11.13

מרחב X.

מידה היא פונקציה σ-אדטיבית על σ-אלגברה $\Sigma \subset M(X)$

פונקציה $m: \Sigma \to R_+ \cup \{\infty\}$ (אפשר הפונקציה אינסוף)

1) $m(A) \geq 0$

2) σ-אדטיבית: אם $A_1 \dots A_n \in \Sigma$ זרות בזוגות $\forall i \neq j \quad A_i \cap A_j = \emptyset$

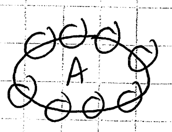
אז $m(\bigcup_n A_n) = \sum_n m(A_n)$

<u>נקודת ההתחלה:</u> מידה m על חוג למחצה, או חוג. למשל - אורך של קטעים

<u>הערה:</u> לא תמיד ניתן להגדיר את m על כל $M(X)$

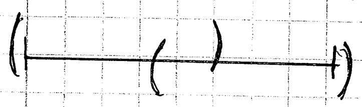
(לא ניתן להוכיח מהאקסיומות הרגילות של המתמטיקה שכל קבוצה היא מדידה)

<u>הגדרה:</u> בהינתן מידה m על חוג למחצה $M(X) \supset R$ נגדיר <u>מידה חיצונית</u> m^* על כל $M(X)$ ($X \in R$)



ע"י: $m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{B \in I} m(B) : I \right.$ כיסוי סופי או בן מנייה של A ע"י קבוצות מ-R $\left. \right\}$

כל הקבוצות שמרכיבות את הכיסוי



לדוגמה לכסות את הקטע $[0,1]$

ע"י: $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{4}, 1)$

1. m^* מוגדרת לכל $A \subset X$

2. אם $A \in R$ אז $m^*(A) = m(A)$

<u>הוכחה:</u> A כיסוי של עצמו. לכן $m^*(A) \le m(A)$

נניח ש-I כיסוי של A אז $A \subset \bigcup_{B \in I} B_i$

? המשך בתרגול

<u>טענה:</u> m^* תת σ-אדטיבית

אם $A \subset \bigcup A_j$ אז $m^*(A) \le \sum m^*(A_j)$ (מונוטוניות)

(בפרט) אם $A \subset B$ אז $m^*(A) \le m^*(B)$

<u>הוכחה:</u> בהינתן ε ניקח כיסוי I של A_n שמקיים $m^*(A) \gtrsim \sum_{B \in I_n} m(B) - \frac{\varepsilon}{2^n}$

$\bigcup I_n$ כיסוי בן מנייה (סופי) של A ע"י קבוצות מ-R (באיחוד של דברים בני מנייה הוא בן מנייה)

$$\underbrace{m^*(A)}_{\text{המידה החיצונית של } A} \le \sum_{B \in \bigcup I_n} m(B) = \sum_n \underbrace{\sum_{B \in I_n} m(B)}_{\le m^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}} \le \sum \left(m^*(A_n) + \underbrace{\frac{\varepsilon}{2^n}}_{\text{[illegible]}}\right) \le \sum m^*(A_n) + \underbrace{\varepsilon}_{\text{שרירותי}}$$

17.11.13
אנליזה פונ'
הרצאה 6

נרצה להגדיר את אוסף ה- קבוצות שם זה יהיה ממש מידה.

<u>הגדרה:</u> קבוצה $A\subset X$ נקראת <u>מדידה</u> (או מדידה לבג) אם לכל $\varepsilon>0$
קיימות $B_1,\dots,B_n\in R$ כך שהמידה החיצונית בין האיחוד הסופי ל-A קטנה מ-ε:

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{n}B_i\,\triangle\,A\right)<\varepsilon$$

אם R חוג, מספיק לקחת ע"י קבוצה אחת $B=\bigcup_{i=1}^{n}B_i$.

מרגע זה נניח ש-R הוא חוג. ונחשוב על B כקירוב של A

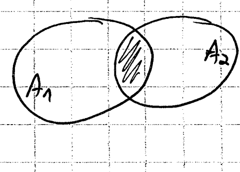
נסמן ב-T את אוסף כל הקבוצות המדידות.
$R\subset T$.

<u>טענה:</u> T הוא חוג [גם אלגברה כי $X\in T$ בבירור]

<u>הוכחה:</u> צריך להראות שאם $A_1,A_2\in T$ אז גם $A_1\triangle A_2\in T$ וגם $A_1\cap A_2\in T$.

בעצם מספיק להראות ש-$A_1\setminus A_2\in T$, כי ניתן להציג חיתוך והפרש סימטרי ע"י הפרש בלבד:

- $A_1\cap A_2 = A_1\setminus(A_1\setminus A_2)$
- $A_1\triangle A_2 = \underbrace{\left((X\setminus A_1)\setminus(X\setminus A_2)\right)^c}_{A_1\cup A_2}\setminus\underbrace{(A_1\cap A_2)}_{\text{הראינו שניתן לייצג ע"י הפרש}}$



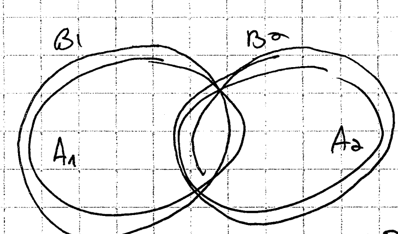
המידה החיצונית של ההפרש בין הקבוצות קטן מ-ε

צ"ל: בהינתן $\varepsilon>0$ צריך למצוא $B\in R$ כך ש-$m^*(B\triangle(A_1\setminus A_2))<\varepsilon$.

$A_1\in T$, לכן קיימת $B_1\in R$ כך ש-$m^*(B_1\triangle A_1)<\varepsilon$

$B_2\in R$ $\quad m^*(B_2\triangle A_2)<\varepsilon$

אם 2 קבוצות הן מדידות אז ההפרש שלהן מדיד



הניחוש לקירוב יהיה $B_1\setminus B_2$.
נרצה לומר ש-$B_1\setminus B_2$ מקרב את $A_1\setminus A_2$
כלומר ש: $m^*\left((B_1\setminus B_2)\triangle(A_1\setminus A_2)\right)<\varepsilon$ (נרצה לחסום את:)

נקודות שנמצאות ב-$B_1\setminus B_2$ אבל לא ב-$A_1\setminus A_2$, יכולות להיות למשל כך שהן ב-B_1 ולא ב-A_1

א. $(B_1\setminus B_2)\setminus(A_1\setminus A_2)\subset(B_1\setminus A_1)\cup(A_2\setminus B_2)$

ב. $(A_1\setminus A_2)\setminus(B_1\setminus B_2)=(A_1\setminus B_1)\cup(B_2\setminus A_2)$

$$(B_1\setminus B_2)\triangle(A_1\setminus A_2)\subset(B_1\setminus A_1)\cup(A_1\setminus B_1)\cup(B_2\setminus A_2)\cup(A_2\setminus B_2)=(B_1\triangle A_1)\cup(B_2\triangle A_2)$$

$$\Rightarrow m^*\left((B_1\setminus B_2)\triangle(A_1\setminus A_2)\right)\le m^*(B_1\triangle A_1)+m^*(B_2\triangle A_2)\le 2\varepsilon$$

תת-אדיטיביות למחצה

13
גוף הרצאה

משפט: המידה החיצונית m^* היא אדטיבית סופית על T.

כלומר, בהינתן $A_1 \dots A_n \in T$ זרות בזוגות: $m^*(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} m^*(A_i)$

הוכחה: מספיק להוכיח עבור 2 קבוצות זרות A_1, A_2 (ואז אינדוקציה)

נצטרך בדרך למה: לכל $A, B \subset X$ מתקיים $|m^*(A) - m^*(B)| \le m^*(A \Delta B)$

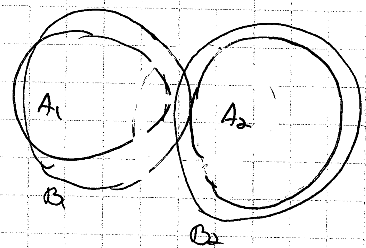
הוכחת הלמה: נניח בלי הגבלת הכלליות ש $m^*(A) \ge m^*(B)$

$A \subset B \cup (A \Delta B)$ אז $m^*(A) \le m^*(B) + m^*(A \Delta B)$

$m^*(A) - m^*(B) \le m^*(A \Delta B)$

נחזור להוכחת המשפט: ממדידות, בהינתן $\varepsilon > 0$ יש B_1, B_2 $m^*(A_1 \Delta B_1) < \varepsilon$

$m^*(A_2 \Delta B_2) < \varepsilon$



A_1 ו A_2 זרות

• A מוכל ב $A_1 \cup A_2$

ולכן המידה החיצונית של קטנה שווה מסכום המידות החיצוניות

כלומר, מתת-סאדטיביות של m^* יודעים ש:

$$m^*(A_1 \cup A_2) \le m^*(A_1) + m^*(A_2)$$

נקרב את $A_1 \cup A_2$ ע"י $B_1 \cup B_2$, מהלמה:

א. $|\underbrace{m(B_1 \cup B_2)}_{\text{מידה}} - \underbrace{m^*(A_1 \cup A_2)}_{\text{מידה חיצונית}}| \le m^*((B_1 \cup B_2) \Delta (A_1 \cup A_2))$

ב. $(B_1 \cup B_2) \Delta (A_1 \cup A_2) \subset (B_1 \Delta A_1) \cup (B_2 \Delta A_2)$

$\Leftarrow$ מא+ב + תת אדטיביות נובע:

$$m^*((B_1 \cup B_2) \Delta (A_1 \cup A_2)) \le m^*(A_1 \Delta B_1) + m^*(A_2 \Delta B_2) \le 2\varepsilon$$

$$\Rightarrow m^*(A_1 \cup A_2) \ge m(B_1 \cup B_2) - m^*((B_1 \cup B_2) \Delta (A_1 \cup A_2)) = m(B_1 \cup B_2) - 2\varepsilon$$

קבוצה ב R ולכן לא צריך מידה חיצונית

(*) $m(B_1 \cup B_2) = m(B_1) + m(B_2) - m(B_1 \cap B_2)$ (m אדטיבית על R)

אפשר גם חיתוך

מכיוון ש $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ – $B_1 \cap B_2 \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)$

(1) $m(B_1 \cap B_2) \le m^*(A_1 \Delta B_1) + m^*(A_2 \Delta B_2) \le 2\varepsilon$

מהלמה: $|m(B_1) - m^*(A_1)| \le m^*(A_1 \Delta B_1) < \varepsilon$

(2) $\Rightarrow m(B_1) \ge m^*(A_1) - \varepsilon$

(3) וכנ"ל: $m(B_2) \ge m^*(A_2) - \varepsilon$

17.11.13

[illegible] הרצאה 6

$\Rightarrow \quad m(B_1\cup B_2) \geq m^*(A_1)+m^*(A_2)-4\varepsilon$

נציב ב(*): $\quad m^*(A_1\cup A_2) \geq m^*(A_1)+m^*(A_2)-6\varepsilon$

ε שרירותי.

ש

$m^*(A_1\cup A_2) \geq m^*(A_1)+m^*(A_2)$

קודם הראינו את הכיוון ההפוך של אי השוויון. ולכן גם מתקיים $\leq$ וגם $\geq$

ובעצם יש שוויון.

<u>טענה:</u> m^* σ-אדיטיבית על T [בהנחה ש-m σ-אדיטיבית על R]

כלומר, בהינתן $\underbrace{A_1, A_2, \ldots \in T}_{A_i\cap A_j=\emptyset}$, ~~$A=\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\in T$~~, מתקיים $m^*(A)=\sum_{i=1}^{\infty} m^*(A_i)$

<u>הוכחה:</u> תת σ-אדיטיביות נתונה לנו ש $m^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A_i)$

מצד שני, עבור כל n, $A\supset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, ולכן ממונוטוניות (תת אדיטיביות):

$$m^*(A) \geq m^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \underset{\text{אדיטיביות סופית}}{=} \sum_{i=1}^{n} m^*(A_i)$$

ניקח $n\to\infty$ ונקבל: $\quad m^*(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A_i)$

- נשלים את מה שלא סיימנו בתחילת ההרצאה - (עמוד 1)

עבור $A\in R$, $m^*(A)=m(A)$.

נשאר להראות $m^*(A) \geq m(A)$

נניח: $A\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_i\in R$. (עבור סדרת קבוצות זרות שמכסות את A:

$B_1 = A\cap A_1, \quad B_n = A\cap\left(A_n\setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)$

אז B_i זרות בזוגות, $B_i\subset A_i$, $B_i\subset A$ לכל i.

! $\quad \bigcup B_i = \left(\bigcup A_i\right)\cap A = A$

לכן מσ-אדיטיביות של m: $\quad m(A) = \sum_{i=1}^{\infty} m(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$

<u>טענה:</u> T היא σ-אלגברה - כלומר סגורה תחת איחודים בני מניה

<u>הוכחה:</u> יהיו $A_1, A_2, \ldots \in T$. צ"ל: $A=\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in T$. כלומר בהינתן $\varepsilon>0$ (נרצה למצוא)

$B\in R$ כך ש $m^*(B\triangle A) < \varepsilon$

נגדיר: $A_1' = A_1$ $\quad A_1' = A_1\setminus\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)$ (כדי לעבור לקבוצות זרות)

לכן, מσ-אדיטיביות $\quad m^*(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n')$

נניח ש $m^*(A) < \infty$

5 17.11.13
אנליזה פונ'
הרצאה 6

לכל $\varepsilon>0$ יש N כך ש $\sum_{n=N}^{\infty} m^*(A_n') < \varepsilon$

$\Leftarrow$ $$m^*(A\setminus \bigcup_{n=1}^{N} A_n') \le \sum m^*(A_n') < \varepsilon$$

כלומר $m^*(A \Delta \bigcup_{n=1}^{N} A_n') \le \varepsilon$

T חוג ולכן $\bigcup_{n=1}^{N} A_n' \in T$.

יש לנו איחוד סופי של קבוצות מT.

כעת נקרב כל אחת מה A_n' ע"י $B_n\in R$ כך ש: $m^*(A_n'\Delta B_n) \le \frac{\varepsilon}{N}$

מידה חיצונית

אז $m^*(\bigcup_{n=1}^{N} A_n' \Delta \bigcup_{n=1}^{N} B_n') < \varepsilon$

קירוב של קירוב נותן קירוב..

לכן $m^*(A\Delta \bigcup_{n=1} B_n) < 2\varepsilon$

$\Leftarrow A\in T$

[אם ניתן לקרב ע"י גם סופי של קבוצות מT, ניתן גם מהן לקרב ע"י קבוצות בR.]

<u>מסקנה:</u> m^* מידה על ה σ אלגברה T של הקבוצות המדידות.

$R\subset T$, לכן T מכילה את ה σ אלגברה המינימלית שנוצרת מR, בפרט כשR החוג שמתקבל מ הקטעים - T מכילה את כל קבוצות בורל

<u>הגדרה:</u> קבוצה נקראת בעלת מידה 0 (null set) אם $m^*(A)=0$
zero measure

זה שקול לכך שלכל $\varepsilon>0$ יש כיסוי בן מנייה של A ע"י קבוצות מR שסכום המידות של הקבוצות בכיסוי $<\varepsilon$.

דוג: $m^*(\mathbb{Q})=0$

<u>טענה:</u> כל קבוצה בת מנייה היא ממידה 0 [אותה הוכחה כמו לQ - ממספרים את אברי הקבוצה ומכסים את הקבוצה הn ע"י קטע באורך $\frac{\varepsilon}{2^n}$]

<u>טענה:</u> איחוד בן מנייה של קבוצות ממידה 0 הוא גם ממידה 0

<u>הוכחה:</u> תהיינה $A_1, A_2, \ldots$ קבוצות ממידה 0 ותהי $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

בהינתן $\varepsilon>0$ נבחר לכל n כיסוי I_n של A_n כך ש $\sum_{B\in I_n} m^*(B) < \frac{\varepsilon}{2^n}$

$\bigcup I_n$ כיסוי של A ומתקיים $\sum_{B\in\bigcup I_n} m^*(B)<\varepsilon$

<u>טענה:</u> כל קבוצה ממידה 0 היא מדידה

<u>הוכחה:</u> נקרב אותה ע"י הקבוצה הריקה. אם A ממידה 0:

$m^*(A\Delta\emptyset) = m^*(A) = 0 < \varepsilon$

<u>טענה:</u> תת קבוצה של קבוצה ממידה 0, גם כן ממידה 0.

(6) 17.11.13

שולמית פרץ

ה השלמה

<u>**העשרה מתמטית:**</u>

1. Q_+ בת מניה   כלומר קיימת מניה של Q - פונקציה מ N על Q)

אם רציונלי $\frac{m}{n}$ (m,n שלמים)

(1,1) (1,2) (1,3) ...

(2,1) (2,2) (2,3) ...

(3,1) (3,2) ...

⋮

$(m,n) \mapsto \frac{m}{n}$

כך נכסה את כל Q.

נעבור על המטריצה בצורה אלכסונית.
(כי השורות עמודות אינסופיות..)
כך שנעבור על כל האיברים במטריצה כך שנקבל מניה של כל האיברים ב Q.

<u>**טענה:**</u> איחוד בן מניה של קבוצות בנות מניה הוא בן מניה

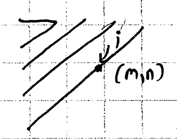
$A_1, A_2\ldots$ הקבוצות

$f_i : \mathbb{N} \to A_i$ מניות של A_i יש פונק מ $\mathbb{N}$ על A_i לכל i.

כעת נגדיר $g : \mathbb{N} \to \bigcup A_i$ ע״י האלכסונים שציירנו קודם.

נניח h מניה של איברי המטריצה הדו מימדית : אם $h(i) = (m,n)$

אז $g(i) = f_m(n)$



אלכסונית, (אותה העתקה) : $A_1^1, A_1^2, A_2^1, A_1^3, A_2^2, A_3^1, \ldots$

כאשר A_m^n הוא האיבר ה n בקבוצה ה m.

<u>**משפט:**</u> הממשיים לא בני מניה כלומר אין פונקציה מ $\mathbb{N}$ על $\mathbb{R}$.

<u>**הוכחה:**</u> נראה ש $[0,1)$ לא בן מניה. נראה את $[0,1)$ עם הפיתוחים העשרוניים
(יש יותר ממשיים מרציונליים)

0.1274111 98

נניח בשלילה שיש מניה כזו. נניח $s_1, s_2, \ldots$ מניה כזו $[f(i)=s_1 \ldots]$

נבנה מספר $s \in [0,1)$ שלא נמצא ברשימה: האלכסון של קנטור

$s_1 = 0.a_1^1 a_1^2 a_1^3 \ldots$

$s_2 = 0.a_2^1 a_2^2 a_2^3 \ldots$

$s_3 = 0.0$

נגדיר $s = 0.b_1 b_2 b_3$ ע״י $b_n = a_n^n + 4 \mod 10$

אז $s = 0.b_1 b_2 \ldots \neq s_i \ \forall i$ 2 עם שהספרה ה n רחוקה בניהם , ורחוקים במ.

$|s - s_i| > 3 \cdot 10^{-n}$

כלומר ש s לא ברשימה, בסתירה לכך שההעתקה היא על