

**ETS de ARQUITECTURA de MADRID,
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID**

***ESTRUCTURAS I:
VIGAS DE ALMA LLENA
RESISTENCIA Y RIGIDEZ***

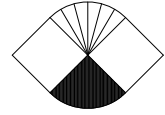


**Planteamiento: JOAQUÍN ANTUÑA BERNARDO, JOSÉ L. FERNÁNDEZ CABO, ALMUDENA MAJANO MAJANO.
Desarrollo: MARÍA LUCÍA CERMEÑO, RUBÉN CONDE GÓMEZ,
JOSÉ L. FERNÁNDEZ CABO, JOAQUÍN ANTUÑA BERNARDO, ALMUDENA MAJANO MAJANO.**

MADRID, octubre 2014 (v1)



Licencia Creative Commons tipo:
Reconocimiento - NoComercial - SinObraDerivada (by-nc-nd)



ESTRUCTURAS 1. PLAN 2010 CURSO 2012-13. SEMESTRE DE OTOÑO

Tema: **FLEXIÓN SIMPLE con ALMA LLENA: RESISTENCIA Y RIGIDEZ**

Prácticas 9, 10 y 11

OBJETIVO

El objetivo de las tres siguientes prácticas es analizar una estructura adintelada. Para ello dividimos el trabajo en tres etapas bien diferenciadas:

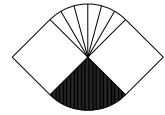
- (Práctica 9: Resistencia a momento)** dimensionado de la estructura para que resista el momento flector
- (Práctica 10: resistencia a cortante)** dimensionado de la estructura para que resista el cortante
- (Práctica 11: rigidez)** comprobación de la rigidez de la estructura, aunque considerando **sólo la deformación debida al momento flector** (despreciando la debida al cortante; lo habitual en casos de alma llena).

El orden establecido en la comprobación de la resistencia no es arbitrario. Lo habitual es que la comprobación de la resistencia a momento sea más crítica que la de cortante, lo que hace que se comience el dimensionado para resistir al flector y que luego ya sobre material para resistir el cortante.

En cuanto a la rigidez, el diseñador hábil fija primero la esbeltez de la estructura para que cumpla rigidez, lo que por lo general hace que al mismo tiempo la solución resista el momento y el cortante simultáneamente. En este curso, en cuanto a rigidez en vigas de alma llena, el objetivo principal es entender y ser capaz de usar el principio de los trabajos virtuales.

Como siempre, hay además dos objetivos adicionales importantes: mostrar ejemplos del paso de la realidad al modelo de análisis, y trabajar sobre tipos estructurales muy recurrentes en la práctica profesional, cuyo funcionamiento estructural el alumno debería interiorizar.

Como se verá a continuación, el estudio de la flexión simple, asociado a la estructura ADINTELADA, permite resolver, en un gran número de casos, el FORJADO en su conjunto, lo que representa una buena parte del problema típico de las estructuras de edificación.



ESTRUCTURAS 1. PLAN 2010 CURSO 2012-13. SEMESTRE DE OTOÑO

FLEXION SIMPLE versus ESTRUCTURA ADINTELADA

Sin lugar a dudas, la gran mayoría de las estructuras de edificación entran dentro del grupo de las denominadas ESTRUCTURAS ADINTELADAS, es decir, formadas básicamente por un conjunto de vigas y soportes (Fig. 1) apoyadas unas sobre otras de modo que, para cargas verticales (habitualmente la preponderantes), no aparecen empujes.

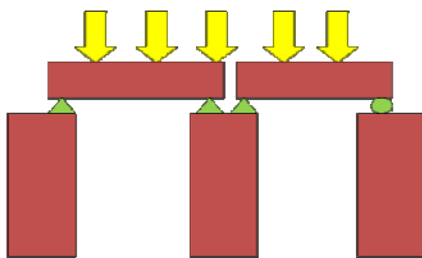


Fig. 1

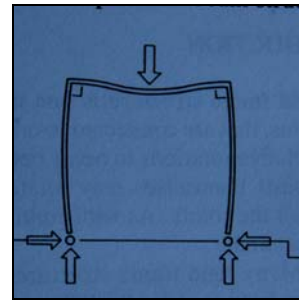


Fig. 2

Cuando se formalizan uniones rígidas entre vigas y soportes (Fig. 2) aparecen las estructuras PORTICADAS, que en general se pueden seguir llamando ADINTELADAS porque el empuje, que ahora sí aparece para cargas verticales. Además, y no menos importante, las porticadas responden a la misma organización formal.

En el siguiente grupo de prácticas estudiamos el problema de la FLEXIÓN SIMPLE, es decir, la barra o elemento lineal sometido a lo sumo a un FLECTOR y un CORTANTE, pero **NO a un AXIL**, (o, en la práctica, cuando el axil no es un esfuerzo relevante). Es decir, estudiamos el problema de la **VIGA**, que es el tipo más recurrente para resolver el FORJADO.

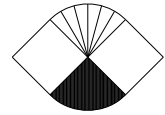
Como hemos visto al estudiar **los diagramas de esfuerzos**, la aparición de un flector implica **tracciones en una de las caras de la viga**, razón por lo cual el material que usa la arquitectura tradicional para resolverla es **la madera**. La fábrica, formando vigas o dinteles, sólo es posible en luces cortas y además con pequeñas esbelteces, no para formar el grueso del forjado. El hormigón armado y el acero ampliarán después el repertorio de materiales adecuados a la flexión.

La organización del forjado tradicional depende de varios factores. Mostraremos varias soluciones frecuentes y alguna más rara, y se verá que en todos los casos se trata de esquemas muy simples.

La madera es el material más antiguo que se ha usado para resolver la flexión simple, y gracias a su capacidad de resistir de manera muy similar tracciones y compresiones. Muchas de las soluciones se



POLITÉCNICA



ESTRUCTURAS 1. PLAN 2010 CURSO 2012-13. SEMESTRE DE OTOÑO

reducen a un solo orden, como se muestra en las Fig. 3 y Fig. 4; aunque en este caso el tablazón que forma el forjado es en realidad un sistema de viguetas que conforma un segundo orden.



Fig. 3



Fig. 4

En muchas cubiertas, como los mostradas en las Fig. 5 y Fig. 6, al primer sistema de vigas se le añade una latas (listones de madera) sobre lo que se apoya desde un pequeño ladrillo (Fig. 5) hasta la propia teja (Fig. 6).

Cuando las luces comienzan a pasar del entorno de los 7m es casi imposible disponer de escuadrías de madera, y por eso tradicionalmente se recurría entonces al arco de fábrica, volviendo a poner las vigas perpendiculares a estos arcos pero ya con luces menores y además iguales en todo el forjado (no así los arcos en el caso mostrado en la Fig. 6).

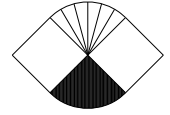


Fig. 5



Fig. 6

En el forjado **de hormigón** (Fig. 7, Fig. 8), la propia construcción hace que las uniones sean rígidas, cosa que en general no sucede en madera. Pero se está ante organizaciones muy similares a las de madera, a veces idénticas.



ESTRUCTURAS 1. PLAN 2010 CURSO 2012-13. SEMESTRE DE OTOÑO

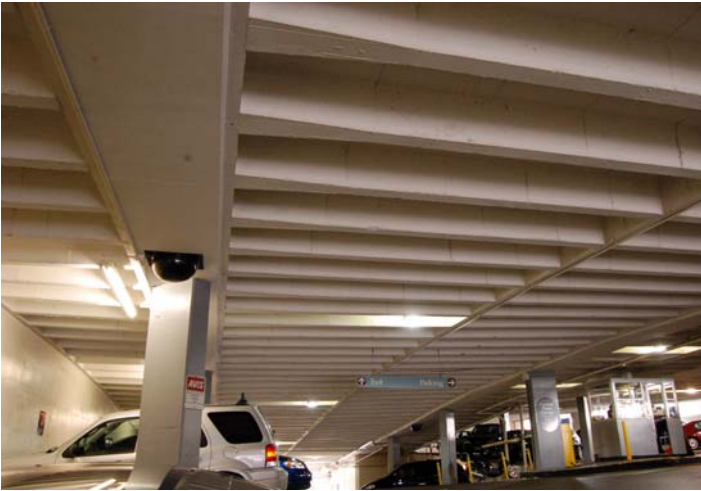


Fig. 7



Fig. 8

El forjado **de acero** (Fig. 10, Fig. 9) es de nuevo muy similar en organización a los dos anteriores. Actualmente el forjado se resuelve con una chapa plegada (cubiertas, Fig. 10) o con un chapa (de acero, Fig. 9) colaborante (con una capa de compresión de hormigón armado)

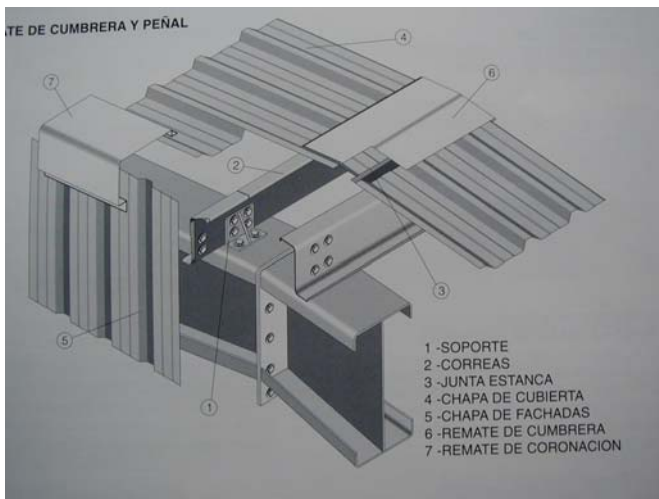
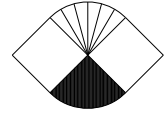


Fig. 9



Fig. 10

A partir de estos esquemas, y en cuando a ADINTELADAS, faltaría hablar de las estructuras tipo EMPARRILLADO, que en definitiva se trata de dos órdenes cruzados de vigas. El problema se tratará en el curso próximo. **En cualquier caso, como esperamos haya quedado claro a mostrar los ejemplos anteriores, el entendimiento de la FLEXION SIMPLE es básico para el diseño de estructuras de edificación.**



ESTRUCTURAS 1. PLAN 2010

CURSO 2012-13. SEMESTRE DE OTOÑO

Tema: FLEXIÓN con ALMA LLENA: RESISTENCIA A FLECTOR	Práctica 9
--	-------------------

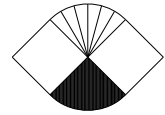
DEFINICIÓN DE LOS MATERIALES

Para la sección con MADERA , se trabajará con un MODELO ELÁSTICO (lo más habitual debido a que la rotura en tracción es frágil) con las siguientes propiedades:	Para la secciones con ACERO , se trabajará con un MODELO ELÁSTO-PLÁSTICO (también lo más habitual) con las siguientes propiedades:
Madera: Módulo de Young $E = 10 \text{ kN/mm}^2$. Tensión en el límite elástico: $\sigma_e = 18 \text{ N/mm}^2$. Tensión normal segura $f_\sigma = 9 \text{ N/mm}^2$. Tensión tangencial segura $f_\tau = 1,2 \text{ N/mm}^2$.	Acero: Módulo de Young $E = 200 \text{ kN/mm}^2$. Tensión en el límite elástico: $\sigma_e = 255 \text{ N/mm}^2$. Deformación unitaria última: $\epsilon_u = 10 \text{ mm/m}$. Tensión normal segura $f_\sigma = 170 \text{ N/mm}^2$. Tensión tangencial segura $f_\tau = 100 \text{ N/mm}^2$.
En los siguiente recuadros, debajo de cada material, representar ambos modelos en un diagrama σ(ordenadas)-ϵ(abscisas)	
Gráfica σ - ϵ de la MADERA	Gráfica σ - ϵ del ACERO

Con estas propiedades, primero trabajaremos con MADERA y luego con ACERO, y de modo que se estudien tres de las secciones más habituales que se usan en estructuras de edificación.



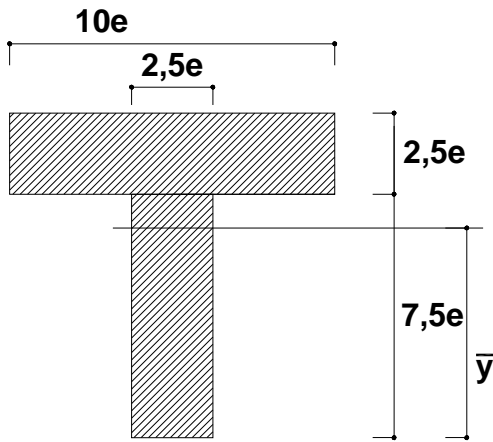
POLITÉCNICA



ESTRUCTURAS 1. PLAN 2010

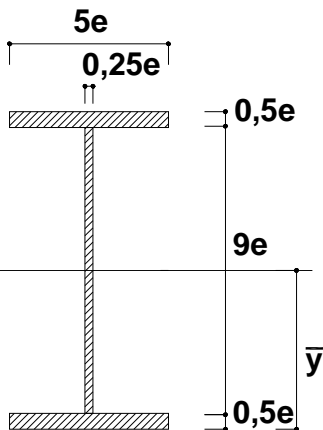
CURSO 2012-13. SEMESTRE DE OTOÑO

SECCIÓN DE MADERA: CALCULO DE LA CARACTERÍSTICAS MECÁNICAS. e= 50mm



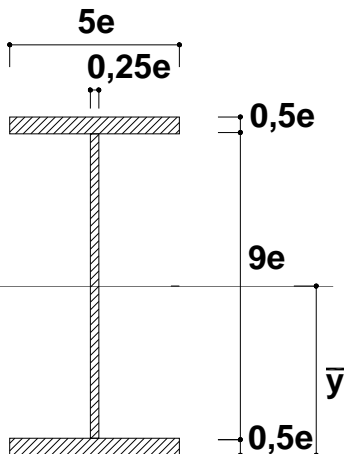
Área de la sección $A = \underline{\hspace{2cm}} \text{ mm}^2$
 Posición del centro de masas $y = \underline{\hspace{2cm}} \text{ mm}^2$
 Inercia respecto al eje horizontal que pasa por su centro de masas $I = \underline{\hspace{2cm}} \text{ m}^2 \cdot \text{mm}^2$
 Módulo resistente mínimo, en régimen elástico, respecto al mismo eje. $W_e = \underline{\hspace{2cm}} \text{ m} \cdot \text{mm}$

SECCIÓN DE ACERO EN CAJÓN: CALCULO DE LA CARACTERÍSTICAS MECÁNICAS. e= 50mm

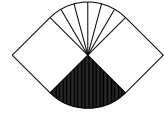


Área de la sección $A = \underline{\hspace{2cm}} \text{ mm}^2$
 Posición del centro de masas $y = \underline{\hspace{2cm}} \text{ mm}^2$
 Inercia respecto al eje horizontal que pasa por su centro de masas $I = \underline{\hspace{2cm}} \text{ m}^2 \cdot \text{mm}^2$
 Módulo resistente mínimo, en régimen elástico, respecto al mismo eje. $W_e = \underline{\hspace{2cm}} \text{ m} \cdot \text{mm}$

SECCIÓN DE ACERO EN DOBLE T: CALCULO DE LA CARACTERÍSTICAS MECÁNICAS. e= 50mm



Área de la sección $A = \underline{\hspace{2cm}} \text{ mm}^2$
 Posición del centro de masas $y = \underline{\hspace{2cm}} \text{ mm}^2$
 Inercia respecto al eje horizontal que pasa por su centro de masas $I = \underline{\hspace{2cm}} \text{ m}^2 \cdot \text{mm}^2$
 Módulo resistente mínimo, en régimen elástico, respecto al mismo eje. $W_e = \underline{\hspace{2cm}} \text{ m} \cdot \text{mm}$



ESTRUCTURAS 1. PLAN 2010

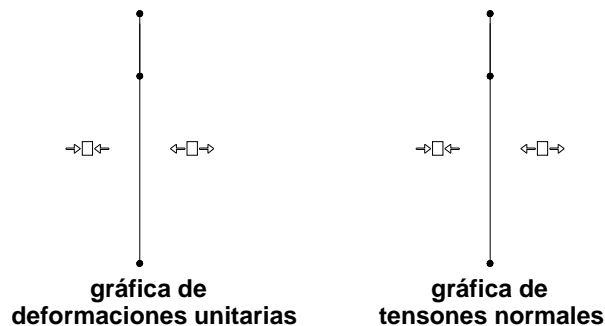
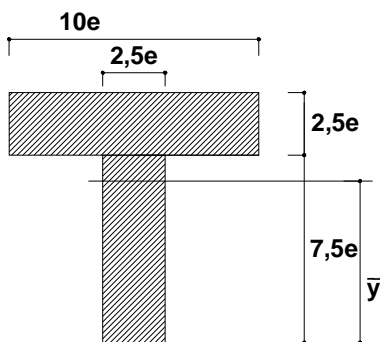
CURSO 2012-13. SEMESTRE DE OTOÑO

Y Ahora se van a representar gráficas de deformación unitaria y de tensiones normales, y además, cuando sea posible, se estudiará la situación **PLÁSTICA**.

SECCIÓN DE MADERA. $e = 50\text{mm}$

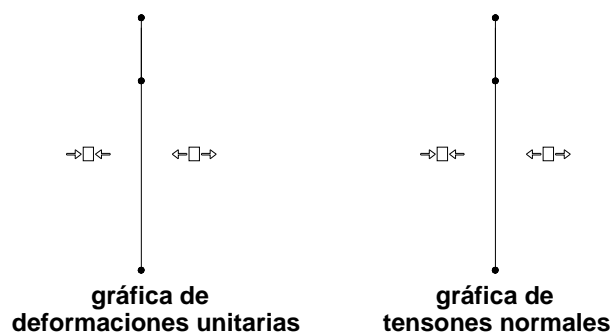
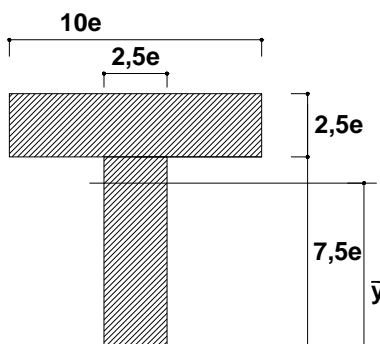
En todo los casos se representa el caso de un **momento positivo** (tracciones en la cara inferior)

Caso 1. Cuando las tensiones máximas en alguno de los extremos alcanza un valor $\sigma_{\max} = f_{\sigma}$. Además de dibujar los diagramas indicados, calcular el momento máximo (M_f) que resiste la sección (en régimen elástico por tanto), y el brazo de palanca asociado (z_f)



$M_f =$	kN/m
$z_f =$	mm

Caso 2. Cuando las tensiones máximas en alguno de los extremos alcanza un valor $\sigma_{\max} = \sigma_e$. Además de dibujar los diagramas indicados, calcular el momento máximo (M_e) que resiste la sección (en régimen elástico por tanto), y el brazo de palanca asociado (z_e)

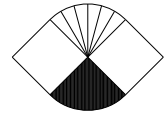


$M_e =$	kN/m
$z_e =$	mm

Comentar brevemente además por qué **NO tiene sentido** aquí calcular el **MOMENTO PLÁSTICO**



POLITÉCNICA



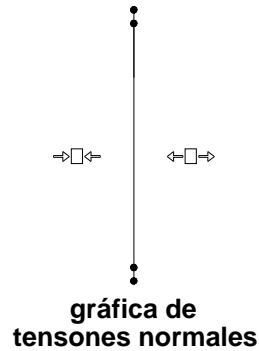
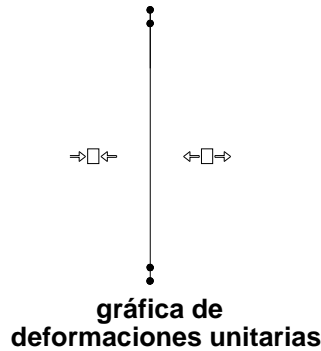
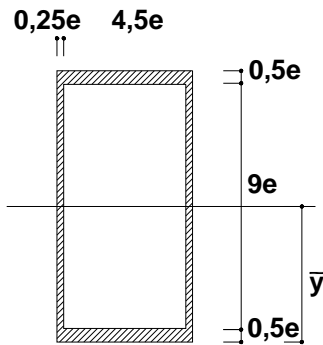
ESTRUCTURAS 1. PLAN 2010

CURSO 2012-13. SEMESTRE DE OTOÑO

SECCIÓN DE ACERO EN CAJÓN. $e=50\text{mm}$

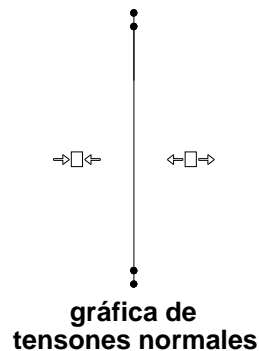
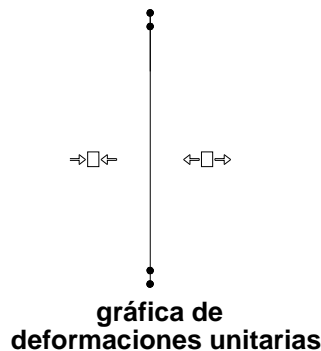
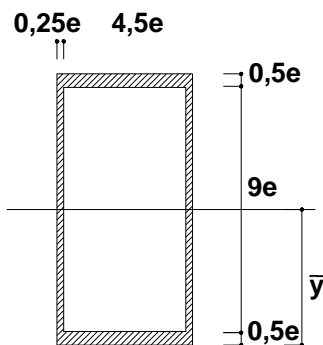
En todo los casos se representa el caso de un **momento positivo** (tracciones en la cara inferior)

Caso 1. Cuando las tensiones máximas en alguno de los extremos alcanza un valor $\sigma_{\max} = f_{\sigma}$.



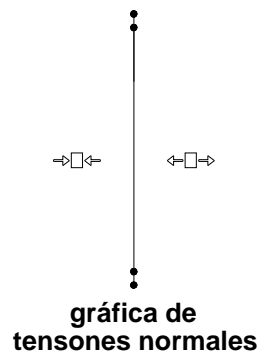
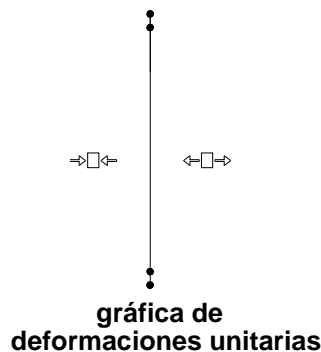
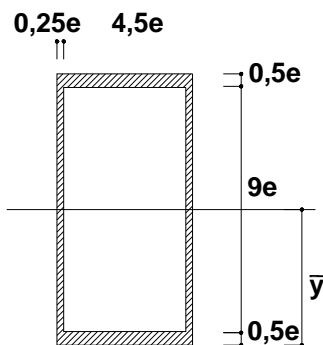
$M_f =$	kN/m	$z_f =$	mm
---------	------	---------	----

Caso 2. Cuando las tensiones máximas en alguno de los extremos alcanza un valor $\sigma_{\max} = \sigma_e$.



$M_e =$	kN/m	$z_e =$	mm
---------	------	---------	----

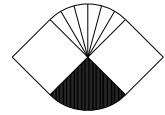
Caso 3. Cuando la sección alcanza su MOMENTO PLÁSTICO (M_p)



$M_p =$	kN/m	$z_p =$	mm	Modulo resistente plástico $W_p =$	$\text{m} \cdot \text{mm}^2$
---------	------	---------	----	------------------------------------	------------------------------



POLITÉCNICA



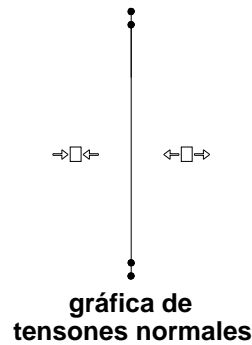
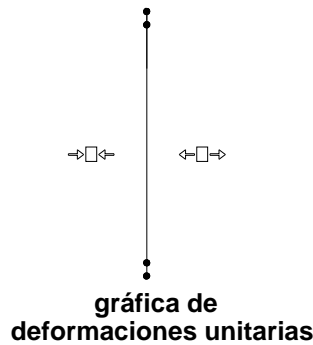
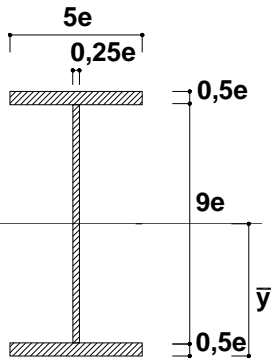
ESTRUCTURAS 1. PLAN 2010

CURSO 2012-13. SEMESTRE DE OTOÑO

SECCIÓN DE ACERO EN DOBLE T. $e=50\text{mm}$

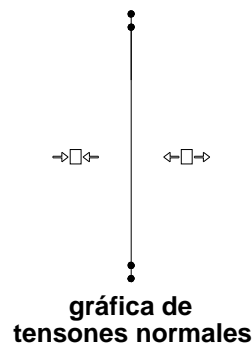
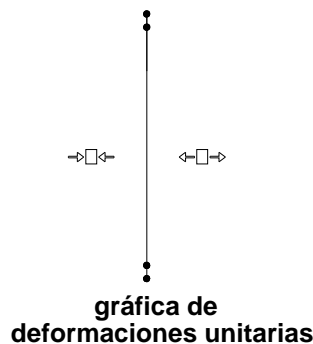
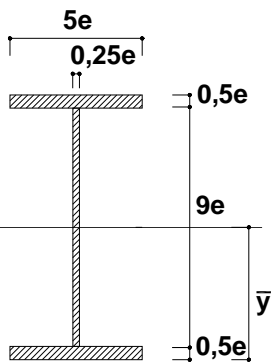
En todo los casos se representa el caso de un **momento positivo** (tracciones en la cara inferior)

Caso 1. Cuando las tensiones máximas en alguno de los extremos alcanza un valor $\sigma_{\max} = f_{\sigma}$.



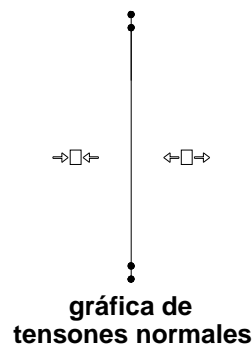
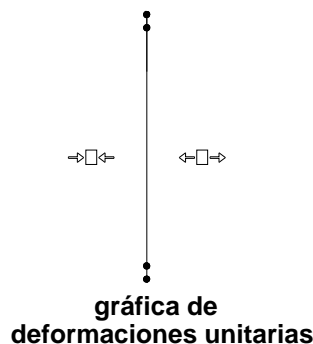
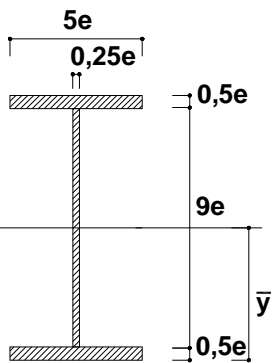
$M_f =$	kN/m	$z_f =$	mm
---------	------	---------	----

Caso 2. Cuando las tensiones máximas en alguno de los extremos alcanza un valor $\sigma_{\max} = \sigma_e$.

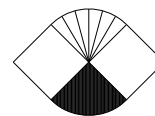


$M_e =$	kN/m	$z_e =$	mm
---------	------	---------	----

Caso 3. Cuando la sección alcanza su MOMENTO PLÁSTICO (M_p)



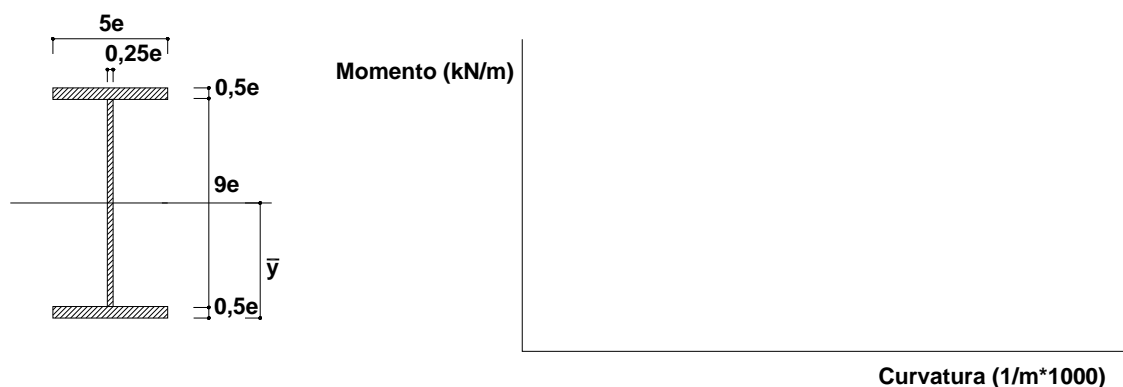
$M_p =$	kN/m	$z_p =$	mm	Modulo resistente plástico $W_p =$	$\text{m} \cdot \text{mm}^2$
---------	------	---------	----	------------------------------------	------------------------------



ESTRUCTURAS 1. PLAN 2010 CURSO 2012-13. SEMESTRE DE OTOÑO

DIAGRAMA MOMENTO CURVATURA PARA EL ACERO

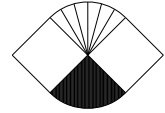
Se construirá la **gráfica momento-curvatura** para una de las secciones de **ACERO**. En madera tiene menos interés porque el material no tiene rango plástico, y con hacerlo para una sección, **la doble T**, es suficiente. Esta es una gráfica importante para entender en el futuro el **ANÁLISIS LÍMITE** de estructuras PORTICADAS.



DIMENSIONADO

Finalmente vamos a **dimensionar la viga** representada en la siguiente figura, en las tres secciones antes estudiadas y en rango **ELÁSTICO** para que **resista a MOMENTO**; siendo **P=30 kN** y **a=2 m**.

	<p>DOBLE T CAJON</p>
<p>↑ ↓</p> <p>CORTANTES (kN)</p>	<p>Canto d del perfil mínimo necesario usando un perfil de acero DOBLE T.</p> <p>$d_{\text{doblet}} = \text{mm}$</p> <p>Canto d del perfil mínimo necesario usando un perfil de acero en CAJON.</p> <p>$d_{\text{cajon}} = \text{mm}$</p>
<p>MOMENTOS (kN m)</p>	<p>Canto d del perfil mínimo necesario usando un perfil de madera en T.</p> <p>$d_{\text{madera}} = \text{mm}$</p>



ESTRUCTURAS 1. PLAN 2010

CURSO 2012-13. SEMESTRE DE OTOÑO

Tema: FLEXIÓN con ALMA LLENA: RESISTENCIA A CORTANTE	Práctica 10
---	--------------------

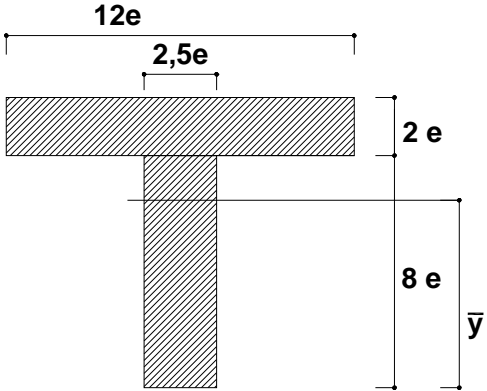
MATERIALES

Seguimos usando los materiales definidos en la práctica anterior, que recordemos son:

Para la sección con MADERA , se trabajará con un MODELO ELÁSTICO (lo más habitual debido a que la rotura en tracción es frágil) con las siguientes propiedades:	Para las secciones con ACERO , se trabajará con un MODELO ELÁSTO-PLÁSTICO (también lo más habitual) con las siguientes propiedades:
Madera: Módulo de Young $E = 10 \text{ kN/mm}^2$. Tensión en el límite elástico: $\sigma_e = 18 \text{ N/mm}^2$. Tensión normal segura $f_o = 9 \text{ N/mm}^2$. Tensión tangencial segura $f_t = 1,2 \text{ N/mm}^2$.	Acero: Módulo de Young $E = 200 \text{ kN/mm}^2$. Tensión en el límite elástico: $\sigma_e = 255 \text{ N/mm}^2$. Deformación unitaria última: $\epsilon_u = 10 \text{ mm/m}$. Tensión normal segura $f_o = 170 \text{ N/mm}^2$. Tensión tangencial segura $f_t = 100 \text{ N/mm}^2$.

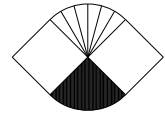
SECCIONES

Además se va a trabajar con sólo dos secciones, una de **madera en T** que aparece en la figura inferior, y otra en doble T para **el acero**, concretamente la IPE, usando la serie **estándar de perfiles IPE**, de modo que el alumno se acostumbre a su uso (ver hoja de Datos Estructurales). En el caso de la **madera**, con los **valores genéricos del módulo resistente elástico, W_e** , y de su **inercia, I_e** , se puede **derivar todo lo necesario**.

	<table border="1"> <tr> <td>$W_e =$</td> <td>e^3</td> </tr> <tr> <td>$I_e =$</td> <td>e^4</td> </tr> </table> <p>Con los dos valores anteriores, definir el valor general del centro de gravedad en función del parámetro e.</p> <table border="1"> <tr> <td>$y_{cdg} =$</td> <td>e</td> </tr> </table>	$W_e =$	e^3	$I_e =$	e^4	$y_{cdg} =$	e
$W_e =$	e^3						
$I_e =$	e^4						
$y_{cdg} =$	e						



POLITÉCNICA

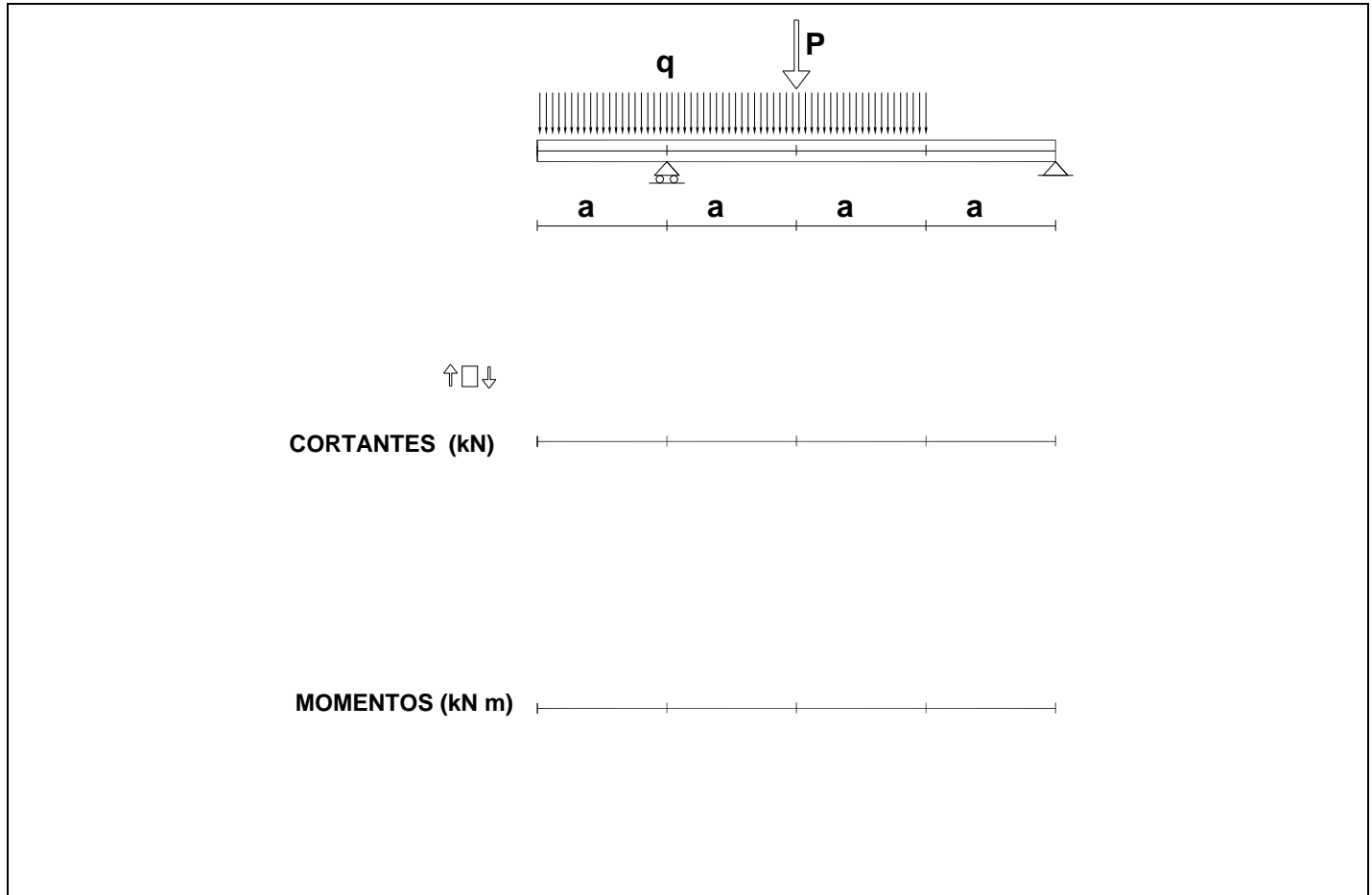


ESTRUCTURAS 1. PLAN 2010

CURSO 2012-13. SEMESTRE DE OTOÑO

Se va a dimensionar a FLECTOR y a CORTANTE, en rango ELÁSTICO, la viga representada en la siguiente figura, siendo $q=15 \text{ kN/m}$; $P=40 \text{ kN}$ y $a=2 \text{ m}$.

La primera cuestión a abordar es representar y acotar las GRÁFICAS DE MOMENTOS Y CORTANTES.

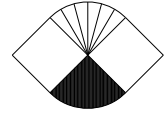


Momento máximo $M_{\max} =$ kN/m	Cortante máximo $V_{\max} =$ kN
Módulo resistente necesario en ACERO $W_{\min} =$ mm²·m	Área de cortante equivalente necesaria en ACERO $A_e =$ mm²
Módulo resistente necesario en MADERA $W_{\min} =$ mm²·m	Área de cortante equivalente necesaria en MADERA $A_e =$ mm²

Con esos valores ya podemos seleccionar el perfil para que resista a momento y cortante en las dos secciones planteadas; y por tanto elegir un perfil final que cumpla ambas condiciones.

MADERA en sección T	ACERO con IPE
Canto d del perfil T de madera para que resista el flector $d_{\text{flector}} =$ mm	Canto d del perfil IPE de acero para que resista el flector $d_{\text{flector}} =$ mm
Canto d del perfil T de madera para que resista el cortante $d_{\text{cortante}} =$ mm	Canto d del perfil IPE de acero para que resista el cortante $d_{\text{cortante}} =$ mm
Canto d del perfil T de madera finalmente elegido $d_{\text{madera}} =$ mm	Canto d del perfil IPE de acero finalmente elegido $d_{\text{acero}} =$ mm

Se recuerda a alumno que estamos prescindiendo de la interacción entre el momento y el cortante por ahora, y por eso podemos comprobar ambos esfuerzos de modo independiente, cosa que no es estrictamente correcta. El criterio de rotura se tratará en otros cursos con más profundidad.

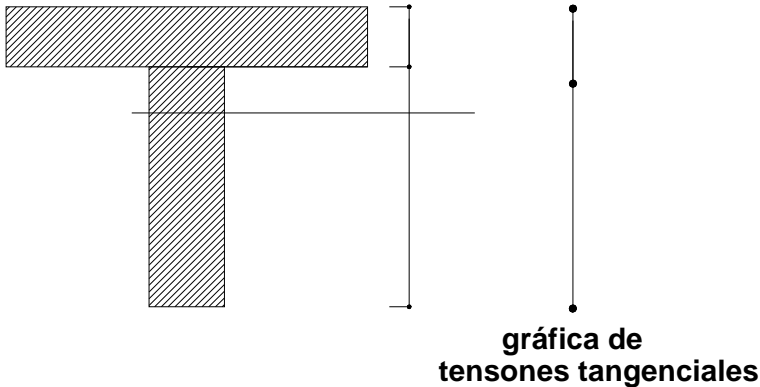


ESTRUCTURAS 1. PLAN 2010

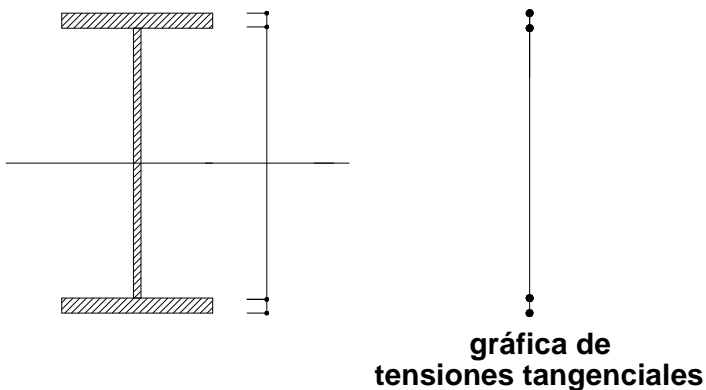
CURSO 2012-13. SEMESTRE DE OTOÑO

El siguiente paso será **representar el diagrama de tensiones tangenciales (N/mm^2) para los dos perfiles finalmente elegidos.**

Para MADERA



Para ACERO

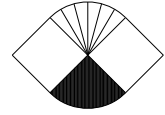


En el caso de la madera, el perfil se fabricaría con **dos escuadrías unidas por colas** o por medios mecánicos. En el caso de que se use cola, y **para la sección finalmente ELEGIDA**, ¿qué **tensión tangencial segura debe suministrar la cola, $f_{\tau,cola}$** , para que la unión entre ambas escuadrías resista a rasante?

$f_{\tau,cola} =$	N/mm^2
-------------------	----------

En el caso del acero, cuando se trate de un perfil IPE estándar, la comprobación a tensiones tangenciales entre el encuentro de alma y ala no es problema, pero sí cuando se diseñara un **perfil ARMADO** (es decir, un perfil fabricado soldando platabandas). Por ello, y como ejercicio que puede ser útil en esos casos, se **calculará el valor de la tensión tangencial máxima en el perfil IPE finalmente ELEGIDO en el encuentro entre alma y ala, τ_{max}** .

$\tau_{max} =$	N/mm^2
----------------	----------



ESTRUCTURAS 1. PLAN 2010 CURSO 2012-13. SEMESTRE DE OTOÑO

Tema: **FLEXIÓN con ALMA LLENA: RIGIDEZ**

Práctica 11

MATERIALES

Seguimos usando los materiales definidos en la práctica anterior, que recordemos son:

Para la sección con MADERA , se trabajará con un MODELO ELÁSTICO (lo más habitual debido a que la rotura en tracción es frágil) con las siguientes propiedades:	Para las secciones con ACERO , se trabajará con un MODELO ELÁSTO-PLÁSTICO (también lo más habitual) con las siguientes propiedades:
Madera: Módulo de Young $E = 10 \text{ kN/mm}^2$. Tensión en el límite elástico: $\sigma_e = 18 \text{ N/mm}^2$. Tensión normal segura $f_\sigma = 9 \text{ N/mm}^2$. Tensión tangencial segura $f_\tau = 1,2 \text{ N/mm}^2$.	Acero: Módulo de Young $E = 200 \text{ kN/mm}^2$. Tensión en el límite elástico: $\sigma_e = 255 \text{ N/mm}^2$. Deformación unitaria última: $\epsilon_u = 10 \text{ mm/m}$. Tensión normal segura $f_\sigma = 170 \text{ N/mm}^2$. Tensión tangencial segura $f_\tau = 100 \text{ N/mm}^2$.

SECCIONES

Para esta práctica se va a usar **sólo perfiles IPE estándar (ver hoja de Datos Estructurales)**.

El **objetivo** de esta práctica es comprobar la rigidez de una viga ya dimensionada y elegir el perfil para que cumpla el requisito de rigidez.

PRÁCTICA 09 y 10: FLEXIÓN SIMPLE CON ALMA LLENA: RESISTENCIA

El objetivo de las dos siguientes prácticas es analizar una estructura adintelada. Para ello dividimos el trabajo en dos etapas bien diferenciadas:

- a) **(Práctica 9: Resistencia a momento)** dimensionado de la estructura para que resista el momento flector.
- b) **(Práctica 10: Resistencia a cortante)** dimensionado de la estructura para que resista el cortante.

El orden establecido en la comprobación de la resistencia no es arbitrario. Lo habitual es que la comprobación de la resistencia a momento sea más crítica que la de cortante, lo que hace que se comience el dimensionado para resistir al flector y que luego ya sobre material para resistir el cortante.

DEFINICIÓN DE LOS MATERIALES

MADERA

Para se sección de madera, se trabajará con un modelo elástico, ya que al tener una rotura en tracción frágil no admite trabajar en modelo plástico.

Sus propiedades son:

Madera:

Módulo de Young $E = 10 \text{ kN/mm}^2$.

Tensión en el límite elástico: $\sigma_e = 16 \text{ N/mm}^2$.

Tensión normal segura $f_\sigma = 8 \text{ N/mm}^2$.

Tensión tangencial segura $f_\tau = 1 \text{ N/mm}^2$.

ACERO

Para las secciones de acero, se trabajará con un modelo elástico-plástico.

Sus propiedades son:

Acero:

Módulo de Young $E = 200 \text{ kN/mm}^2$.

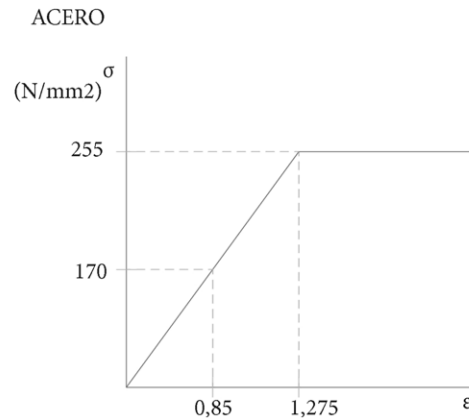
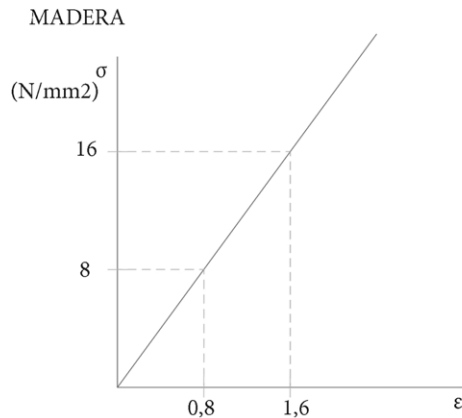
Tensión en el límite elástico: $\sigma_e = 255 \text{ N/mm}^2$.

Deformación unitaria última: $\epsilon_U = 10 \text{ mm/m}$.

Tensión normal segura $f_\sigma = 170 \text{ N/mm}^2$.

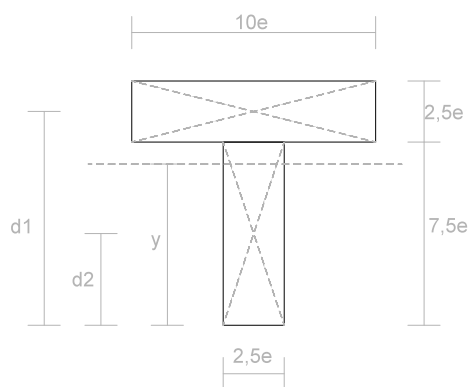
Tensión tangencial segura $f_\tau = 100 \text{ N/mm}^2$

Lo primero será representar para cada material un diagrama σ (ordenadas)- ϵ (abscisas): $\sigma = E \cdot \epsilon$



Con estas propiedades, primero trabajaremos con MADERA y luego con ACERO, y de modo que se estudien tres de las secciones más habituales que se usan en estructuras de edificación.

SECCIÓN DE MADERA: CÁLCULO DE LA CARACTERÍSTICAS MECÁNICAS. $e= 50mm$



Área de la sección:

$$A = (10.e.2,5.e) + (7,5.e.2,5.e) = 25.e^2 + 18,75.e^2 = 43,75.e^2$$

$$A = 62500 + 46875 = 109375mm^2$$

Posición del centro de masas:

$$m_1.d_1 + m_2.d_2 = (m_1 + m_2).y$$

$$d_1 = 1,25.e + 7,5e$$

$$d_2 = 3,75.e$$

$$y = 6,607.e = 330,35mm$$

Inercia respecto al eje horizontal que pasa por su centro de masas:

$$I_T = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \frac{1}{12} \cdot 10.e \cdot (2,5.e)^3 + 62500(1,25.e(7,5.e - y))^2$$

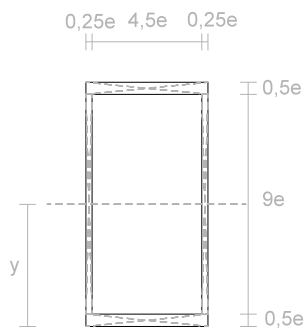
$$I_2 = \frac{1}{12} \cdot 2,5.e \cdot (7,5.e)^3 + 46875(y - 3,75.e)^2$$

$$I_T = 368,77.e^4 = 2304,8mm^2.m^2$$

Módulo resistente mínimo, en régimen elástico, respecto al mismo eje:

$$W_e = \frac{I_T}{Y_{max}} = 96,68.e^3 = 6976,85mm^2.m$$

SECCIÓN DE ACERO EN CAJÓN: CÁLCULO DE LA CARACTERÍSTICAS MECÁNICAS. e= 50mm



Área de la sección:

$$A = (5.e \cdot 0,5.e) \cdot 2 + (9.e \cdot 0,25.e) \cdot 2 = 5.e^2 + 4,5.e^2 = 9,5.e^2$$

$$A = 6250 \cdot 2 + 2 \cdot 5625 = 23750 \text{mm}^2$$

Posición del centro de masas:

por simetría: $y = 5.e = 250 \text{mm}$

Inercia respecto al eje horizontal que pasa por su centro de masas:

$$I_T = I_1 - I_2$$

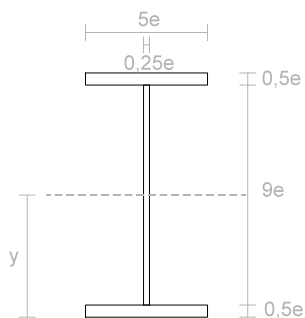
$$I_T = \frac{1}{12} \cdot 5.e \cdot (10.e)^3 - \frac{1}{12} \cdot 4,5.e \cdot (9.e)^3$$

$$I_T = 143,3.e^4 = 895,57 \text{mm}^2 \cdot \text{m}^2$$

Módulo resistente mínimo, en régimen elástico, respecto al mismo eje:

$$W_e = \frac{I_T}{Y_{\max}} = 28,66.e^3 = 3582,29 \text{mm}^2 \cdot \text{m}$$

SECCIÓN DE ACERO EN DOBLE T: CÁLCULO DE LA CARACTERÍSTICAS MECÁNICAS. e= 50mm



Área de la sección:

$$A = (5.e \cdot 0,5.e) \cdot 2 + (9.e \cdot 0,25.e) = 5.e^2 + 2,25.e^2 = 7,25.e^2$$

$$A = 6250 \cdot 2 + 5625 = 18125 \text{mm}^2$$

Posición del centro de masas:

por simetría: $y = 5.e = 250 \text{mm}$

Inercia respecto al eje horizontal que pasa por su

centro de masas:

$$I_T = I_1 \cdot 2 + I_2$$

$$I_1 = \frac{1}{12} \cdot 5.e \cdot (0,5.e)^3 + (6250 \cdot (4,75.e))^2$$

$$I_2 = \frac{1}{12} \cdot 0,25.e \cdot (9.e)^3$$

$$I_T = 128,10.e^4 = 800,65 \text{mm}^2 \cdot \text{m}^2$$

Módulo resistente mínimo, en régimen elástico, respecto al mismo eje:

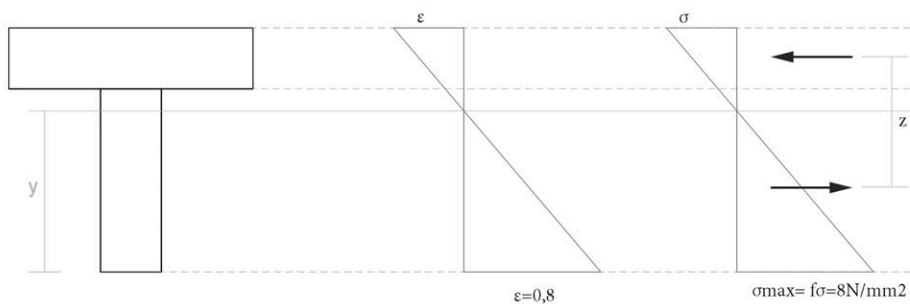
$$W_e = \frac{I_T}{Y_{\max}} = 25,62 \cdot e^3 = 3202,6 \text{ mm}^2 \cdot m$$

Una vez determinas las características mecánicas de las tres secciones a estudiar, pasaremos a representar las gráficas de deformación unitaria y de tensiones normales, y además, cuando sea posible, se estudiará la situación plástica.

SECCIÓN DE MADERA. e= 50mm

En todo los casos se representa el caso de un momento positivo (tracciones en la cara inferior).

Caso 1. Cuando las tensiones máximas en alguno de los extremos alcanza un valor $\sigma_{\max} = f_{\sigma}$. Además de dibujar los diagramas indicados, calcular el momento máximo (M_f) que resiste la sección (en régimen elástico por tanto), y el brazo de palanca asociado (z_f).

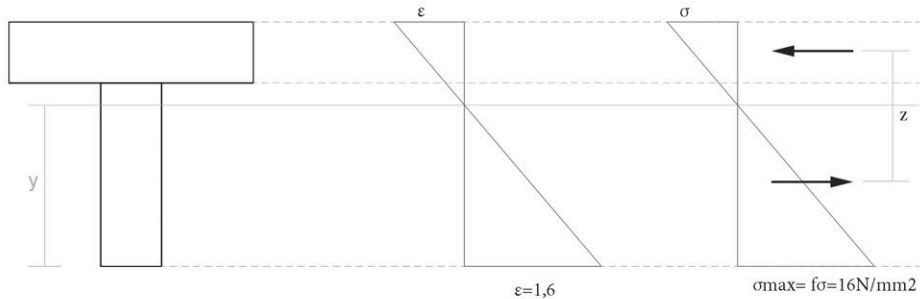


$$M = \sigma_{\max} \cdot W_e = 8 \text{ N/mm}^2 \cdot 6976850 \text{ mm}^3$$

$$M = 558144800 \text{ N.mm} = 558,14 \text{ kN.m}$$

$$z_f = \frac{I_T}{S_{\max}} = \frac{I_T}{A_2 \cdot d_2} = \frac{2304800000}{2,5 \cdot e \cdot y \cdot (y/2)} = 337,91 \text{ mm}$$

Caso 2. El mismo estudio se puede realizar cuando las tensiones máximas en alguno de los extremos alcanza un valor $\sigma_{\max} = \sigma_e$. Además de dibujar los diagramas indicados, calcular el momento máximo (M_e) que resiste la sección (en régimen elástico por tanto), y el brazo de palanca asociado (z_e)



$$M = \sigma_{\max} \cdot W_e = 16 \text{ N/mm}^2 \cdot 6976850 \text{ mm}^3$$

$$M = 111629600 \text{ N}\cdot\text{mm} = 111,63 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

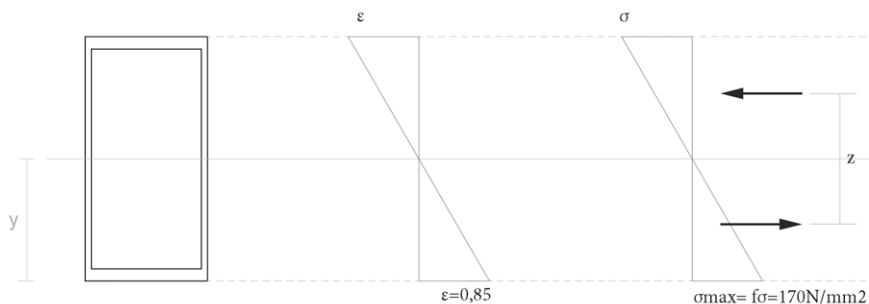
$$z_e = z_f = 337,91 \text{ mm}$$

En este caso, no habrá estado plástico, debido a su frágil rotura en tracción.

SECCIÓN DE ACERO EN CAJÓN. e= 50mm

En todo los casos se representa el caso de un momento positivo (tracciones en la cara inferior).

Caso 1. Cuando las tensiones máximas en alguno de los extremos alcanza un valor $\sigma_{\max} = f_{\sigma}$.

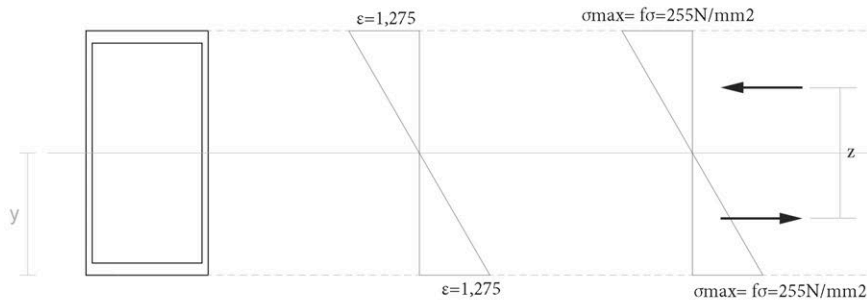


$$M = \sigma_{\max} \cdot W_e = 170 \text{ N/mm}^2 \cdot 3582290 \text{ mm}^3$$

$$M = 608989300 \text{ N}\cdot\text{mm} = 608,98 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$z_f = \frac{I_T}{S_{\max}} = \frac{I_T}{A_2 \cdot d_2} = \frac{895570000}{(5 \cdot e \cdot 5 \cdot e \cdot 2,5 \cdot e) - (4,5 \cdot e \cdot 4,5 \cdot e \cdot 2,25 \cdot e)} = 423 \text{ mm}$$

Caso 2. El mismo estudio se puede realizar cuando las tensiones máximas en alguno de los extremos alcanza un valor $\sigma_{\max} = \sigma_e$. Además de dibujar los diagramas indicados, calcular el momento máximo (M_e) que resiste la sección (en régimen elástico por tanto), y el brazo de palanca asociado (z_e)

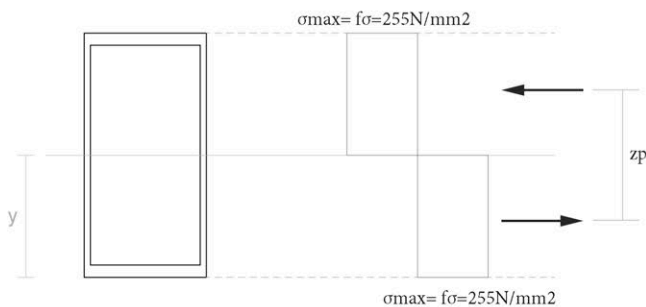


$$M = \sigma_{\max} \cdot W_e = 255 \text{ N/mm}^2 \cdot 3582290 \text{ mm}^3$$

$$M = 313484375,9 \text{ N}\cdot\text{mm} = 313,48 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$z_e = z_f = 423 \text{ mm}$$

En este caso, en acero, se estudiará también el estado plástico:



$$M_p = U_c \cdot a \cdot 2 = [U_1 \cdot d_1 + 2 \cdot U_2 \cdot d_2] \cdot 2$$

$$U_c = U_1 + 2 \cdot U_2$$

$$d_1 = 4,75 \cdot e = 237,5 \text{ mm}$$

$$d_2 = 2,25 \cdot e = 112,5 \text{ mm}$$

$$M_p = 1194515625 \text{ mm}\cdot\text{N} = 1194,5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

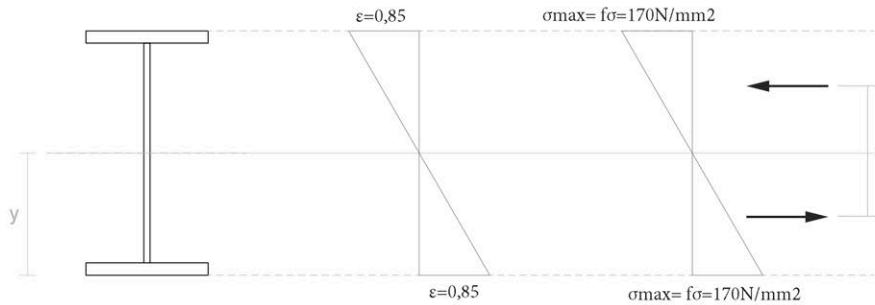
$$W_p = \frac{M_p}{\sigma_{\max}} = \frac{1194515625}{255} = 37,48 \cdot e^3 = 4684,37 \text{ mm}^2 \cdot \text{m}$$

$$M_p = U_c \cdot z_p \rightarrow z_p = 394,5 \text{ mm}$$

SECCIÓN DE ACERO EN DOBLE T. $e=50\text{mm}$

En todo los casos se representa el caso de un momento positivo (tracciones en la cara inferior).

Caso 1. Cuando las tensiones máximas en alguno de los extremos alcanza un valor $\sigma_{\max} = f_{\sigma}$

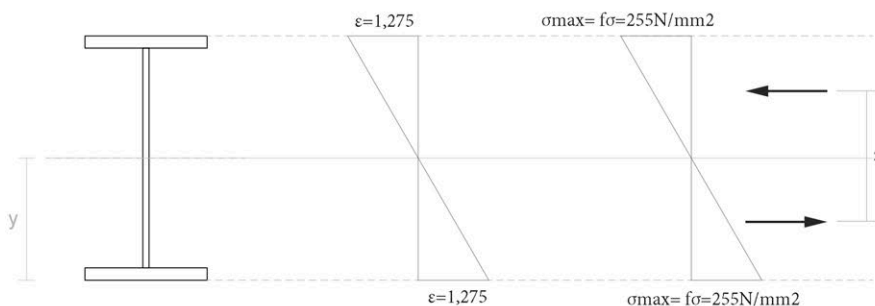


$$M = \sigma_{\max} \cdot W_e = 170 \text{ N/mm}^2 \cdot 3202600 \text{ mm}^3$$

$$M = 544442708,9 \text{ N.mm} = 544,44 \text{ kN.m}$$

$$z_f = \frac{I_T}{S_{\max}} = \frac{I_T}{A_2 \cdot d_2} = \frac{800651041,6}{(5 \cdot e \cdot 5 \cdot e \cdot 2,5 \cdot e) - (2 \cdot (2,375 \cdot e \cdot 4,5 \cdot e \cdot 2,25 \cdot e))} = 444,61 \text{ mm}$$

Caso 2. El mismo estudio se puede realizar cuando las tensiones máximas en alguno de los extremos alcanza un valor $\sigma_{\max} = \sigma_e$. Además de dibujar los diagramas indicados, calcular el momento máximo (M_e) que resiste la sección (en régimen elástico por tanto), y el brazo de palanca asociado (z_e)

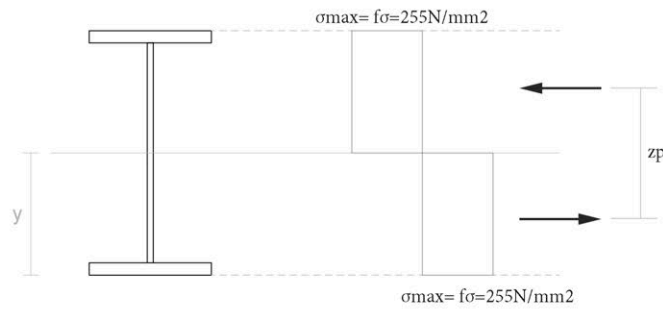


$$M = \sigma_{\max} \cdot W_e = 255 \text{ N/mm}^2 \cdot 3202600 \text{ mm}^3$$

$$M = 816664063,4 \text{ N.mm} = 816,6 \text{ kN.m}$$

$$z_e = z_f = 444,61 \text{ mm}$$

En este caso, en acero, se estudiará también el estado plástico:



$$M_p = U_c \cdot a \cdot 2 = [U_1 \cdot d_1 + U_2 \cdot d_2] \cdot 2$$

$$U_c = U_1 + 2 \cdot U_2$$

$$d_1 = 4,75 \cdot e = 237,5 \text{ mm}$$

$$d_2 = 2,25 \cdot e = 112,5 \text{ mm}$$

$$M_p = 918398437,5 \text{ mm} \cdot N = 918,4 \text{ kN} \cdot m$$

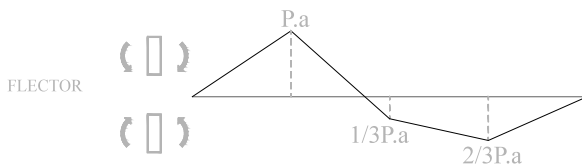
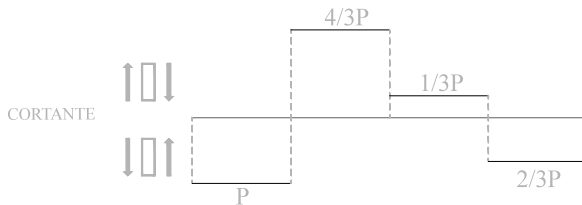
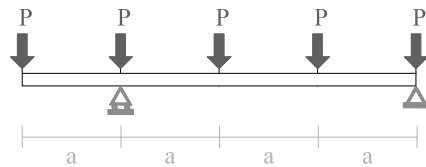
$$W_p = \frac{M_p}{\sigma_{\max}} = \frac{918398437,5}{255} = 28,81 \cdot e^3 = 3601,56 \text{ mm}^2 \cdot m$$

$$M_p = U_c \cdot z_p \rightarrow z_p = 397,4 \text{ mm}$$

Una vez definidos las tres secciones a estudiar, pasaremos al peritaje de dos de ellas, es decir, a obtener los pesos máximos que soportan dichas secciones.

PERITAJE

Finalmente vamos a realizar un ejercicio de peritaje de la viga representada en la siguiente figura en cuando a su resistencia a momento, y en rango elástico; y usando dos de las secciones sobre las que antes se ha trabajado y de la que ya se conocen sus características resistentes; siendo $a=3$ m. para ello previamente se calcularán y representarán los diagramas de cortantes y momentos en función de la carga P incógnita.



$$M = \sigma_{\max} \cdot W_e$$

$$M = P_{\max} \cdot a$$

$$P_{\max} \cdot a = 170.3582290$$

$$P_{\max} = 203kN$$

Sección de Acero Cuadrada

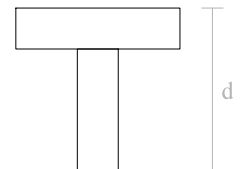
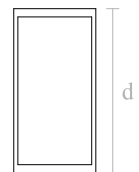
$$M = \sigma_{\max} \cdot W_e$$

$$M = P_{\max} \cdot a$$

$$P_{\max} \cdot a = 8.6976850$$

$$P_{\max} = 18,6kN$$

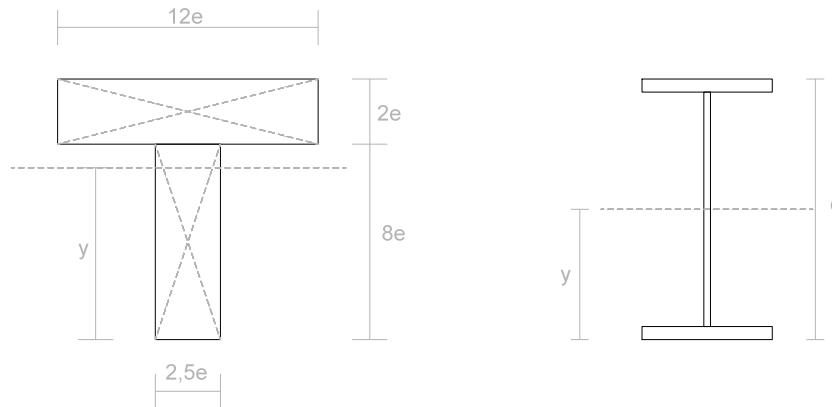
Sección de Acero Cuadrada



Ahora realizaremos lo contrario, es decir, pasaremos a dimensionar una sección en función de unas cargas dadas.

SECCIONES

Además se va a trabajar con sólo dos secciones, una de madera en T que aparece en la figura inferior, y otra en doble T para el acero, concretamente la IPE, usando la serie estándar de perfiles IPE, de modo que el alumno se



acostumbre a su uso (ver hoja de Datos Estructurales). En el caso de la madera, con los valores genéricos del módulo resistente elástico, W_e , de su inercia, I_e , y de su momento estático máximo, S_{\max} (también en régimen elástico, y de un cualquiera de las dos mitades en que divide la sección la línea neutra y respecto a dicha línea) se puede derivar todo lo necesario.

Sección en T:

$$W_e = 57,58 \cdot e^3$$

$$I_e = 387,39 \cdot e^4$$

$$S_{\max} = 56 \cdot e^3$$

$$y_{cdg} = 6,727 \cdot e \cdot z = 6,848 \cdot e$$

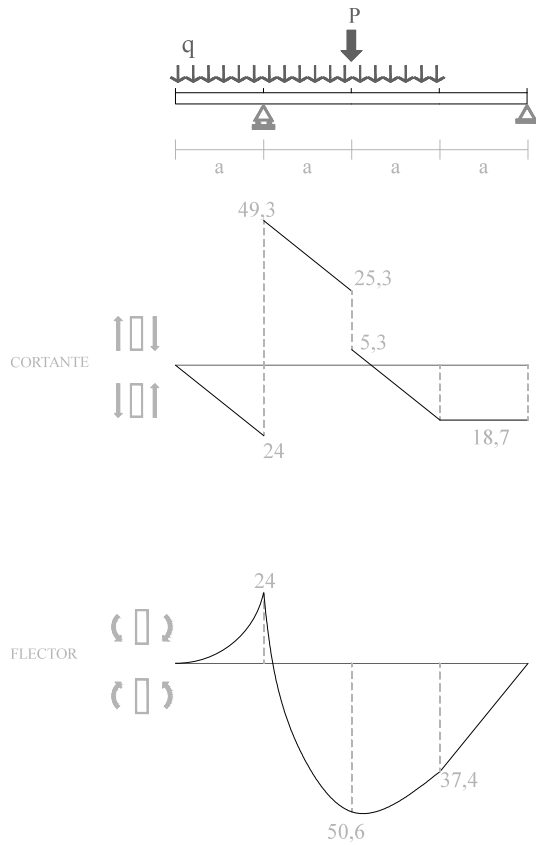
Siendo:

$$P=20\text{kN}$$

$$q=12\text{kN/m}$$

$$a=2\text{m}$$

Se va a dimensionar a flector y a cortante, en rango elástico, la viga representada en la siguiente figura:



SECCIÓN DE ACERO:

Dimensionado a Momento flector:

$$M_{\max} = 50,6 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$W_{\text{necesaria}} = \frac{M_{\max}}{\sigma_{\max}} = \frac{50,6 \cdot 10^6}{170} = 297,6 \text{ mm}^2 \cdot \text{m}$$

$$\text{IPE240} \rightarrow W = 324 > W_{\text{necesaria}} \rightarrow d = 240 \text{ mm} \rightarrow \text{ok}$$

Dimensionado a Cortante:

$$V_{\max} = 49,33 \text{ kN}$$

$$W_{\text{necesaria}} = f_z \cdot A_R \rightarrow A_{R\text{necesaria}} = \frac{49,33 \cdot 1000}{100} = 93,3 \text{ mm}^2$$

$$\text{IPE140} \rightarrow A_R = 578 > A_{R\text{necesaria}} \rightarrow d = 140 \text{ mm} \rightarrow \text{ok}$$

Sección definitiva de Acero: Escogeremos la más desfavorable de las dos:

$$\text{IPE240} \rightarrow d = 240 \text{ mm}$$

SECCIÓN DE MADERA:

Dimensionado a Momento flector:

$$M_{\max} = 50,6 \text{ kN.m}$$

$$W_{\text{necesaria}} = \frac{M_{\max}}{\sigma_{\max}} = \frac{50,6 \cdot 10^6}{8} = 6325 \text{ mm}^2 \cdot \text{m}$$

$$e = 47,9 \text{ mm} \rightarrow d = 10 \cdot e = 479 \text{ mm}$$

Dimensionado a Cortante:

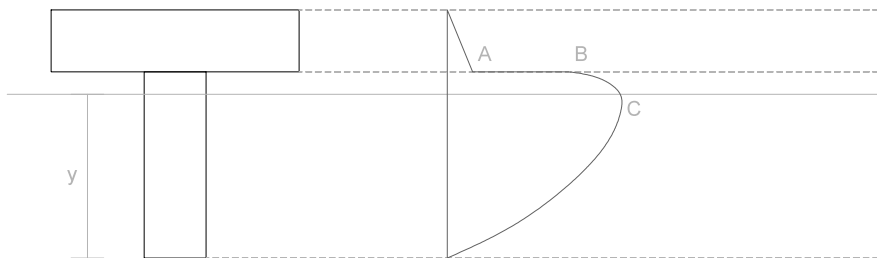
$$V_{\max} = 49,33 \text{ kN}$$

$$W_{\text{necesaria}} = f_z \cdot A_R \rightarrow A_{R\text{necesaria}} = \frac{49,33 \cdot 1000}{1} = 49,33 \text{ mm}^2 = b \cdot z$$

$$49,33 \cdot 1000 = 2,5 \cdot e \cdot 6,48 \cdot e \rightarrow e = 55,2 \text{ mm} \rightarrow d = 552 \text{ mm}$$

Sección definitiva de Acero: Escogeremos la más desfavorable de las dos: $d = 552 \text{ mm}$

El siguiente paso será representar el diagrama de tensiones tangenciales (N/mm^2) para el perfil de madera finalmente elegido.



$$\tau_{\max} = \tau_c = \frac{V \cdot S}{I \cdot b} = \frac{49,33 \cdot 10^3 \cdot 56,57 \cdot e^3}{387,39 \cdot e^4 \cdot 2,5 \cdot e} = 1,15 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_A = \frac{49,33 \cdot 10^3 \cdot (12 \cdot e \cdot 2 \cdot e \cdot e)}{387,39 \cdot e^4 \cdot 12 \cdot e} = 0,102 \text{ N/mm}^2$$

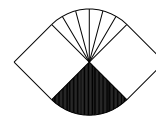
$$\tau_B = \frac{49,33 \cdot 10^3 \cdot (12 \cdot e \cdot 2 \cdot e \cdot e)}{387,39 \cdot e^4 \cdot 2,5 \cdot e} = 0,49 \text{ N/mm}^2$$

Por último, en el caso de la madera, el perfil se fabricaría con dos escuadrías unidas por colas o por medios mecánicos. En el caso de que se use cola, y para la sección finalmente elegida, ¿qué tensión tangencial segura debe suministrar la cola, τ_{cola} , para que la unión entre ambas escuadrías resista a rasante?

En este caso, para determinar la tensión tangencial segura de la cola, deberemos optar por una τ_{cola} que resista la tensión tangencial existente en la unión de dichas piezas, por lo que debe ser: $\tau_B > 0,49 \text{ N/mm}^2$.



POLITÉCNICA



ESTRUCTURAS 1. PLAN 2010

CURSO 2012-13. SEMESTRE DE OTOÑO

Tema: FLEXIÓN SIMPLE con ALMA LLENA: RIGIDEZ	Práctica 11
---	--------------------

OBJETIVO

El objetivo de la práctica es analizar una estructura adintelada, estudiando la deformación de sus elementos:

- a) (**Práctica 11: rigidez**) comprobación de la rigidez de la estructura, aunque considerando **sólo la deformación debida al momento flector** (despreciando la debida al cortante; lo habitual en casos de alma llena).

El orden establecido en la comprobación de la resistencia no es arbitrario. Lo habitual es que la comprobación de la resistencia a momento sea más crítica que la de cortante, lo que hace que se comience el dimensionado para resistir el esfuerzo de momento flector y que luego ya sobre material para resistir el cortante.

En cuanto a la rigidez, el diseñador hábil fija primero la esbeltez de la estructura para que cumpla rigidez, lo que por lo general hace que al mismo tiempo la solución resista el momento y el cortante simultáneamente. En este curso, en cuanto a rigidez en vigas de alma llena, el objetivo principal es entender y ser capaz de usar el principio de los trabajos virtuales.

Como siempre, hay además dos objetivos adicionales importantes: mostrar ejemplos del paso de la realidad al modelo de análisis, y trabajar sobre tipos estructurales muy recurrentes en la práctica profesional, cuyo funcionamiento estructural el alumno debería interiorizar.

Como se verá a continuación, el estudio de la flexión simple, asociado a la estructura ADINTELADA, permite resolver, en un gran número de casos, el FORJADO en su conjunto, lo que representa una buena parte del problema típico de las estructuras de edificación.

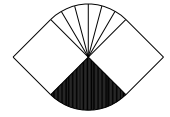
MATERIALES

Seguimos usando los materiales definidos en la práctica anterior, que recordemos son:

Para la sección con MADERA , se trabajará con un MODELO ELÁSTICO (lo más habitual debido a que la rotura en tracción es frágil) con las siguientes propiedades:	Para las secciones con ACERO , se trabajará con un MODELO ELÁSTO-PLÁSTICO (también lo más habitual) con las siguientes propiedades:
Madera: Módulo de Young E = 10 kN/mm ² . Tensión en el límite elástico: σ_e = 18 N/mm ² . Tensión normal segura f_σ = 9 N/mm ² . Tensión tangencial segura f_τ = 1,2 N/mm ² .	Acero: Módulo de Young E = 200 kN/mm ² . Tensión en el límite elástico: σ_e = 255 N/mm ² . Deformación unitaria última: ϵ_u = 10 mm/m. Tensión normal segura f_σ = 170 N/mm ² . Tensión tangencial segura f_τ = 100 N/mm ² .



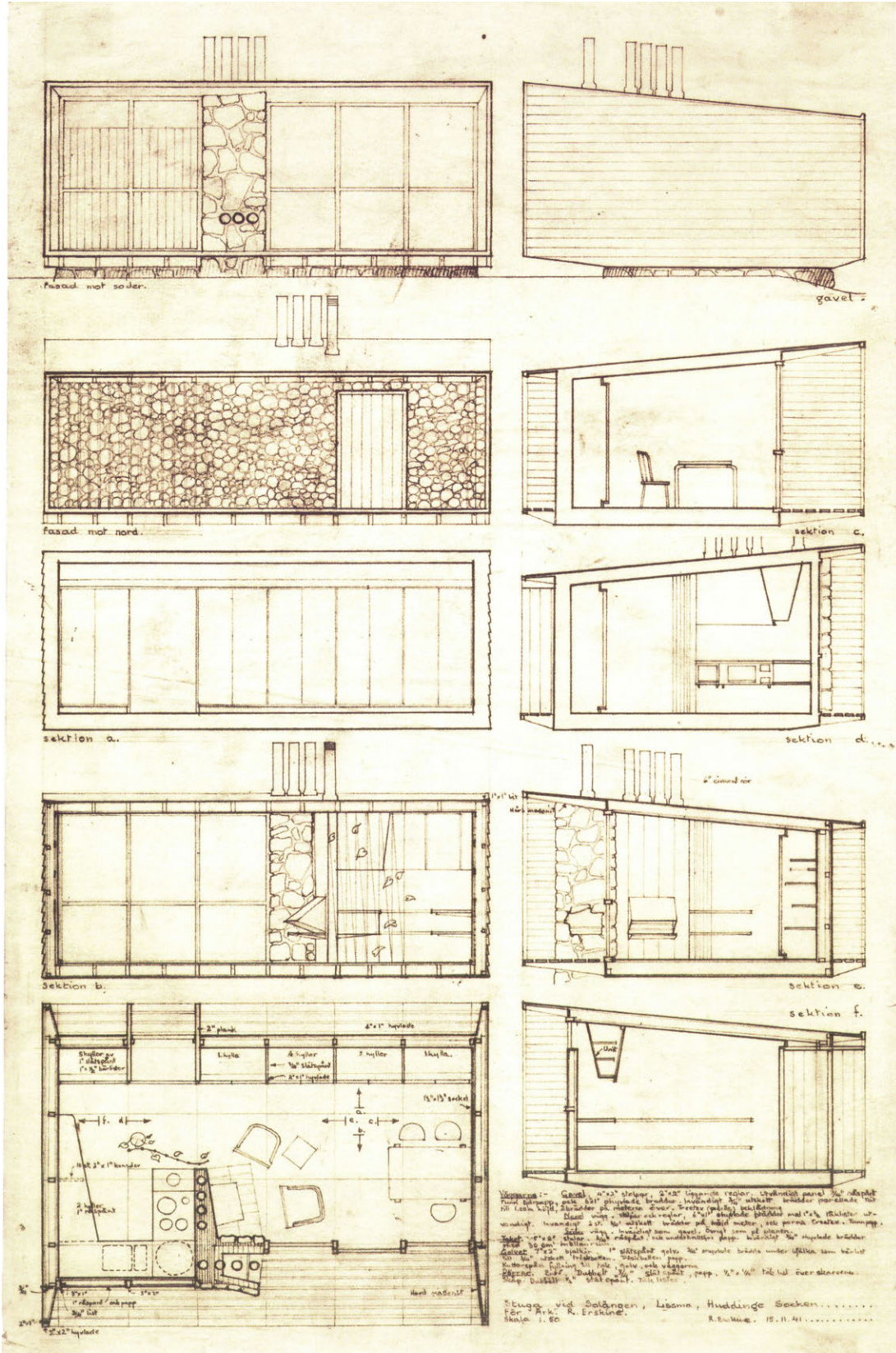
POLITÉCNICA



ESTRUCTURAS 1. PLAN 2010

CURSO 2012-13. SEMESTRE DE OTOÑO

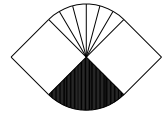
En esta práctica se van a comprobar varias piezas de una estructura adintelada, una vivienda proyectada y construida en 1942 por el arquitecto Ralph Erskine. En las figuras se muestran los planos del proyecto e imágenes de su construcción y una vez finalizada.





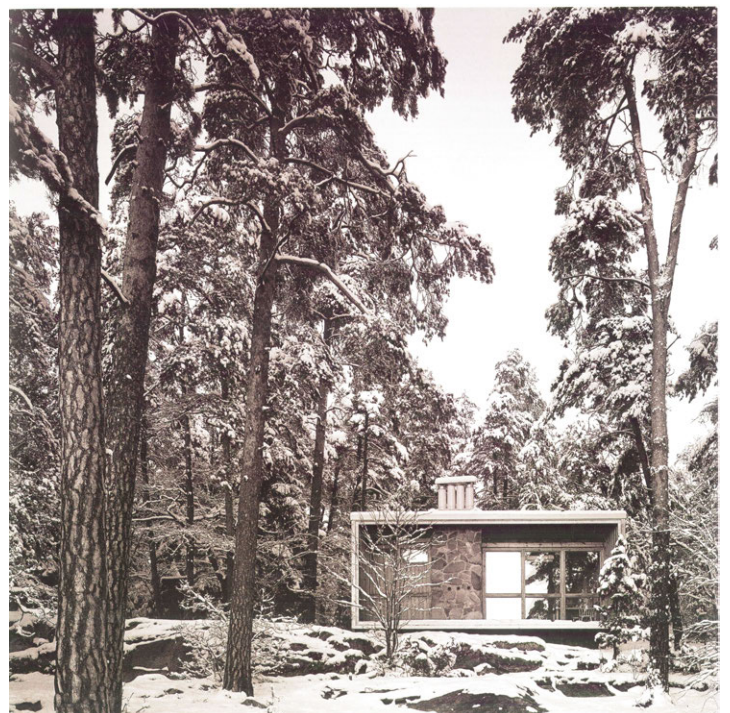
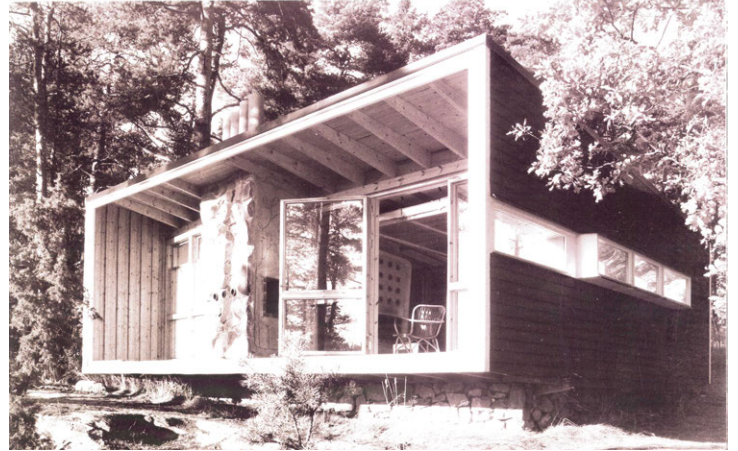
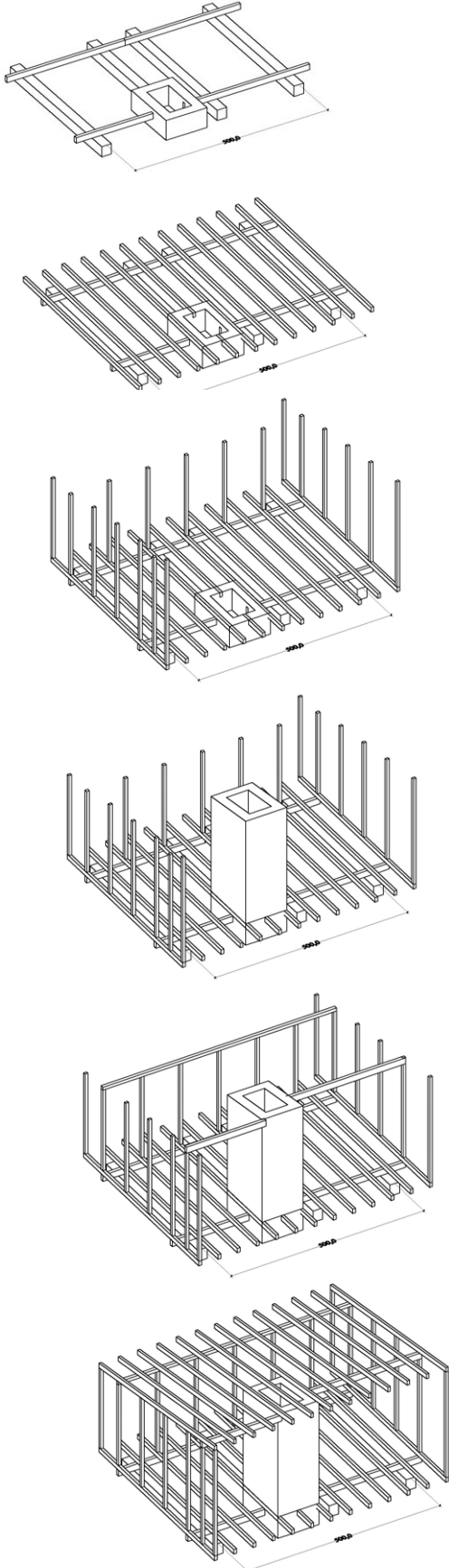
POLITÉCNICA

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID
DEPARTAMENTO DE ESTRUCTURAS DE EDIFICACIÓN



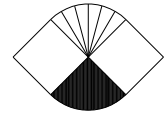
ESTRUCTURAS 1. PLAN 2010

CURSO 2012-13. SEMESTRE DE OTOÑO



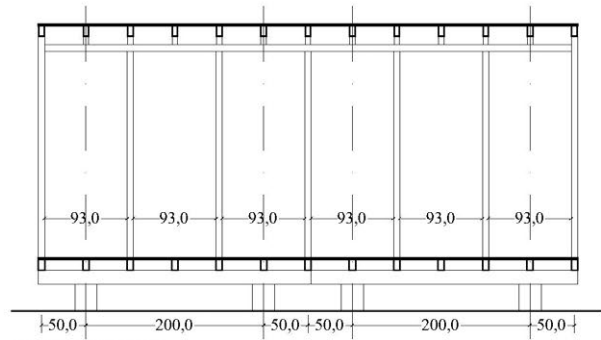


POLITÉCNICA

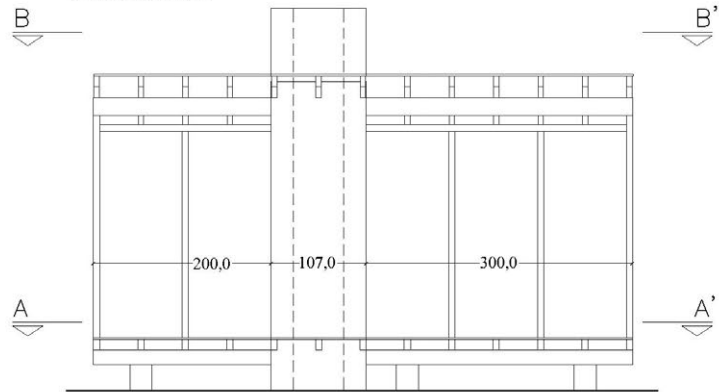


ESTRUCTURAS 1. PLAN 2010

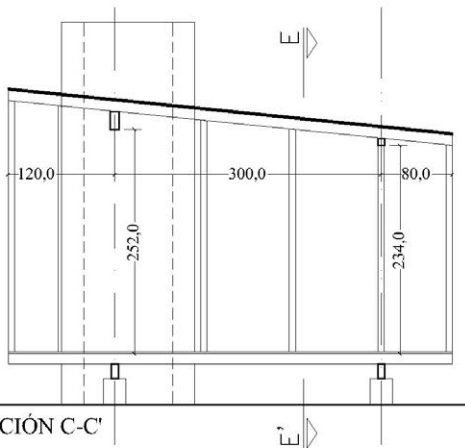
CURSO 2012-13. SEMESTRE DE OTOÑO



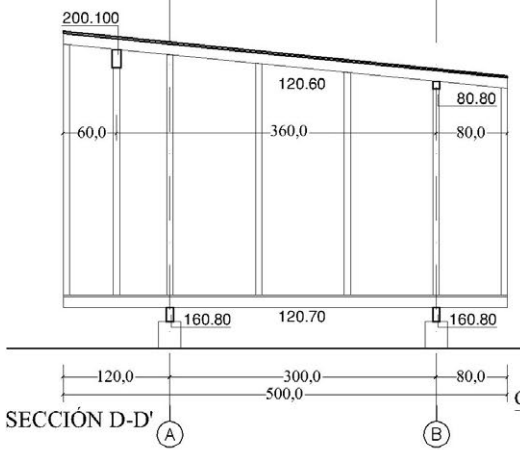
SECCIÓN E-E'



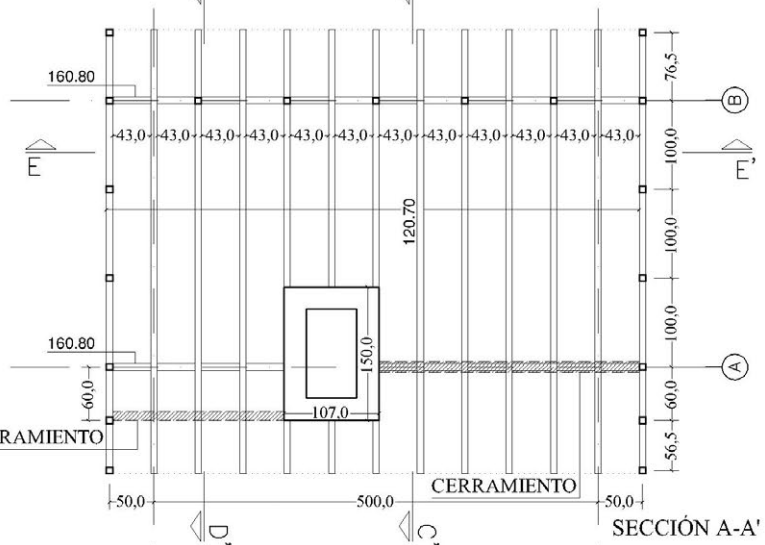
ALZADO



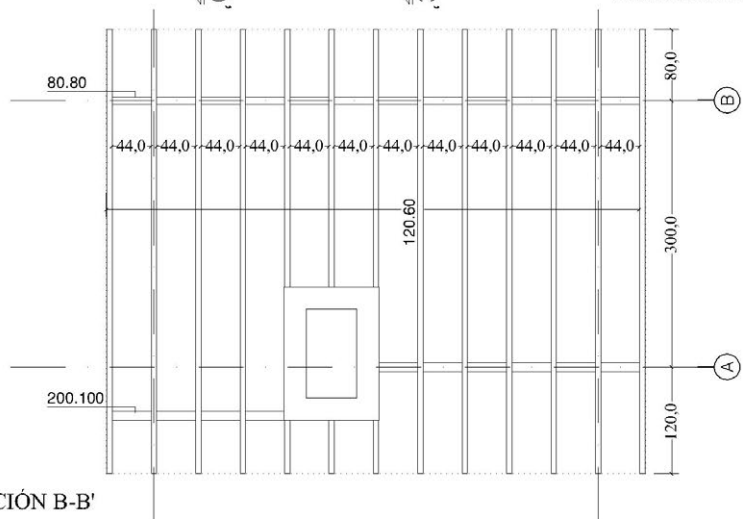
SECCIÓN C-C'



SECCIÓN D-D'



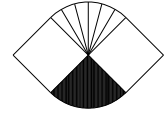
SECCIÓN A-A'



SECCIÓN B-B'



POLITÉCNICA



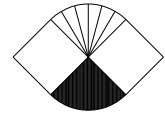
ESTRUCTURAS 1. PLAN 2010 CURSO 2012-13. SEMESTRE DE OTOÑO

Suponiendo que tenemos dimensionada la estructura se van a comprobar las condiciones de rigidez de las diversas piezas que la forman. Se van a estudiar las viguetas que soportan el entablado del techo del edificio. Se trata de una viga de un vano con dos voladizos. Como se puede ver en el esquema inferior izquierdo de la página siguiente, hay dos tipos de viguetas, los que están a la derecha del machón central, que tienen una voladizo de 1,60 m de longitud y que denominaremos viguetas tipo 1, y el resto en los que la luz del voladizo es menor pero, a cambio, la luz entre apoyos aumenta y que denominaremos viguetas tipo 2. Se analizarán los dos casos, simplificando su situación suponiendo que están en posición horizontal. Con respecto a la sección se van a hacer dos hipótesis. En primer lugar se comprobará la vigueta de sección rectangular con las dimensiones que se indican en la figura y, a continuación, se va a considerar la colaboración del entablado que se colocará sobre las viguetas y que permitirá suponer una sección en T como la que se indica en la figura. En los esquemas de las viguetas se dibujarán los diagramas de esfuerzos cortantes y de momentos flectores. A continuación se analizarán las vigas en que apoyan estas viguetas. Estas vigas están solicitadas por cargas puntuales. El valor de estas cargas es el valor de la reacción en el apio de la vigueta correspondiente.

Se estudiará después el forjado de la planta baja. En primer lugar los dos tipos de viguetas que se describen. Ambos tienen la misma luz y apoyos, pero una tiene una carga puntual en mitad del voladizo. Después se estudiará la viga de piso en donde apoyan las viguetas anteriores.



POLITÉCNICA



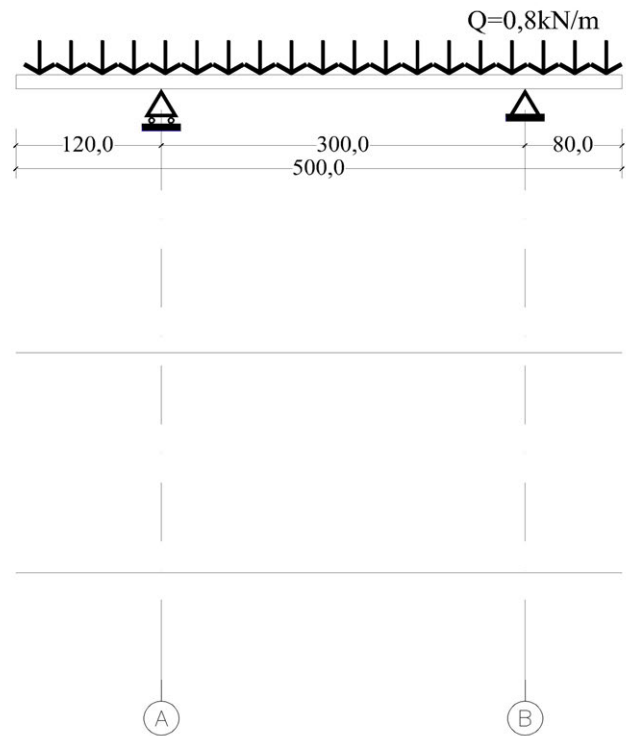
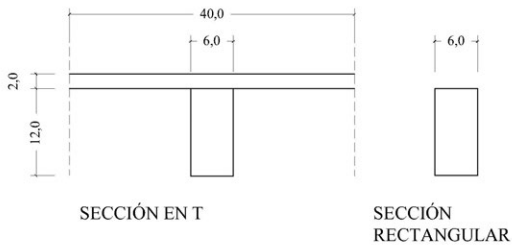
ESTRUCTURAS 1. PLAN 2010

CURSO 2012-13. SEMESTRE DE OTOÑO

Vigueta de cubierta tipo 1

Inercia de la sección rectangular:	mm ² m ²
Descenso del extremo del voladizo:	mm
Descenso del centro del vano:	mm

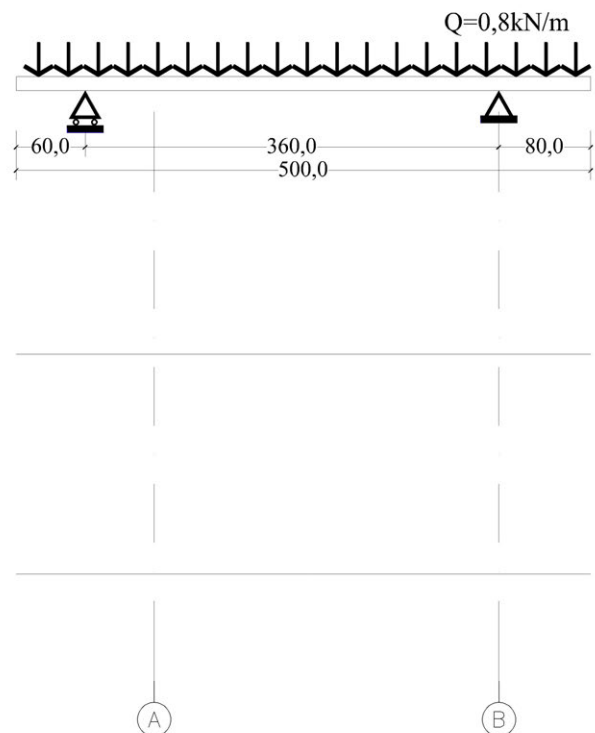
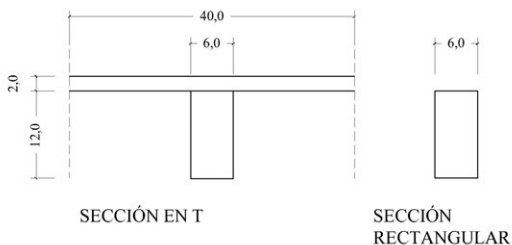
Inercia de la sección en T:	mm ² m ²
Descenso del extremo del voladizo:	mm
Descenso del centro del vano:	mm



Vigueta de cubierta tipo 2

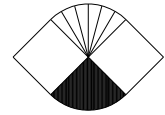
Inercia de la sección rectangular:	mm ² m ²
Descenso del extremo del voladizo:	mm
Descenso del centro del vano:	mm

Inercia de la sección en T:	mm ² m ²
Descenso del extremo del voladizo:	mm
Descenso del centro del vano:	mm





POLITÉCNICA

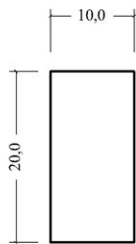


ESTRUCTURAS 1. PLAN 2010

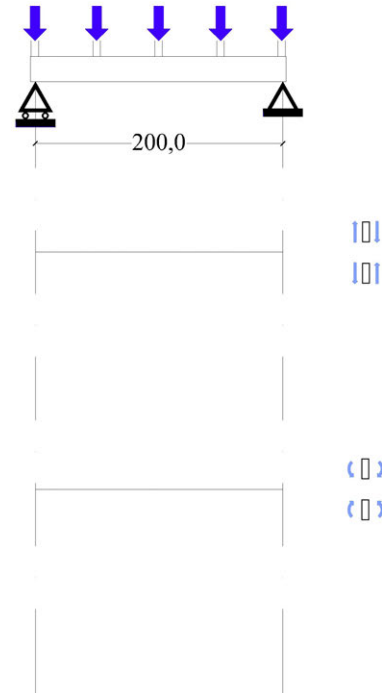
CURSO 2012-13. SEMESTRE DE OTOÑO

Viga de cubierta 1

Inercia de la sección rectangular:	mm^2m^2
Descenso del centro del vano:	mm
Viga IPE 200	
Inercia IPE 200:	mm^2m^2
Descenso del centro del vano:	mm



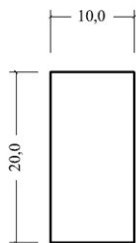
SECCIÓN
VIGA DE CUBIERTA



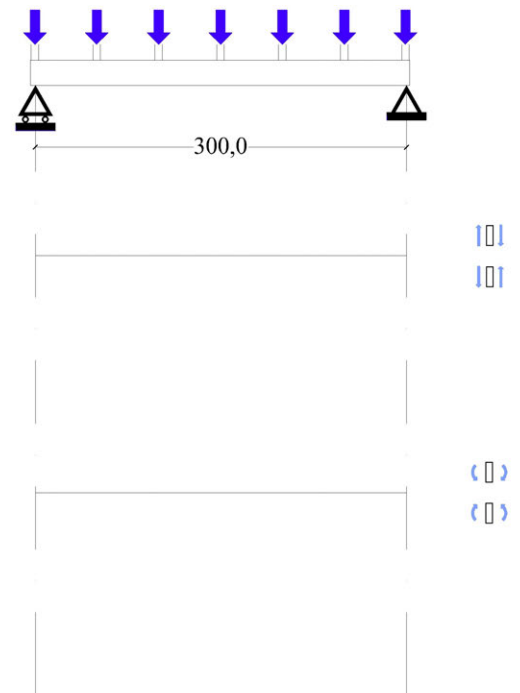
VIGA DE CUBIERTA
PRÓXIMA A EJE A

Viga de cubierta 2

Inercia de la sección rectangular:	mm^2m^2
Descenso del centro del vano:	mm
Viga IPE 200	
Inercia IPE 200:	mm^2m^2
Descenso del centro del vano:	mm



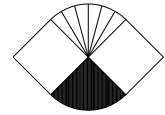
SECCIÓN
VIGA DE CUBIERTA



VIGA DE CUBIERTA EJE A



POLITÉCNICA



ESTRUCTURAS 1. PLAN 2010

CURSO 2012-13. SEMESTRE DE OTOÑO

Vigueta de piso tipo 1

Inercia de la sección rectangular: mm^2m^2

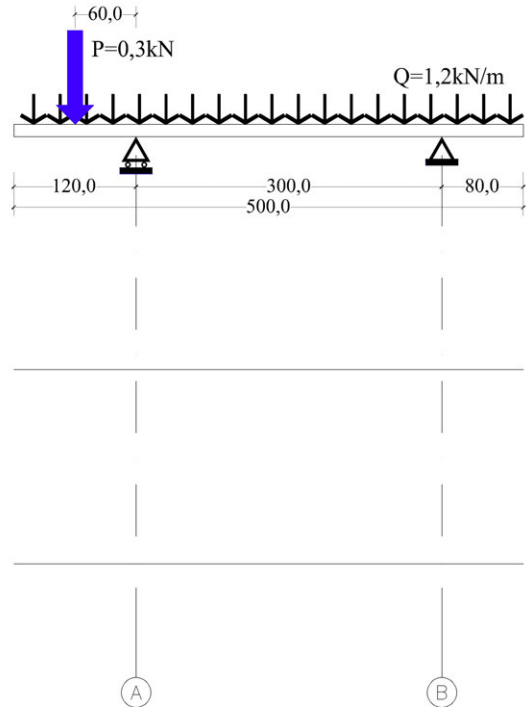
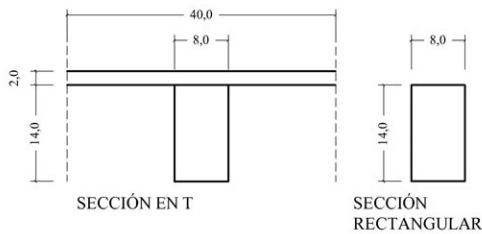
Descenso del extremo del voladizo: mm

Descenso del centro del vano: mm

Inercia de la sección en T: mm^2m^2

Descenso del extremo del voladizo: mm

Descenso del centro del vano: mm



Vigueta de piso tipo 2

Inercia de la sección rectangular: mm^2m^2

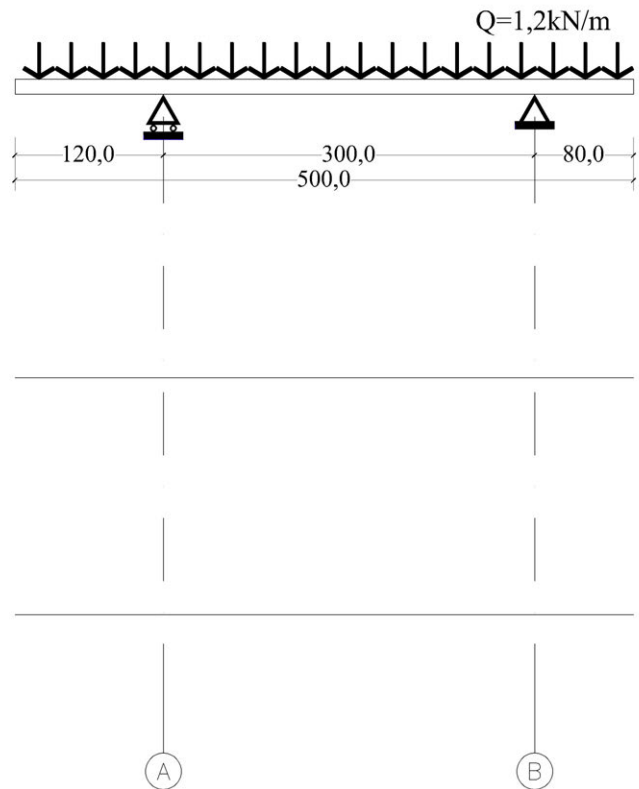
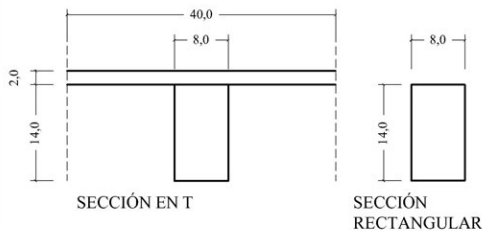
Descenso del extremo del voladizo: mm

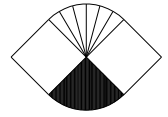
Descenso del centro del vano: mm

Inercia de la sección en T: mm^2m^2

Descenso del extremo del voladizo: mm

Descenso del centro del vano: mm



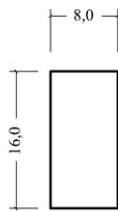


ESTRUCTURAS 1. PLAN 2010

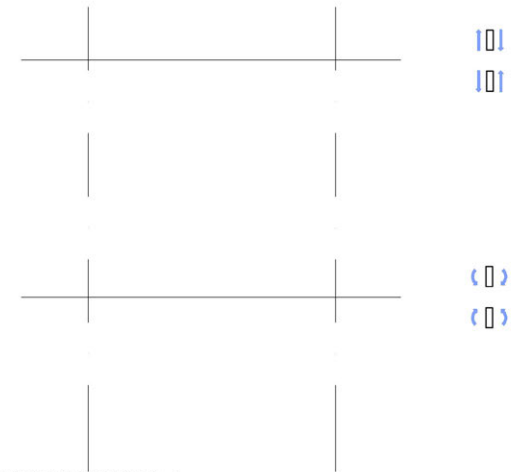
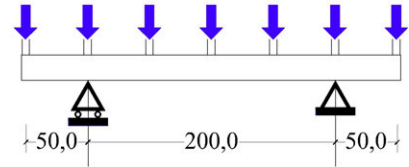
CURSO 2012-13. SEMESTRE DE OTOÑO

Viga de piso

Inercia de la sección rectangular:	mm^2m^2
Descenso del extremo del voladizo:	mm
Descenso del centro del vano:	mm
Viga IPE 200	
Inercia IPE 200:	mm^2m^2
Descenso del centro del vano:	mm



SECCIÓN
VIGA DE PISO



VIGA DE PISO EJE A

PRÁCTICA 11: FLEXIÓN SIMPLE CON ALMA LLENA: RIGIDEZ

INTRODUCCIÓN

El objetivo de la práctica es analizar una estructura adintelada, estudiando la resistencia y la deformación de sus elementos.

Para estudiar la resistencia es habitual comenzar por el momento y ya una vez dimensionada la estructura considerar el cortante, ya que la primera es la más crítica de las dos. En este caso únicamente comprobaremos la resistencia al momento.

En cuanto a la rigidez, consideraremos sólo la deformación debida al momento flector, despreciando al cortante. En vigas de alma llema, el objetivo principal es entender y ser capaz de usar el principio de los trabajos virtuales.

Para el estudio de todo esto se muestran ejemplos del paso de la realidad al modelo de análisis, y trabajar sobre tipos estructurales muy recurrentes en la práctica profesional.

Como se verá a continuación, el estudio de la flexión simple, asociado a la estructura ADINTELADA, permite resolver, en un gran número de casos, el FORJADO en su conjunto, lo que representa una buena parte del problema típico de las estructuras de edificación.

Los materiales utilizados para la práctica serán los siguientes:

MADERA: Se trabajará con un Modelo Elástico con las siguientes propiedades:

Módulo de Young: $E = 10kN / mm^2$

Tensión en el límite elástico:

$$\sigma_e = 18N / mm^2$$

Tensión normal segura: $f_\sigma = 9N / mm^2$

Tensión tangencial segura:

$$f_\tau = 1,2N / mm^2$$

ACERO: Se trabajará con un Modelo Elástico-Plástico con las siguientes propiedades:

Módulo de Young: $E = 200kN / mm^2$

Tensión en el límite elástico:

$$\sigma_e = 255N / mm^2$$

Deformación unitaria última:

$$\varepsilon_u = 10mm / m$$

Tensión normal segura:

$$f_\sigma = 170N / mm^2$$

Tensión tangencial segura:

$$f_\tau = 100N / mm^2$$

En esta práctica se van a comprobar varias piezas de una estructura adintelada, una vivienda proyectada y construida en 1942 por el arquitecto Ralph Erskine. En las figuras se muestran los planos del proyecto e imágenes de su construcción y una vez finalizada.

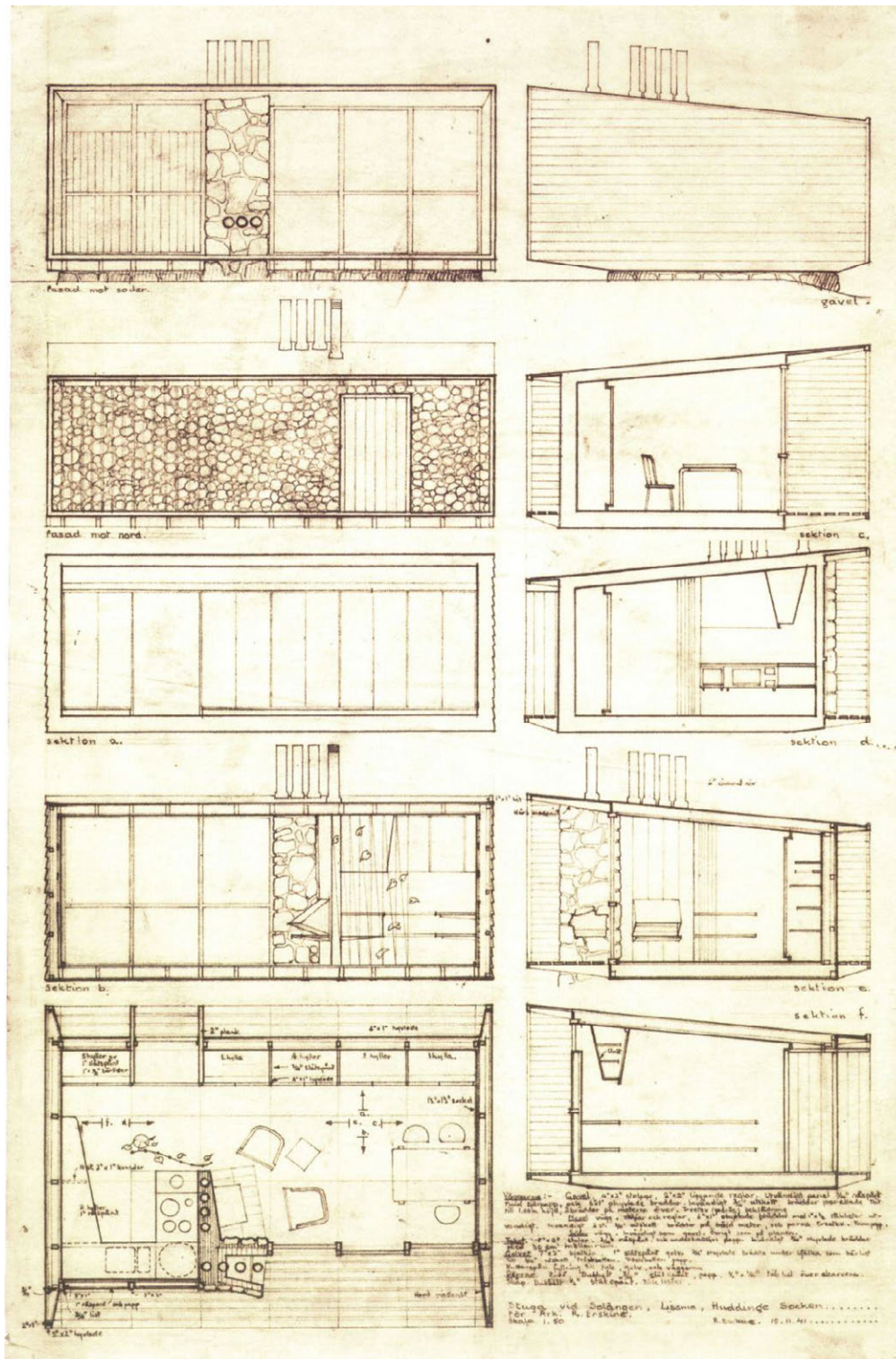
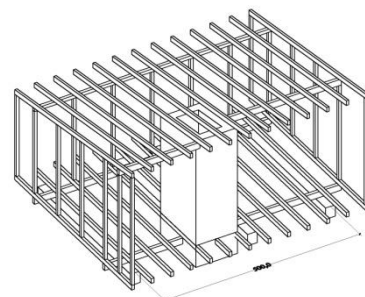
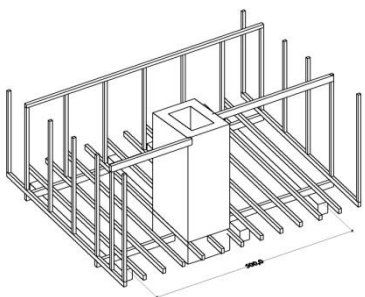
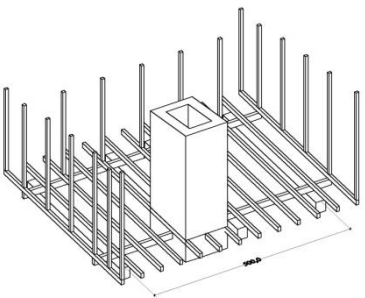
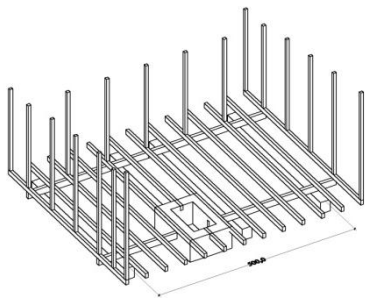
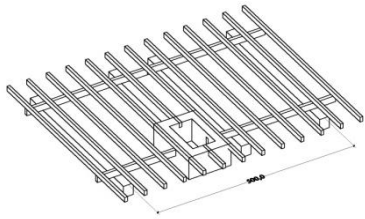
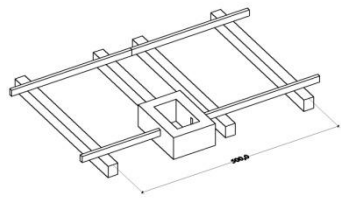


Figura 1. Planos originales del proyecto



Suponiendo que tenemos dimensionada la estructura se van a comprobar las condiciones de rigidez de las diversas piezas que la forman. Se van a estudiar las viguetas que soportan el entablado del techo del edificio y las vigas que soportan a estas viguetas.

Podemos distinguir dos tipos de viguetas; las que están a la derecha del machón central, que tienen un voladizo de 1,20 m de longitud y que llamaremos “viguetas de tipo 1”, y el resto, en las que la luz del voladizo es menor pero, a cambio, la luz entre apoyos aumenta y que denominaremos “viguetas de tipo 2”.

Una de las simplificaciones que se realizarán es que se tomarán como si estuviesen en posición horizontal.

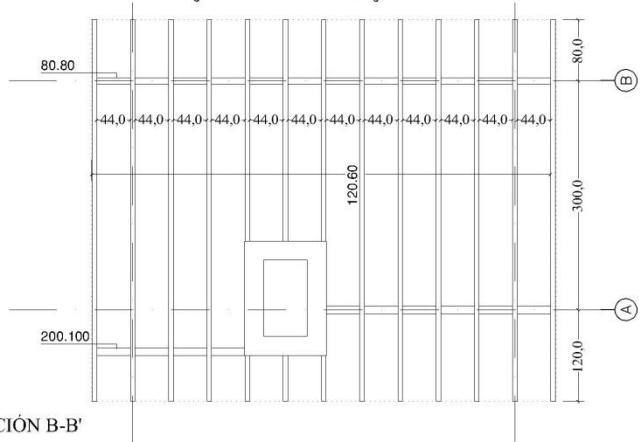
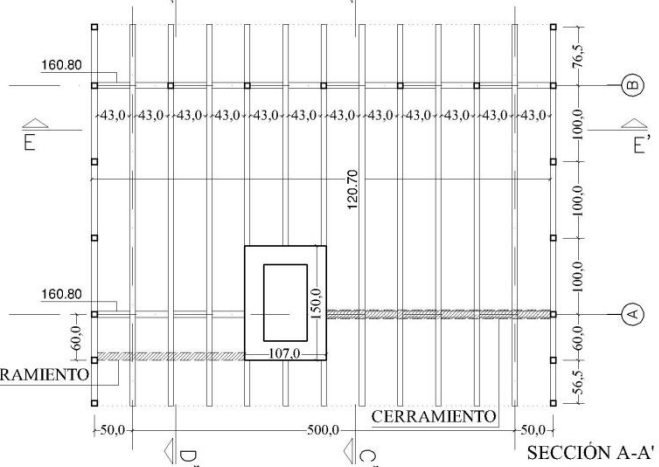
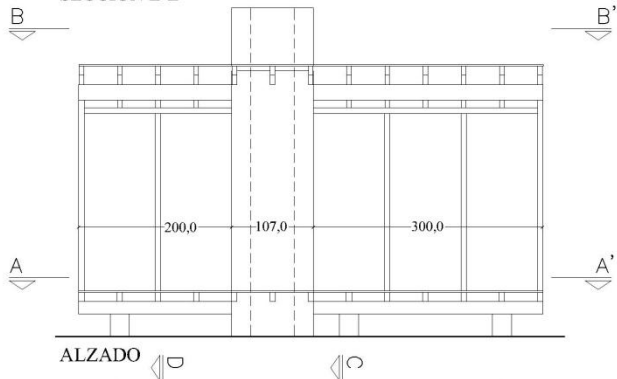
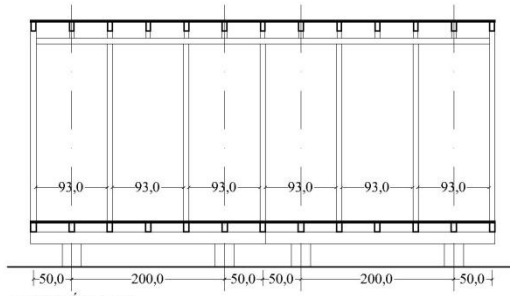
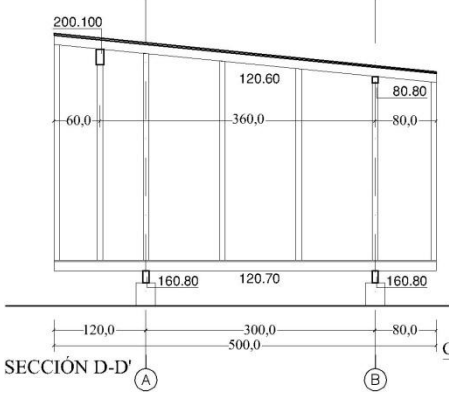
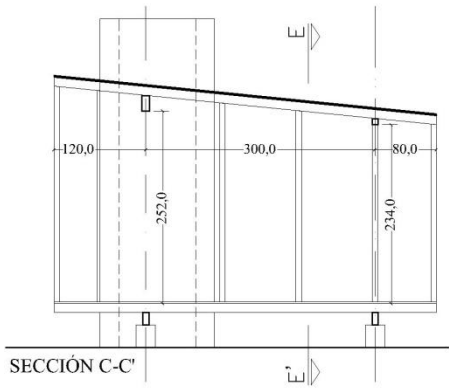
Con respecto a la sección, en primer lugar se comprobará la vigueta de sección rectangular y a continuación, se va a considerar la colaboración del entablado que se colocará sobre las viguetas y que permitirá suponer una sección en T. A continuación se analizará la viga en la apoyan estas viguetas. Estas vigas están solicitadas por cargas puntuales, cuyo valor es el de la reacción en el apoyo de la vigueta correspondiente. Esta carga puntual se transformará en una carga uniformemente distribuida para comprobar la deformación. En este caso se estudiará para una viga de madera y para un perfil de acero laminado.

En todos los casos se indicará si la sección es suficientemente rígida. Dado que en la madera los efectos de la deformación a largo plazo son del mismo orden que los valores instantáneos, en el caso de la cubierta, se admitirá la

sección si la deformación que se obtiene es menor que $\frac{L}{400}$ en el vano y de

$\frac{L}{250}$ en el extremo del voladizo. En el caso del perfil de acero será válido si la

deformación es menor que $\frac{L}{250}$.



VIGUETA DE CUBIERTA TIPO 1

Esta vigueta se sitúa a la derecha del machón central y cuentan con un voladizo de 1,20 m de longitud.

Su carga distribuida, $Q=0,8\text{KN}/\text{m}$, se corresponde al peso propio de la vigueta, más el peso del entablado, más el peso de la cubierta que tenga encima, más la sobrecarga de cálculo. Todo este peso, "p", se podría calcular de la siguiente forma:

$$p \cdot 0,5 \cdot 1 = 0,8 \rightarrow \boxed{p = 1,6\text{KN}/\text{m}^2}$$

Ya que cada vigueta está separada 0,5m de la siguiente y lo hacemos por metro lineal. De forma que lo que le corresponde a cada metro lineal de la vigueta es $0,8\text{KN}/\text{m}$.

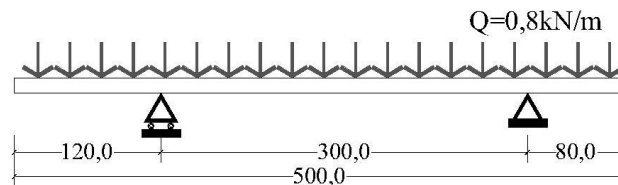


Figura 2. Viga Biapoyada

Cálculo de Reacciones

$$\sum M_A = 0 \quad (+ \curvearrowright) \Rightarrow \frac{0,8 \cdot 1,2^2}{2} - 3 \cdot R_B - \frac{0,8 \cdot 3,8^2}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{R_B = -1,73}$$

$$\sum M_B = 0 \quad (+ \curvearrowright) \Rightarrow 3 \cdot R_A + \frac{0,8 \cdot 4,2^2}{2} - \frac{0,8 \cdot 0,8^2}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{R_A = -2,27}$$

Al haber obtenido las reacciones verticales mediante dos ecuaciones independientes de momentos permite verificar la consistencia de dichos resultados mediante la ecuación el equilibrio global de fuerzas verticales, no usada todavía:

$$\sum F_y = 0 \quad (+ \downarrow) \Rightarrow 0,8 \cdot 5 - 1,7 - 2,27 = 0 \Rightarrow ok$$

Cálculo de Esfuerzos

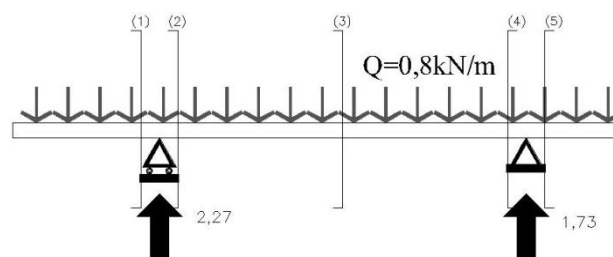


Figura 3. Sistema completo de acciones y reacciones

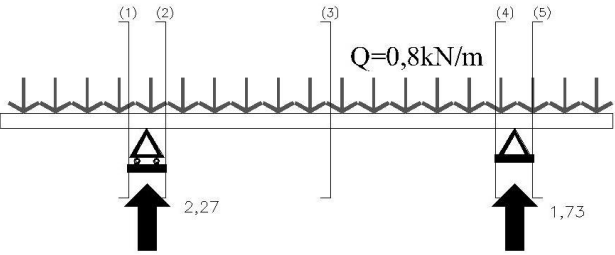
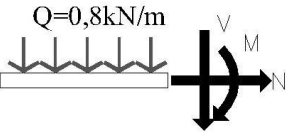
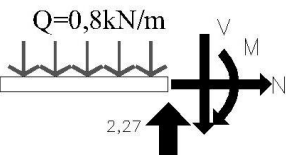
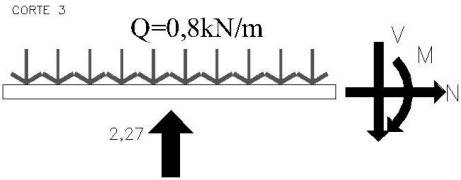
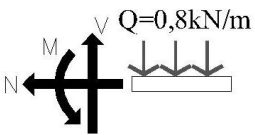
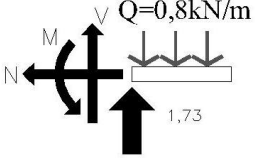
	
<p>CORTE 1</p> 	<p>CORTE 1</p> $(\rightarrow) \sum F_x = 0 \rightarrow \boxed{N = 0}$ $(\downarrow) \sum F_y = 0 \rightarrow V + 0,8 \cdot 1,2 = 0 \rightarrow \boxed{V = -0,96}$ $(\curvearrowright) \sum M_1 = 0 \rightarrow \frac{0,8 \cdot 1,2^2}{2} - M = 0 \rightarrow \boxed{M = 0,576}$
<p>CORTE 2</p> 	<p>CORTE 2</p> $(\rightarrow) \sum F_x = 0 \rightarrow \boxed{N = 0}$ $(\downarrow) \sum F_y = 0 \rightarrow V + 0,8 \cdot 2,27 - 2,27 = 0 \rightarrow \boxed{V = 1,31}$ $(\curvearrowright) \sum M_1 = 0 \rightarrow \frac{0,8 \cdot 2,27^2}{2} - M = 0 \rightarrow \boxed{M = 0,576}$
<p>CORTE 3</p> 	<p>CORTE 3</p> $(\rightarrow) \sum F_x = 0 \rightarrow \boxed{N = 0}$ $(\downarrow) \sum F_y = 0 \rightarrow V + 0,8 \cdot 2,7 - 2,27 = 0 \rightarrow \boxed{V = 0,11}$ $(\curvearrowright) \sum M_1 = 0 \rightarrow \frac{0,8 \cdot 2,7^2}{2} - M - 2,27 \cdot 1,5 = 0$ $\rightarrow \boxed{M = -0,489}$
<p>CORTE 4</p> 	<p>CORTE 4</p> $(\rightarrow) \sum F_x = 0 \rightarrow \boxed{N = 0}$ $(\downarrow) \sum F_y = 0 \rightarrow -V + 0,8 \cdot 0,8 - 1,7 = 0 \rightarrow \boxed{V = -1,06}$ $(\curvearrowright) \sum M_1 = 0 \rightarrow -\frac{0,8 \cdot 0,8^2}{2} + M = 0 \rightarrow \boxed{M = 0,256}$
<p>CORTE 5</p> 	<p>CORTE 5</p> $(\rightarrow) \sum F_x = 0 \rightarrow \boxed{N = 0}$ $(\downarrow) \sum F_y = 0 \rightarrow -V + 0,8 \cdot 0,8 = 0 \rightarrow \boxed{V = 0,64}$ $(\curvearrowright) \sum M_1 = 0 \rightarrow -\frac{0,8 \cdot 0,8^2}{2} + M = 0 \rightarrow \boxed{M = 0,256}$

Figura 4. Cálculo de esfuerzos en las distintas secciones

Diagramas de esfuerzos

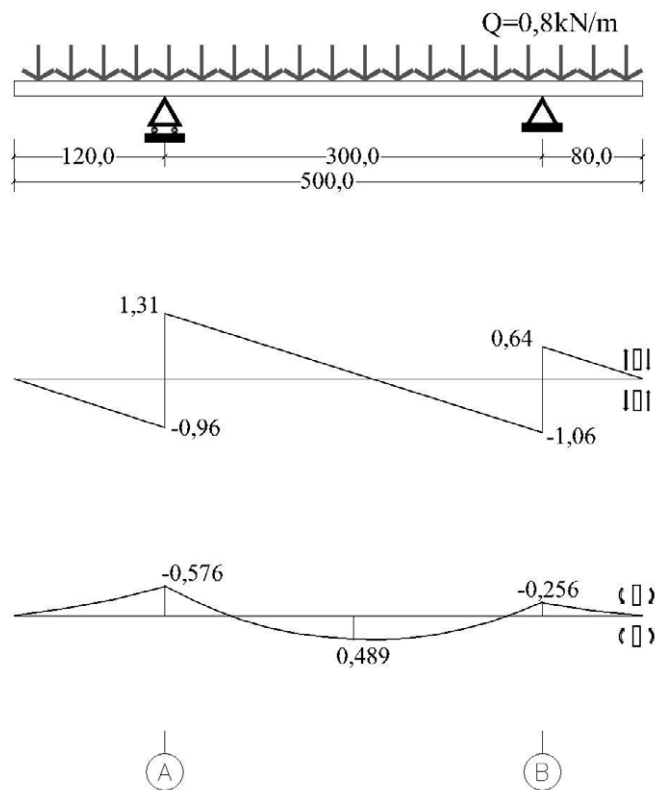


Figura 5. Gráficas de esfuerzos cortantes, flectores

Una de las comprobaciones que se deben realizar es la **resistencia** de las secciones. Para ello será necesario conocer el momento que sufre dicha sección en cada punto, de forma que se calculará en la que se dé el momento máximo, ya que si resiste dicha sección se podrá decir que lo hará toda la estructura.

Esta resistencia, como es evidente, depende del material y del tipo de sección de la estructura. Por tanto, se comprobará tanto para la sección rectangular como para la sección en T.

Sección rectangular

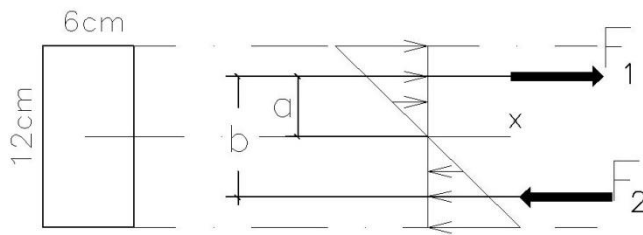


Figura 6. Esquema tensiones

$$F_1 = F_2$$

$$F_1 = \frac{\sigma}{2} \cdot 60 \cdot \frac{120}{2} = 1800 \cdot \sigma$$

$$F_2 = 1800 \cdot \sigma$$

$$a = \frac{2}{3} \cdot 60(\text{mm})$$

$$b = \frac{2}{3} \cdot 120(\text{mm})$$

Una vez definidas las fuerzas, se toma momentos respecto de un punto cualquiera de la sección. En este caso desde el punto en el que está aplicada F_1

$$M = F_2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 120 = 1800 \cdot \sigma \cdot \frac{2}{3} \cdot 120 = 144000 \cdot \sigma (\text{kN} / \text{mm})$$

$$\overline{\sigma_{\max.}} = \frac{M_{\max.}}{144000} = \frac{576}{144000} \rightarrow \sigma_{\max.} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ kN} / \text{mm}^2 = \boxed{4 \text{ N} / \text{mm}^2}$$

Esta tensión máxima que obtenemos debe ser menor a la “tensión normal segura” del material, especificada en el enunciado de la práctica.

$$\sigma_{\max.} < \sigma_{ns}$$

$$4 \text{ N} / \text{mm}^2 < 9 \text{ N} / \text{mm}^2 \rightarrow \boxed{\text{ok}}$$

NOTA:

Si tomamos momentos desde la fibra neutra obtendríamos $M = \frac{I}{\nu} \cdot \sigma_{\max}$, donde

I es la inercia de la sección respecto al eje que pasa por la línea neutra y ν es la distancia de la fibra neutra hasta la fibra extrema de la sección. A todo ello se le denomina “**Módulo resistente, ω** ”, de forma que $M = \omega \cdot \sigma_{\max}$, y por tanto

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{\omega}.$$

Haciendo referencia a la forma de dicha fórmula, observamos que en los cálculos realizados previamente para la obtención de la tensión máxima,

$|\sigma_{\max}| = \frac{M_{\max.}}{144000} = \frac{576}{144000} \rightarrow \sigma_{\max.} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ kN/mm}^2 = \boxed{4 \text{ N/mm}^2}$, el 144000 correspondería al módulo resistente ($\omega = 144000 \text{ mm}^3$).

En el caso de tener perfiles estandarizados, cómo son los de acero, este módulo resistente ya está calculado, de forma que se simplifica en gran medida dichos cálculos.

Sección en T

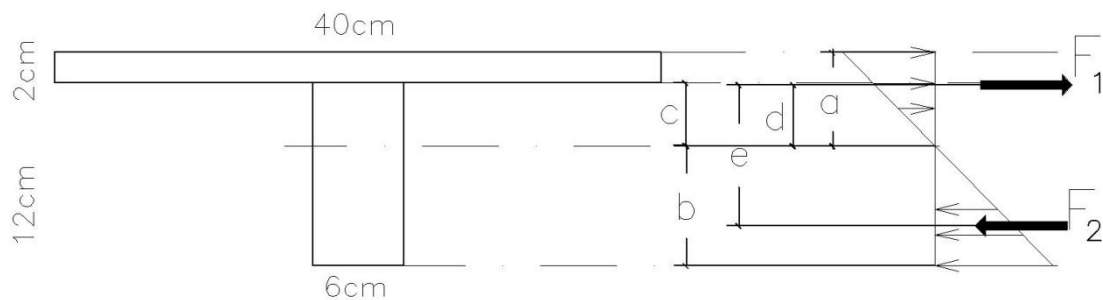


Figura 7. Esquema tensiones

En este caso, al no ser una sección simétrica no sabemos la distancia “a” de forma que la tendremos que obtener a través de igualar $F_1 = F_2$.

$$b = 140 - a(mm)$$

$$c = a - 20(mm)$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma(a - 20)}{a}$$

$$F_1 = \left(\frac{(\sigma - \sigma_1)}{2} \cdot 400 \cdot 20 \right) + (\sigma_1 \cdot 400 \cdot 20) + \left(\frac{\sigma_1}{2} \cdot 60 \cdot c \right)$$

$$F_2 = \frac{\sigma}{2} \cdot 60 \cdot b$$

$$F_1 = F_2$$

$$60 \cdot a^2 + 2600 \cdot a - 68000 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 61,7mm \\ a = -18,37mm \end{array} \right\}$$

Una vez hallada esta distancia “a”, podremos tomar momentos respecto uno de los puntos de la sección. En este caso lo haremos desde el punto en el que está aplicada F_2 .

$$M = \left(\frac{(\sigma - \sigma_1)}{2} \cdot 400 \cdot 20 \right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 20 + c + \frac{2}{3} \cdot b \right) + (\sigma_1 \cdot 400 \cdot 20) \cdot \left(\frac{20}{2} + c + \frac{2}{3} \cdot b \right) + \left(\frac{\sigma_1}{2} \cdot 60 \cdot c \right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot c + \frac{2}{3} \cdot b \right)$$

$$M_{\max.} = 768515,36 \cdot \sigma_{\max.}$$

$$\sigma_{\max.} = \frac{M_{\max.}}{768515,36} = \frac{576}{768515,36} \rightarrow \sigma_{\max.} = 7,495 \cdot 10^{-4} kN/mm^2 = \boxed{0,7495 N/mm^2}$$

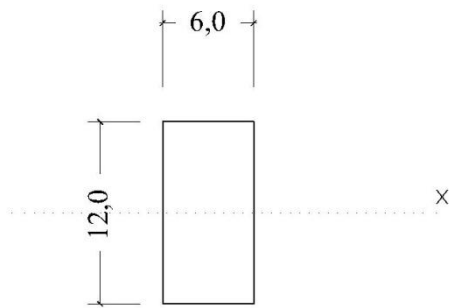
Como se ha explicado anteriormente, en este caso, $\omega = 768515,36 mm^3$

Esta tensión máxima que obtenemos debe ser menor a la “tensión normal segura” del material, especificada en el enunciado de la práctica.

$$\sigma_{\max.} < \sigma_{ns}$$

$$0,749 N/mm^2 < 9 N/mm^2 \rightarrow \boxed{ok}$$

Inercia de la sección rectangular



SECCIÓN
RECTANGULAR

$$I_x = \frac{1}{12} \cdot b \cdot c^3$$

$$I_x = \frac{1}{12} \cdot 60 \cdot 120^3$$

$$\boxed{I_x = 8640000 \text{ mm}^4 = 8,64 \text{ mm}^2 \cdot \text{m}^2}$$

$$E.I = 8,64 \cdot 10 = 86,4 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

Figura 8. Sección rectangular

Descenso del extremo del voladizo

Para la obtención de los descensos en estructuras isostáticas e hiperestáticas se utilizará el método de los trabajos virtuales.

Este principio establece la creación de un sistema de fuerzas virtuales compatible con los apoyos que impiden el movimiento de sólido rígido. Lo cual hará que se puedan igualar el trabajo virtual externo y el trabajo virtual interno.

Por su parte cada uno de ellos es igual a:

$$W_{ext} = W_{int}$$

$$W_{ext} = 1^* \cdot \delta$$

$$W_{int} = \int M \cdot C \cdot \partial s$$

$$1^* \cdot \delta = \int M \cdot \frac{M^*}{E.I} \cdot \partial s$$

$$C = \frac{M^*}{E.I} \rightarrow \text{curvatura}$$

$$\boxed{\delta = \frac{1}{E.I} \cdot \int M \cdot M^* \cdot \partial s}$$

Para la obtención de este desplazamiento lo primero será la resolución del sistema de fuerzas virtuales.

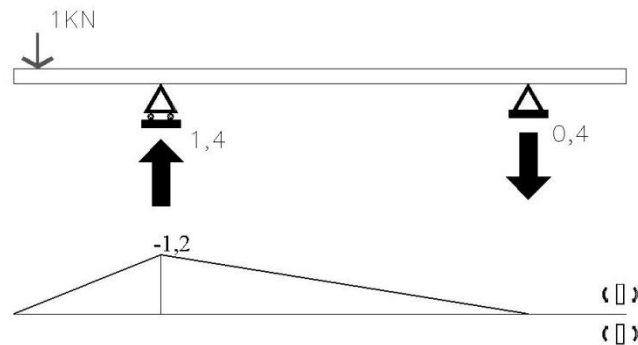


Figura 9. Sistema de cargas virtual

$$\sum M_A = 0 \quad (+ \curvearrowright) \Rightarrow 1 \cdot 1,2 - 3 \cdot R_B = 0 \Rightarrow R_B = 0,4$$

$$\sum M_A = 0 \quad (+ \curvearrowright) \Rightarrow 1 \cdot 4,2 - 3 \cdot R_A = 0 \Rightarrow R_A = 1,4$$

Una vez obtenido el diagrama de momentos del sistema virtual se aplicará el principio de los trabajos virtuales explicado previamente.

$$W_{ext} = W_{int}$$

$$1^* \cdot \delta = \int M \cdot \frac{M^*}{E.I} \partial s$$

$$\delta = \frac{1}{E.I} \cdot \left[\left(\frac{1}{4} \cdot 1,2 \cdot (-1,2) \cdot (-0,576) \right) + \left(\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot (-0,576) \cdot (-1,2) \right) + \left(\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot (0,9) \cdot (-1,2) \right) + \left(\frac{1}{6} \cdot 3 \cdot (-0,256) \cdot (-1,2) \right) \right]$$

$$\delta = \frac{-0,02784}{E.I} = -0,322mm$$

El signo menos nos indica que el desplazamiento del extremo del voladizo es hacia arriba y no hacia abajo como se había planteado inicialmente.

Según el enunciado de la práctica, el desplazamiento admitido en esta zona es:

$$\delta = \frac{L}{250} = 4,8mm$$

$$4,8mm > 0,322mm \rightarrow \boxed{ok}$$

Descenso del centro del vano

Se realizará igual que el anterior pero cambiando la fuerza puntual del extremo del sistema virtual al centro del vano.

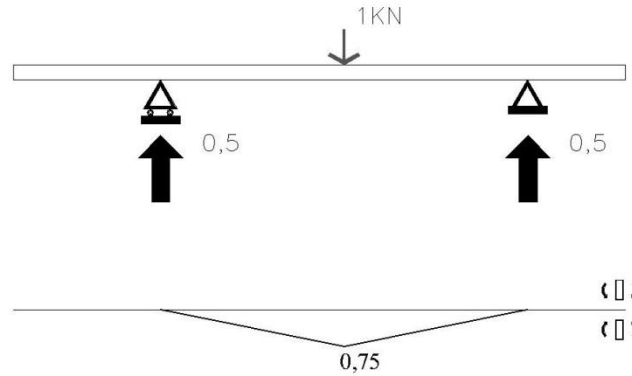


Figura 10. Sistema de cargas virtual

$$\sum M_A = 0 \quad (+ \curvearrowright) \Rightarrow 1 \cdot 1,2 - 3 \cdot R_B = 0 \Rightarrow R_B = 0,4$$

$$\sum M_B = 0 \quad (+ \curvearrowright) \Rightarrow 1 \cdot 4,2 - 3 \cdot R_A = 0 \Rightarrow R_A = 1,4$$

Una vez obtenido el diagrama de momentos del sistema virtual se aplicará el principio de los trabajos virtuales explicado previamente.

$$W_{ext} = W_{int}$$

$$1^* \cdot \delta = \int M \cdot \frac{M^*}{E.I} \partial s$$

$$\delta = \frac{1}{E.I} \cdot \left[\left(\frac{1}{4} \cdot 3 \cdot (0,75) \cdot (-0,576) \right) + \left(\frac{5}{12} \cdot 3 \cdot (0,75) \cdot (0,9) \right) + \left(\frac{1}{4} \cdot 3 \cdot (0,75) \cdot (-0,256) \right) \right]$$

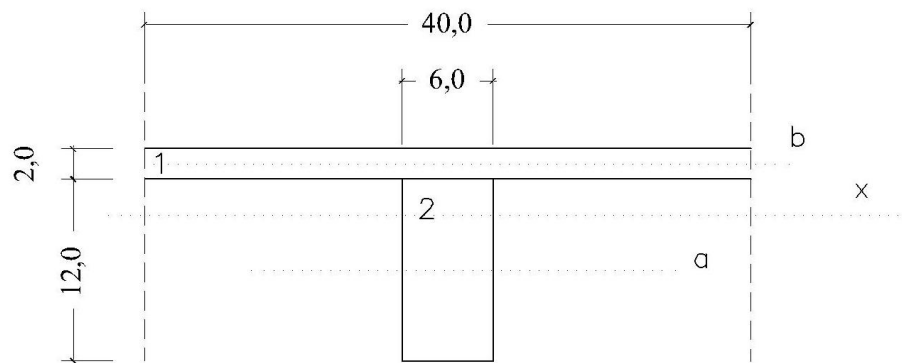
$$\delta = \frac{0,37575}{E.I} = 4,35mm$$

Según el enunciado de la práctica, el desplazamiento admitido en esta zona es:

$$\delta = \frac{L}{400} = 7,5mm$$

$$7,5mm > 4,35mm \rightarrow \boxed{ok}$$

Inercia de la sección en T



SECCIÓN EN T

Figura 11. Sección en T

$$I_{1b} = \frac{1}{12} \cdot 400 \cdot 20^3 = 266666,67 \text{ mm}^4$$

$$I_{2a} = \frac{1}{12} \cdot 60 \cdot 120^3 = 8640000 \text{ mm}^4$$

$$I_{1x} = I_{1b} + A_1 \cdot r^2 = 266666,67 + 800 \cdot 33,2^2 = 9,0845 \text{ mm}^2 \text{ m}^2$$

$$I_{2x} = I_{2a} + A_1 \cdot r^2 = 8640000 + 7200 \cdot 36,8^2 = 18,39 \text{ mm}^2 \text{ m}^2$$

$$\boxed{I_x = I_{1x} + I_{2x} = 27,47 \text{ mm}^2 \cdot \text{m}^2}$$

$$E.I = 27,47 \cdot 10 = 274,7 \text{ KN} \cdot \text{m}^2$$

Descenso del extremo del voladizo

Como se observa en los apartados previos, a la hora de calcular el descenso, únicamente influye la sección de la viga en el E.I, ya que el sistema de fuerzas virtuales es el mismo. Por ello, únicamente será necesario sustituir dicho valor por el de la nueva sección en T.

$$W_{ext} = W_{int}$$

$$1^* \cdot \delta = \int M \cdot \frac{M^*}{E.I} \partial s$$

$$\boxed{\delta = \frac{-0,02784}{E.I} = -0,1013 \text{ mm}}$$

Según el enunciado de la práctica, el desplazamiento admitido en esta zona es:

$$\delta = \frac{L}{250} = 4,8mm$$

$$4,8mm > 0,1013mm \rightarrow \boxed{ok}$$

Descenso del centro del vano

Ocurre lo mismo que en el apartado anterior.

$$W_{ext} = W_{int}$$

$$1^* \cdot \delta = \int M \cdot \frac{M^*}{E.I} \partial s$$

$$\delta = \frac{0,37575}{E.I} = 1,37mm$$

Según el enunciado de la práctica, el desplazamiento admitido en esta zona es:

$$\delta = \frac{L}{400} = 7,5mm$$

$$7,5mm > 1,37mm \rightarrow \boxed{ok}$$

OBSERVACIONES:

Considerar el entablado como colaborante estructural reduce las flechas obtenidas. Que por otro lado serán las reales si la unión del entablado con la viga es el adecuado.

En este caso, como se cumple el desplazamiento admitido despreciando dicho entablado no tendremos que preocuparnos de que esta unión sea adecuada.

VIGA DE CUBIERTA 2

Esta viga se sitúa a la derecha del machón central. Sobre ella se apoyan las viguetas de cubierta de tipo 1. Por ello el valor de sus cargas puntuales es el valor de la reacción en el apoyo de dicha vigueta: $R_A = 2,27kN$

Estas cargas puntuales se transforman en una carga uniformemente distribuida. Para ello se observa el número de cargas puntuales que hay en un metro lineal de viga, en este caso dos. Y esos serán los KN por metro lineal de viga, es decir, la carga distribuida.

$$q = \frac{2 \cdot 2,27}{1} = 4,54kN/m$$

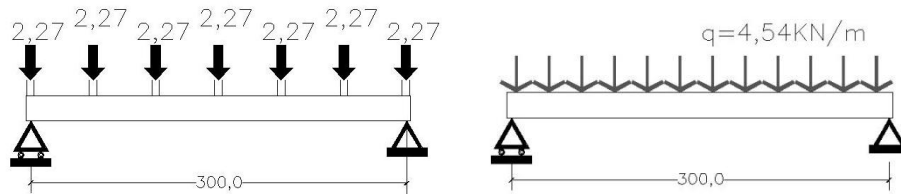


Figura 12. **Viga Biapoyada**

Comenzaremos resolviendo las gráficas de cortantes y momentos de la viga con las cargas puntuales.

Viga con cargas puntuales

Cálculo de Reacciones

$$\sum M_A = 0 \quad (+ \curvearrowright) \Rightarrow 2,27 \cdot 0,5 + 2,27 \cdot 1 + 2,27 \cdot 1,5 + 2,27 \cdot 2 + 2,27 \cdot 2,5 + 2,27 \cdot 3 = 3 \cdot R_B \Rightarrow R_B = 7,945$$

$$\sum M_B = 0 \quad (+ \curvearrowright) \Rightarrow 2,27 \cdot 0,5 + 2,27 \cdot 1 + 2,27 \cdot 1,5 + 2,27 \cdot 2 + 2,27 \cdot 2,5 + 2,27 \cdot 3 = 3 \cdot R_A \Rightarrow R_A = 7,945$$

Al haber obtenido las reacciones verticales mediante dos ecuaciones independientes de momentos permite verificar la consistencia de dichos resultados mediante la ecuación el equilibrio global de fuerzas verticales, no usada todavía:

$$\sum F_y = 0 \quad (+ \downarrow) \Rightarrow 7,945 \cdot 2 = 2,27 \cdot 7 \Rightarrow ok$$

Cálculo de Esfuerzos

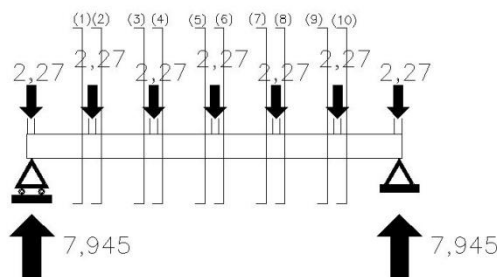
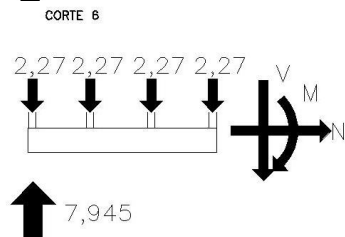
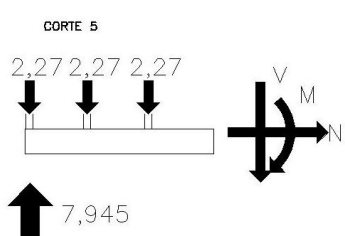
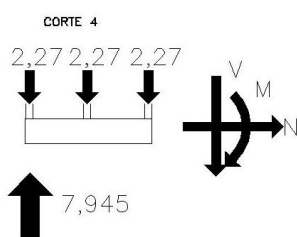
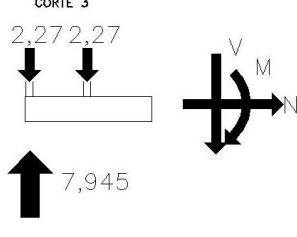
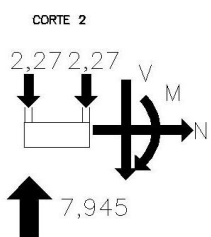
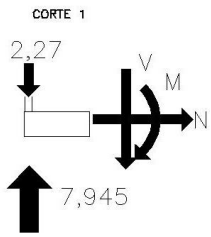
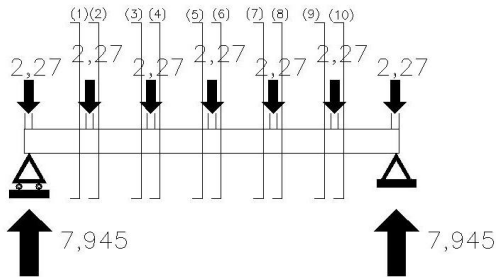


Figura 13. Sistema completo de acciones y reacciones.



CORTE 1

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \rightarrow N = 0$$

$$\downarrow \sum F_y = 0 \rightarrow V + 2,27 = 7,945 \rightarrow V = 5,675$$

$$\curvearrowright \sum M_1 = 0 \rightarrow 2,27 \cdot 0,5 = 7,945 \cdot 0,5 + M \rightarrow M = -2,84$$

CORTE 2

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \rightarrow N = 0$$

$$\downarrow \sum F_y = 0 \rightarrow V + 2,27 \cdot 2 = 7,945 \rightarrow V = 3,405$$

$$\curvearrowright \sum M_1 = 0 \rightarrow 2,27 \cdot 0,5 = 7,945 \cdot 0,5 + M \rightarrow M = -2,84$$

CORTE 3

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \rightarrow N = 0$$

$$\downarrow \sum F_y = 0 \rightarrow V + 2,27 \cdot 2 = 7,945 \rightarrow V = 3,405$$

$$\curvearrowright \sum M_1 = 0 \rightarrow 2,27 \cdot 0,5 + 2,27 \cdot 1 = 7,945 \cdot 1 + M \rightarrow M = -4,54$$

CORTE 4

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \rightarrow N = 0$$

$$\downarrow \sum F_y = 0 \rightarrow V + 2,27 \cdot 3 = 7,945 \rightarrow V = 1,135$$

$$\curvearrowright \sum M_1 = 0 \rightarrow 2,27 \cdot 0,5 + 2,27 \cdot 1 = 7,945 \cdot 1 + M \rightarrow M = -4,54$$

CORTE 5

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \rightarrow N = 0$$

$$\downarrow \sum F_y = 0 \rightarrow V + 2,27 \cdot 3 = 7,945 \rightarrow V = 1,135$$

$$\curvearrowright \sum M_1 = 0 \rightarrow 2,27 \cdot 0,5 + 2,27 \cdot 1 + 2,27 \cdot 1,5 = 7,945 \cdot 1,5 + M \rightarrow M = -5,11$$

CORTE 6

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \rightarrow N = 0$$

$$\downarrow \sum F_y = 0 \rightarrow V + 2,27 \cdot 4 = 7,945 \rightarrow V = -1,135$$

$$\curvearrowright \sum M_1 = 0 \rightarrow 2,27 \cdot 0,5 + 2,27 \cdot 1 + 2,27 \cdot 1,5 = 7,945 \cdot 1,5 + M \rightarrow M = -5,11$$

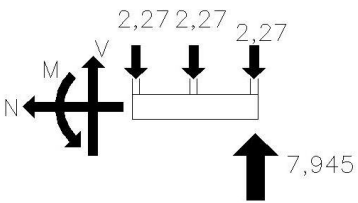
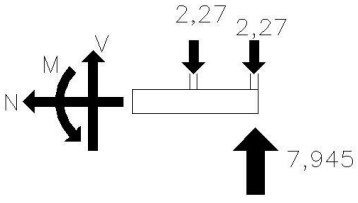
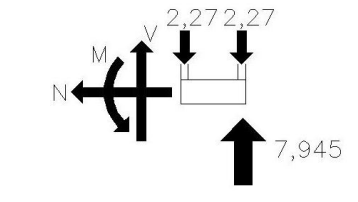
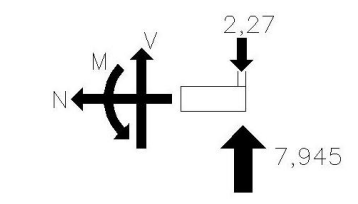
<p>CORTE 7</p> 	<p>CORTE 7</p> $(\rightarrow) \sum F_x = 0 \rightarrow \boxed{N = 0}$ $(\downarrow) \sum F_y = 0 \rightarrow 2,27 \cdot 3 = 7,945 + V \rightarrow \boxed{V = -1,135}$ $\curvearrowright \sum M_1 = 0 \rightarrow 2,27 \cdot 0,5 + 2,27 \cdot 1 = 7,945 \cdot 1 + M \rightarrow \boxed{M = -4,54}$
<p>CORTE 8</p> 	<p>CORTE 8</p> $(\rightarrow) \sum F_x = 0 \rightarrow \boxed{N = 0}$ $(\downarrow) \sum F_y = 0 \rightarrow 2,27 \cdot 2 = 7,945 + V \rightarrow \boxed{V = -3,405}$ $\curvearrowright \sum M_1 = 0 \rightarrow 2,27 \cdot 0,5 + 2,27 \cdot 1 = 7,945 \cdot 1 + M \rightarrow \boxed{M = -4,54}$
<p>CORTE 9</p> 	<p>CORTE 9</p> $(\rightarrow) \sum F_x = 0 \rightarrow \boxed{N = 0}$ $(\downarrow) \sum F_y = 0 \rightarrow 2,27 \cdot 2 = 7,945 + V \rightarrow \boxed{V = -3,405}$ $\curvearrowright \sum M_1 = 0 \rightarrow 2,27 \cdot 0,5 = 7,945 \cdot 0,5 + M \rightarrow \boxed{M = -2,84}$
<p>CORTE 10</p> 	<p>CORTE 10</p> $(\rightarrow) \sum F_x = 0 \rightarrow \boxed{N = 0}$ $(\downarrow) \sum F_y = 0 \rightarrow 2,27 = 7,945 + V \rightarrow \boxed{V = -5,675}$ $\curvearrowright \sum M_1 = 0 \rightarrow 2,27 \cdot 0,5 = 7,945 \cdot 0,5 + M \rightarrow \boxed{M = -2,84}$

Figura 14. Cálculo de esfuerzos en las distintas secciones

Diagramas de esfuerzos

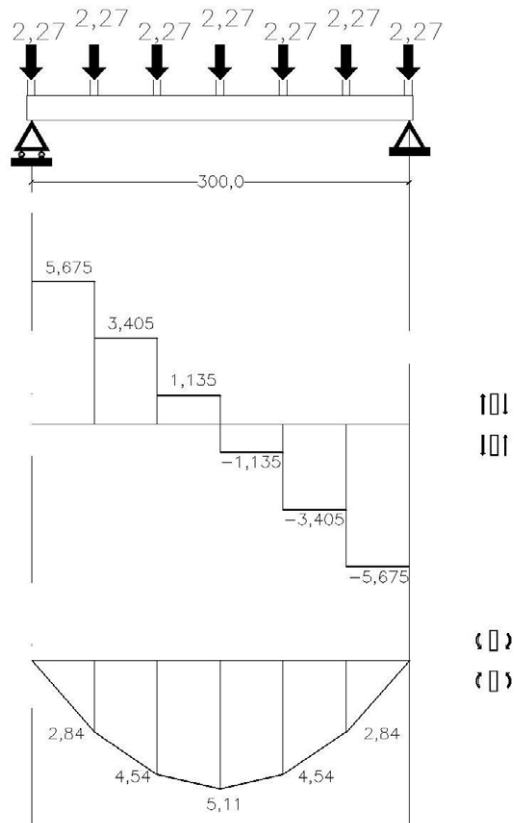


Figura 15. Gráficas de esfuerzos cortantes, flectores

Viga con cargas distribuidas

Cálculo de Esfuerzos

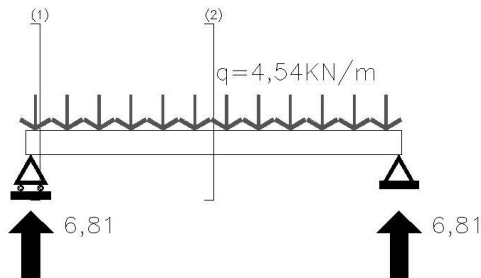


Figura 16. Sistema completo de acciones y reacciones

<p>CORTE 1</p>	<p>CORTE 1</p> $(\rightarrow) \sum F_x = 0 \rightarrow \boxed{N = 0}$ $(\downarrow) \sum F_y = 0 \rightarrow V - 6,81 = 0 \rightarrow \boxed{V = 6,81}$ $(\curvearrowright) \sum M_1 = 0 \rightarrow 0 = M \rightarrow \boxed{M = 0}$
<p>CORTE 2</p>	<p>CORTE 2</p> $(\rightarrow) \sum F_x = 0 \rightarrow \boxed{N = 0}$ $(\downarrow) \sum F_y = 0 \rightarrow V + 4,54 \cdot 1,5 - 6,81 = 0 \rightarrow \boxed{V = 0}$ $(\curvearrowright) \sum M_1 = 0 \rightarrow 4,54 \cdot \frac{1,5^2}{2} = M + 6,81 \cdot 1,5 \rightarrow \boxed{M = -5,1075}$

Figura 17. Cálculo de esfuerzos en las distintas secciones

Diagramas de esfuerzos

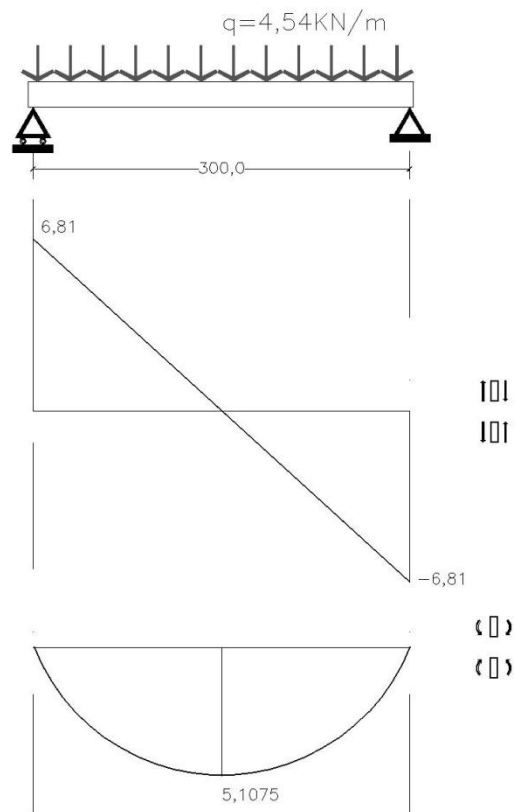
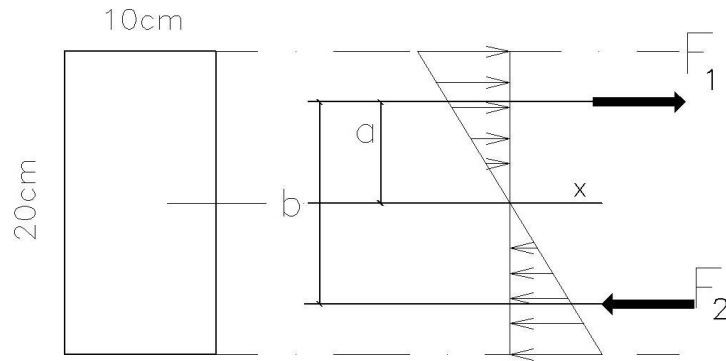


Figura 18. Gráficas de esfuerzos cortantes, flectores

El ejercicio se desarrollará en base a la viga con carga distribuida.

Comprobación de la resistencia

Sección rectangular



$$F_1 = F_2$$

$$F_1 = \frac{\sigma_{\max}}{2} \cdot 100 \cdot \frac{200}{2} = 5000 \cdot \sigma_{\max}$$

$$F_2 = 5000 \cdot \sigma_{\max}$$

$$a = \frac{2}{3} \cdot 100(\text{mm})$$

$$b = \frac{2}{3} \cdot 200(\text{mm})$$

Una vez definidas las fuerzas, se toma momentos respecto de un punto cualquiera de la sección. En este caso desde el punto en el que está aplicada F_1

$$M = F_2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 200 = 5000 \cdot \sigma_{\max} \cdot \frac{2}{3} \cdot 200 = 666666,67 \cdot \sigma_{\max} \text{ (kN / mm)}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{666666,67} = \frac{5107,5}{666666,67} \rightarrow \sigma_{\max} = 7,66 \cdot 10^{-3} \text{ kN / mm}^2 = \boxed{7,66 \text{ N / mm}^2}$$

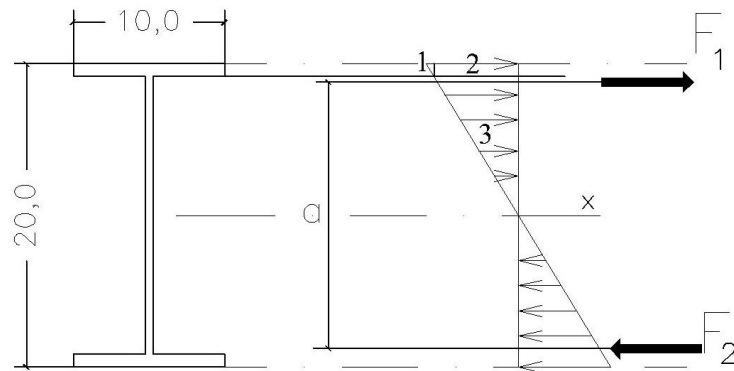
Como se ha explicado anteriormente, en este caso, $\omega = 666666,67 \text{ mm}^3$

Esta tensión máxima que obtenemos debe ser menor a la “tensión normal segura” del material, especificada en el enunciado de la práctica.

$$\sigma_{\max} < \sigma_{ns}$$

$$7,66 \text{ N / mm}^2 < 9 \text{ N / mm}^2 \rightarrow \boxed{\text{ok}}$$

Perfil IPE 200



Tomaremos momentos respecto uno de los puntos de la sección. En este caso lo haremos desde el punto en el que está aplicada F_2 .

$$\sigma_1 = \frac{83 \cdot \sigma_{\max}}{91,5}$$

$$M = \left(\frac{(\sigma_{\max} - \sigma_1)}{2} \cdot 8,5 \cdot 100 \right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 100 + 91,5 + \frac{2}{3} \cdot 8,5 \right) + (\sigma_1 \cdot 8,5 \cdot 100) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 100 + 91,5 + \frac{8,5}{2} \right) + \left(\frac{\sigma_1}{2} \cdot 5,6 \cdot \frac{183}{2} \right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 100 + \frac{2}{3} \cdot 91,5 \right)$$

$$M_{\max.} = 161660,25 \cdot \sigma_{\max.}$$

$$\sigma_{\max.} = \frac{M_{\max.}}{161660,25} = \frac{5107,5}{161660,25} \rightarrow \sigma_{\max.} = 0,0316 \text{ kN} / \text{mm}^2 = \boxed{31,6 \text{ N} / \text{mm}^2}$$

En este caso, como el perfil es de acero y está estandarizado, podríamos haber obtenido directamente el módulo resistente a partir de tablas. En ellas obtendríamos que $\omega = 194000 \text{ mm}^3$, sin embargo, a partir de nuestros cálculos hemos obtenido que $\omega = 161660,25 \text{ mm}^3$. La diferencia debería deberse a que en nuestros cálculos se han considerado rectas las uniones de las aristas a pesar de éstas ser redondeadas.

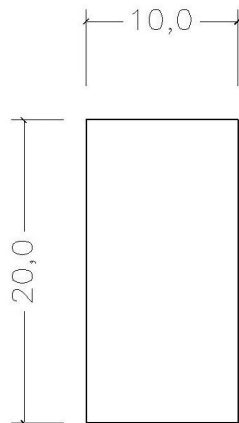
Esta tensión máxima que obtenemos debe ser menor a la “tensión normal segura” del material, especificada en el enunciado de la práctica.

$$\sigma_{\max.} < \sigma_{ns}$$

$$31,6 \text{ N} / \text{mm}^2 < 170 \text{ N} / \text{mm}^2 \rightarrow \boxed{\text{ok}}$$

Debido a la gran diferencia entre la tensión que se permite y la que obtenemos podríamos optar por un perfil de menor tamaño, siempre y cuando cumpla la condición de deformación.

Inercia de la sección rectangular



$$I_x = \frac{1}{12} \cdot b \cdot c^3$$

$$I_x = \frac{1}{12} \cdot 100 \cdot 200^3$$

$$I_x = 66,67 \text{ mm}^2 \cdot \text{m}^2$$

$$E \cdot I = 66,67 \cdot 10 = 666,7 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

SECCIÓN VIGA DE CUBIERTA

Descenso del centro del vano

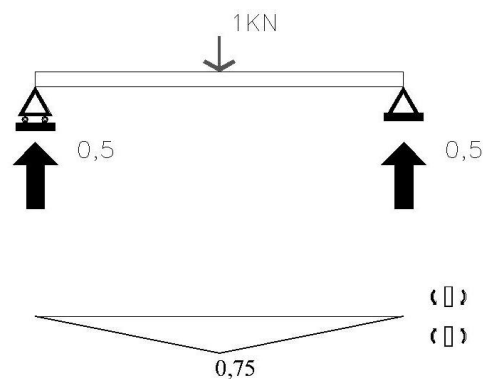


Figura 19. Sistema de cargas virtuales

$$\sum M_A = 0 \quad (+ \curvearrowright) \Rightarrow 1 \cdot 1,5 - 3 \cdot R_B = 0 \Rightarrow R_B = 0,5$$

$$\sum M_B = 0 \quad (+ \curvearrowright) \Rightarrow 1 \cdot 1,5 - 3 \cdot R_A = 0 \Rightarrow R_A = 0,5$$

Una vez obtenido el diagrama de momentos del sistema virtual se aplicará el principio de los trabajos virtuales explicado previamente.

$$W_{ext} = W_{int}$$

$$1^* \cdot \delta = \int M \cdot \frac{M^*}{E.I} ds$$

$$\delta = \frac{1}{E.I} \cdot \left(\frac{5}{12} \cdot 3 \cdot (5,1075) \cdot (0,75) \right) = \frac{4,79}{E.I}$$

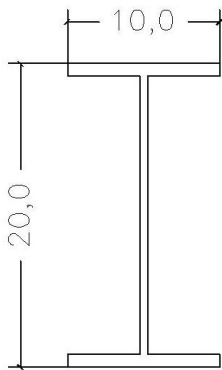
$$\delta = \frac{4,79}{E.I} = 7,18mm$$

Según el enunciado de la práctica, el desplazamiento admitido en esta zona es:

$$\delta = \frac{L}{400} = 7,5mm$$

$$7,5mm > 7,18mm \rightarrow \boxed{ok}$$

Inercia del perfil IPE 200



Al ser un perfil de acero estandarizado, sus propiedades vienen definidas. De éstas obtenemos que la inercia.

$$\boxed{I_x = 19,4mm^2 \cdot m^2}$$

$$E.I = 19,4 \cdot 200 = 3880kN \cdot m^2$$

PERFIL IPE 200

Descenso del centro del vano

$$\delta = \frac{4,79}{E.I} = \frac{4,79}{3880} = 1,23mm$$

Según el enunciado de la práctica, el desplazamiento admitido en esta zona es:

$$\delta = \frac{L}{400} = 7,5mm$$

$$7,5mm > 1,23mm \rightarrow \boxed{ok}$$