Curso – Resistencia de materiales [15153]

Clase 9 – Deflexión en vigas

Plan de estudios - Ingeniería Civil en Mecánica

Profesores: Matías Pacheco Alarcón (**matias.pacheco@usach.cl**)

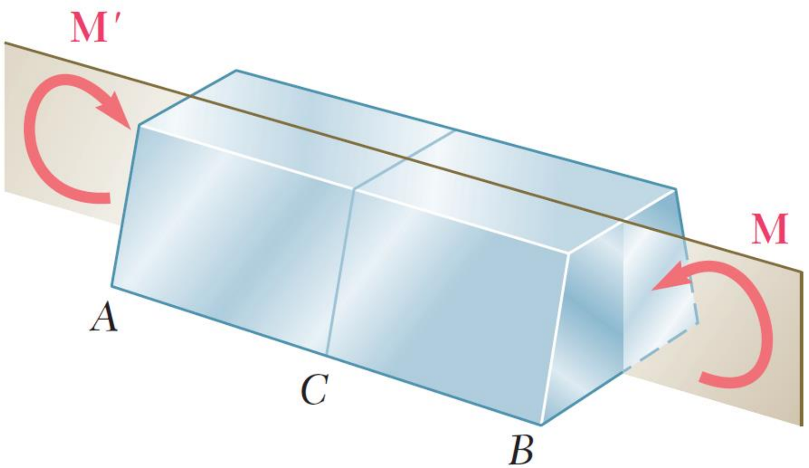
Aldo Abarca Ortega (**aldo.abarca@usach.cl**)

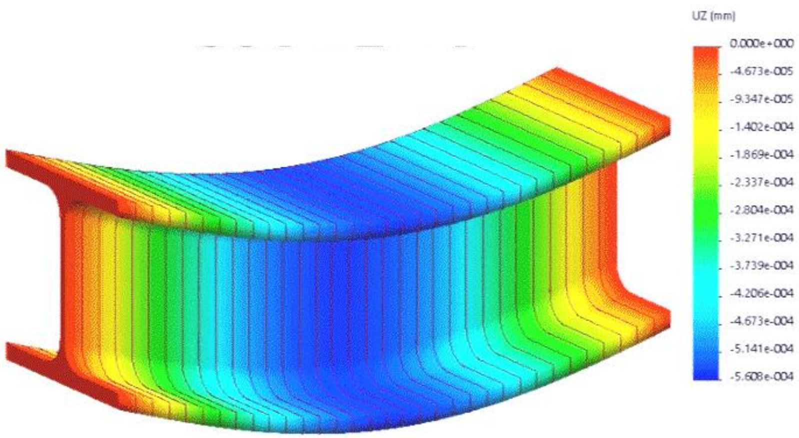
Ayudante: Estéfano Muñoz (**estefano.munoz@usach.cl**)

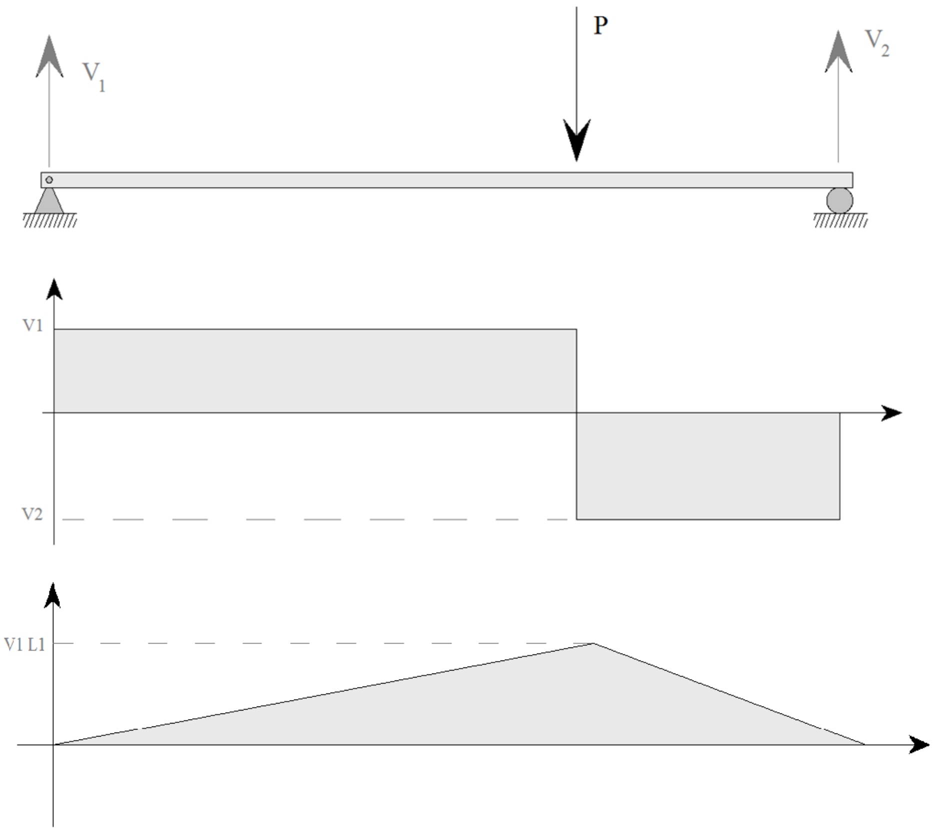
Santiago de Chile, Mayo 2019

DEPARTAMENTO DE
INGENIERÍA
MECÁNICA
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Resumen clase anterior







DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Resumen clase anterior

$\sum F_{axial}$:

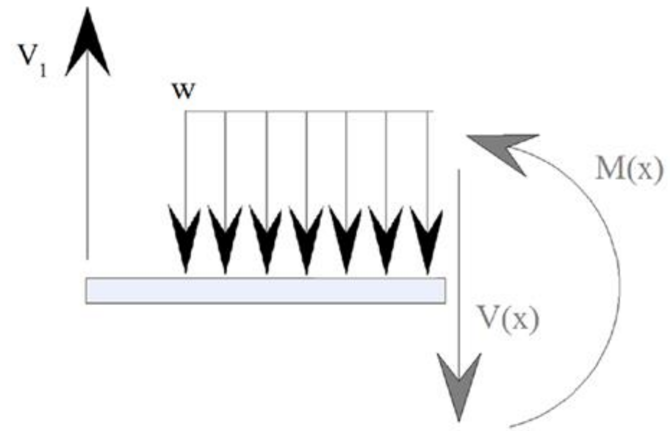
$$\boxed{\bar{y} = 0}$$

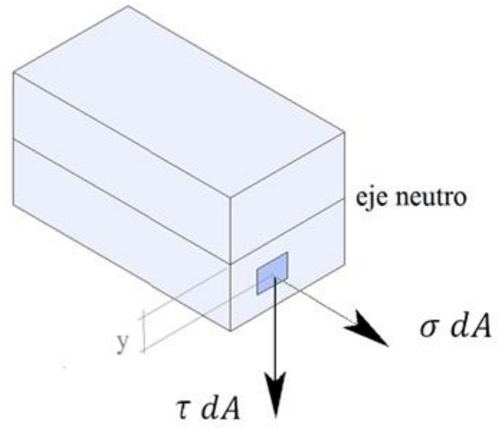
$\sum M_{flector}$:

$$\boxed{\sigma = \frac{M\,y}{I_{EN}}}$$

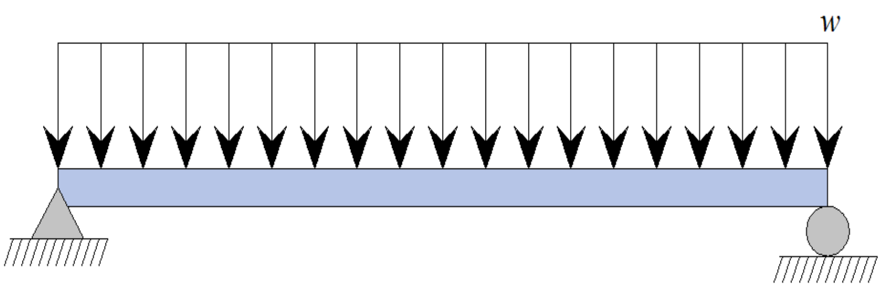
$\sum F_{axial\ Parcial}$:

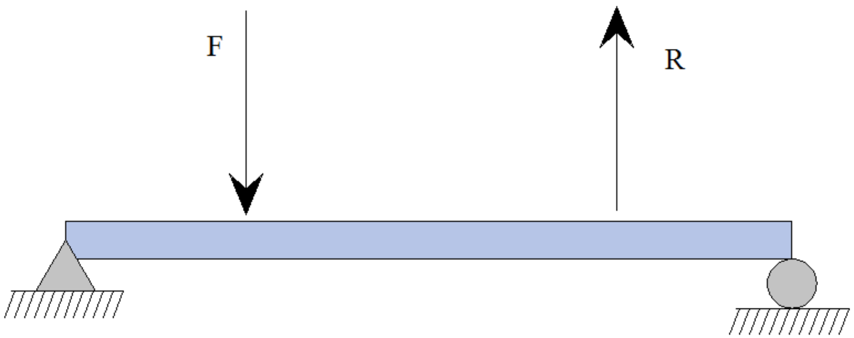
$$\boxed{\tau = \frac{VQ}{It}}$$

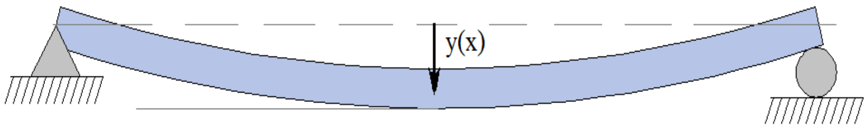


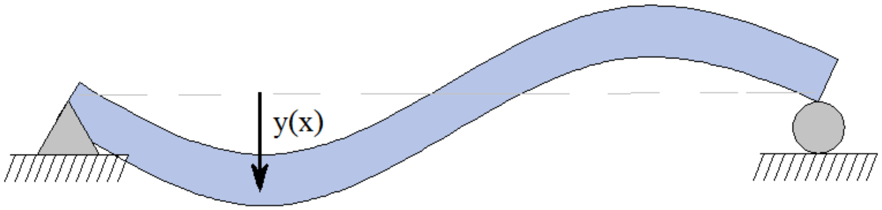


Deflexión de una viga

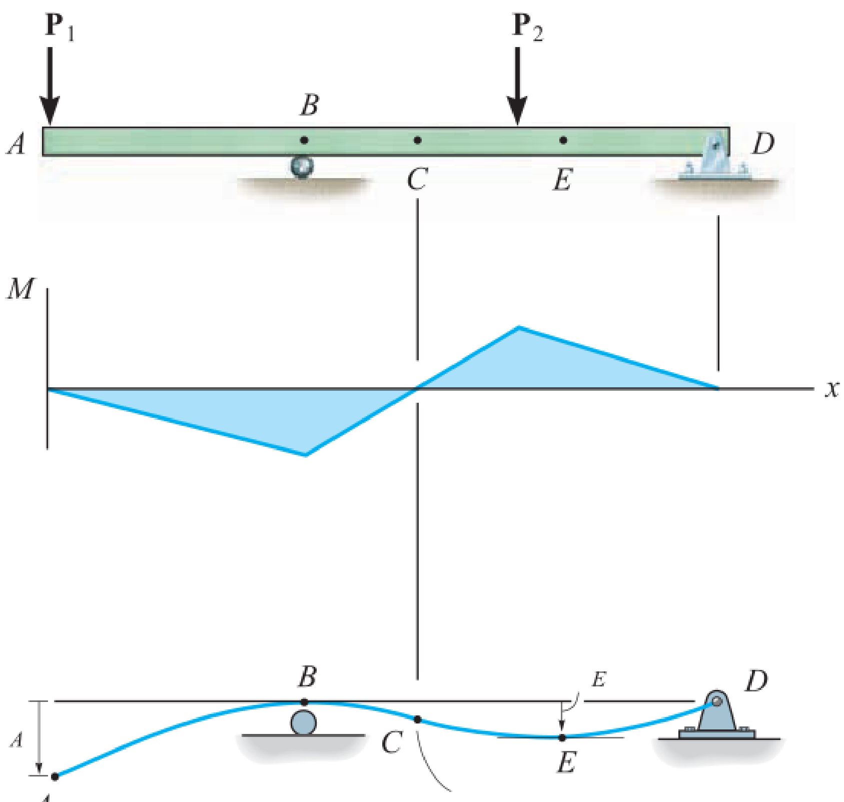


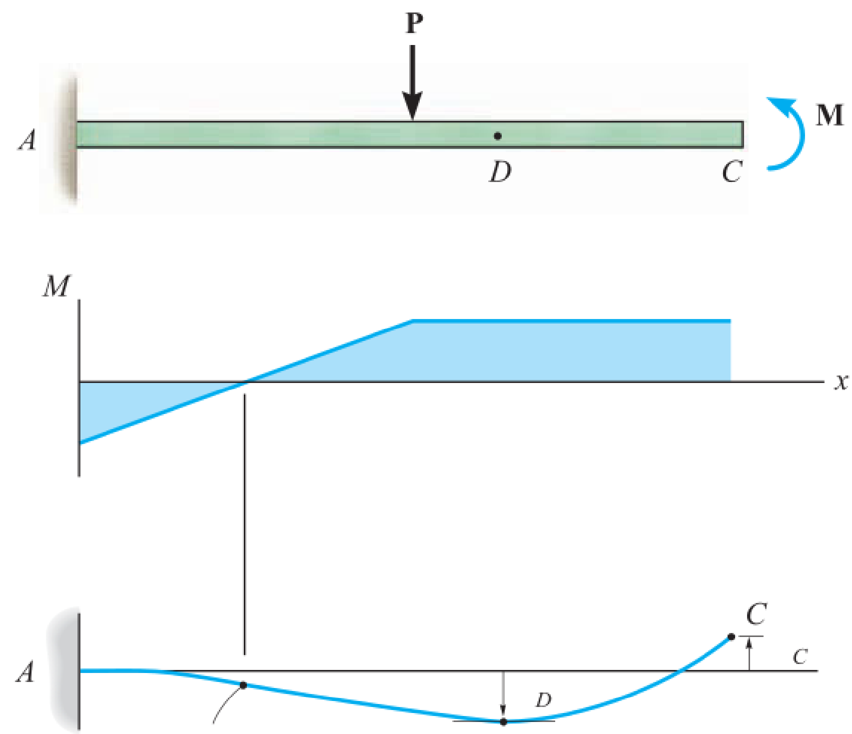






Deflexión de una viga





Relación momento flector - Elástica

Considere una viga con su largo mucho más grande que su ancho y espesor, de tal modo que su deformación sea causada por deflexión a través de las fuerzas externas a la cual está siendo sometida. Se calculó anteriormente la relación entre el ángulo de giro $d\theta$ y su radio ρ desde su centro O' hasta dx.

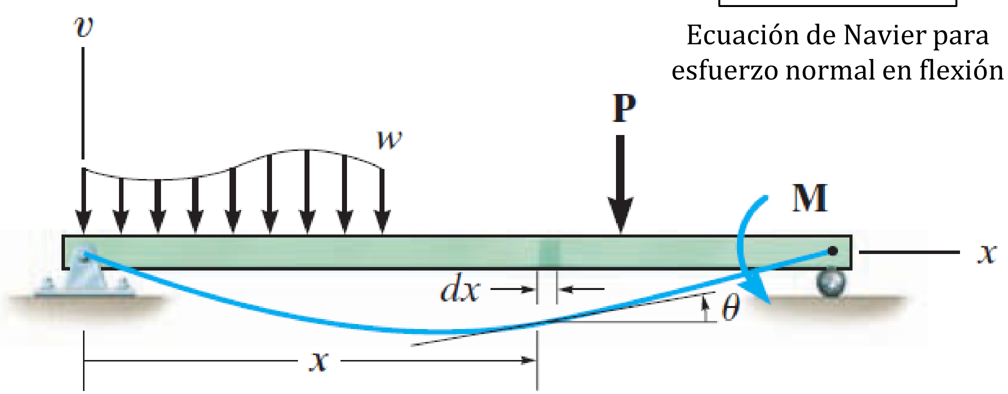
$$\epsilon = \frac{(ds' - ds)}{ds} \rightarrow ds = dx = \rho d\theta, ds' = (\rho - y)d\theta$$

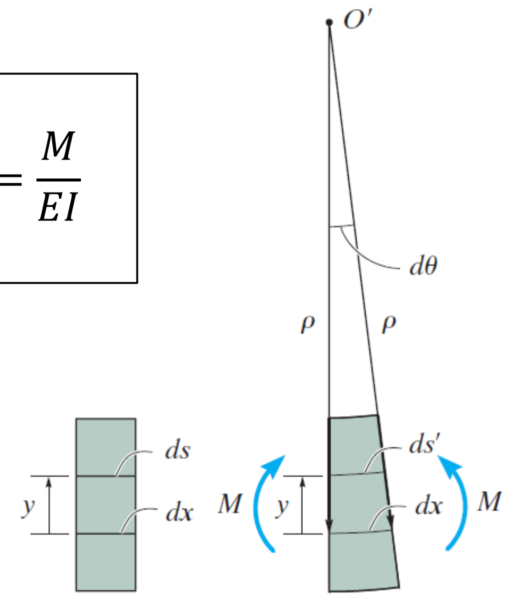
$$\epsilon = \frac{(\rho - y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} \rightarrow \frac{1}{\rho} = -\frac{\epsilon}{y}$$

$$\boxed{\sigma = -\frac{My}{I}}$$

Ecuación de Navier para esfuerzo normal en flexión

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}}$$





Antes de deformación

Después de deformación

Relación momento flector - Elástica

Considere una viga con su largo mucho más grande que su ancho y espesor, de tal modo que su deformación sea causada por deflexión a través de las fuerzas externas a la cual está siendo sometida. Se calculó anteriormente la relación entre el ángulo de giro $d\theta$ y su radio ρ desde su centro O' hasta dx.

$$\epsilon = \frac{(ds' - ds)}{ds} \rightarrow ds = dx = \rho d\theta, ds' = (\rho - y)d\theta$$

$$\epsilon = \frac{(\rho - y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} \rightarrow \frac{1}{\rho} = -\frac{\epsilon}{y}$$

$$\boxed{\sigma = -\frac{My}{I}}$$

Ecuación de Navier para esfuerzo normal en flexión

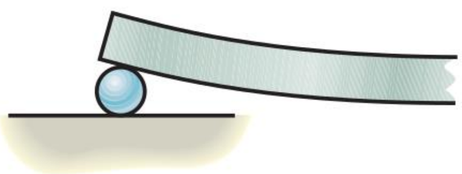
$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \rightarrow EI\frac{1}{\rho} = M(x) \rightarrow EI\frac{d^2y}{dx^2} = M(x)}$$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M(x) \rightarrow EI\frac{dy}{dx} = EI\,\theta(x) = \int M(x)dx + c_1 \rightarrow \boxed{EI\,y(x) = \int\int M(x)dx\,dx + c_1x + c_2}$$

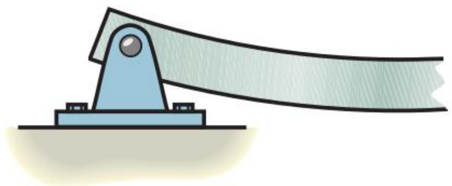
Método de la doble integración para deflexión en vigas

Condiciones de contorno y continuidad

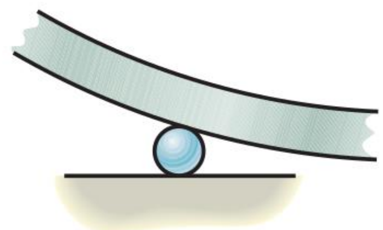
Usando el método de doble integración en vigas para flexión encontramos constantes propias de una ecuación diferencial, las cuales estarán en función del corte, momentos flectores, pendientes (θ), o deflexiones. Se deben evaluar éstas constantes en base a las condiciones de borde o continuidad del problema particular.



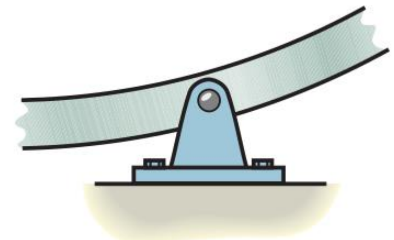
Apoyo simple: $\Delta = 0$; $M = 0$



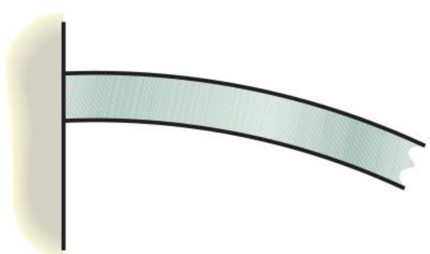
Articulación: $\Delta = 0$; $M = 0$



Apoyo simple: $\Delta = 0$



Articulación: $\Delta = 0$



Empotramiento: $\theta = 0$; $\Delta = 0$

Extremo libre: $\mathrm{V} = 0$; $M = 0$

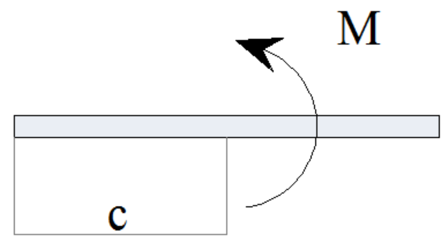
Unión interna: $M = 0$

Funciones discontinuas

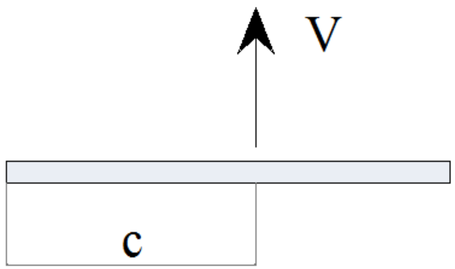
El método de la doble integración es conveniente cuando la carga o momento interno puede ser expresado como una función continua a lo largo de toda la viga. En muchos casos éste método se vuelve dificultoso a la hora de desarrollar las distintas ecuaciones, debido a que distintas cargas y momentos son aplicados en distintas áreas de la viga. A partir de las funciones discontinuas se puede encontrar una sola ecuación que determine el comportamiento de la viga sometida a múltiples cargas y momentos.

$$\langle x-a\rangle^n = \begin{cases} 0 & \text{para } x < a \\ (x-a)^n & \text{para } x \geq a \end{cases}$$

Funciones de Macaulay



$$V = 0$$
$$M = M\langle x-c\rangle^0$$



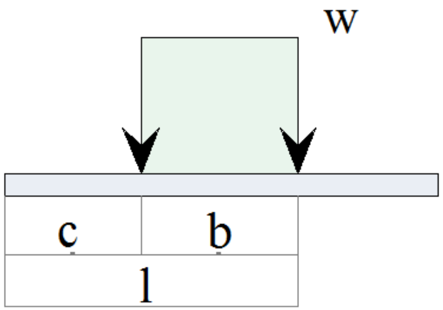
$$V = V\langle x-c\rangle^0$$
$$M = V\langle x-c\rangle$$

Funciones discontinuas

El método de la doble integración es conveniente cuando la carga o momento interno puede ser expresado como una función continua a lo largo de toda la viga. En muchos casos éste método se vuelve dificultoso a la hora de desarrollar las distintas ecuaciones, debido a que distintas cargas y momentos son aplicados en distintas áreas de la viga. A partir de las funciones discontinuas se puede encontrar una sola ecuación que determine el comportamiento de la viga sometida a múltiples cargas y momentos.

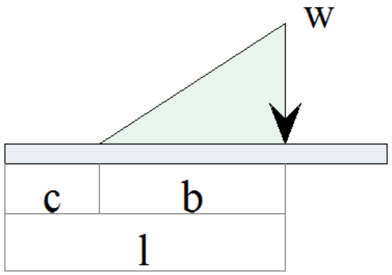
$$\langle x-a\rangle^n = \begin{cases} 0 & \text{para } x < a \\ (x-a)^n & \text{para } x \geq a \end{cases}$$

Funciones de Macaulay



$$V = -w\langle x-c\rangle + w\langle x-l\rangle$$

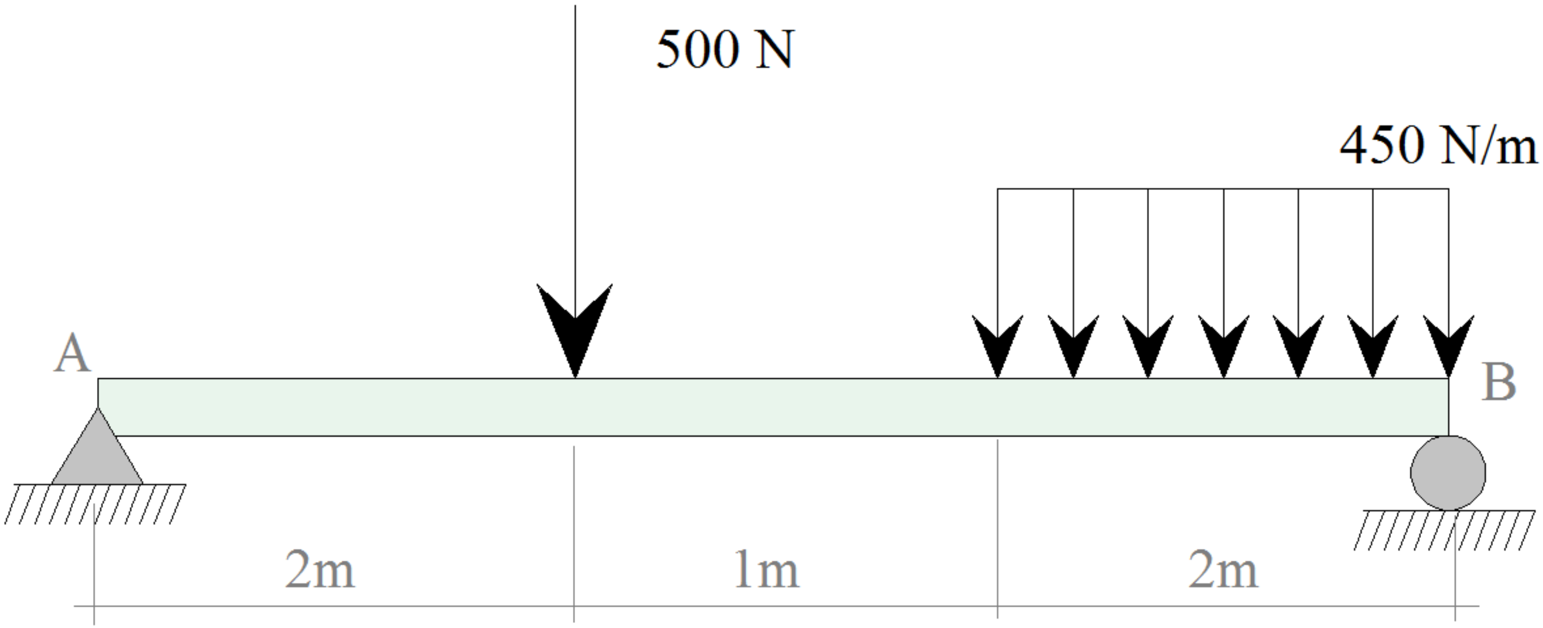
$$M = -\frac{w}{2}\langle x-c\rangle^2 + \frac{w}{2}\langle x-l\rangle^2$$



$$V = -\frac{w}{2b}\langle x-c\rangle^2 + \frac{w}{2b}\langle x-l\rangle^2 + w\langle x-l\rangle$$

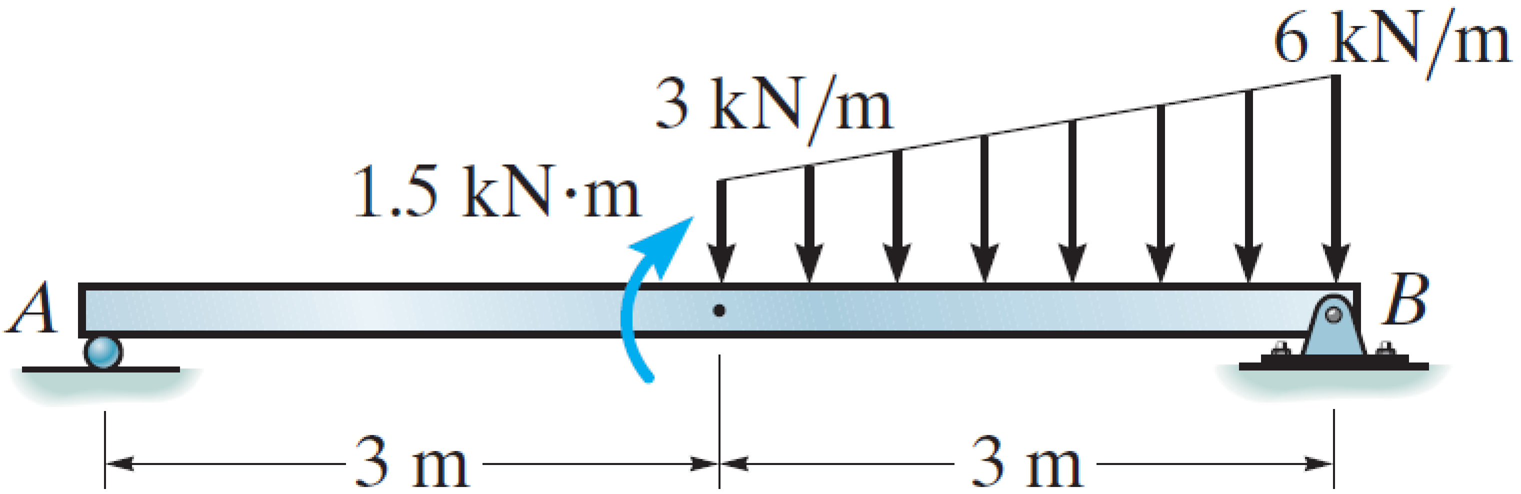
$$M = -\frac{w}{6b}\langle x-c\rangle^3 + \frac{w}{6b}\langle x-l\rangle^3 + \frac{w}{2}\langle x-l\rangle^2$$

Ejemplo:
Considere la viga de la figura con todas sus cargas. Calcula la función de la deformada en toda la viga.



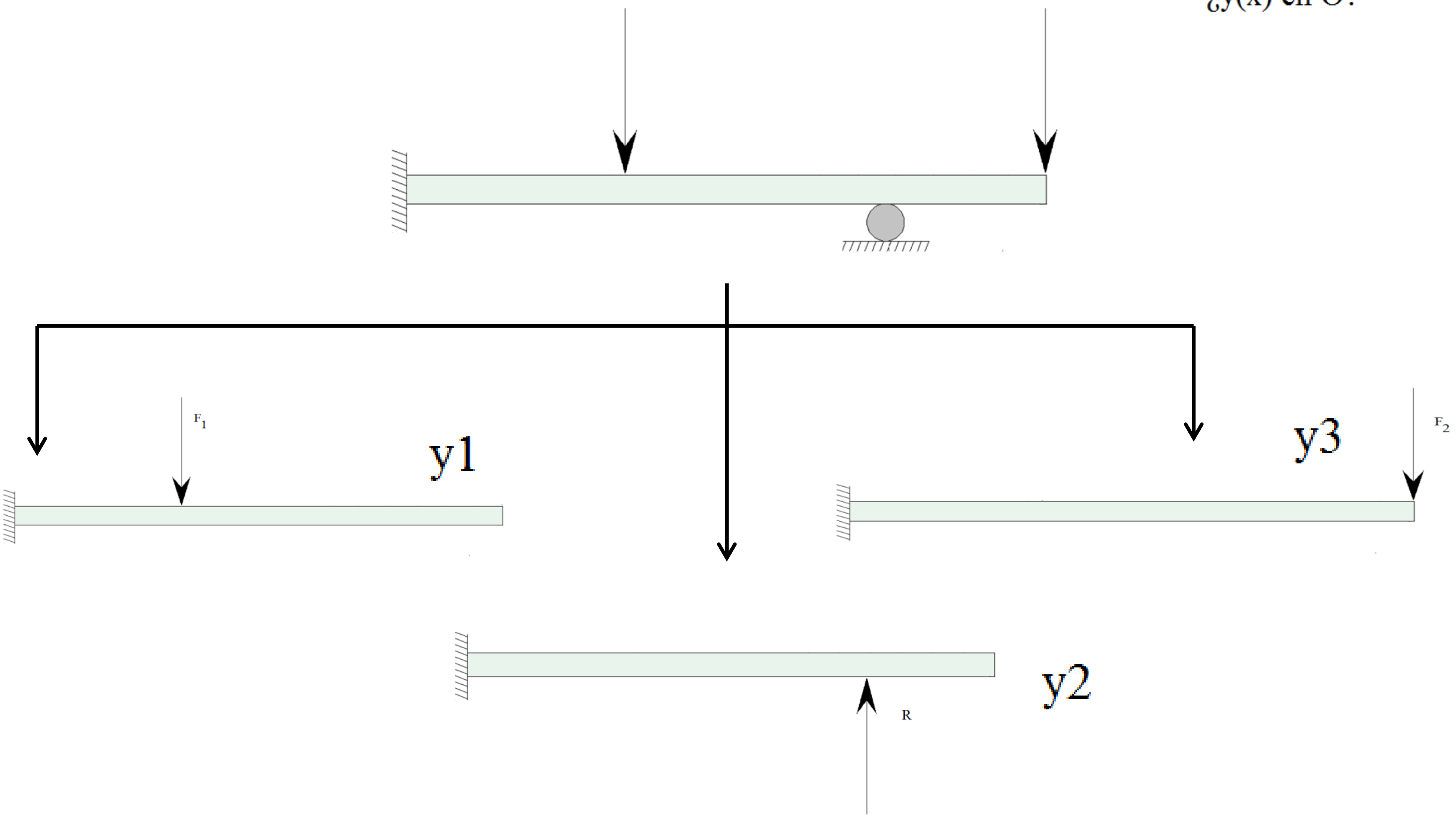
DEPARTAMENTO DE
INGENIERÍA
MECÁNICA
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Ejemplo:
Considere la viga de la figura con todas sus cargas. Calcula la función de la deformada en toda la viga.

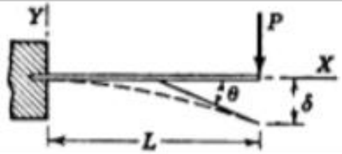
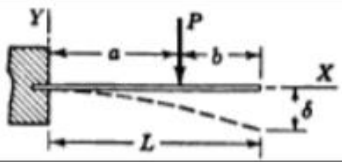
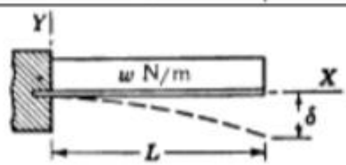
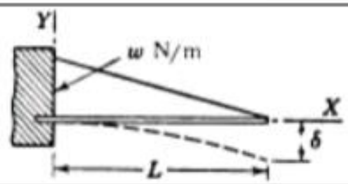
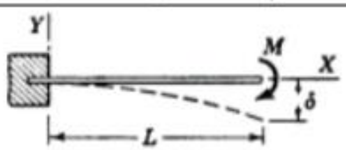
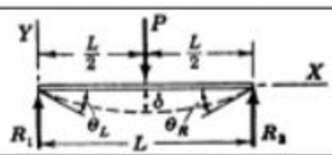


Método de la superposición

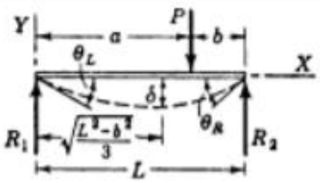
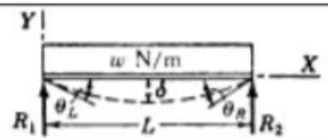
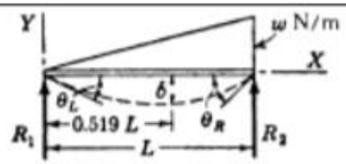
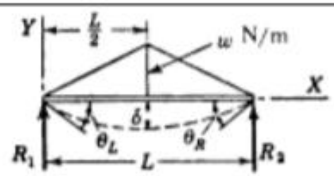
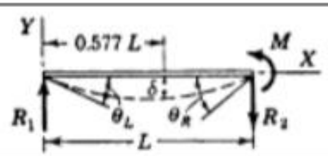
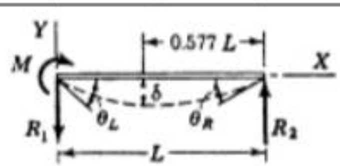
¿y(x) en O?



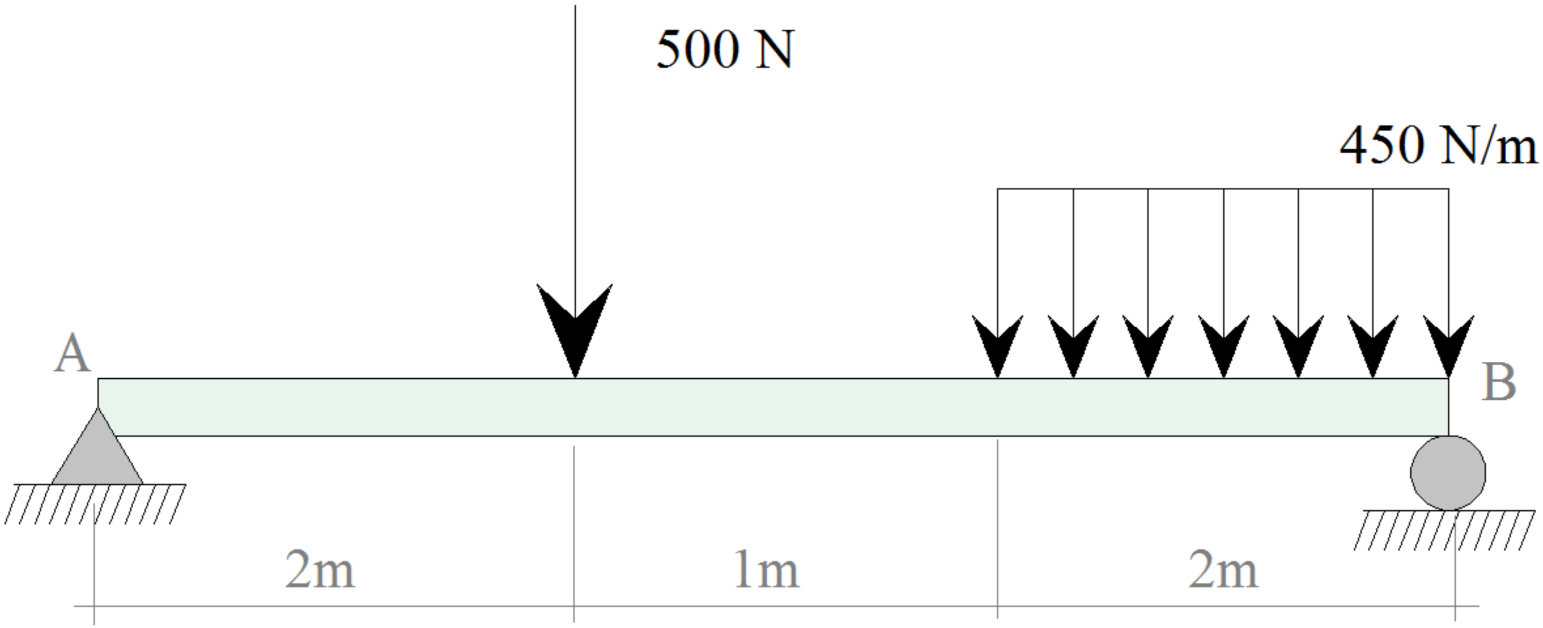
$y(x_o)=y1+y2+y3$

CASO N°	TIPO DE CARGA	MOMENTO MAXIMO	PRENDIENTE EN EL EXTREMO	ECUACIÓN DE LA ELASTICA	DEFLEXIÓN MAXIMA
1		$M = -PL$	$\theta = \frac{PL^2}{2EI}$	$EIy = \frac{Px^2}{6}(3L - x)$	$\delta = \frac{PL^3}{3EI}$
2		$M = -Pa$	$\theta = \frac{Pa^2}{2EI}$	$EIy = \frac{Px^2}{6}(3a - x)$ para $0 < x < a$ $EIy = \frac{Pa^2}{6}(3x - a)$ para $a < x < L$	$\delta = \frac{Pa^2}{6EI}(3L - a)$
3		$M = -\frac{wL^2}{2}$ $= -\frac{WL}{2}$	$\theta = \frac{wL^3}{6EI}$ $= \frac{WL^2}{6EI}$	$EIy = \frac{wx^2}{24}(6L^2 - 4Lx + x^2)$	$\delta = \frac{wL^4}{8EI} = \frac{WL^3}{8EI}$
4		$M = -\frac{wL^2}{6}$ $= -\frac{WL}{3}$	$\theta = \frac{wL^3}{24EI}$ $= \frac{WL^2}{12EI}$	$EIy = \frac{wx^2}{120L}(10L^3 - 10L^2x + 5Lx^2 - x^3)$	$\delta = \frac{wL^4}{30EI} = \frac{WL^3}{15EI}$
5		$M = -M$	$\theta = \frac{ML}{EI}$	$EIy = \frac{Mx^2}{2}$	$\delta = \frac{ML^2}{2EI}$
6		$M = \frac{PL}{4}$	$\theta_L = \theta_R = \frac{PL^2}{16EI}$	$EIy = \frac{Px}{12}\left(\frac{3}{4}L^2 - x^2\right)$ para $0 < x < \frac{L}{2}$	$\delta = \frac{PL^3}{48EI}$

DEPARTAMENTO DE
INGENIERÍA
MECÁNICA
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

CASO N°	TIPO DE CARGA	MOMENTO MAXIMO	PRENDIENTE EN EL EXTREMO	ECUACIÓN DE LA ELASTICA	DEFLEXIÓN MAXIMA
7		$M=\frac{Pab}{L}$ en $x=a$	$\theta_L=\frac{Pb(L^2-b^2)}{6EIL}$ $\theta_R=\frac{Pa(L^2-a^2)}{6EIL}$	$EIy=\frac{Pbx}{6L}(L^2-x^2-b^2)$ para $0<x<a$ $EIy=\frac{Pb}{6L}\left[\frac{L}{b}(x-a)^3+(L^2-b^2)x-x^3\right]$ para $a<x<L$	$\delta=\frac{Pb(L^2-b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}\,EIL}$ en $x=\sqrt{\frac{L^2-b^2}{3}}$ En el centro (no la máx.) $\delta=\frac{Pb}{48EI}(3L^2-4b^2)$ cuando $a>b$
8		$M=\frac{wL^2}{8}$ $=\frac{WL}{8}$	$\theta_L=\theta_R=\frac{wL^3}{24EI}$	$EIy=\frac{wx}{24}(L^3-2Lx^2+x^3)$	$\delta=\frac{5wL^4}{384EI}=\frac{5WL^3}{384EI}$
9		$M=\frac{wL^2}{9\sqrt{3}}$ $=\frac{2WL}{9\sqrt{3}}$	$\theta_L=\frac{7wL^3}{360EI}$ $\theta_R=\frac{8wL^3}{360EI}$	$EIy=\frac{wx}{360L}(7L^4-10L^2x^2+3x^4)$	$\delta=\frac{2.5wL^4}{384EI}=\frac{5WL^3}{384EI}$ en $x=0.519L$
10		$M=\frac{wL^2}{12}$ $=\frac{WL}{6}$	$\theta_L=\theta_R=\frac{5wL^3}{192EI}$	$EIy=\frac{wx}{960L}(25L^4-40L^2x^2+16x^4)$ para $0<x<\frac{L}{2}$	$\delta=\frac{wL^4}{120EI}=\frac{WL^3}{60EI}$
11		$M=M$	$\theta_L=\frac{ML}{6EI}$ $\theta_R=\frac{ML}{3EI}$	$EIy=\frac{MLx}{6}\left(1-\frac{x^2}{L^2}\right)$	$\delta=\frac{ML^2}{9\sqrt{3}\,EI}$ en $x=\frac{L}{\sqrt{3}}$ En el centro (no la máx.) $\delta=\frac{ML^2}{16EI}$
12		$M=M$	$\theta_L=\frac{ML}{3EI}$ $\theta_R=\frac{ML}{6EI}$	$EIy=\frac{Mx}{6L}(L-x)(2L-x)$	$\delta=\frac{ML^2}{9\sqrt{3}\,EI}$ en $x=\left(L-\frac{L}{\sqrt{3}}\right)$ En el centro (no la máx.) $\delta=\frac{ML^2}{16EI}$

Ejemplo:
Considere la viga de la figura con todas sus cargas. Calcula la función de la deformada en toda la viga.



¿Consultas?

Curso – Resistencia de Materiales [15153]

Plan de estudios - Ingeniería Civil en Mecánica

Profesores: Matías Pacheco Alarcón (**matias.pacheco@usach.cl**)
Aldo Abarca Ortega (**aldo.abarca@usach.cl**)
Ayudante: Estéfano Muñoz (**estefano.munoz@usach.cl**)

Santiago de Chile, Mayo 2019