Cardinalidad

José Luis Leal Ruperto
Departamento de Matemática Aplicada
Universidad de Málaga 1989

Cardinalidad

Puede ser clara la idea intuitiva de que el *cardinal* de un conjunto es el número de elementos distintos que posee. Esta idea puede servirnos mientras los elementos puedan contarse por existir una cantidad finita de ellos, pero no en caso contrario. Podríamos solucionar este problema llamandos simplemente *infinitos* a los conjuntos no finitos, pero esta definición nos obligaría a tratar por igual a todos los conjuntos infinitos y no nos permite hacer distinción alguna entre ellos.

Estas distinciones se van a producir cuando intentamos responder a las preguntas, ¿Todos los conjuntos infinitos son iguales de grande? Caso contrario, ¿Cuál es el más pequeño de todos ...?

Como ejemplo básico para esta discusión, con ayuda de unos pocos axiomas [1], vamos a hacer la construcción de un conjunto no finito que hemos usado habitualmente: el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$.

Para un conjunto cualquiera A, defino el conjunto llamado *Conjunto sucesor de* A y lo representamos por A^+ como el conjunto que tiene la propiedad de incluir todos los elementos de A y el un elemento adicional que es el propio conjunto A (Por ejemplo si $A = \{x, y\}$, entonces $A^+ = \{x, y, \{x, y\}\}$). Si tomamos el conjunto vacío $\emptyset$ para formar su sucesor $\emptyset^+ = \{\emptyset\}$, y sucesivos sucesores, respectivamente: $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, $\cdots$ y procedemos así de forma ilimitada asignando un nombre a cada uno de estos conjuntos que vamos obteniendo,

$$
\begin{aligned}
0 &:= \emptyset \\
1 &:= \{\emptyset\} \\
2 &:= \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\
3 &:= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

obtenemos que $1 = 0^+$, $2 = 1^+$, $3 = 2^+, \ldots$ Volvemos a hacer uso del *axioma de Comprensión* y definimos un conjunto que representamos por $\mathbb{N}$ y que llamamos *Conjunto de los números naturales* como a aquél que contiene al 0 y a todos sus sucesores.

[1] Usamos dos axiomas de conjuntos de la axiomática clásica de *Zermelo-Fraenkel*, el axioma de la existencia de un conjunto que no contiene elementos, el vacío $\emptyset$, y el axioma de *comprensión* que asegura la existencia de un conjunto cuyos elementos satisfacen cualquier propiedad.

Ya que cada conjunto que está en $\mathbb{N}$, tiene sucesor, no pueden contarse todos, y tenemos así un claro ejemplo de un conjunto no finito[2]. Pero, ¿Se construyen todos los conjuntos no finitos por procesos similares? Para responder a esta y a las anteriores preguntas formuladas debemos abordar el concepto de cardinal de una manera más rigurosa. Puesto que el problema se reduce a comparar conjuntos según sea su número de elementos, vamos a hacer uso de las aplicaciones:

Definición 0.1 *Un conjunto A se dice que es equipotente a otro B, si, existe una aplicación biyectiva de A en B. Escribiremos $A \approx B$.*

EJEMPLO 0.1 *Son equipotentes los conjuntos $A = \{s, t, m\}$ y $B = \{\bigcirc, \triangle, \clubsuit\}$ ya que es evidente que existe al menos una biyección entre ellos.*

EJEMPLO 0.2 *Son equipotentes los números naturales $\mathbb{N}$, y los números pares P, porque es posible establecer la biyección $f\colon \mathbb{N} \to P$ con $f(n) = 2n$.*

La relación *'ser equipotente'* establecida en el conjunto de todos los conjuntos es evidentemente una relación de equivalencia:

a) Es reflexiva: Para todo A, $A \approx A$ ya que la aplicación identidad de un conjunto sobre si mismo es una biyección.

b) Es simétrica: Si $A \approx B$, existe $f\colon A \to B$ que es biyectiva y al serlo f poseerá inversa $f^{-1}\colon B \to A$ que también es biyectiva, por tanto $B \approx A$.

c) Es transitiva: Si $A \approx B$ y $B \approx C$, existe entonces $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$ ambas biyecciones. Es entoces posible formar la composición de ambas $g \circ f\colon A \to C$ que tambien sabemos es biyectiva. Por tanto $A \approx C$.

Podemos formar el conjunto cociente de las clase de equivalencia, y así dado un conjunto cualquiera A podemos definir su cardinal:

Definición 0.2 *Dado un conjunto cualquiera A, se llama cardinal de A a la clase de equivalencia de A. Lo representamos como $|A|$.*

Como todos los conjuntos equipotentes entre si están en la misma clase, nos expresaremos diciendo que tienen el mismo cardinal. El único equipotente a vacío es él mismo, y en lugar de escribir $|\emptyset|$ cuando hablemos del cardinal de este conjunto pondremos el número natural 0. De la misma forma cuando nos refiramos al cardinal del conjunto $\{\emptyset\}$ o de $\{a\}$ o de $\{\spadesuit\}\ldots$ o de cualquiera

[2]Puede probarse que esta construcción de $\mathbb{N}$ determina el mismo conjunto que aquél que satisface los axiomas de *Peano.*

que sea equipotente a ellos, en lugar de poner $|\{\emptyset\}|$ pondremos el natural 1. Procediendo de esta manera, podemos dar nombre propio a cada cardinal o clase distinta:

$$\begin{array}{rcl} |\emptyset| & := & 0 \\ |\{\emptyset\}| & := & 1 \\ |\{\emptyset, \{\emptyset\}\}| & := & 2 \\ |\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}| & := & 3 \\ & \vdots & \end{array}$$

este es el motivo por el cual, como ya se hizo en la definición (XXX), se suele identificar el cardinal de un conjunto como el número de elementos que posee, siendo este número un número natural. Podemos entonces dar una definición rigurosa de conjunto finito como sigue:

Definición 0.3 *Un conjunto A se dice finito si su cardinal es un número natural, es decir, si es equipotente al vacío o a alguno de sus sucesores.*

Tal y como hemos definido el cardinal de un conjunto, y según hemos visto en el ejemplo **??**, podemos decir que el cardinal del conjunto de los números naturales pares coincide con el de los números naturales. Puede chocar que se produzca la posibilidad de que el cardinal de una parte pueda coincidir con el de lá totalidad, pero esto no es contradicción alguna, presisamente esta posibilidad es lo que va a dar un caracter distinto a este conjunto, que como sabemos no es finito:

Definición 0.4 *Un conjunto A se dice que es infinito si es equipotente a un subconjunto propio suyo. Es decir existe $B \subsetneq A$, $B \neq A$ y tal que $|B| = |A|$.*

Por tanto el conjunto de los naturales es un conjunto infinito. El cardinal $|\mathbb{N}|$ de $\mathbb{N}$ se expresa por $\aleph_0$ y tiene el nombre de *cardinal numerable.* Cualquier conjunto con cardinal numerable se dice que es *infinito numerable.*

EJEMPLO 0.3 *El conjunto de los números enteros es numerable. Una aplicación f biyectiva entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ puede ser aquella que asigna al natural* 0 *el entero* 0, *a cada natural par $n = 2k$ el entero k y a cada natural impar $n = 2k - 1$ el entero $-k$.*

El cardinal 4 es menor que el cardinal 7. Esta afirmación se acepta sin ningún problema porque tenemos asimilado el orden establecido establecido en $\mathbb{N}$. pero es posible tambieén generalizar esta ordenación de manera que puedan también compararse cardinales no finitos. Veamos:

Definición 0.5 *Dados dos conjuntos A, B se dice que el cardinal de A es estrictamente menor que el cardinal de B si se cumplen las dos siguientes condiciones:*

C1 *A es equipotente a un subconjunto propio B' de B.*

C2 *Ningún subconjunto* [3] *de A es equipotente a B.*

Si comparamos entre si conjuntos finitos, y tenemos que para dos cualesquiera A, B que se satisface C1, entonces automáticamente se cumple C2 (¿Porqué?). Por ejemplo el cardinal $|\{a, b, c\}|$ es inferior al $|\{x, y, z, t, s\}|$ ya que $\{a, b, c\}$ es equipotente a $\{x, y, z\}$. Si en cambio comparamos conjuntos infinitos, sí es necesario ver si la segunda condición C2 se cumple o no. Puede darse el caso que C1 sea cierto y C2 no lo sea. Por ejemplo si comparo $2\mathbb{N} = \{naturales\ pares\}$ y $\mathbb{N}$, al ser $2\mathbb{N}$ equipotente consigo mismo, subconjunto propio de $\mathbb{N}$ se cumple C1. En cambio no se satisface C2 porque el conjunto $4\mathbb{N}$ de los naturales múltiplos de 4 es subconjunto propio de $2\mathbb{N}$ y es equipotente a todo $\mathbb{N}$ ya que $f: 4\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, con $f(n) = \frac{1}{4}n$ es una biyección. Consecuentemente, el cardinal de $2\mathbb{N}$ no es inferior al de $\mathbb{N}$. De hecho ya sabemos que es igual.

Puede probarse, y no sin dificultad, que la condicion C1, nos define en el conjunto de todos los cardinales, una relación de orden, y como tal relación será válido el escribir $|A| \leq |B|$ si el cardinal de A es menor o igual que el de B. Si no es igual se escribe $|A| < |B|$.

Las comparaciones entre cardinales tienen interés cuando se trata de cardinales infinitos. Consideremos los conjuntos infinitos siguientes: El de los números racionales $\mathbb{Q}$ constituidos por todas las fracciones enteras del tipo $\frac{a}{b}$ y el de los reales $\mathbb{R}$ que contiene además los números irracionales cuyas expresiones decimales son expansiones infinita numerable de cifras no periódicas. estudiemos sus cardinales:

Teorema 0.1 *El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ es infinito numerable.*

[3] C1 se expresa también diciendo que existe $f: A \to B$ inyectiva y no sobreyectiva, y C2 que no existe $f: B \to A$ inyectiva

$$
\begin{array}{ccccccc|cccccc}
\uparrow & & & & & & & & & & & & \\
(\frac{-3}{3}) & & \frac{-2}{3} & \leftarrow & \frac{-1}{3} & \leftarrow & 3 & \leftarrow & \frac{1}{3} & \leftarrow & \frac{2}{3} & \leftarrow & (\frac{3}{3}) \\
\uparrow & & \downarrow & & & & & & & & & & \uparrow \\
\frac{-3}{2} & & (\frac{-2}{2}) & & \frac{-1}{2} & \rightarrow & 2 & \rightarrow & \frac{1}{2} & \rightarrow & (\frac{2}{2}) & & \frac{3}{2} \\
\uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & & & & & \downarrow & & \uparrow \\
\frac{-3}{1} & \leftarrow & \frac{-2}{1} & & \frac{-1}{1} & \leftarrow & 1 & \leftarrow & \frac{1}{1} & & \frac{2}{1} & \rightarrow & \frac{3}{1} \\
 & & & & & & & \nearrow & & & & & \\
\hline
-3 & & -2 & & -1 & & 0 & & 1 & & 2 & & 3
\end{array}
$$

Figura 0.1: Los números Racionales expresados en el plano $\mathbb{R}^2$

Demostración: Identificamos los números racionales $\dfrac{a}{b}$ como pares (a, b) del conjunto producto $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ (ver figura **??**). Suprimiendo en su representación cartesiana las fracciones que aparecen repetidas (las que aparecen entre paréntesis) ordenamos los racionales en el sentido de las flechas. La aplicación $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ que hace corresponder a cada natural n, el racional que ocupa el lugar n en la anterior ordenación que asigna respectivamente a los naturales $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \ldots$ los racionales $0, \frac{1}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{3} \ldots$ es biyección: Es inyectiva porque a dos naturales distintos le corresponden racionales distintos, y es sobreyectiva porque cualquiera que sea el racional $\dfrac{a}{b}$ estará colocado en el lugar (a, b) y por el proceso de ordenación que se describen la figura será alcanzado por la flecha en algún lugar. ■

Este teorema puede chocar un poco con la intuición por el hecho de que pueda tener el mismo cardinal un conjunto como $\mathbb{Q}$ que es *denso* que otro como $\mathbb{N}$ que es *discreto* [4]. Si animados por este resultado pensamos que todos los conjuntos infinitos son numerables, nos equivocaremos:

Teorema 0.2 *El conjunto de los números reales* $\mathbb{R}_1 = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ *es infinito no numerable.*

Demostración: Procedamos con un razonamiento por reducción al absurdo. Si fuese $\mathbb{R}_1$ numerable, significa que podríamos enumerar todos los

[4] En cálculo, un conjunto A de números reales es *denso* si su *adherencia* coincide con $\mathbb{R}$, en términos más explí citos si cualquier punto de A tiene otro indefinidamente próximo a él. Al contrario, un conjunto es *discreto*, si está constituido por un conjunto de puntos *aislados*, en donde cada punto dista del más próximo una distancia positiva.

elementos de $\mathbb{R}_1$, es decir $\mathbb{R}_1 = \{n_1, n_2, n_3, \ldots\}$ y los elementos de $\mathbb{R}_1$ se expresarían

$$\begin{array}{rlllllll}
n_1 = & 0, & a_1\searrow & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\
n_2 = & 0, & b_1 & b_2\searrow & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\
n_3 = & 0, & c_1 & c_2 & c_3\searrow & c_4 & c_5 & c_6 \\
n_4 = & 0, & d_1 & d_2 & d_3 & d_4\searrow & d_5 & d_6 \\
n_5 = & 0, & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5\searrow & e_6 \\
\vdots & & & & & & &
\end{array}$$

en donde los $a_i, b_i, c_i, \cdots$ son dígitos comprendidos entre 0 y 9. Sin embargo, esto no es posible, ya que cualquier número $m = a'_1 b'_2 c'_3 d'_4 e'_5 \ldots$ que satisfaga que

$$a'_1 \neq a_1, \quad a'_2 \neq a_2, \quad a'_3 \neq a_3, \quad a'_4 \neq a_4, \quad \ldots$$

no está en la anterior enumeración, puesto que el $k-$ésimo número es distinto a m por tener sus respectivas $k-$ésima cifras distintas. Esta contradicción prueba la imposibilidad de la numerabilidad de $\mathbb{R}_1$. ∎

¡Existen pues 'más números' reales entre 0 y 1 que todos los racionales juntos! Como ya empezamos estar un poco acostumbrados a resultados sorprendentes, no nos puede extrañar el siguiente,

EJEMPLO 0.4 *El cardinal de $\mathbb{R}_1$ es el mismo que el de $\mathbb{R}$. Para probarlo basta encontrar una biyección f entre ambos, puede servir $f\colon \mathbb{R}_1 \to \mathbb{R}$*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-\frac{1}{2}}{1-x} & \textit{para } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ \frac{x-\frac{1}{2}}{x} & \textit{para } 0 < x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Según los anteriores resultados, tenemos que $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}|$. Pero, ¿Existirán otros conjuntos con cardinales de orden superior a $|\mathbb{R}|$? El teorema que sigue nos da la respuesta.

Teorema 0.3 *Dado un conjunto cualquiera A, el conjunto de sus partes $P(A)$ es de cardinal superior a A*

Demostración: Si A es finito el teorema es evidente. Si es infinito, según la definición para probarlo es suficiente ver que no existe ningún subconjunto B de A que sea equipotente a $P(A)$. Supongamos al absurdo que si, y existe una función $f\colon B \to P(A)$ biyectiva de manera que asigna a cada i de B la parte de A_i de $P(A)$. Consideremos para cada i el complementario de

A_i, $\overline{A_i}$. Elijamos también para cada i un elemento a_i del $\overline{A_i}$. El conjunto C formado por la unión de todos $C = \bigcup_{i \in B} \{a_i\}$ es una parte de A, pero no puede ser imagen de ningún elemento de B, y contradice lo que habíamos supuesto [5] . ■

El siguiente ejemplo a la vez que muestra un conjunto infinito construido con el Axioma de Elección, ilustra un procedimiento usual de prueba de cardinalidad:

EJEMPLO 0.5 *Determina el cardinal de* $\{a,b\} \times \{a,b\} \times \ldots \times \ldots = \{a,b\}^{\mathbb{N}}$.
No existe pérdida de generalidad al considerar $\{a,b\} = \{0,1\}$, *y así entonces un elemento de* $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ *será una* ∞*-upla, o expansión infinita numerable de unos y ceros. Dado que todo real de* $\mathbb{R}_1$ *expresado en base dos lo es también, entonces podemos establecer la biyección que asigna a cada* ∞*-upla* $(l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots)$ *el real que en base dos se expresa* $0.l_1 l_2 \ldots l_n \ldots$. *Esto es evidentemente una biyección.*

Del teorema deducimos que si no temenos más que ir formando el conjunto de las partes de un conjunto cualquiera para obtener uno de cardinal superior, es entonces posible obtener una infinidad de cardinales infinitos y ordenarlos: Llamando $\aleph_1$ al cardinal de $\mathbb{R}$, $\aleph_2$ al cardinal del conjunto de sus partes, $\aleph_3$ al de las partes de las partes ..., temenos

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \quad \cdots \quad < \aleph_k < \quad \cdots$$

Estos cardinales se llaman *Cardinales transfinitos.*

Estamos suponiendo que entre dos cardinales transfinitos cualesquiera no existen otros. Éste ha sido el teorema conocido como *la generalización de la*

[5] Si observamos un poco detenidadmente esta demostración, vemos que en esencia, es la misma que la del teorema . En ambas razonamos al absurdo encontrando o bien un número real, o bien un subconjunto que no son imágenes de la pretendida biyección. Tanto antres como ahora, para encontrarlos, hacemos infinitas elecciones de un digito o de un elemento, en una familia infinita de conjuntos. Esta posibilidad de elección a voluntad infinitas veces es algo que no choca en absoluto con nuestra intuición; pero, de la misma manera que nuestra intuición nos equivoca a la hora de tener que admitir que en $\mathbb{Q}$ hay tantos números como en $\mathbb{N}$, debemos ser precavidos al tratarse de un proceso de infinitas elecciones. La matemática actual admiten este procedimiento porque hace uso de un axioma llamado *axioma de la elección: El producto cartesiano de una familia cualquiera de conjuntos es no vacío.* Como los elementos del producto cartesiano se hace cogiendo elemento a elemento de cada conjunto de esta familia la existencia pues de ese número o conjunto a los que hace referencia esas demostraciones están justificadas.

hipótesis del contínuo que afanósamente y en vano hasta su muerte, trató de probar *Cantor* , a quien debemos los primeros y principales estudios sobre cardinales transfinitos. *K. Gödel* en 1938 demuestra que esta afirmación no llevaba a contradicción alguna la aximática de la teoría de conjuntos usual, y se consideró que esa afirmación conocida como *"teorema de Cantor"* era cierta. No obstante *Cohën* (discípulo de Cantor) demostró que la suposición de que el teorema de cantor es falso, tampoco contradice la teoría. Estos dos hechos en teoría axiomática de conjuntos se expresa diciendo que el teorema de Cantor es *independiente* de la teoría, es decir no es resultado deducible o demostrable a partir de los axiomas previos, porque en sí , constituye un resultado que considerado axiomáticamente tan cierto como falso, y añadido a los anteriores axiomas nos proporcionan a su vez teorías válidas[6].

problemas

1. teniendo en cuenta que $f\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ con $f(x,y) = \frac{(x+y-1)(x+y-2)}{2} + y$ es biyección, busca una fórmula para una biyección entre $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ y $\mathbb{N}$.
2. Prueba que $|\{a,b,c\}^{\mathbb{N}}| = \aleph_1$
3. Determina los cardinales de a)$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, b)$\mathbb{R} \times N$.
4. Razona correctamente y determina el cardinal de $\mathcal{F} = \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R} | f \text{contĆnua}\}$.
5. Encuentra una biyección entre $[0,1]$ y $\mathbb{R}$.
6. Encuentra el cardinal de todas las sucesiones $\{a_n\}$ de números reales.
7. Encuentra el cardinal del conjunto de polinomios de grado arbitrario.

[6] En la terminología de teoría axiomática de conjuntos se dice *teoría Consistente*