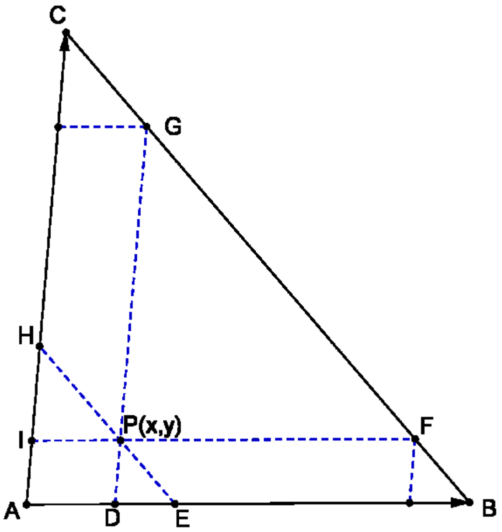
Problema 703.
Dado un triángulo, tracemos desde un punto paralelas a cada lado. Determinan 6 puntos sobre los lados del triángulo que están sobre una cónica.
¿Dónde ha de estar situado este punto para que la cónica sea una parábola?
Beade, C. (2014): Comunicación personal

Solution proposée par Philippe Fondanaiche, Paris, France

Réponse : le point P est situé sur l'ellipse de Steiner intérieure au triangle ABC (points de tangence exclus).

On considère un repère affine $\mathcal{R}$ $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ dans lequel le point A est l'origine et $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont les vecteurs de la base.
Soit un point P qui est strictement à l'intérieur du triangle de coordonnées (x,y) avec $0 < x, y, x + y < 1$.
On désigne par D,E,F,G,H et I pris dans le sens trigonométrique les points d'intersection des parallèles menées par P aux côtés du triangle ABC avec ces mêmes côtés (voir figure ci-après).

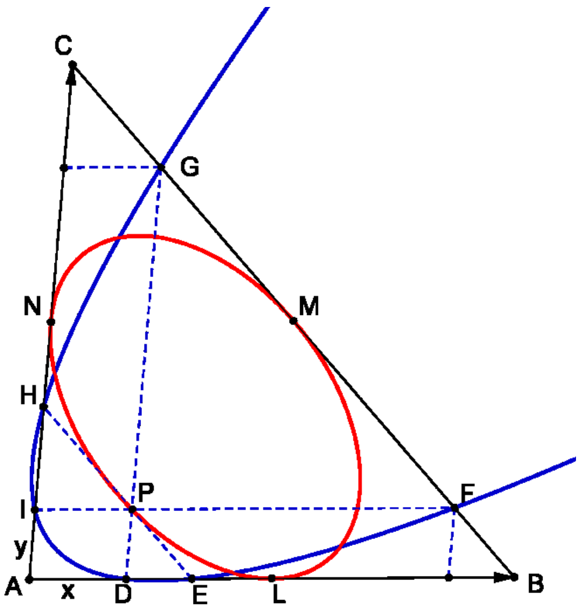


Les relations ci-après permettent de déterminer les coordonnées des six points D,E,F,G,H,I dans le repère $\mathcal{R}$:

1) $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI} = y\overrightarrow{AC}$.
2) Comme AE/AB = AH/AC, on en déduit $\overrightarrow{AE} = (x + y)\ \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH} = (x + y)\overrightarrow{AC}$.
3) Par ailleurs $\overrightarrow{PF} = \overrightarrow{EB} = (1 - x - y)\overrightarrow{AB}$. D'où $\overrightarrow{IF} = (1 - y)$. De la même manière, on obtient $\overrightarrow{DG} = (1 - x)\overrightarrow{AC}$.

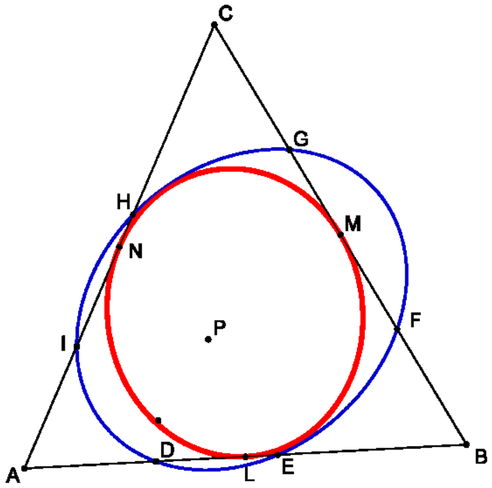
D'où les coordonnées des six points : D(x,0), E(x + y,0), F(1 – y, y), G(x,1 – x), H(0,x + y), I(0, y).
Il est bien connu que par cinq points passent une conique et une seule $(\mathcal{C})$ de la forme $aX^2 + 2bXY + cY^2 + dX + eY + f = 0$.
Pour déterminer les coefficients a,b,c,d,e et f, on retient les points D,E,G,H et I et on vérifiera dans un deuxième temps que le sixième point G appartient bien à cette conique.
On a les cinq équations :

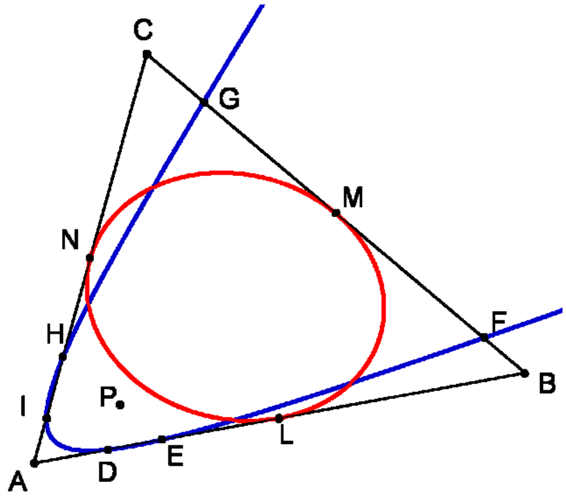
$ax^2 + dx + f = 0$
$a(x + y)^2 + d(x + y) + f = 0$
$cy^2 + ey + f = 0$
$c(x + y)^2 + e(x + y) + f = 0$
$ax^2 + bx(1 - x) + c(1 - x)^2 + dx + e(1 - x) + f = 0$
Comme par hypothèse $0 < x < 1$, $1 - x \neq 0$ et la résolution de ce système d'équations permet d'obtenir les valeurs de a,b,c,d,e,f en fonction de x et de y à un coefficient k d'homothétie près, à savoir :
$yX^2 - (1 - 2x - 2y)XY + xY^2 - y(y + 2x)X - x(x + 2y)Y + xy(x + y) = 0.$
Le point $F(1 - y,y)$ appartient bien à $(\mathcal{C})$ car $y(1- y)^2 - (1 - 2x - 2y)(1 - y)y + xy^2 - y(y + 2x)(1- y) - x(x + 2y)y + xy(x + y) = y(1 - y)(1 - y - 1 + 2x + 2y - y - 2x) + xy(y - x - 2y + x + y) = 0.$
La conique est une parabole si et seulement $ac - b^2 = 0$, ce qui donne l'équation $4xy = (1 - 2x - 2y)^2$ ou encore $4x^2 + 4xy + 4y^2 - 4x - 4y + 1 = 0$.
On reconnaît l'équation de l'ellipse de Steiner $(\mathcal{E})$ intérieure au triangle ABC qui a la particularité d'être tangente aux trois côtés du triangle ABC en leurs milieux L,M et N.



Les points L,M et N ont respectivement pour coordonnées dans $\mathcal{R}$: (1/2,0), (1/2,1/2) et (0,1/2) et on vérifie aisément qu'ils appartiennent bien à $(\mathcal{E})$.
Par ailleurs à partir de l'expression $(2x + y - 1)dx + (x + 2y - 1)\,dy = 0$ obtenue par dérivation de l'expression de $(\mathcal{E})$, on constate qu'aux points L,M et N les tangentes à $\mathcal{E}$ ont respectivement pour équations $dy = 0$, $dy/dx = -1$ et $dx = 0$, ce qui confirme que les côtés AB,BC et CA sont tangents à $(\mathcal{E})$ en ces trois points.
Le lieu de P tel que $\mathcal{C}$ est une parabole est donc l'ellipse de Steiner $(\mathcal{E})$ du triangle ABC, les points de tangence étant exclus par hypothèse.

Nota : si P est intérieur à l'ellipse de Steiner $(\mathcal{E})$, la conique $(\mathcal{C})$ est une ellipse et c'est une hyperbole quand P est extérieur à tout en restant à l'intérieur du triangle ABC (voir figures ci-après)


C
G
H
M
N
I
P
F
D
A
L
E
B


C
G
M
N
F
H
B
I
P
L
A
D
E