

Modelizando el campo acústico generado por superficies vibrantes

Modelling the acoustic field generated by vibrating surfaces

Diana Andrés, Francisco Camarena, Noé Jiménez
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA-CSIC
diaanbau@upv.es, fracafe@fis.upv.es, nojjigon@upv.es

Abstract

Cuando una superficie vibra comprimiendo el medio que tiene delante genera ondas acústicas. Este es el caso de los altavoces, que generan ondas acústicas a frecuencias audibles mediante una superficie móvil. En este trabajo presentamos un tutorial para modelizar la radiación acústica de superficies vibrantes, diferenciando entre geometrías circulares planas y curvadas. En primer lugar, derivaremos los modelos que describen la radiación de superficies móviles, y obtendremos soluciones analíticas para los casos más simples. Para los más complejos, se integrará numéricamente. Ambas soluciones se han incorporado a una interfaz gráfica sencilla, con las que se puede visualizar el campo acústico generado por las distintas superficies al variar sus características de radiación. La metodología propuesta permite profundizar en el análisis de la radiación de ondas acústicas, y presentar un ejemplo de modelización para estudiantes de Acústica, desde la modelización hasta la obtención de soluciones analíticas y numéricas.

When a surface vibrates compressing the medium on its front, it generates acoustic waves. This is the case of loudspeakers, which generate acoustic waves at audible frequencies by means of a moving surface. In this paper we present a tutorial to model the acoustic radiation of vibrating surfaces, differentiating between flat and curved circular geometries. First, we derive the models describing the radiation of moving surfaces, and we will obtain analytical solutions for the simplest cases. For the complex ones, the model will be integrated numerically. Both solutions have been incorporated into a simple graphical interface, with which the acoustic field generated by the different surfaces can be visualized by varying their radiation characteristics. The proposed methodology allows to deepen in the analysis of acoustic wave radiation, and to present an example of modeling for Acoustics students, from modeling to obtaining analytical and numerical solutions.

Palabras clave: Campos acústicos, radiación, transductor, superficie
Keywords: acoustic fields, radiation, transducer, surface

1. Introducción

El sonido es una fluctuación de la presión en un fluido compresible que se propaga a lo largo del medio en forma de onda. Por tanto, cualquier superficie vibrante que comprima el medio que tiene delante puede generar ondas acústicas. Este es el caso de los altavoces, que generan ondas acústicas a frecuencias audibles mediante una superficie móvil, y también de los transductores piezoeléctricos como los que se emplean en los sensores de aparcamiento de los coches y ecógrafos, que se deforman rápidamente bajo la acción de un campo eléctrico generando así ondas a frecuencias ultrasónicas para detectar objetos imitando a los murciélagos.

En todos estos instrumentos la generación del sonido se realiza mediante una superficie vibrante, generalmente plana, aunque también puede tener otra geometría, como ocurre con las superficies curvas. Cuando la superficie se mueve vibrando hacia delante y detrás en el interior de un fluido compresible como el agua o el aire, el medio se comprime y descomprime, generando ondas de presión que se propagan hasta nuestros oídos. En el caso del sonido, las oscilaciones en la presión del aire se convierten en vibraciones mecánicas en las estructuras del oído que nuestro cerebro es capaz de interpretar como sonido. Sin embargo, no todas las ondas acústicas son audibles, o se transmiten en aire. Cuando las vibraciones tienen una frecuencia comprendida entre los 20 Hz y los 20 kHz aproximadamente, nuestro oído es capaz de detectarlas y las percibimos como sonido. Las personas no somos capaces de percibir las vibraciones rápidas que se producen a frecuencias mayores que 20 kHz en el aire, que denominamos ultrasonidos. Sin embargo, este límite es diferente para otros animales, y varía entre especies. Además, los ultrasonidos son muy importantes para ciertos animales que emplean la ecolocalización permitiéndoles reconocer su entorno en ausencia de luz, como ocurre con los murciélagos en la oscuridad de la noche, o los delfines en las profundidades del océano, o en las turbias aguas de un río. Imitándolos, las personas hemos desarrollado métodos de imagen para visualizar el interior de medios opacos como en aplicaciones médicas de imagen y diagnóstico por ecografía, el sónar para imagen submarina o ensayos no destructivos de materiales. Pese a que los dispositivos para generar ondas acústicas a frecuencias audibles se basan en mecanismos diferentes, los ultrasonidos y el sonido se rigen por los mismos principios físicos, por lo que la radiación de superficies vibrantes puede modelarse de forma equivalente para todas estas situaciones.

Por tanto, es muy importante disponer de un modelo matemático sencillo y generalizado que describa la radiación de ondas acústicas producidas por superficies vibrantes. En este trabajo presentamos un tutorial para modelizar la radiación de superficies vibrantes para conocer el campo acústico que generan en función de sus características, diferenciando entre geometrías circulares planas y curvadas. En primer lugar, a partir de principios físicos derivaremos un modelo matemático que describe el campo acústico creado por superficies vibrantes, conocido como la integral de Rayleigh-Sommerfeld. Empleando este modelo obtendremos soluciones analíticas, lo que solo es posible para situaciones simples. En el resto de casos, más complejos, se integrará el modelo con un método computacional para encontrar una solución numérica.

Ambas soluciones se han incorporado a una interfaz gráfica muy sencilla de manejar por el alumno, y que permite visualizar el campo acústico generado por las distintas superficies al variar sus características de radiación, empleando tanto superficies circulares planas como superficies convexas. La metodología propuesta permite profundizar en el análisis de la radiación de ondas acústicas por superficies vibrantes según sus dimensiones, frecuencia de trabajo y geometría. Además, presentamos un ejemplo de modelización matemática para estudiantes de Acústica, desarrollando paso a paso la descripción del problema físico mediante un modelo matemático general, hasta la obtención de soluciones analíticas y numéricas.

2. Modelo teórico

Para modelar el campo acústico, partiremos en primer lugar de las ecuaciones que rigen la dinámica de las ondas acústicas en un fluido, bajo la suposición de linealidad, homogeneidad del medio, conservación de la energía durante las oscilaciones acústicas y reposo inicial del sistema. El sistema de ecuaciones, derivadas a partir de los principios de conservación de masa, momento y estado del fluido, viene dado por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} + q, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p, \quad (2)$$

$$p = c_0^2 \rho, \quad (3)$$

donde p es la presión acústica, \mathbf{v} es el vector de velocidad de partícula, ρ es la densidad acústica, ρ_0 es la densidad del medio en reposo, c_0 es la velocidad del sonido. Aunque las fuentes acústicas pueden ser de varios tipos, en este trabajo consideraremos únicamente las que aporten masa volumétrica fluctuante, como las producidas por una fuente o sumidero acústico. Estas fuentes se introducen en la ecuación de conservación de masa mediante la función $q = q(\mathbf{x}_0, t)$, donde \mathbf{x}_0 son las coordenadas espaciales de la fuente. Tomando la derivada con respecto del tiempo de la ec. (1), la divergencia de la ec. (2) y combinando con la ec. (3), obtenemos la ecuación de ondas inhomogénea

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla^2 p = \frac{\partial q}{\partial t}, \quad (4)$$

donde el término de la derecha se corresponde a las fuentes acústicas de tipo monopolo. Representaremos el conjunto de estas fuentes por el término Q_s , para expresar la ecuación de onda inhomogénea como

$$\left(\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) p(\mathbf{x}, t) = Q_s(\mathbf{x}, t) \quad (5)$$

Partiremos de esta ecuación para obtener una ecuación general que nos permita el cálculo del campo acústico generado por fuentes complejas, asumiendo que la radiación de estas equivale a la suma de la radiación de monopolos simples distribuidos sobre la superficie de la fuente. Para hacer este cálculo, emplearemos la función de Green en el espacio libre. La función de Green $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, t, t_0)$ es solución a la ecuación

$$\left(\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, t, t_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \delta(t - t_0), \quad (6)$$

donde el vector \mathbf{x} indica las coordenadas del campo acústico, \mathbf{x}_0 indica las coordenadas de la fuente acústica, t es el tiempo, t_0 el tiempo retardado, y δ es la función delta de Dirac. Es decir, la función de Green, $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, t, t_0)$, coincide con el campo acústico, $p(\mathbf{x}, t)$, en el espacio \mathbf{x} y el tiempo t , que produciría una fuente puntual e impulsiva localizada en el punto x_0 y retardada un tiempo t_0 . Por requerimiento de la causalidad, la función de Green ha de cumplir $G = 0$ para $t < t_0$, pues el efecto no puede preceder a la causa, es decir, una fuente acústica solo puede generar ondas sonoras después de que comience a vibrar, no antes. Suponiendo que cada una de las fuentes acústicas es puntual, la suma de todas las fuentes simples, Q_s , puede escribirse como la integral de todas ellas de la siguiente manera

$$Q_s(\mathbf{x}, t) = \iiint_V Q_s(\mathbf{x}_0, t_0) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \delta(t - t_0) dV_0 dt_0, \quad (7)$$

Sustituyendo (6) en (7), obtenemos

$$\begin{aligned} Q_s(\mathbf{x}, t) &= \iint_V Q_s(\mathbf{x}_0, t_0) \left(\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, t, t_0) dV_0 dt_0, \\ &= \left(\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \iint_V Q_s(\mathbf{x}_0, t_0) G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, t, t_0) dV_0 dt_0. \end{aligned} \quad (8)$$

Identificando términos en (5) obtenemos que el campo acústico ha de cumplir

$$p(\mathbf{x}, t) = \iint_V Q_s(\mathbf{x}_0, t_0) G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, t, t_0) dV_0 dt_0. \quad (9)$$

La función de Green para el operador D'Alembertiano de la ecuación de onda en tres dimensiones se define como (Morse & Ingard, 1986)

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, t, t_0) = \frac{\delta(t - t_0)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}, \quad (10)$$

donde el retardo $t_0 = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|/c_0$ coincide con el tiempo de vuelo desde \mathbf{x}_0 a \mathbf{x} . Sustituyendo (10) en (9), y aplicando las propiedades de la convolución de la delta de Dirac, el campo acústico se calcula como

$$p(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{Q_s(\mathbf{x}_0, t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|/c_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} dV_0. \quad (11)$$

Esta expresión describe como el campo acústico en cualquier punto \mathbf{x} del espacio es la suma de las ondas producidas por cada una de las fuentes puntuales situadas en una posición \mathbf{x}_0 , cada una de ellas con un retardo proporcional al tiempo de vuelo de la onda, dado por $t_0 = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|/c_0$, y donde la amplitud de la fuente se reduce con la distancia debido a la divergencia esférica, por un factor dado por $1/4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$, como ilustra la Fig. 1. Como las ondas que producen las gotas de lluvia sobre la superficie de estanque, las ondas acústicas generadas por la distribución de fuentes se superponen e interfieren para conformar el campo acústico.

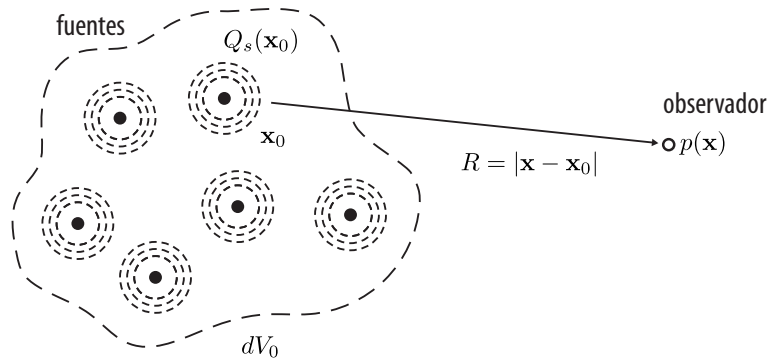


Figura 1: Fuentes y observador para un problema de radiación con una distribución de fuentes acústicas de tipo monopolo.

En muchos casos prácticos, es conveniente expresar la solución en el dominio de la frecuencia en lugar del dominio temporal, pues ello simplifica el cálculo de soluciones. Para obtener un modelo de radiación en el dominio de la frecuencia, buscamos soluciones de la forma

$$p(\mathbf{x}, t) = p(\mathbf{x}, \omega) e^{i\omega t}, \quad (12)$$

donde ahora la presión satisface la ecuación de Helmholtz inhomogénea,

$$(\nabla^2 + k^2) p(\mathbf{x}, \omega) = Q_s(\mathbf{x}, \omega), \quad (13)$$

siendo $k = \omega/c_0$ el número de onda y $p(\mathbf{x}, \omega)$ la transformada de Fourier de la presión $p(\mathbf{x}, t)$ a la frecuencia ω . La función de Green para el problema armónico en tres dimensiones es la función $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ que satisface la ecuación de Helmholtz inhomogénea

$$(\nabla^2 + k^2) G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (14)$$

y tiene la forma

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{e^{\pm ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}. \quad (15)$$

Esta función modela dos ondas en función del signo del exponente de la exponencial compleja, una convergente y otra divergente. Sin embargo, únicamente el término negativo, que se corresponde con la onda divergente, satisface la condición de radiación de (Morse & Ingard, 1986), que impone que el campo ha de ser nulo cuando la distancia $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \rightarrow \infty$, como esperaríamos de una fuente sonora cuando nos alejamos de ella. Por tanto, la ecuación (11) en el dominio de la frecuencia se escribe como

$$p(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{4\pi} \int_V Q_s(\mathbf{x}_0, \omega) \frac{e^{-ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|} dV_0. \quad (16)$$

Esta expresión describe el campo acústico en cualquier punto del espacio, $p(\mathbf{x}, \omega)$, producida por una distribución de monopolos acústicos $Q_s(\mathbf{x}_0, \omega)$ a una determinada frecuencia. Si queremos estudiar una superficie radiante, podemos modelizarla como una serie de fuentes puntuales distribuidas a lo largo de toda la superficie, localizadas en \mathbf{x}_0 , considerando que las fuentes son monopolos, es decir, $Q_s(\mathbf{x}_0, \omega) = \partial q(\mathbf{x}_0, \omega) / \partial t$. Considerando una superficie que vibra con una velocidad normal $v_0(\mathbf{x}_0, \omega)$, cada punto de la superficie produce un aporte de masa por unidad de superficie y tiempo de $q = \rho_0 v_0 \exp(i\omega t)$. En este caso, rayleigh1896theory demostró, incluso antes de que fueran inventados los altavoces, que empleando el teorema de green1852Essay podemos transformar la integral de volumen a una de superficie para obtener la presión en cualquier punto del espacio como

$$p(\mathbf{x}, \omega) = \frac{i\omega\rho_0}{2\pi} \int_S v_0(\mathbf{x}_0, \omega) \frac{e^{-ikR}}{R} dS, \quad (17)$$

donde $R = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ es la distancia entre cada punto sobre la superficie de la fuente \mathbf{x}_0 y el punto de observación \mathbf{x} , y S es la superficie radiante de la fuente que se mueve con una amplitud v_0 . Esta expresión se conoce como la integral de Rayleigh-Sommerfeld, y es un caso particular de la integral de Helmholtz-Kirchhoff (Helmholtz, 1860). En función de la geometría de la superficie nos permitirá calcular el campo radiado. Es importante señalar que este modelo tiene validez si la velocidad es normal a la superficie radiante. El término dos en vez de cuatro en el denominador hace referencia a que la radiación se realiza hacia un único lado de la superficie. A continuación, presentaremos la aplicación de este modelo para describir la radiación de dos casos de superficies vibrantes con diferente geometría, buscando soluciones analíticas y numéricas de la integral de Rayleigh-Sommerfeld.

2.1. Radiación de una superficie circular: el pistón plano

El caso de una superficie circular plana, también conocida como pistón circular, es el caso más común de superficie radiante, y es un modelo simple pero aproximado de la radiación

de ondas acústicas por altavoces, aperturas en conductos de ventilación, o incluso algunos instrumentos musicales de viento. Consideramos una superficie circular plana de radio a , que se mueve uniformemente con una velocidad $v_0 \exp(i\omega t)$ normal a su superficie, y que está fijado en un panel infinito rígido, llamado baffle, donde la velocidad es nula. Para obtener el campo acústico, dividiremos la superficie circular en elementos infinitesimales de superficie dS , cada uno de los cuales actuará como una fuente simple. Así pues, empleando la integral de Rayleigh-Sommerfeld (17), el campo acústico en cualquier punto es

$$p(\mathbf{x}, t) = \frac{i\omega\rho_0 v_0}{2\pi} \int_S \frac{e^{i(\omega t - kR)}}{R} dS. \quad (18)$$

Aunque esta integral es difícil de resolver de manera general, podemos encontrar una solución general para el campo acústico que toma la forma de un desarrollo en serie (King, 1934; Douglas Mast & Yu, 2005). Pese a que la solución completa es válida en cualquier punto del espacio, las series convergen lentamente y la solución no es compacta. Sin embargo, si restringimos la validez únicamente a lo largo del eje del pistón podemos la solución analítica compacta, cuya derivación es mucho más sencilla. Debido a la geometría circular es conveniente trabajar

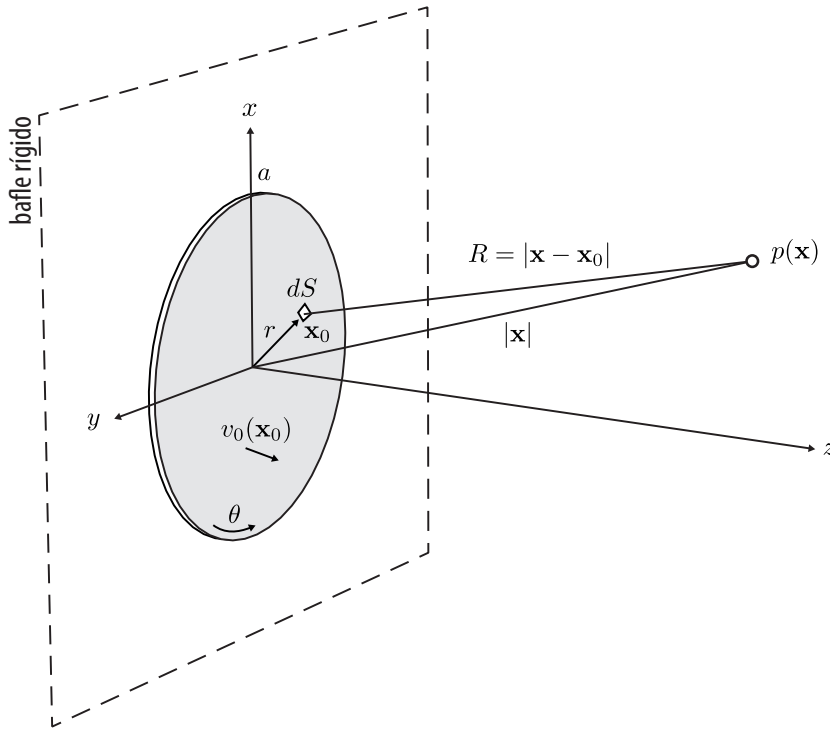


Figura 2: Esquema de un pistón circular plano y los puntos de cálculo.

en coordenadas cilíndricas. Así pues, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, los puntos de observación son $\mathbf{x} = (r, \theta, z)$, mientras que las coordenadas de la superficie son $\mathbf{x}_0 = (r_0, \theta_0, 0)$, considerando que el pistón está situado en $z = 0$, y $dS = r_0 dr_0 d\theta_0$. En coordenadas cilíndricas, la ec. (18) se escribe como

$$p(r, \theta, z, t) = \frac{i\omega\rho_0 v_0}{2\pi} e^{i\omega t} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{e^{-ikR}}{R} dr_0 r_0 d\theta_0, \quad (19)$$

Gracias a la simetría, podemos seleccionar el plano de observación en $\theta = 0$, lo que simplifica el cálculo de la distancia desde la fuente al punto de observación a

$$R = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \theta + z^2}. \tag{20}$$

Podemos encontrar una solución analítica sencilla a lo largo de la coordenada z y sobre el eje de simetría, cuando $x = 0$ e $y = 0$, y, por tanto, $r = 0$ y $\theta = 0$. En este caso, $R = \sqrt{r_0^2 + z^2}$ y entonces el cálculo de la presión sería

$$\begin{aligned} p(z, t) &= \frac{i\omega\rho_0v_0}{2\pi} e^{i\omega t} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{e^{-ikR}}{R} r_0 dr_0 d\theta_0 = i\omega\rho_0v_0 e^{i\omega t} \int_0^a \frac{e^{-ik\sqrt{r_0^2+z^2}}}{\sqrt{r_0^2+z^2}} r_0 dr_0, \\ &= i\omega\rho_0v_0 \left[\frac{1}{-ik} e^{-ik\sqrt{r_0^2+z^2}} \right]_0^a e^{i\omega t} = p_0 \left[e^{i(\omega t - kz)} - e^{i(\omega t - k\sqrt{a^2+z^2})} \right], \end{aligned} \tag{21}$$

dónde $p_0 = c_0\rho_0v_0$. La solución sobre el eje acústico está compuesta por la superposición de dos ondas, una onda plana, dada por el término $\exp(-ikz)$, y una onda que viaja desde el borde del pistón, dada por el término $\exp(-ik\sqrt{a^2+z^2})$. La onda plana describe la radiación del pistón plano, mientras que la segunda onda introduce los efectos de difracción en el borde del pistón (Blackstock, 2000). Tomando el valor absoluto de la ec. (21) obtenemos la amplitud del campo en el eje

$$|p(z, t)| = 2p_0 \left| \sin \left(\frac{1}{2} kz \left[\sqrt{1 + \frac{a^2}{z^2}} - 1 \right] \right) \right|. \tag{22}$$

Cerca de la superficie, estas ondas interfieren de forma constructiva y destructiva, y la presión varía entre 0 y $2p_0$, según el argumento de la función sinusoidal. Cuando el argumento es un múltiplo impar de $\pi/2$ se produce interferencia constructiva y un máximo en el campo. Así pues, los máximos en el campo de radiación de un pistón plano ocurrirán a las distancias del eje que cumplan

$$z_n = \frac{(ka)^2 - (n\pi)^2}{2\pi kn}, \quad n = 1, 3, 5, \dots \tag{23}$$

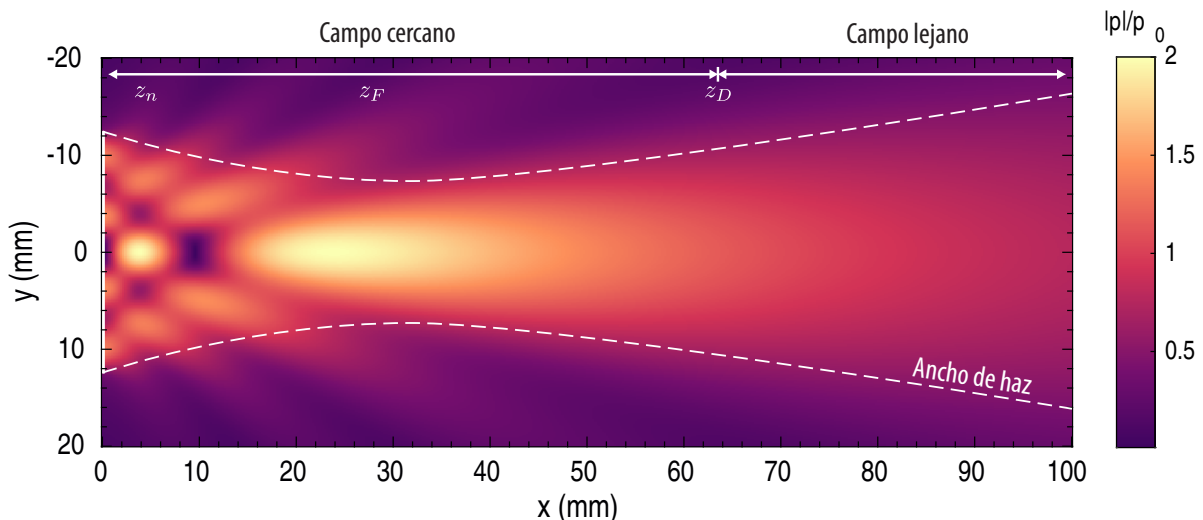


Figura 3: Ejemplo del campo radiado por un pistón circular de apertura $2a = 25$ mm y frecuencia 244 kHz.

A esta zona cercana al pistón se le conoce como región de Fresnel. Esta función tiene un último máximo, que aparece a una distancia del transductor de $z_1 = ka^2/2\pi - \pi/2k$. Puesto que $ka^2/2\pi \gg \pi/2k$ en la mayoría de problemas acústicos, se define la distancia de Fresnel como la distancia a la que aproximadamente aparece el último máximo

$$z_F = \frac{ka^2}{2\pi}. \quad (24)$$

A partir de este último máximo, el campo empieza a decrecer progresivamente. La distancia de difracción, también conocida como distancia de Rayleigh, viene dada por

$$z_D = \frac{ka^2}{2}, \quad (25)$$

y define el punto a partir del cual la amplitud del campo comienza a decaer inversamente con la distancia, a una tasa $1/z$.

2.2. Radiación de un casquete esférico: el pistón focalizado

Para ciertas aplicaciones también se emplean superficies con geometría curva, de forma que, debido a la curvatura, las ondas acústicas convergen hacia un punto dado y la energía se concentra sobre una zona focal. En el caso del casquete esférico de radio de curvatura F y de radio de la apertura a , como el que muestra la Fig. 4, también podemos encontrar soluciones analíticas de la ec. (17), como las obtenidas en el eje de simetría por O'Neil (1949), o para todo el campo pero en aproximación paraxial por Lucas and Muir (1982) o Chen, Schwarz, and Parker (1993).

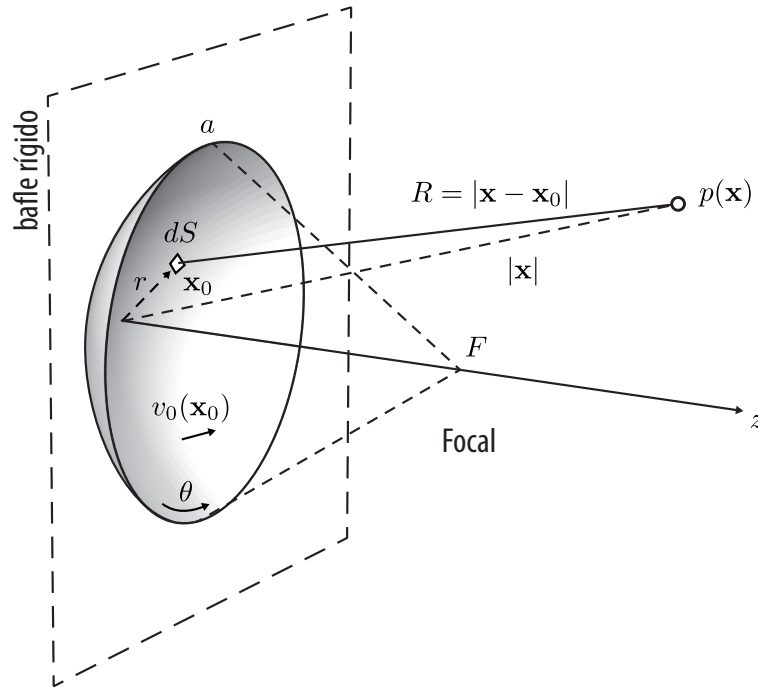


Figura 4: Esquema de un transductor acústico focalizado y los puntos de cálculo.

Una solución completa para la amplitud del campo sobre el eje viene dada por

$$p(z, \omega) \approx 2p_0 \left| \frac{1}{1 - \tilde{z}} \sin \left(k \frac{z - R_{max}}{2} \right) \right|, \quad (26)$$

donde F es el radio de curvatura del pistón, $\tilde{z} = z/F$, a es la apertura media y R_{max} se calcula como

$$R_{max} = F \sqrt{1 + (1 - \tilde{z})^2 - 2(1 - \tilde{z}) \sqrt{1 - \frac{a^2}{F^2}}}. \quad (27)$$

Esta solución es válida para todas las focalizaciones, pero para superficies moderadamente focalizadas, cuando $F \gg a$, empleando una aproximación paraxial de la difracción obtenemos

$$p(z, \omega) \approx 2p_0 \left| \frac{1}{1 - \tilde{z}} \sin \left(G \frac{1 - \tilde{z}}{2\tilde{z}} \right) \right|, \quad (28)$$

donde $G = z_D/F = ka^2/2F$ es la ganancia del transductor, que mide el aumento de la presión acústica en el foco geométrico respecto de la presión en la superficie de la fuente.

Al igual que en el caso de la superficie circular, también podemos distinguir entre zonas de campo cercano y campo lejano. Dentro del campo cercano encontramos tres regiones diferenciadas. Cerca del pistón, para $z < z_N$, se extiende la zona cercana de Fresnel, donde existen fuertes oscilaciones debido a las interferencias constructivas y destructivas. La distancia de Fresnel la definimos en este caso como

$$z_N = \frac{F}{1 + F\lambda/a^2}. \quad (29)$$

La zona de Fraunhofer comprende el foco acústico y el foco geométrico del pistón, y es una región en la que el ancho del haz es mínimo y se concentra la energía acústica. Es importante señalar que debido a la difracción, el foco acústico, la zona de máxima energía, no coincide generalmente con el foco geométrico. Si no se producen efectos de no linealidad y el medio es homogéneo, el foco acústico aparece más cerca del transductor que el foco geométrico. Más allá de la zona de Fraunhofer, para $z > z_F$, donde

$$z_F = \frac{F}{1 - F\lambda/a^2}, \quad (30)$$

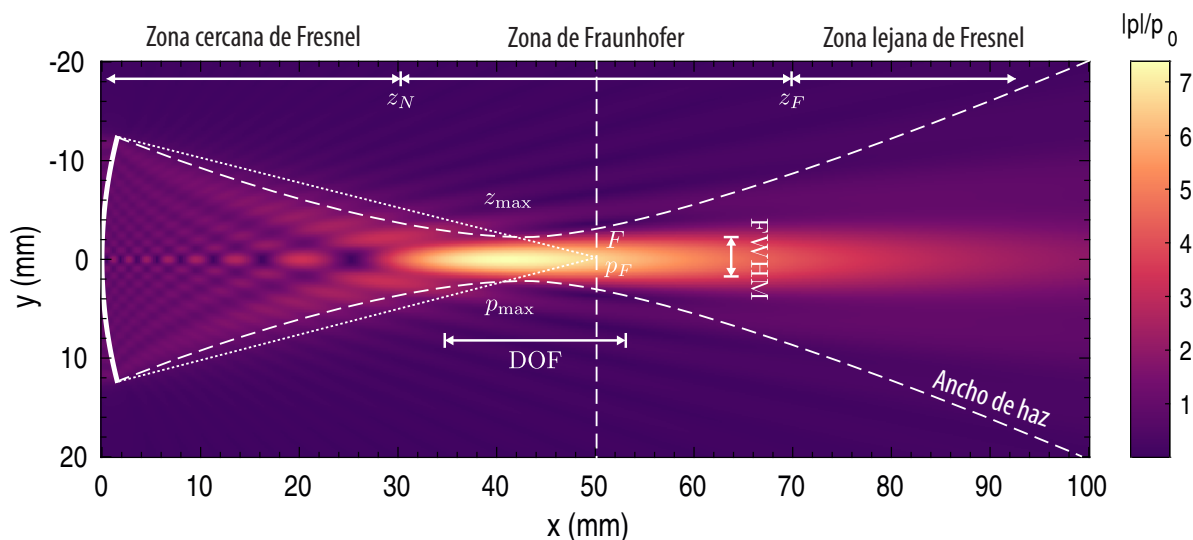


Figura 5: Ejemplo del campo producido por un transductor focalizado de apertura $2a = 25$ mm, frecuencia 1 MHz, y focal $F = 50$ mm.

se extiende la zona lejana de Fresnel, en la que también existen oscilaciones, pero más suaves y de menor amplitud, que progresivamente van desapareciendo.

En la Fig. 5 se muestra un esquema de estas regiones en el campo cercano y diferentes parámetros importantes. Entre los parámetros que caracterizan el foco de un transductor focalizado tenemos la amplitud en el foco geométrico, $z = F$, que se define como

$$p_F = p_0 G = p_0 \frac{ka^2}{2F}. \quad (31)$$

Es importante señalar que puesto que el máximo valor de amplitud del campo se produce antes del foco geométrico, la amplitud máxima en el foco acústico es algo mayor que p_F . El punto en el que, en una aproximación paraxial, se produce un máximo en el campo dado por la ec. (28), viene dado por (Makov et al., 2006)

$$z_{\max} = F \frac{3G}{2G + \sqrt{G^2 + 72}}. \quad (32)$$

Nota que la posición del foco acústico depende de la amplitud inicial (Camarena et al., 2013), pero si la amplitud de vibración es pequeña, este efecto es despreciable y podemos considerar la propagación lineal. Por otra parte, es relevante caracterizar el foco en función de su ancho lateral y axial (o profundidad de campo), definidas a la mitad del máximo de presión en el foco acústico $FWHM = 0.7F\lambda/a$, y $DOF = 1.8F^2\lambda/a^2$. Otros puntos de interés son el plano de salida, cuya distancia viene dada por $z = F - \sqrt{F^2 - a^2}$, o el ángulo de cobertura, dado por $\beta = \arcsin a/F$.

2.3. Solución numérica

Para encontrar una solución en cualquier punto de observación se ha implementado una solución numérica de la ec. (17). Puesto que la velocidad es uniforme, un sencillo sumatorio sobre una serie de fuentes distribuidas a lo largo de la superficie es suficiente para obtener una aproximación muy precisa. Para obtener la solución se crea una malla sobre toda la superficie, no necesariamente uniforme. Los resultados muestran que la solución converge rápidamente a la analítica cuando $\max(dS) < \lambda^2/4$, puesto que en este régimen dos fuentes puntuales cercanas no pueden producir patrones de interferencia como lóbulos de difracción. Finalmente, el campo viene dado por

$$p(\mathbf{x}, \omega) \approx \frac{i\omega\rho_0v_0}{2\pi} \sum_{n=1}^N \frac{e^{-ik\sqrt{(x-x_n)^2+(y-y_n)^2+(z-z_n)^2}}}{\sqrt{(x-x_n)^2+(y-y_n)^2+(z-z_n)^2}} dS_n. \quad (33)$$

donde $\mathbf{x}_n = (x_n, y_n, z_n)$ son las coordenadas de cada punto fuente y $\mathbf{x} = (x, y, z)$ son las coordenadas de cada punto de observación. La ec. (33) tiene una singularidad cuando $\mathbf{x}_n = \mathbf{x}$, que se puede evitar eliminando ese punto del cálculo siempre que la malla sea lo suficientemente fina. Nota que estos puntos coinciden con la superficie radiante y generalmente conocemos su amplitud de vibración.

3. Propuesta práctica

Tras la deducción de los modelos matemáticos que definen el campo acústico producido por diferentes superficies, se propone un estudio gráfico de los mismos y la obtención de parámetros de interés mediante un programa implementado en *Matlab*. En el mismo, se calcula el campo en diferentes zonas en función de la geometría y parámetros de la superficie radiante. A continuación se muestra la interfaz gráfica del programa y el estudio propuesto.

3.1. Interfaz gráfica

El programa de simulación se basa en la resolución de la integral de Rayleigh-Sommerfeld y su comparación con las soluciones analíticas, para la obtención de la distribución de campo acústico en cortes axiales y transversales a una distancia dada. La interfaz gráfica se muestra en la Fig. 6. En la misma se observa que el usuario puede decidir la geometría del pistón, entre plano y focalizado, así como el radio del mismo y la distancia focal (radio de curvatura) en el caso de decidir simular el pistón focalizado como emisor. Por otra parte, el usuario también puede cambiar la frecuencia de emisión del transductor y la distancia a la que se realiza el corte y mapa transversales del campo de radiación, mostrado por la línea discontinua gris. Como en todos los casos tratados el campo acústico tiene simetría axial, el mapa de presión acústica solo se muestra en el plano XZ, siendo idéntico en el plano YZ. Es posible seleccionar si queremos visualizar la solución analítica, y también es posible ajustar la malla para la solución numérica, seleccionando entre tres valores: un tamaño de malla fina y óptima, un tamaño medio, y una malla gruesa con la que la solución numérica tiene errores de convergencia. Esto permite al usuario comparar la solución analítica con el resultado de la integración numérica.

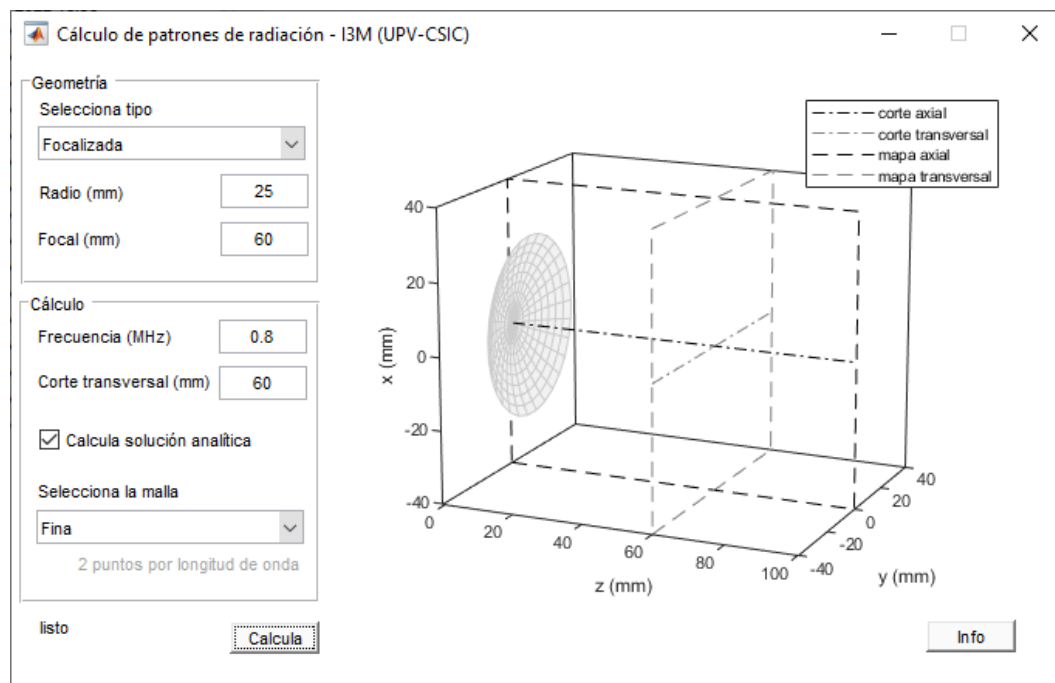


Figura 6: Interfaz gráfica del programa de simulación de los patrones de radiación.

Cuando el usuario tiene configurados los parámetros, la simulación se inicia pulsando el botón *Calcula*. Una barra de progreso indica el estado de los diferentes cálculos. Si tomamos como ejemplo el transductor focalizado mostrado en la Fig. 6, obtendremos las gráficas mostradas en la Fig. 7. Empleando esta herramienta se proponen diferentes actividades de análisis para profundizar en el conocimiento de los campos de radiación de superficies vibrantes.

3.2. Actividades propuestas

Para hacer un análisis exhaustivo de los campos de radiación producidos por superficies vibrantes circulares planas y focalizadas, se proponen una serie de actividades y cálculos a partir de los datos obtenidos con el programa de simulación, a modo de práctica docente con ordenador.

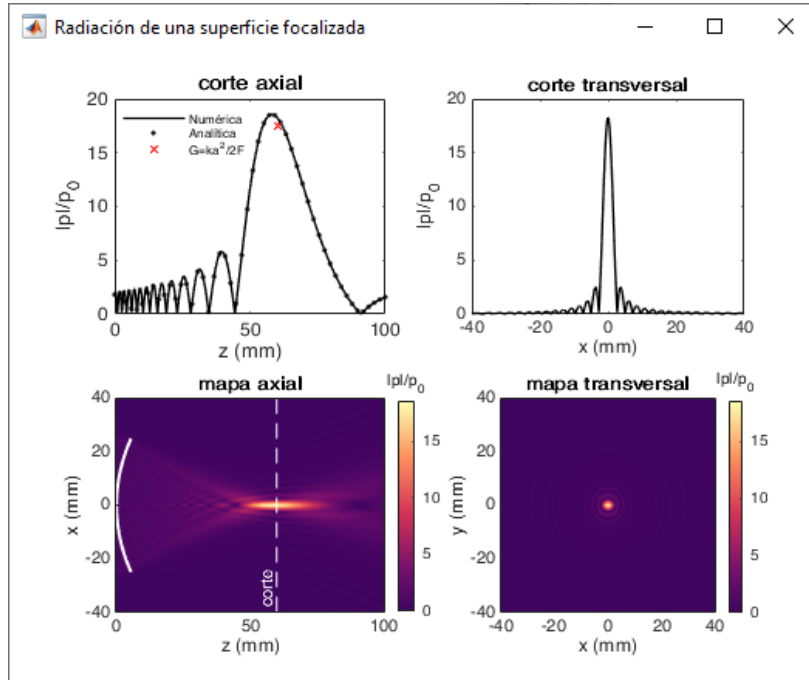


Figura 7: Resultados del campo acústico generado por un pistón circular plano de radio $a = 5$ mm y frecuencia $f=1$ MHz

Pistón circular plano

Como primera actividad se propone calcular la distancia de Rayleigh y la distancia de Fresnel empleando las ecs. (25, 24), respectivamente. Suponemos que el medio al que radiamos es agua, cuya velocidad del sonido tomamos como $c_0 = 1500$ m/s. Posteriormente, se debe comprobar en qué posición aparece el último máximo en el eje y si dicha distancia coincide con la distancia de Rayleigh o la de Fresnel, para profundizar en el significado de estos valores. Este análisis se realiza tomando unos parámetros de, por ejemplo, $a = 5$ mm y $f = 1$ MHz. En segundo lugar, se variará la frecuencia de excitación, por ejemplo al doble que en el caso anterior (2 MHz), y se estudiará qué ha ocurrido con la posición del último máximo y con el ancho del haz en la dirección transversal. El procedimiento se repite pero en este caso empleando una frecuencia menor (por ejemplo 200 kHz). Finalmente, se realizará el mismo estudio pero esta vez variando el radio del pistón, por ejemplo al doble de la que teníamos ($a = 10$ mm), pero dejando fija la frecuencia de excitación a 1 MHz.

Pistón focalizado

Se iniciará el cálculo para un pistón focalizado de radio $a = 10$ mm, focal $F = 50$ mm, y frecuencia $f = 1$ MHz. Situaremos la distancia del corte transversal a 50 mm, sobre el plano focal. La primera actividad consistirá en comparar el resultado del campo generado por este pistón con el generado por uno plano con las mismas dimensiones, mostrando y razonando sus diferencias.

En una segunda actividad se propondrá el estudio de la ganancia teórica, el valor de la presión en el foco geométrico del pistón y el valor máximo de la presión en el foco acústico, empleando un transductor de focal y frecuencia fijas (por ejemplo, $F = 50$ mm y $f = 1$ MHz), pero variando la apertura del mismo. El estudio se realizará para varios valores de apertura, por ejemplo desde un radio $a = 10$ mm hasta 40 mm, en pasos de 10 mm. Se pretende comprobar la

relación entre el tamaño del foco, tanto axial como transversal, y la ganancia del transductor.

4. Resultados

A continuación mostramos la resolución de las actividades propuestas para ambas geometrías, con la finalidad profundizar en el análisis de los campos de radiación y la influencia de la frecuencia de excitación y la geometría en los mismos.

4.1. Pistón circular plano

Para resolver la primera actividad propuesta, se debe simular el campo generado por el pistón plano con los parámetros por defecto, es decir, 5 mm de radio de apertura y 1 MHz de frecuencia de excitación. Si nos fijamos en el último máximo del campo de radiación, Fig. 8 (b), vemos que este aparece a una distancia de 16.12 mm de la superficie del transductor. Realizando el cálculo de las distancias de Fresnel y de Rayleigh se obtiene

$$z_F = \frac{ka^2}{2\pi} = 16.7 \text{ mm}, \quad z_D = \frac{ka^2}{2} = 52.4 \text{ mm}. \quad (34)$$

Si comparamos estos valores con la localización del último máximo obtenido a partir de la simulación numérica, vemos que esta se corresponde con la distancia de Fresnel, mientras que la distancia de Rayleigh es la posición a partir de la cual el campo de presiones decae proporcionalmente a $1/z$.

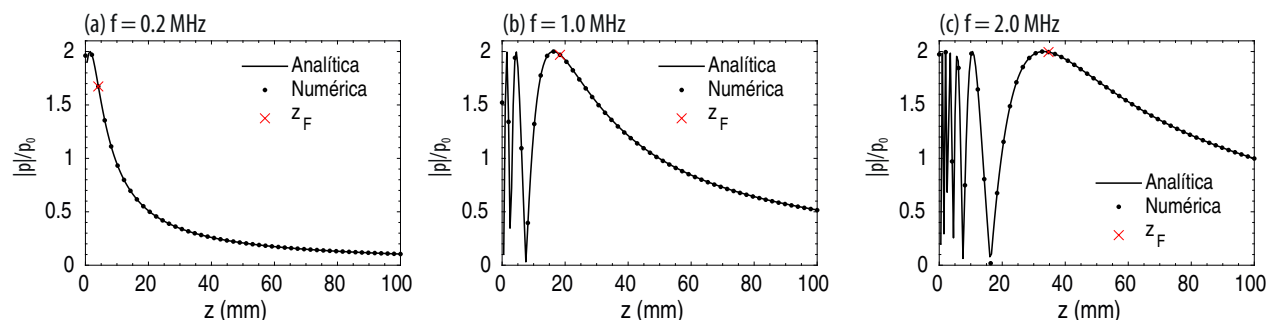


Figura 8: Cortes axiales correspondientes a la simulación del campo acústico en el eje para un transductor circular plano de radio $a = 5$ mm y frecuencias (a) $f = 0.2$ MHz, (b) $f = 1$ MHz, (c) $f = 2$ MHz.

Los cortes axiales correspondientes a este estudio se muestran en la Fig. 8 (a-c), respectivamente. Si aumentamos la frecuencia de radiación del pistón, observamos cómo el campo de radiación se alarga en el eje axial y se focaliza en el eje transversal. Si se duplica la frecuencia de excitación, el último máximo aparece a una distancia de 33 mm, correspondiendo a una distancia de Fresnel de $z_F = 33.3$ mm y de Rayleigh de $z_D = 104.7$ mm. Ambas distancias son el doble que en el caso anterior, formándose un haz más directivo. Si se disminuye la frecuencia hasta unos 200 kHz, se observa que el campo de radiación solo tiene un máximo casi en la superficie del transductor, como si el mismo se comportara como una fuente de ondas esféricas. Esto se debe a que el valor de ka , es decir, la relación entre la frecuencia de emisión y la apertura del pistón, es de 4.2, que es un valor muy cercano a la unidad. De hecho, la distancia de Fresnel tiene un valor de 3.3 mm y la distancia de Rayleigh de 10.5 mm, mostrándose que el comportamiento $1/z$ ocurre muy cerca del pistón.

Si se fija la frecuencia a 1 MHz y se varía la apertura del transductor, por ejemplo a 10 mm, vemos como el último máximo se desplaza a 66.6 mm, es decir, unas cuatro veces más lejos

que el caso con la mitad de apertura (Fig. 9). Si nos fijamos en la expresión de la distancia de Fresnel comprobamos que es lógico, ya que la distancia del último máximo respecto de la superficie del pistón depende linealmente de la frecuencia y de forma cuadrática con la apertura, por lo que duplicar la apertura produce que el último máximo aparezca cuatro veces más lejos, aproximadamente.

4.2. Superficie radiante focalizada con curvatura esférica

Comenzamos comparando el transductor focalizado ($a = 10$ mm, $f = 1$ MHz y $F = 50$ mm), con un pistón plano de las mismas características ($a = 10$ mm y $f = 1$ MHz). El campo se muestra en la Fig. 9. En primer lugar, observamos que ambos campos presentan cierto grado de similitud. Ambos muestran una zona focal, y ambos presentan un patrón de interferencia complejo.

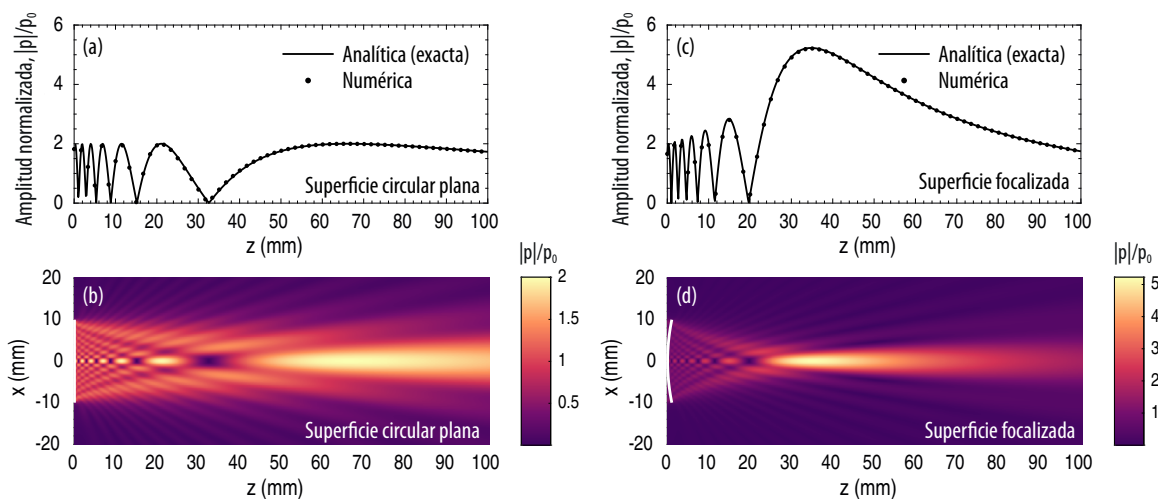


Figura 9: (a,b) Campo radiado por una superficie vibrante circular plana de parámetros $a = 10$ mm y $f = 1$ MHz. (c,d) Campo radiado por una superficie vibrante focalizada de parámetros $a = 10$ mm, $f = 1$ MHz y $F = 50$ mm.

Sin embargo, podemos apreciar varias diferencias. Destaca la diferencia de amplitud en el foco, pasando a ser de $2p_0$ para el transductor circular plano, a $5.3p_0$ en el caso del pistón focalizado. Nota que la focalización de la superficie curva es moderada. Además, para el caso del pistón plano las oscilaciones del campo acústico presentan la misma amplitud de pico, mientras que en el caso de la superficie focalizada la amplitud de pico de los máximos locales aumenta progresivamente hasta el último máximo, que se corresponde con el foco acústico.

Tabla 1: Ganancias según la apertura para un pistón focalizado de $R = 50$ mm y $f = 1$ MHz

Radio (mm)	Ganancia teórica $G = ka^2/2F$	Amplitud en el foco geométrico p_z/p_0 (en $z = F$)	Amplitud en el foco acústico p_{\max}/p_0 (en $z = z_{\max}$)
2.5	0.26	0.26	2.15
5	1.05	1.05	2.69
10	4.19	4.23	5.23
20	16.76	17.47	17.79
30	37.70	41.82	41.99
40	67.02	83.55	83.80

Esto se debe a que todas las ondas provenientes de cada punto del transductor interfieren de manera constructiva alrededor del foco, donde se alcanza la mayor amplitud. Sin embargo, es importante observar como este punto de máxima presión no se sitúa exactamente en el foco geométrico del pistón, sino que aparece más cerca de la superficie debido a la difracción del frente de ondas acústicas.

A continuación, se propone el estudio de la variación de la forma del campo y ganancia en el foco cuando se modifica la apertura del pistón, manteniendo fijos el radio de curvatura y la frecuencia a $F = 50$ mm y $f = 1$ MHz. Se calcula la ganancia teórica en el régimen paraxial según la ec. (31). Empleando la herramienta de simulación obtenemos la amplitud normalizada del campo en el foco geométrico (p_F/p_0 en $z = F$) y la amplitud normalizada en el foco acústico (p_{max}/p_0 en $z = z_{max}$), es decir, en el punto de máxima presión. Haciendo estos cálculos se obtienen los resultados mostrados en la Tabla 1.

La representación gráfica de dichos valores se muestra en la Fig. 10, donde mostramos la amplitud normalizada obtenida en el máximo del campo ($z = z_{max}$) y en el foco ($z = F$) empleando la expresión exacta, y empleando la aproximación paraxial. Nota que la presión en el foco bajo aproximación paraxial es exactamente la ganancia G . Cuando la apertura de la fuente es pequeña, es decir, el número- f dado por la relación entre la apertura y la focal $2a/F \ll 1$, la solución se puede aproximar por la paraxial. Por tanto, las soluciones paraxiales coinciden con las exactas tanto en $z = F$ como en $z = z_{max}$. Es por ello que la ganancia nos proporciona una buena estimación de la presión en el foco geométrico. Sin embargo, puesto que para estas aperturas el foco geométrico no coincide con el acústico ($z_{max} \neq F$), los valores

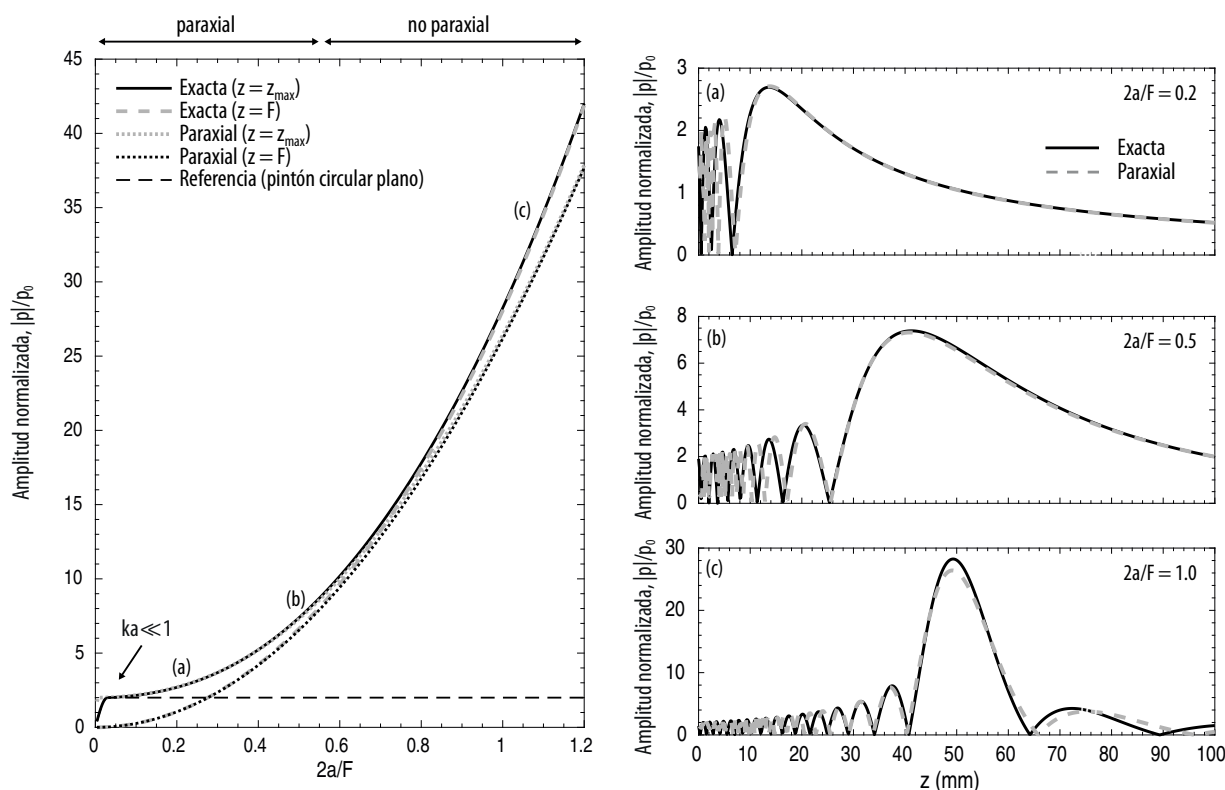


Figura 10: Amplitud del campo acústico en función del número- f ($2a/F$) para (línea punteada) la superficie plana circular, y para el transductor focalizado en (línea continua) el máximo $z = z_{max}$, (línea punteada) en el foco $z = F$, y valor de la ganancia $G = ka^2/2F$ (solución paraxial en $z = F$). Los mapas muestran tres casos particulares (a) $a = 5$ mm, $2a/F = 0.2$, (b) $a = 12.5$ mm, $2a/F = 0.5$ y (c) $a = 25$ mm, $2a/F = 1.0$.

del campo acústico en ambos puntos son muy diferentes. Como muestra la Fig. 10 (a), para $a = 5 \text{ mm}$ ($2a/F = 0.2$), el máximo del campo aparece en $z_{\text{max}} = 14.8 \text{ mm}$, mientras que el foco geométrico está en $F = 50 \text{ mm}$. Los efectos de difracción en este caso son fuertes.

Esta situación cambia cuando la apertura crece. Al aumentar la apertura la ganancia crece pues la superficie es más extensa y focalizada, y el punto focal se acerca al foco geométrico debido a que los efectos de difracción son mucho menores. El foco ya no tiene la característica forma de elipse alargada, sino que se va pareciendo más a un punto en el que se concentra toda la energía. De hecho, a mayor focalización, más ganancia en el punto focal y, por tanto, más energía se concentra en el mismo, como se muestra en la Fig. 10 (b). Cuando $2a/F \approx 1$, entonces $z_{\text{max}} \approx F$, por lo que las soluciones exactas medidas en ambos puntos son muy similares. Lo mismo ocurre con las soluciones paraxiales, pero ambos grupos, las paraxiales y las exactas, difieren en amplitud, como ilustra el campo axial representado en la Fig. 10 (c). Finalmente, observamos que para valores muy bajos de apertura, se cumple que $ka \ll 1$. En este régimen, señalado con una flecha en la Fig. 10, la impedancia de radiación de la superficie vibrante es imaginaria pura, como también ocurre en el caso de un pistón de tamaño reducido (Blackstock, 2000). Por tanto, la superficie vibrante únicamente puede empujar el aire que tiene delante siendo muy poco efectiva para comprimirlo, y como consecuencia, el campo radiado es muy

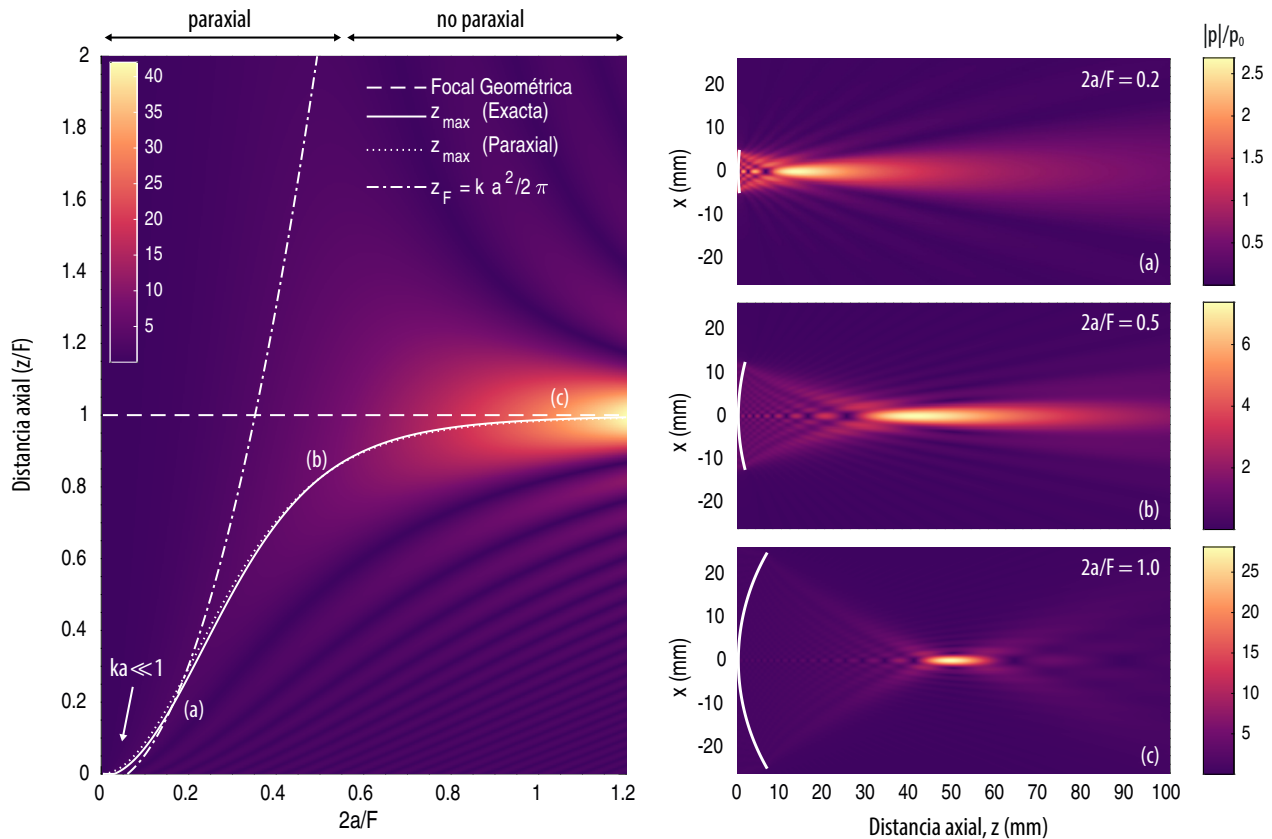


Figura 11: Amplitud del campo acústico en función del número- f ($2a/F$) y la distancia axial normalizada a la focal (z/F). La posición de la focal geométrica está marcada con la línea a trazos, la posición del foco acústico está marcado con la línea continua, la posición del foco acústico en la aproximación paraxial está marcado con la línea punteada, y la distancia de Fresnel para un pistón circular está marcada con la línea punteada-trazada. Los mapas muestran tres casos particulares (a) $a = 5 \text{ mm}$, $2a/F = 0.2$, (b) $a = 12.5 \text{ mm}$, $2a/F = 0.5$ y (c) $a = 25 \text{ mm}$, $2a/F = 1.0$.

bajo. Esta característica, común en todas las fuentes acústicas, es capturada por la integral de Rayleigh-Sommerfeld y por la solución analítica exacta, pero no por la solución paraxial.

Finalmente, en la Fig. 11 mostramos la focal del campo. En el mapa de color aparece la amplitud normalizada, y las líneas describen la posición del máximo del campo acústico empleando una evaluación numérica de la expresión exacta y la solución paraxial dada por la ec. (32). A aperturas bajas, la posición del máximo no difiere demasiado de la posición de la distancia de Fresnel para un transductor circular, pues en efecto cuando $F \gg a$, ambas geometrías son similares. Conforme aumenta la apertura del transductor focalizado se aprecia que el máximo de la presión se acerca progresivamente a la focal geométrica del transductor, siendo casi del mismo valor para aperturas cercanas al valor de la focal. Es importante señalar que pese a que la amplitud en el caso paraxial difiere de la solución exacta, la posición del máximo dada por ambos modelos es muy similar, lo que sugiere que la ec. (32), que describe la posición del punto focal, es una buena aproximación aún fuera del régimen paraxial.

5. Conclusiones

En este trabajo hemos introducido los principios físicos que rigen la radiación de ondas acústicas en fluidos, modelizando el caso general mediante la integral de Rayleigh, y particularizando el modelo al caso de la radiación de ondas acústicas por superficies vibrantes con geometrías circular y esférica, que comúnmente se emplean para modelizar transductores acústicos planos y focalizados. Estos modelos se han implementado en una interfaz gráfica para que el usuario final pueda obtener el campo acústico en el espacio generado por pistones en función de sus características, lo que ofrece la posibilidad de visualizar las soluciones analíticas y numéricas en profundidad.

La propuesta práctica que planteamos explora las diferencias básicas entre los campos acústicos generados por diferentes superficies vibrantes en términos de distribución del campo, amplitud del campo y posición del punto focal. Ello permite profundizar en aspectos fundamentales y prácticos en el marco de la Ingeniería Acústica, pues estas superficies modelizan el comportamiento de sistemas comunes como la radiación de ondas sonoras por altavoces, o la radiación de ultrasonidos mediante transductores piezoeléctricos para aplicaciones de ensayos no destructivo, acústica submarina, aplicaciones industriales como sensores de aparcamiento, etc. En el caso de los transductores focalizados, estas superficies curvas se emplean comúnmente en aplicaciones terapéuticas de los ultrasonidos, donde se persigue focalizar la energía acústica en la zona localizada en el interior del organismo.

Esperamos que este trabajo sirva como base para dar a conocer las características de los campos acústicos radiados por estas superficies. Además, la experiencia propuesta introduce al alumnado en los procesos de modelización matemática: se comienza por la derivación de un modelo matemático a partir de principios físicos fundamentales, se construye un modelo general en forma integral, y, finalmente, se particulariza para el caso de interés y se resuelve tanto analítica como numéricamente.







Los contenidos comprenden las ramas de “Ingeniería Acústica”, “Ingeniería de Telecomunicaciones”, “Física Aplicada”, y “Física de ondas” en general. La metodología propuesta se puede aplicar a nivel fundamental en asignaturas optativas de Grado como “Ultrasonidos y Aplicaciones Industriales”, y los conceptos más avanzados en el ámbito de Máster Universitario en asignaturas de especialización como “Ultrasonidos”, “Acústica Submarina” o “Fundamentos de Ingeniería Acústica”. En particular, la propuesta práctica se realizó originalmente para el curso de postgrado “Fundamentos y aplicaciones de los ultrasonidos”, ofertado anualmente por la Universitat Politècnica de Valencia desde 2017, impartido a distancia, en la que los alum-








nos presentan diferente base matemática y provienen de diferentes titulaciones. Por ello, se ha planteado una metodología a modo de práctica por ordenador, basado en la interfaz gráfica desarrollada. Se espera que, en el proceso de análisis, los futuros ingenieros aprendan a ser críticos con la interpretación de los resultados, y extraigan conclusiones a partir de los modelos teóricos y los resultados de simulación obtenidos mediante el programa implementado.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido apoyado por el Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades a través de las subvenciones IJC2018-037897-I, FPU19/00601 y PID2019-111436RBC22, por la Agència Valenciana de la Innovació a través de la subvención INNCON/2021/8 y por la Generalitat Valenciana con el proyecto AICO/2020/268. Acción cofinanciada por la Unión Europea a través del Programa Operativo del Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER) de la Comunitat Valenciana (IDIFEDER/2018/022 y IDIFEDER/2021/004).

Referencias

-  [Blackstock, D. T. \(2000\).](#)
Fundamentals of physical acoustics.
John Wiley and Sons.
-  [Camarena, F., Adrián-Martínez, S., Jiménez, N., & Sánchez-Morcillo, V. \(2013\).](#)
Nonlinear focal shift beyond the geometrical focus in moderately focused acoustic beams.
The Journal of the Acoustical Society of America, 134 (2), 1463–1472.
doi: 10.1121/1.4812865
-  [Chen, X., Schwarz, K. Q., & Parker, K. J. \(1993\).](#)
Radiation pattern of a focused transducer: A numerically convergent solution.
The Journal of the Acoustical Society of America, 94 (5), 2979–2991.
doi: 10.1121/1.407329
-  [Douglas Mast, T., & Yu, F. \(2005\).](#)
Simplified expansions for radiation from a baffled circular piston.
The Journal of the Acoustical Society of America, 118 (6), 3457–3464.
doi: 10.1121/1.2108997
-  [Green, G. \(1852\).](#)
An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism.
Journal für die reine und angewandte Mathematik, 44, 356–374.
doi: 10.1515/crll.1852.44.356
-  [Helmholtz, H. v. \(1860\).](#)
Theorie der luftschwingungen in röhren mit offenen enden.
Journal für die reine und angewandte Mathematik, 57, 1–72.
doi: 10.1515/crll.1860.57.1

-  King, L. V. (1934).
On the acoustic radiation field of the piezo-electric oscillator and the effect of viscosity on transmission.
Canadian Journal of Research, 11 (2), 135–155.
doi: 10.1139/cjr34-080
-  Lucas, B. G., & Muir, T. G. (1982).
The field of a focusing source.
The Journal of the Acoustical Society of America, 72 (4), 1289–1296.
doi: 10.1121/1.388340
-  Makov, Y. N., Espinosa, V., Sánchez-Morcillo, V., Ramis, J., Cruaños, J., & Camarena, F. (2006).
Strong on-axis focal shift and its nonlinear variation in low-fresnel-number ultrasound beams.
The Journal of the Acoustical Society of America, 119 (6), 3618–3624.
doi: 10.1121/1.2197805
-  Morse, P. M., & Ingard, K. U. (1986).
Theoretical acoustics.
Princeton University Press.
-  O’Neil, H. (1949).
Theory of focusing radiators.
The Journal of the Acoustical Society of America, 21 (5), 516–526.
doi: 10.1121/1.1906542
-  Rayleigh, J. W. S. (1896).
The theory of sound (Vol. II).
McGraw-Hill.
doi: 10.1017/CBO9781139058094
-  Sommerfeld, A. (1909).
Über die ausbreitung der wellen in der drahtlosen telegraphie.
Annalen der Physik, 333 (4), 665–736.
doi: 10.1002/andp.19093330402