Tema 1: Semigrupos

3. Homomorfismos de semigrupos.

Un concepto intersante de analizar son las aplicaciones entre semigrupos que conservan las operaciones: los homomorfismos de semigrupos.

Definición. Sean $(S_1, .)$ y $/S_2, *)$ dos semigrupos y $f : S_1 \to S_2$ una aplicación entre ellos. Se dice que f es un **homomorfismo** entre los semigrupos S_1 y S_2 si $\forall x, y \in S_1$ se verifica $f(x.y) = f(x) * f(y)$.

Denotaremos por $Hom(S_1, S_2) = \{f : S_1 \to S_2 \mid f \text{ es homomorfismo}\}$

Un **monomorfismo** es un homomorfismo inyectivo. Un **epimorfismo** es un homomorfismo sobreyectivo. Finalmente, Un **isomorfismo** es un homomorfismo biyectivo. Cuando exista un isomorfismo entre los semigrupos S_1 y S_2 diremos que S_1 y S_2 son **semigrupos isomorfos** y lo denotaresmo por $S_1 \cong S_2$.

Ejemplo. La aplicación $f : (\mathbb{Z}, .) \to (\mathbb{N} \cup \{0\}, .)$ definida por $f(x) = |x|$ es un epimorfismo que no es inyectivo.

Los epimorfismos tienen una propiedad interesante con respecto a los elementos cero e identidad:

Teorema 3.1. *Sea $f : S_1 \to S_2$ un epimorfismo. Entonces,*

(i) Si a es un elemento cero de S_1, entonces $f(a)$ es un elemento cero de S_2.

(ii) Si e es un elemento identidad de S_1, entonces $f(e)$ es un elemento identidad de S_2.

Si f es un homomorfismo no sobreyectivo, el teorema anterior no tiene porqué verificarse. Por ejemplo, el homomorfismo $f : (\mathbb{N}, .) \to (\mathbb{Z}, .)$ definido por $f(n) = 0$ no verifica que $f(1)$ sea un elemento identidad de $(\mathbb{Z}, .)$.

Definición. Sea $(S, .)$ un semigrupo y $\equiv$ una relación de equivalencia sobre S. Se dice que la relación $\equiv$ es **estable** con la operación . si se verifica la siguiente condición: Para todo $a, a', b, b' \in S$ tales que $a \equiv a'$ y $b \equiv b'$, se tiene $a.b \equiv a'.b'$.

Para las relaciones de equivalencia estables, podemos definir en el conjunto cociente una nueva operación $[a].[b] = [a.b]$. Con esta operación, dotamos al conjunto cociente de la estructura de semigrupo. Es fácil demostrar:

Teorema 3.2. *Sea $(S, .)$ un semigrupo y $\equiv$ una relación de equivalencia estable con la operación . . Entonces, $(S/\equiv, .)$ es un semigrupo llamado* **semigrupo cociente de** $(S, .)$ **sobre** $\equiv$. *Además, la aplicación $f : S \to S/\equiv$, definida por $f(a) = [a]$ es un epimorfismo de semigrupos llamado* **epimorfismo canónico**.

Por otro lado, a partir de un epimorfismo de semigrupos podemos definir una relación de equivalencia estable:

Teorema 3.3. *Sea $f : S \to S'$ un epimorfismo de semigrupos y sea $\equiv$ la relación definida en S mediante $\forall s_1, s_2 \in S$, $s_1 \equiv s_2$ si y solo si $f(s_1) = f(s_2)$. Entonces,*

(i) $\equiv$ *es una relación de equivalencia sobre S.*

(ii) La relación $\equiv$ es estable con la operación definida en S.

(iii) $(S/\equiv, .)$ *es isomorfo a* $(S', .')$.

Observación. Si en el enunciado del teorema anterior eliminamos la condición de sobreyectividad en el homomorfismo f , se verificaría (i) e (ii), pero no (iii).

Según el Teorema 1.4, podemos construir un monoide a partir de un semigrupo no monoide cuya operación restringida al semigrupo coincida con la del semigrupo. Esto nos permite demostrar una generalización del Teorema de Cayley que pone de manifiesto la importancia de los grupos $(N^N, \circ)$, donde $N^N = \{f : N \to N \mid f \text{ es aplicación}\}$:

Teorema 3.4. *Para cualquier semigrupo $(S, .)$, existe un monoide N y un monomorfismo $\psi : S \to N^N$.*

Demostración. Si S es un monoide, tomamos $N = S$. En otro caso, por el Teorema 1.4, construimos el monoide $N = S \cup \{1\}$. Para cada $s \in S$, definimos $f_s : N \to N$, mediante $f_s(x) = s.x$. Entonces, la aplicación $\psi : S \to N^N$ dada por $\psi(s) = f_s$ es un monomorfismo.

Observación. El hecho de ser N un monoide es fundamental para probar la inyectividad de la aplicación ψ construida.