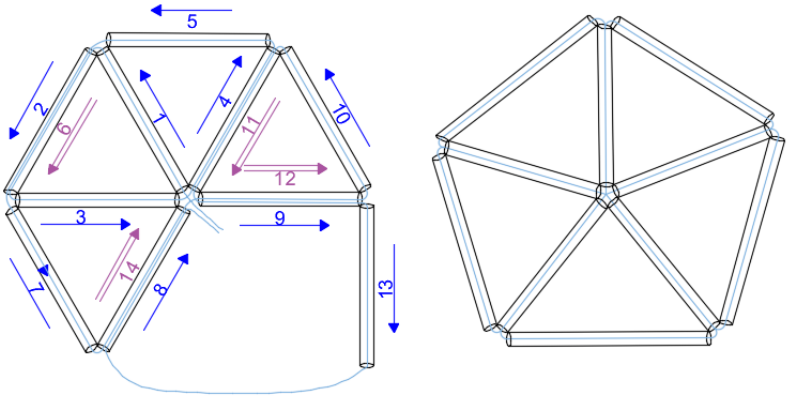
Substituindo, temos

$$L \cong \frac{1}{0{,}54} \cdot 3$$

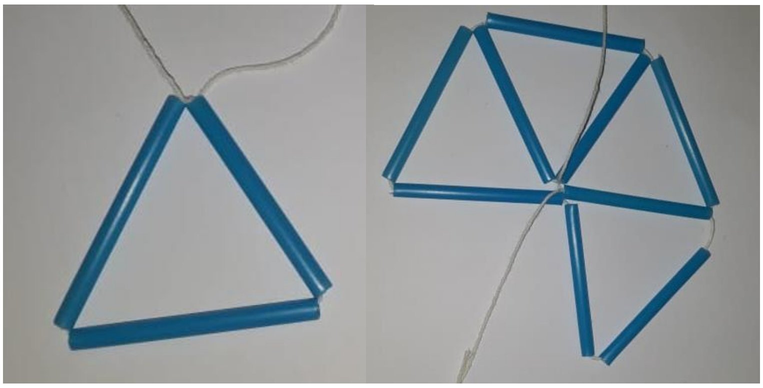
$$L \cong \frac{3}{0{,}54}$$

$$L = 5{,}5555555556\, cm$$

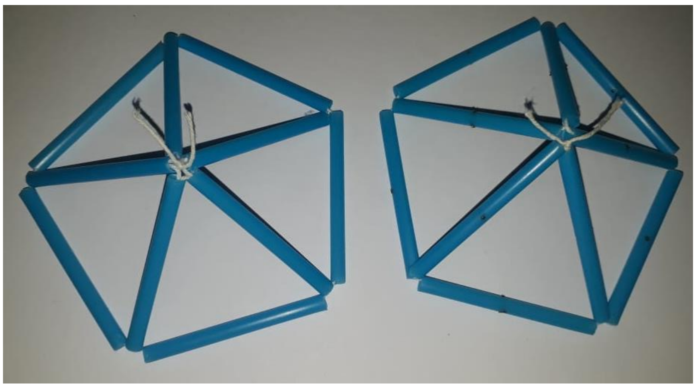
Vamos utilizar um arredondamento para 5,5 cm. Assim, a aresta do Poliedro original medirá 5,5 cm. Dessa maneira, vamos precisar de dois metros e meio de linha e trinta pedaços de canudo de mesma cor e com 5,5 cm de comprimento. A figura a seguir traz os passos a serem seguidos para a construção da primeira etapa do Icosaedro.



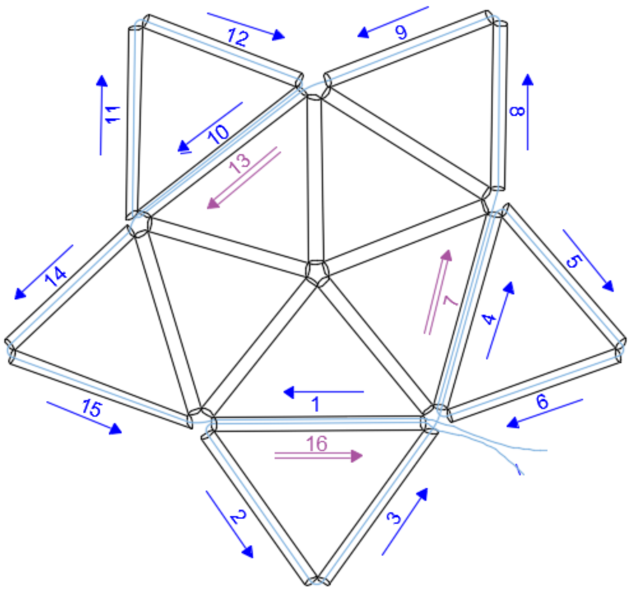
Na primeira etapa do esquema, vamos usar um metro e meio de linha e dez canudos. Passe a linha através de três pedaços de canudo (passos 1, 2 e 3), construindo um triângulo e fechando-o por meio de um nó. Agora, passe o restante de linha por mais dois pedaços de canudo (passos 4 e 5) e passe novamente pelo canudo do passo 2 (passo 6). Passe o restante de linha por mais quatro pedaços de canudo (passos 7, 8, 9 e 10), novamente pelo canudo do passo 4 (passo 11) e pelo canudo do passo 9 (passo 12). Passe o restante de linha por mais um pedaço de canudo (passo 13) e novamente pelo canudo do passo 8 (passo 14), finalizando com um nó. Seguem as figuras ilustrando esses passos.



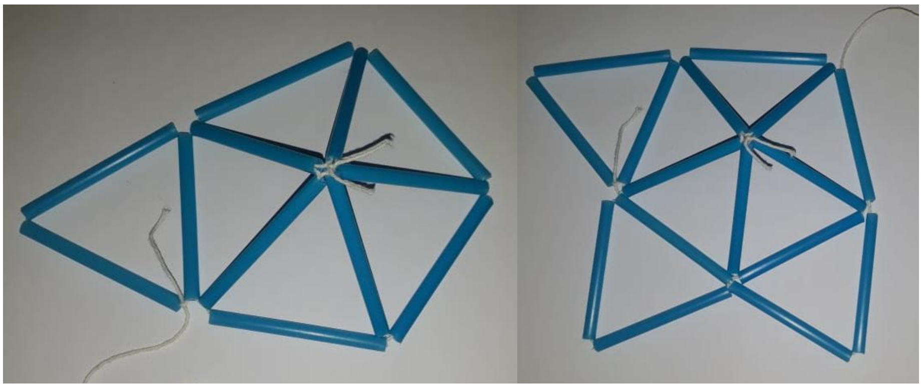
Repita novamente esse processo, pois precisamos de duas pirâmides de base pentagonal como mostra a figura que segue.



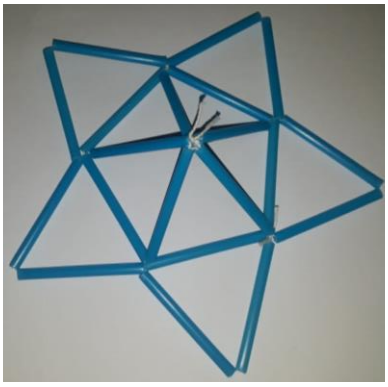
Para a segunda etapa, vamos usar um metro e meio de linha, dez canudos e uma pirâmide pentagonal construída anteriormente. Segue a figura do esquema com a sequência de passos.



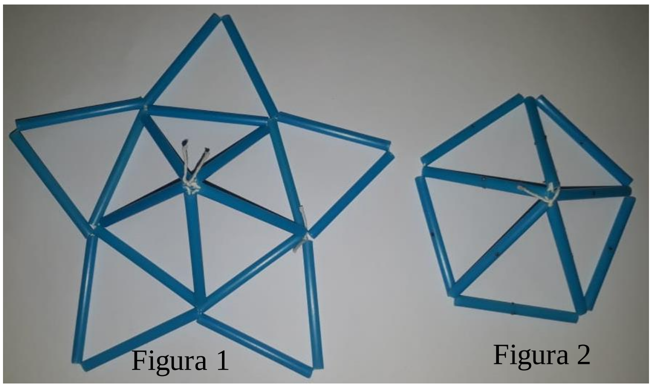
Passe a linha por um dos canudos da pirâmide (passo 1) e, na sequência, passe o restante de linha por mais dois pedaços de canudo (passos 2 e 3). Passe a linha pelo canudo da pirâmide (passo 4), o restante de linha por mais dois pedaços de canudo (passos 5 e 6) e retorne a linha pelo canudo do passo 4 (passo 7). Seguem as figuras ilustrando até o passo 7.



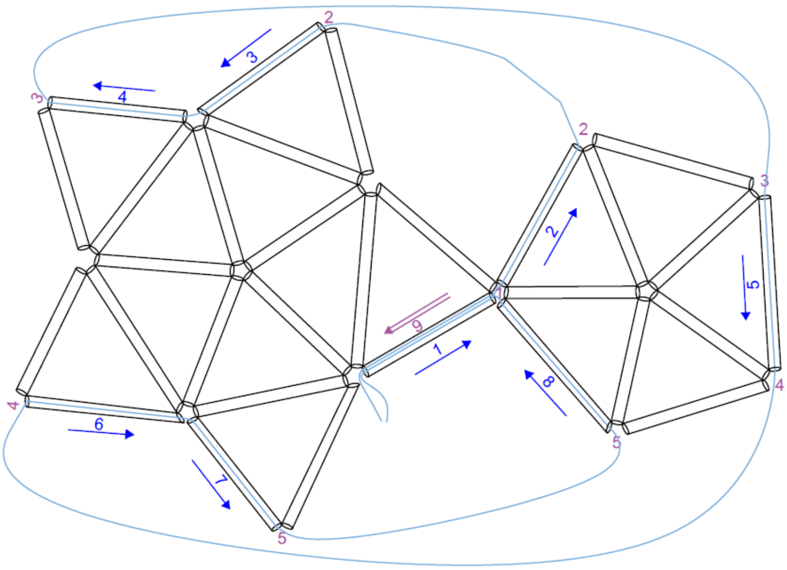
Passe o restante de linha por mais dois pedaços de canudo (passos 8 e 9), retorne a linha pelo canudo da pirâmide (passo 10), passe o restante de linha por mais dois pedaços de canudo (passos 11 e 12) e retorne a linha pelo canudo do passo 10 (passo 13). Passe o restante de linha por mais dois pedaços de canudo (passos 14 e 15), retorne a linha pelo canudo da pirâmide do passo 1 (passo 16) e finalize com um nó. Segue a figura formada.



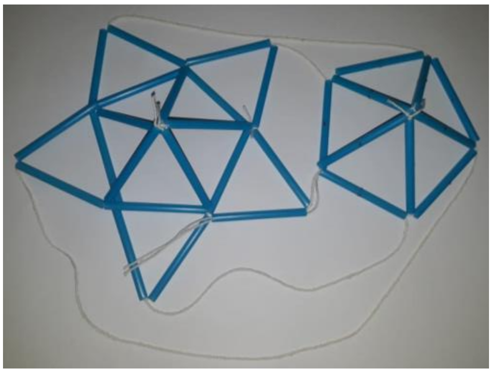
Para a terceira e última etapa, vamos unir a figura construída na segunda etapa, denominada de figura 1, com a outra pirâmide construída na primeira etapa, denominada de figura 2. Segue a imagem da construção.



Para realizar essa união, vamos usar uma linha com comprimento de um metro e meio, pois, utilizando uma linha maior que o necessário, facilita a montagem do esquema (pois conseguimos passar a linha por todos os canudos sem os retirar da superfície em que se encontram). Segue o esquema dessa etapa.



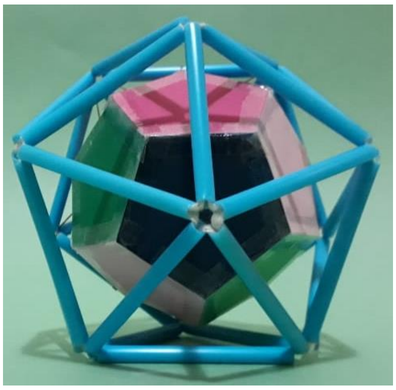
Comece passando a linha por um dos triângulos da figura 1 (passo 1) e, depois, passe pela figura 2 (passo 2). Agora, analisando a figura 1, você deverá deixar dois canudos sem passar a linha e passar pelo próximo canudo, conforme o passo 3 e o próximo canudo conforme o passo 4. Agora, retorne com a linha até a figura 2 e passe a linha conforme passo 5. Volte com a linha para a figura 1 e passe a linha conforme passo 6 e o próximo canudo conforme passo 7. Retorne com a linha até a figura 2 e passe a linha conforme passo 8. Para finalizar, passe a linha na figura 1 conforme passo 9. Antes de puxar a linha por completo e dar um nó, é necessário colocar o Poliedro Dual no seu interior. Segue a figura ilustrando esses passos.



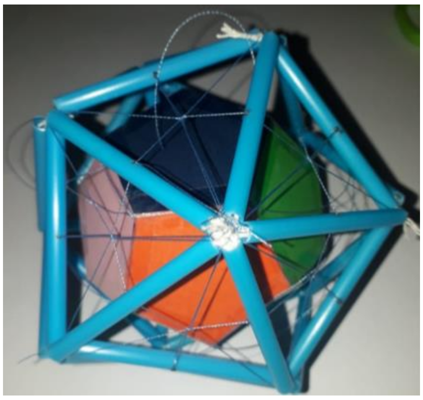
Precisamos acrescentar algumas linhas a alguns vértices do Dodecaedro, assim como fizemos com os Poliedros Duais anteriores. Porém, no Decaedro, utilizamos uma estratégia um pouco diferente. Escolhemos apenas uma das faces e acrescentamos dois fios de linha a todos os vértices da face escolhida, sem repetir esse processo nos demais vértices. Segue a figura ilustrando esse passo.

Após adicionar os fios de linha, já podemos retornar ao Poliedro original e, antes de dar um nó, é preciso colocar o Poliedro Dual na parte interna do Poliedro original, pois, depois de amarrar o esqueleto com canudo, não conseguiremos mais fazer isso. Segue a figura ilustrando esse passo.

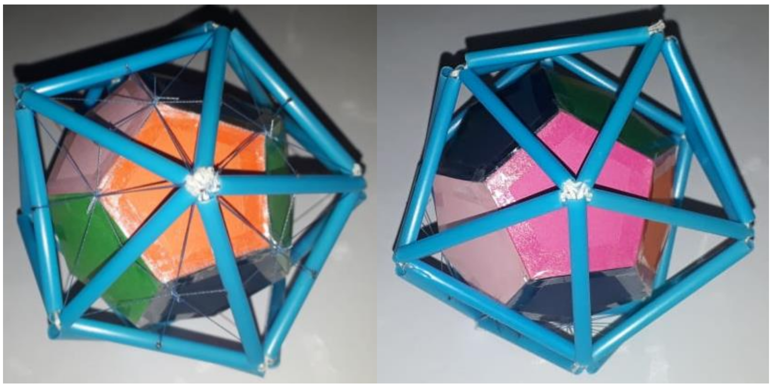
Revise se a estrutura está bem firme, ou seja, se em todos os vértices os canudos adjacentes estão ligados. Caso não estejam, utilize um novo pedaço de linha (sugerimos utilizar uma linha com uma espessura um pouco mais grossa, pois assim dará mais firmeza ao esqueleto do Poliedro) e passe pelos canudos que forem necessários.



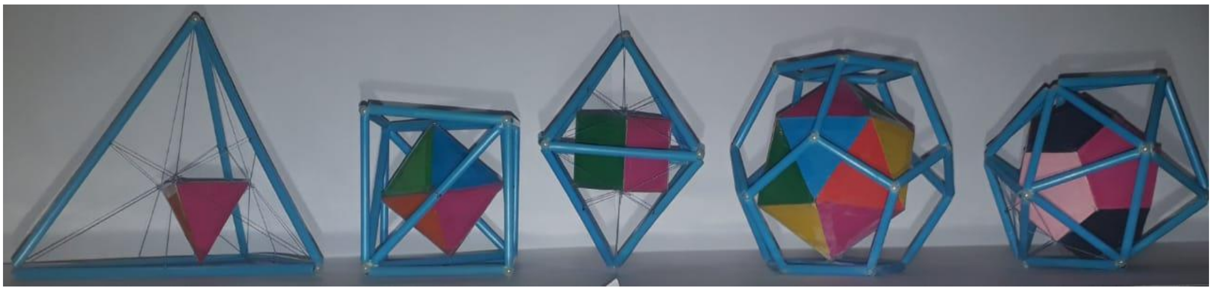
Como o esqueleto do Poliedro original já está com sua estrutura firme e suas faces são triângulos, então, o centro de sua face corresponde ao baricentro, que é o ponto de encontro das três medianas (a mediana é o segmento de reta cuja extremidade é o ponto médio de um dos lados e o vértice oposto a esse lado). Vamos construir o baricentro em pelo menos cinco faces adjacentes. Veja a figura ilustrando essas construções.



Agora, vamos unir o Poliedro original ao seu dual, amarrando o vértice do Poliedro Dual ao centro da face do Poliedro original. Dessa maneira, finalizamos a construção do Icosaedro Regular com seu Dual.

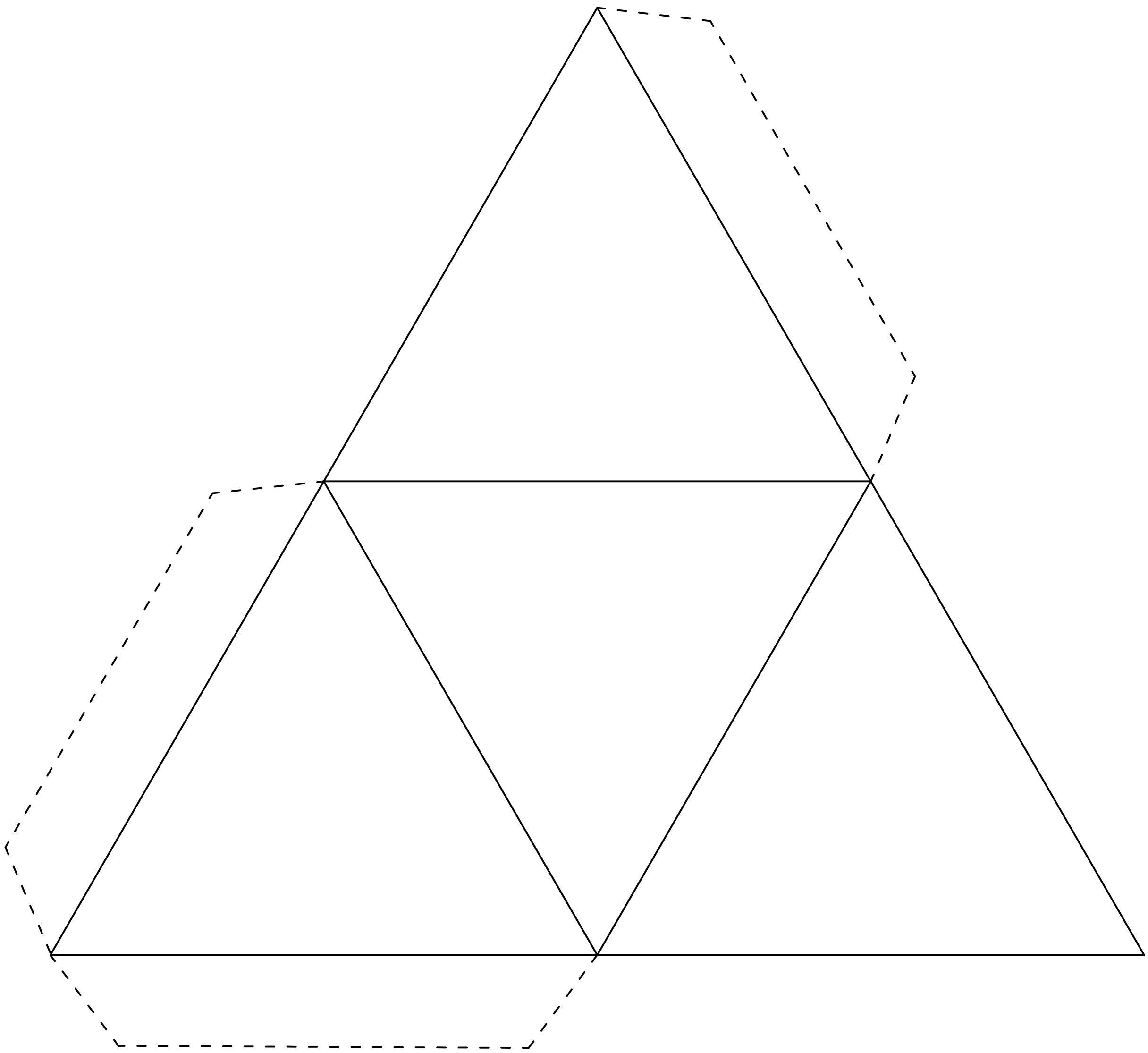


Dessa forma, finalizamos a construção dos cinco Poliedros Regulares com seus duais. Ao concluirmos as construções, optamos por colocar miçangas em todos os vértices dos Poliedros originais, apenas em função da aparência dos poliedros. Logo, os poliedros construídos foram: o Tetraedro Regular, o Octaedro Regular, o Icosaedro Regular, o Hexaedro Regular e o Dodecaedro Regular.

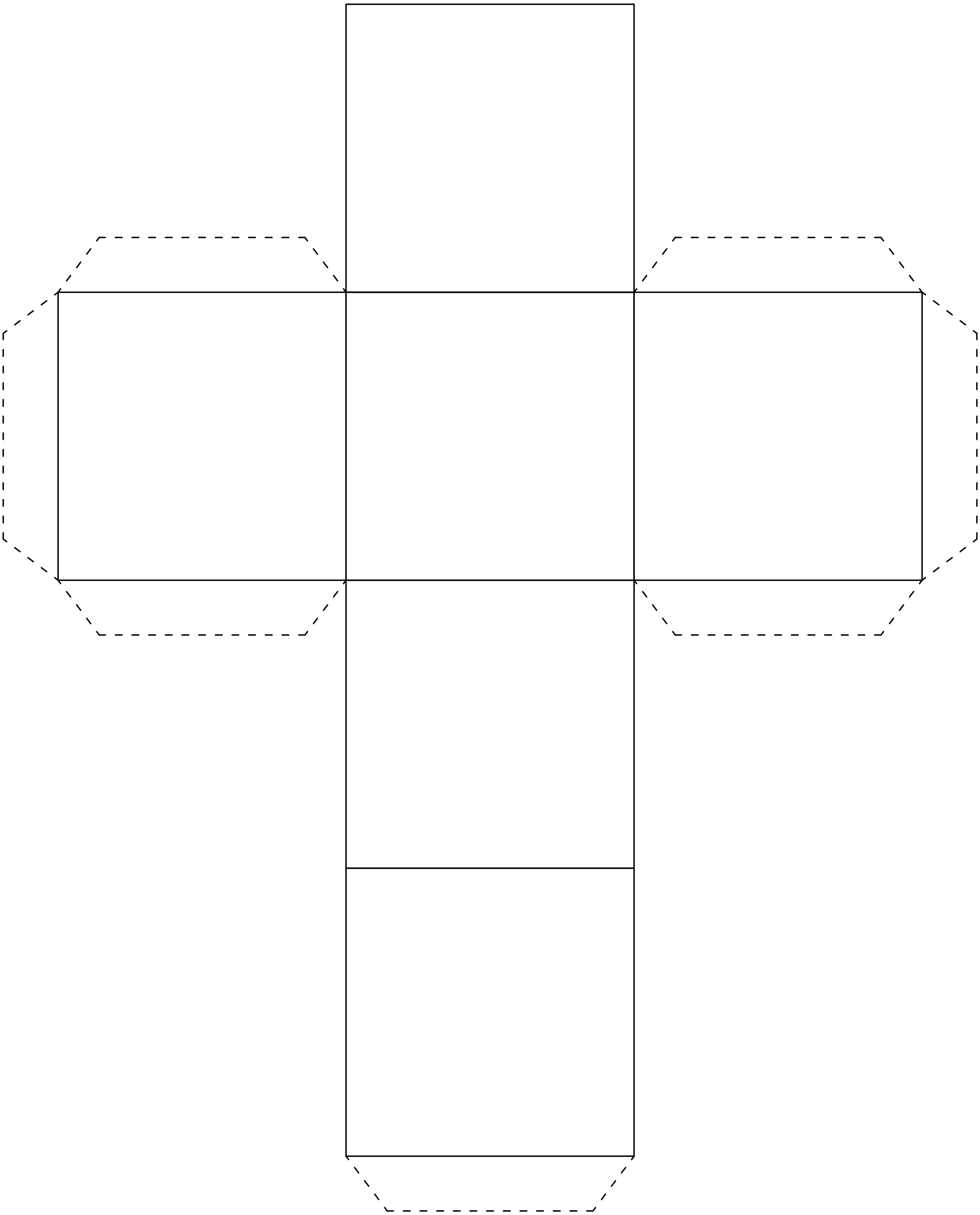


Apêndices

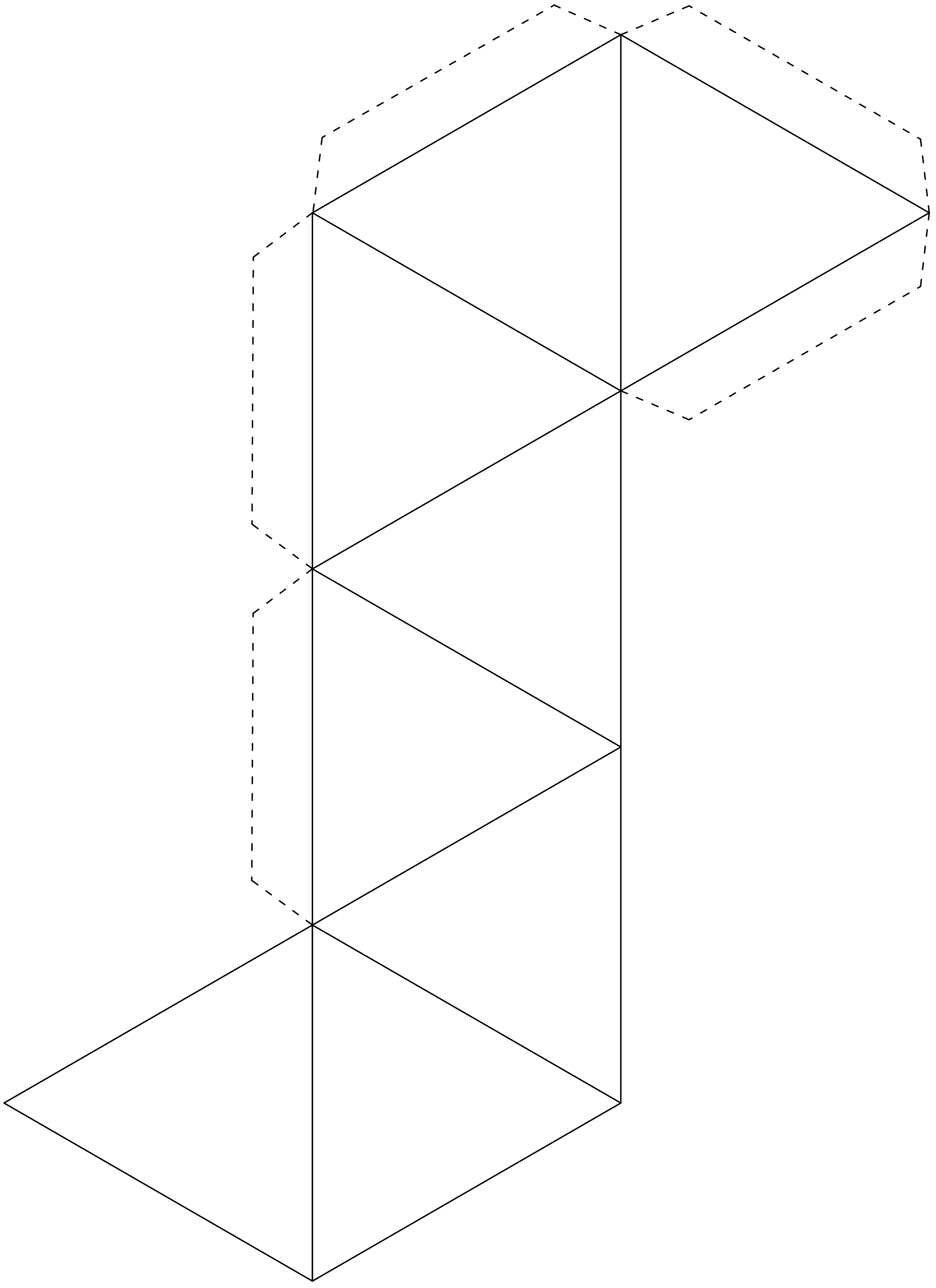
Apêndice A - Planificação dos poliedros regulares



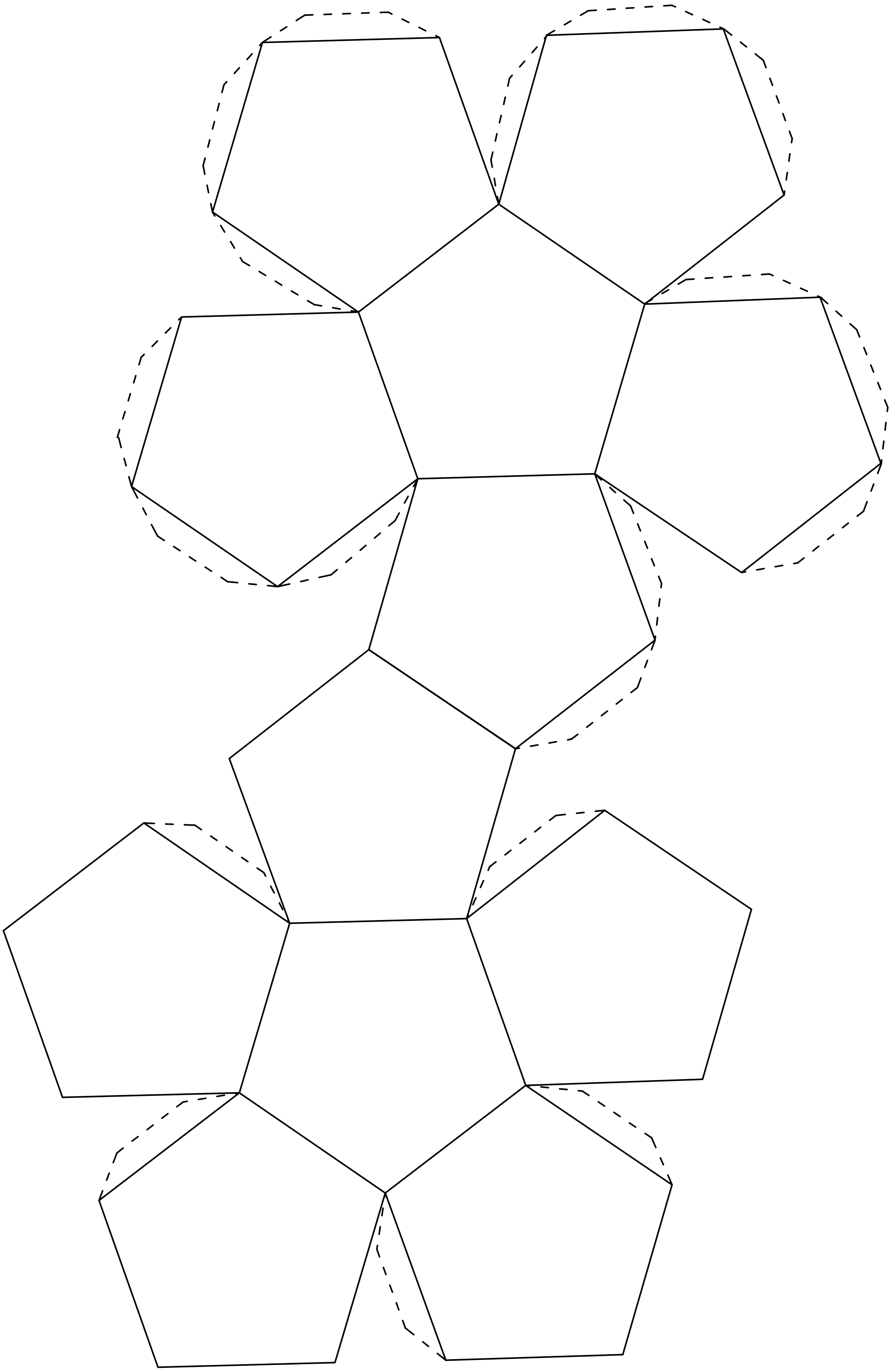
Tetraedro Regular



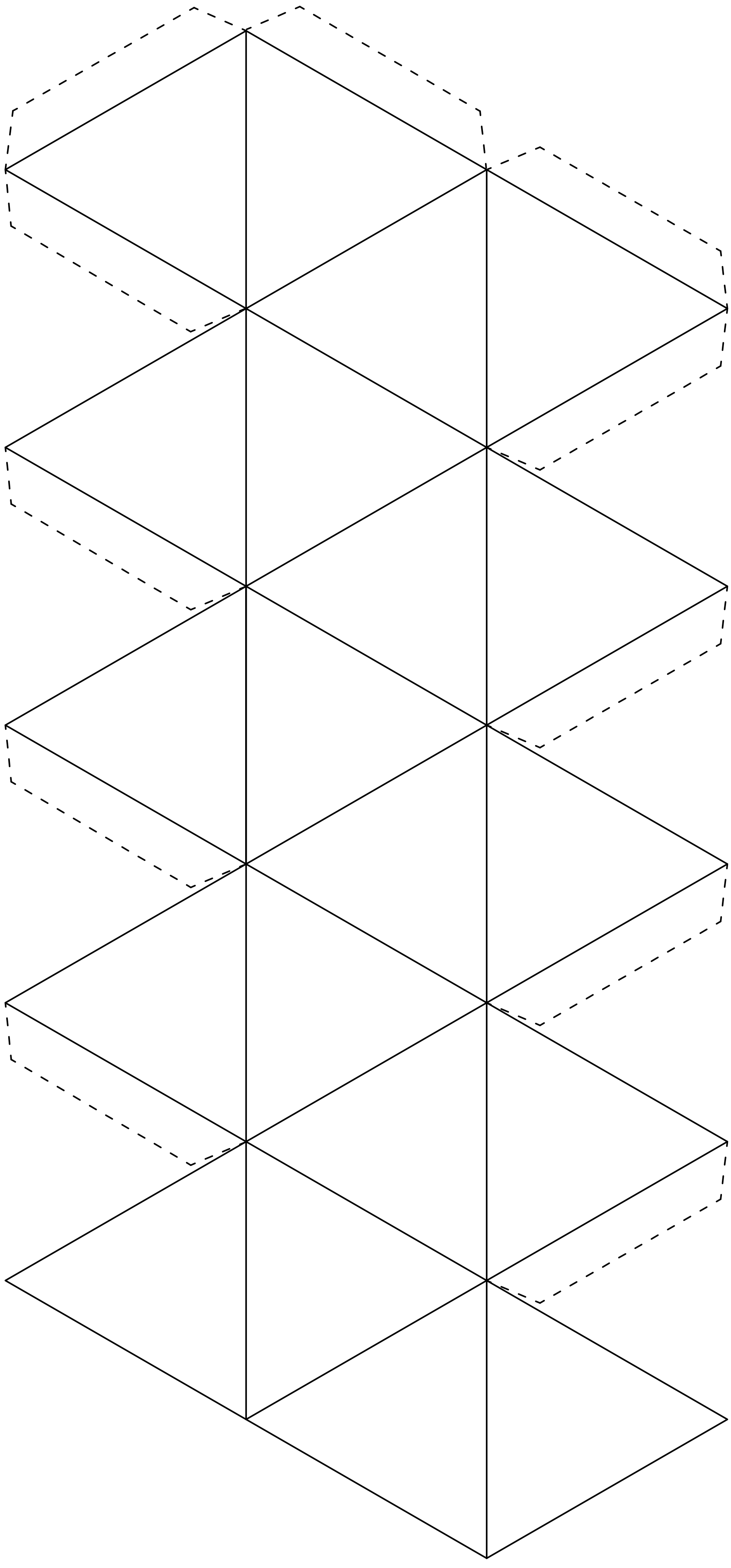
Hexaedro Regular



Octaedro Regular

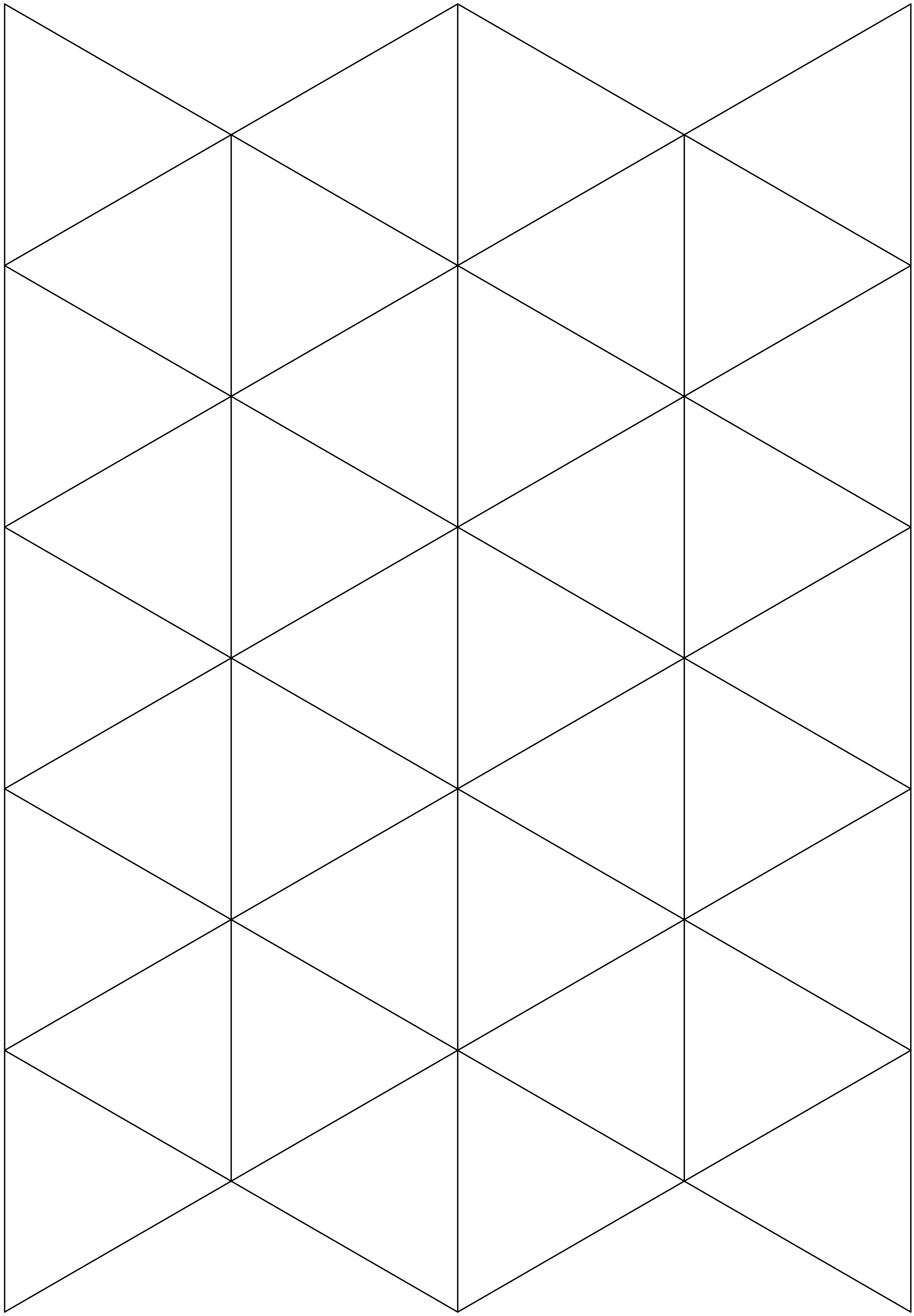


Dodecaedro Regular



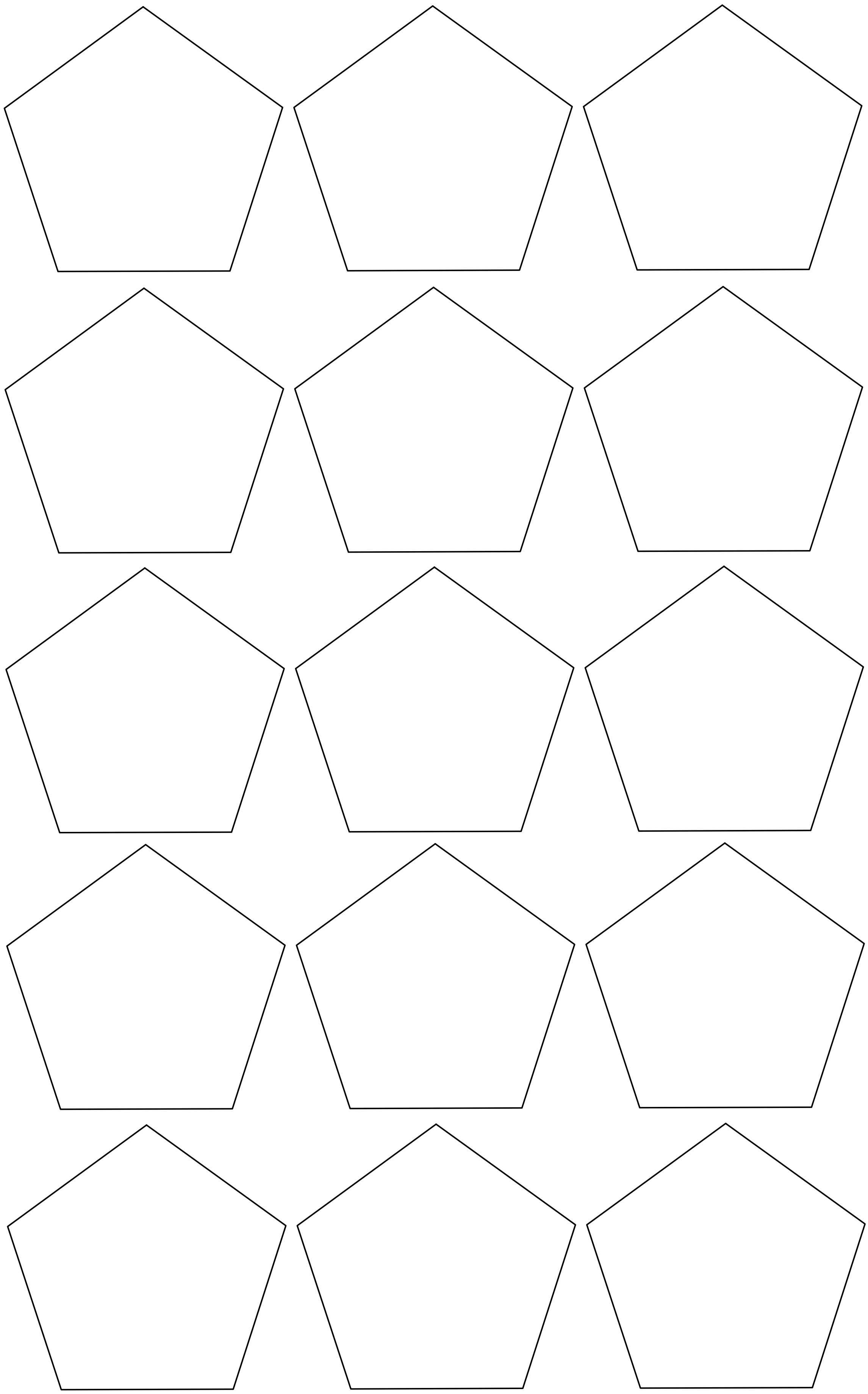
Icosaedro Regular

Apêndice B - Molde dos triângulos

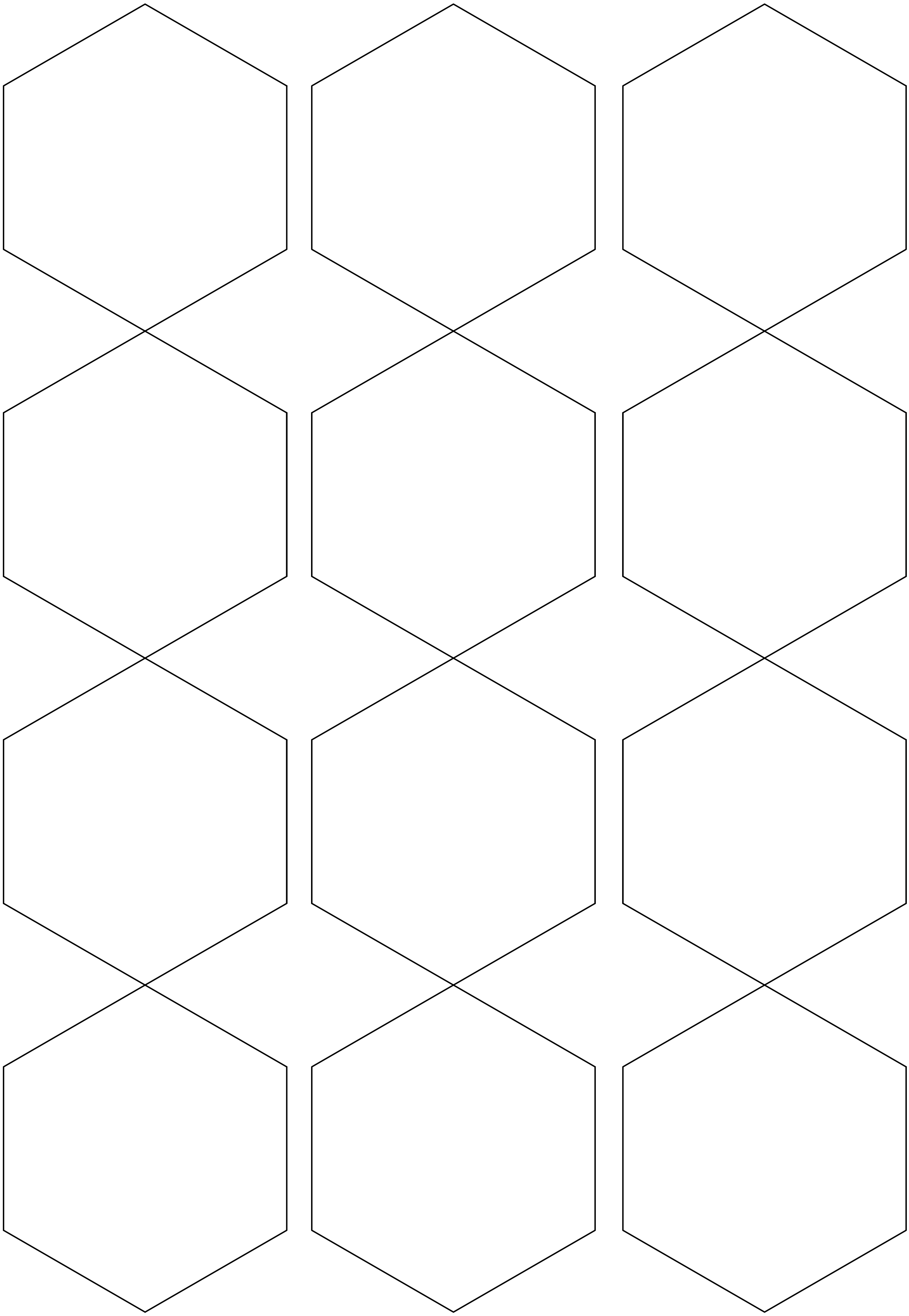


Molde dos quadrados

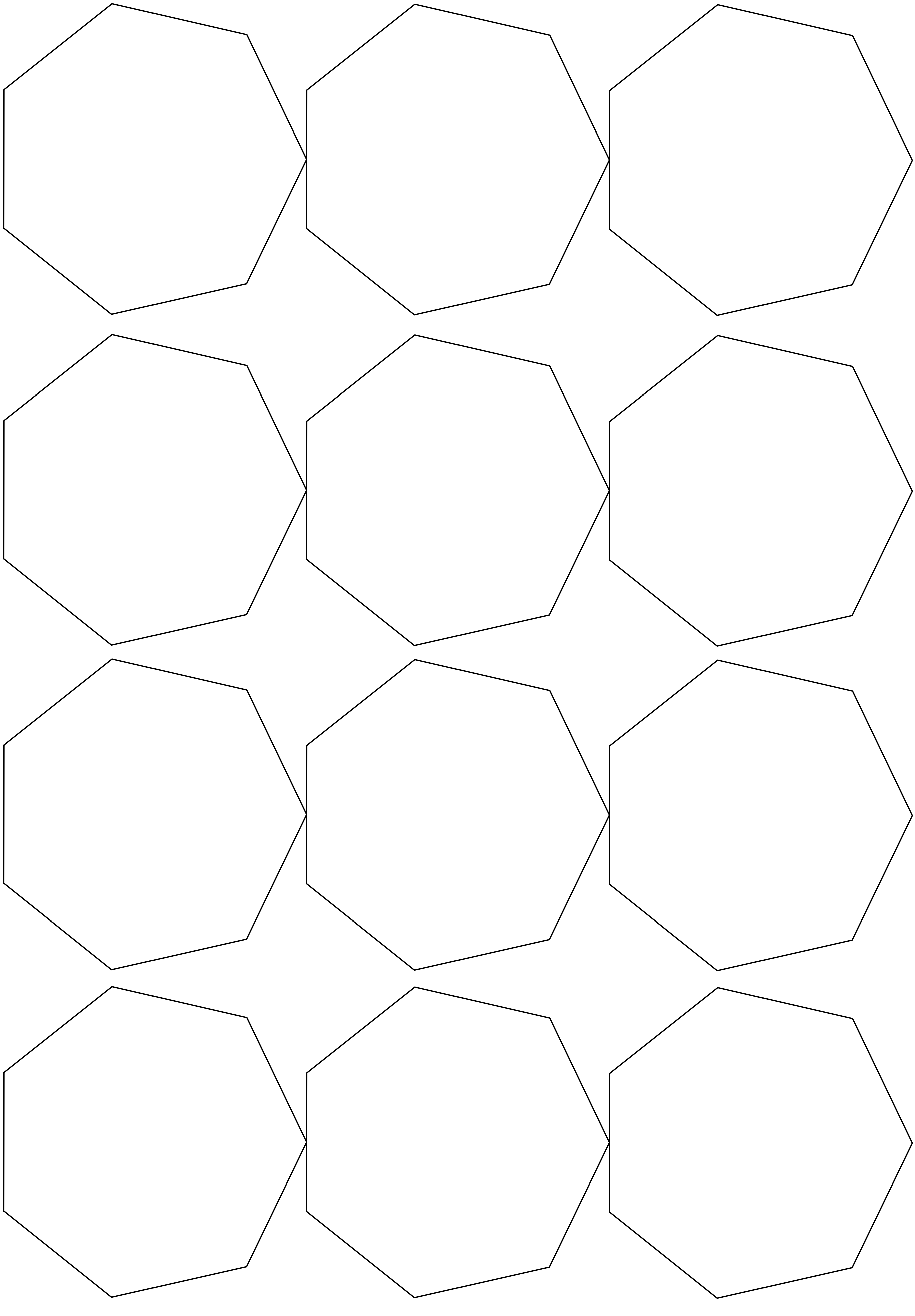
Molde dos pentágonos



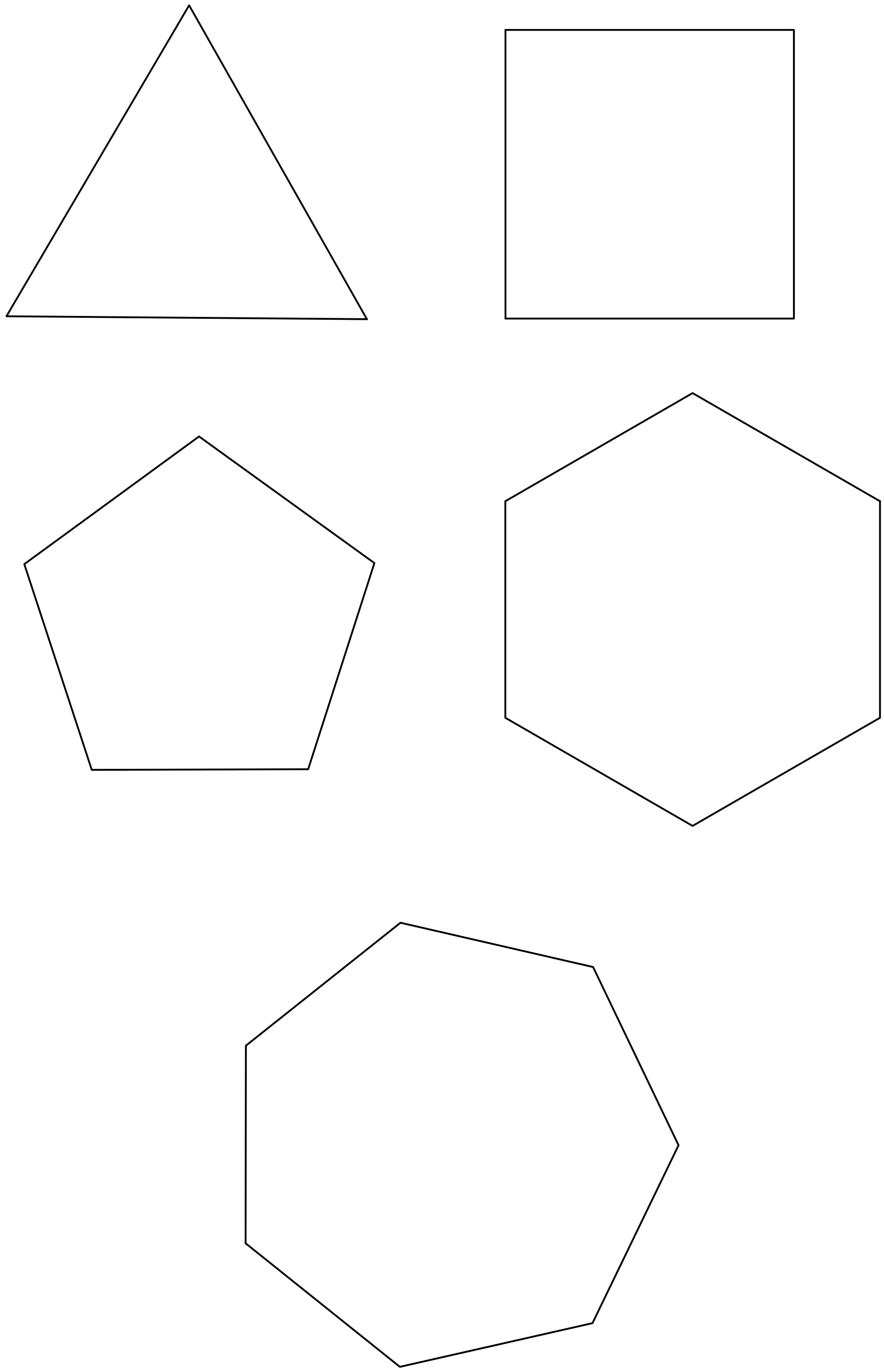
Molde dos hexágonos



Molde dos heptágonos



Apêndice C - Molde dos polígonos



Apêndice D - Folha do a1uno

Quadro – Demonstração geométrica da existência de apenas cinco tipos poliedros regulares

Polígono regular	Medida do ângulo interno do polígono	Quantidade de polígonos usados	Soma dos ângulos que formam o bico	Poliedro formado

É possível formar um bico com três triângulos?

E com quatro?

E com cinco?

E com seis?

Quantos tipos de bicos você construiu com triângulos?

E com quadrados?

E com pentágonos?

E com hexágonos?

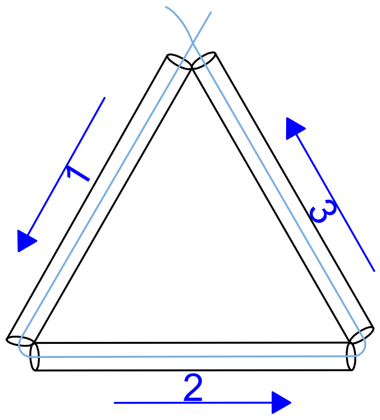
Como você explica a impossibilidade de construir um bico com hexágonos?

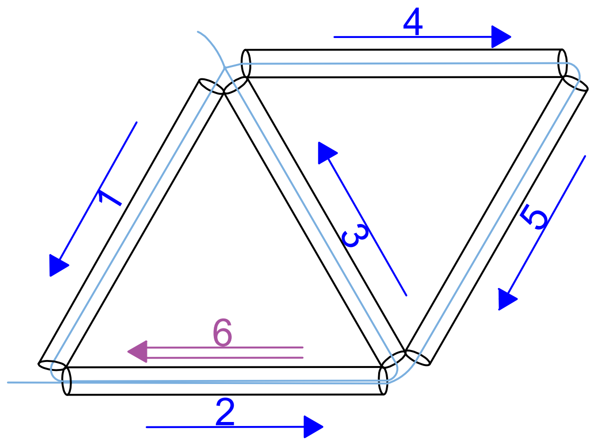
E com heptágonos?

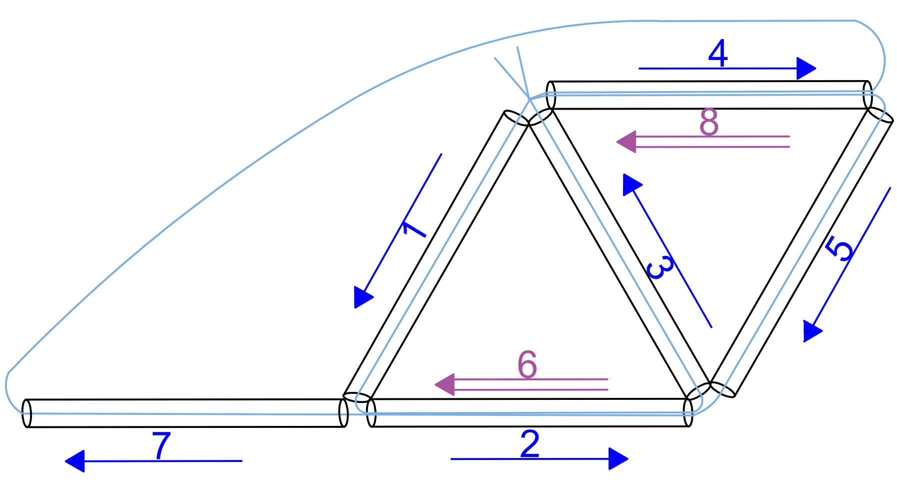
Quadro – Testando a relação de Euler

Poliedro Regular	Polígonos usado	Nº de faces (F)	Nº de vértices (V)	Nº de arestas (A)	V – A + F = 2
Tetraedro					
Hexaedro					
Octaedro					
Dodecaedro					
Icosaedro					

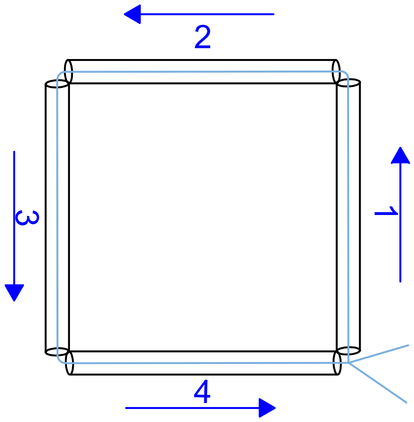
Apêndice E - Esquemas poliedros regulares

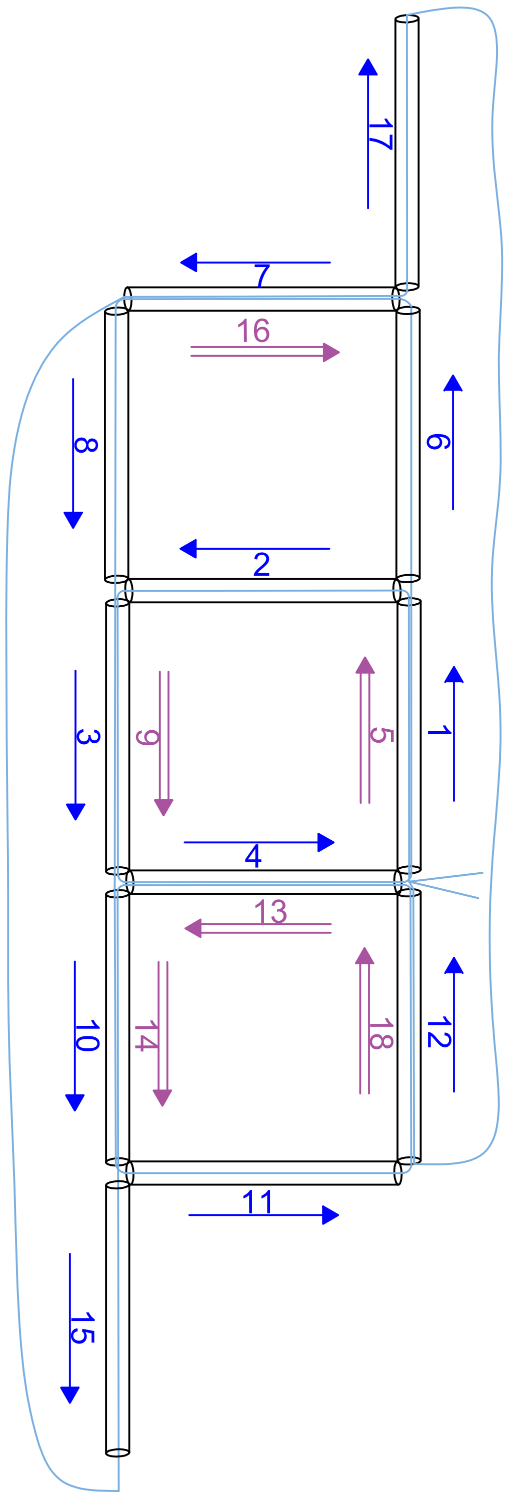






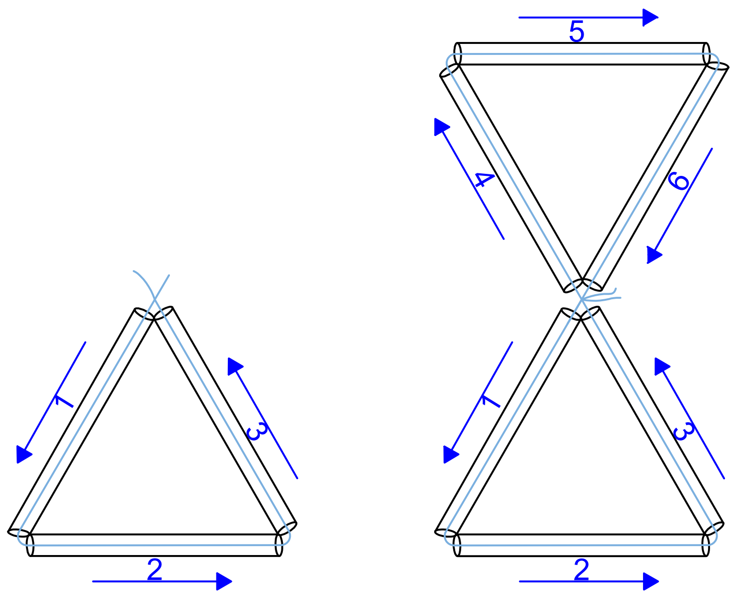
Tetraedro Regular



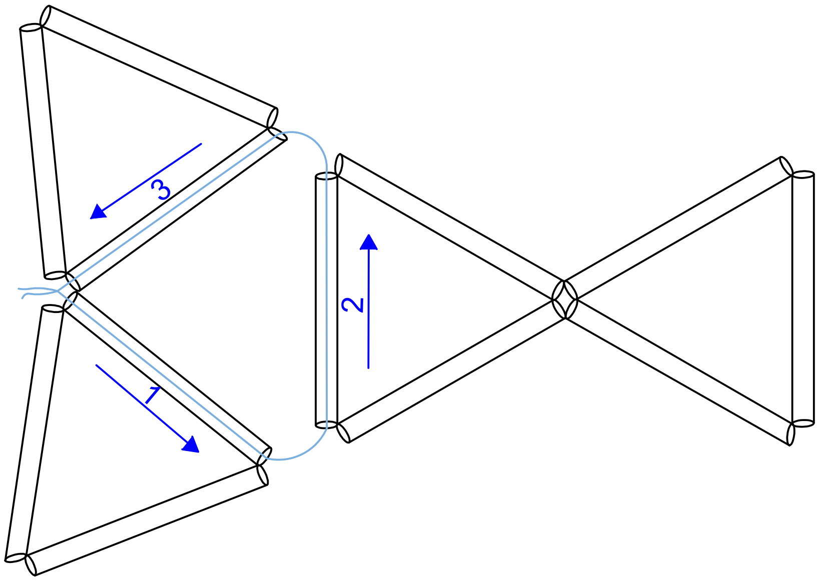


Hexaedro Regular

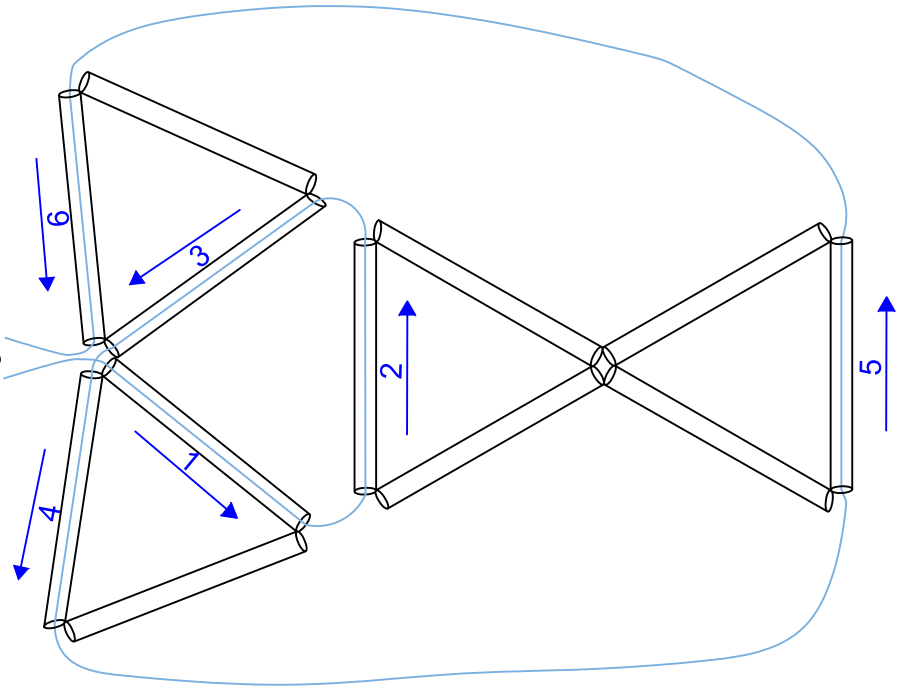
Etapa 1



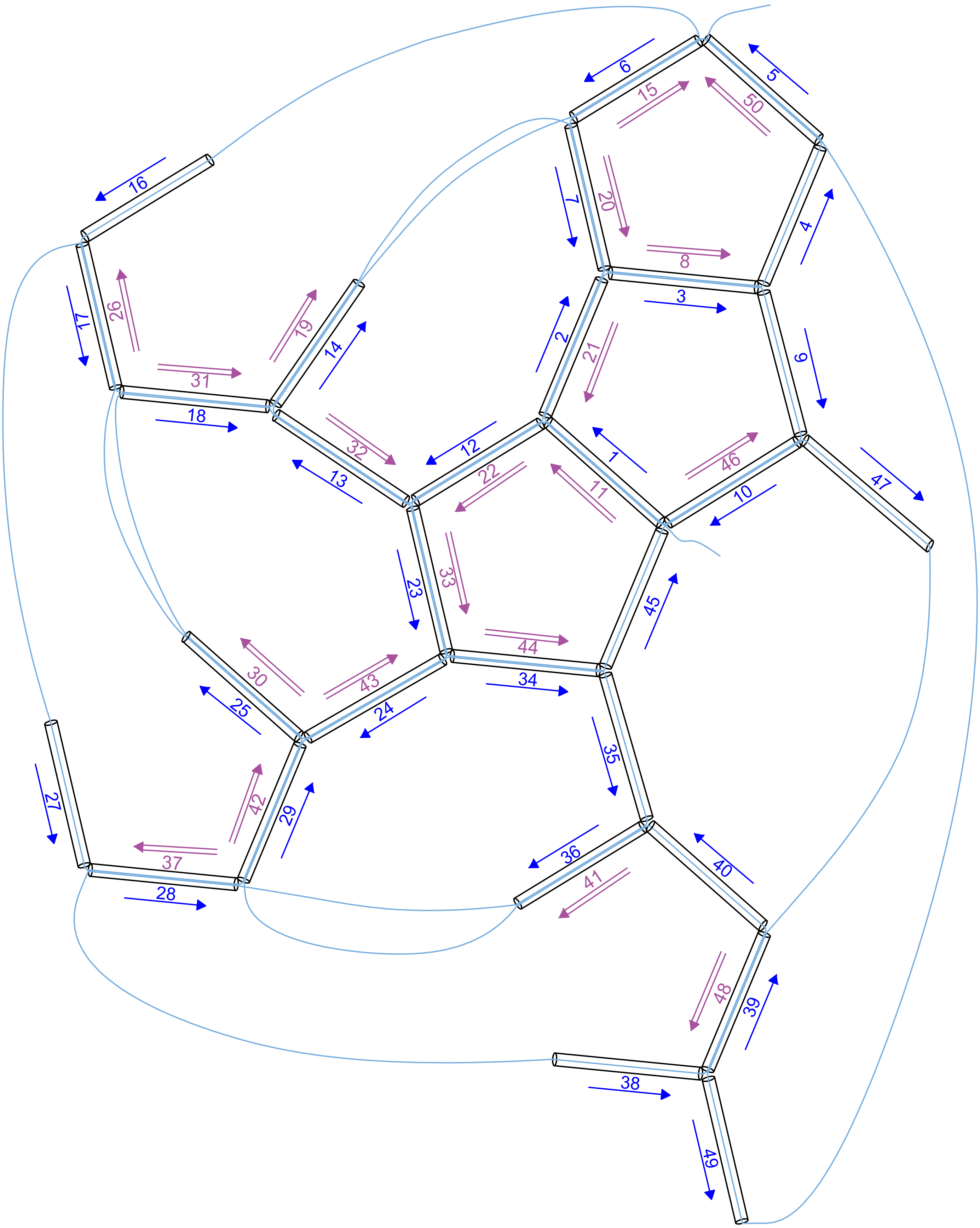
Etapa 2



Etapa 3

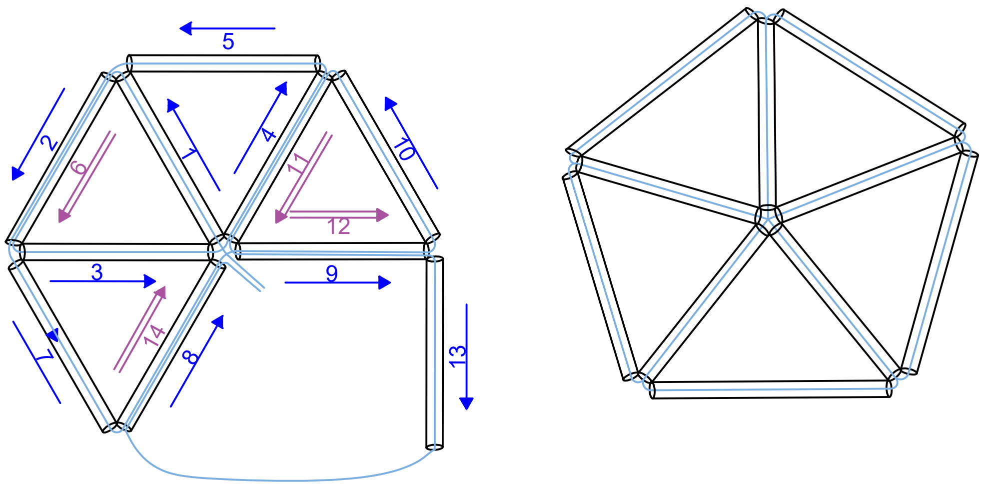


Octaedro Regular

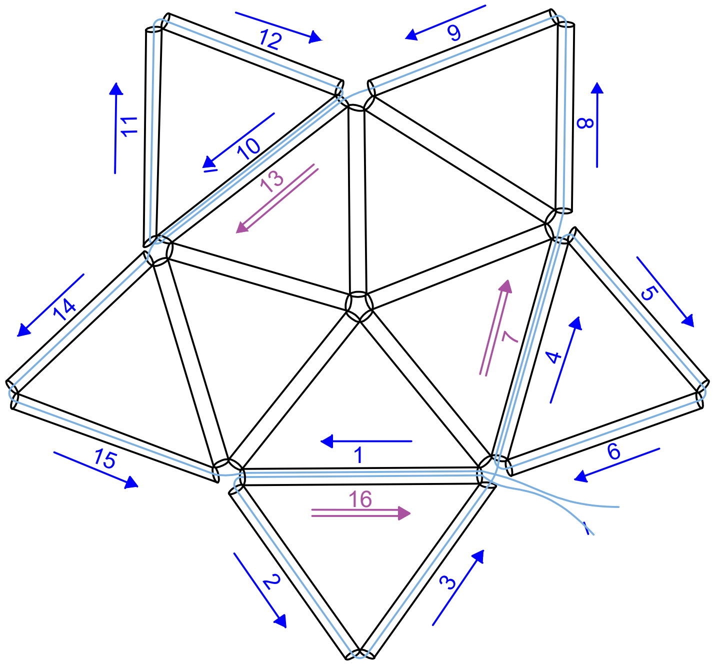


Dodecaedro Regular

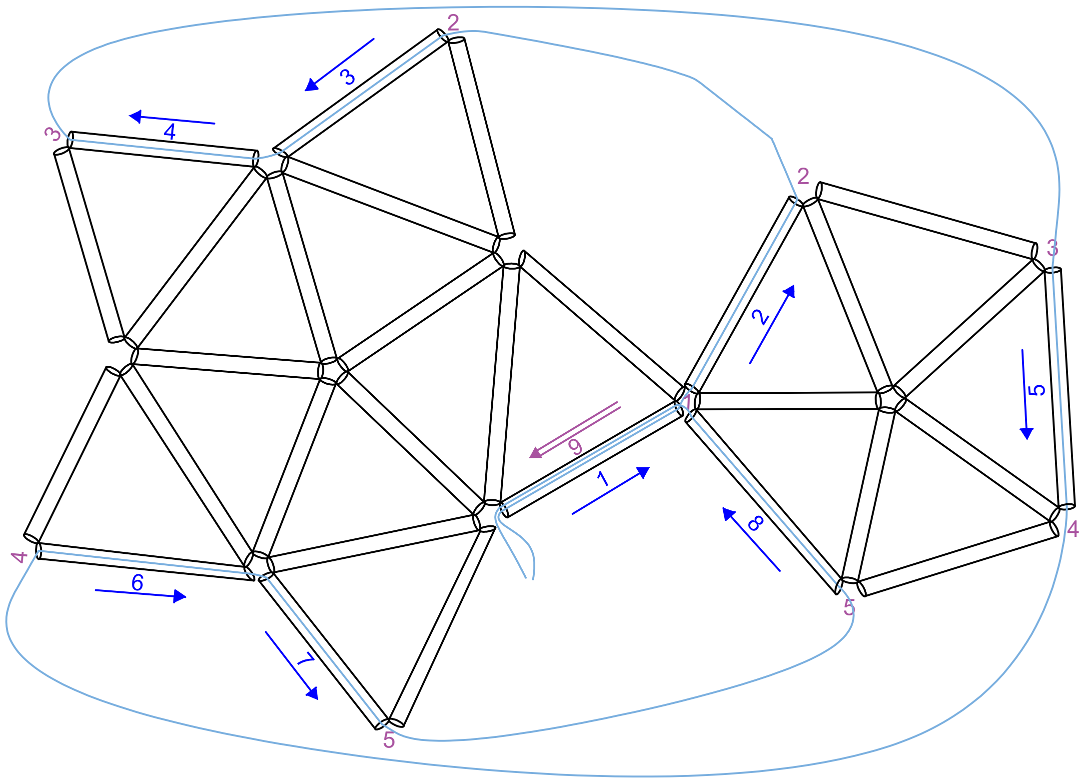
Etapa 1



Etapa 2



Etapa 3



Icosaedro Regular

Anexo F – Números para montagem do dodecaedro

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17
18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45
46 47 48 49 50

---

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17
18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45
46 47 48 49 50

---

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17
18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45
46 47 48 49 50

---

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17
18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45
46 47 48 49 50

---

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17
18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45
46 47 48 49 50