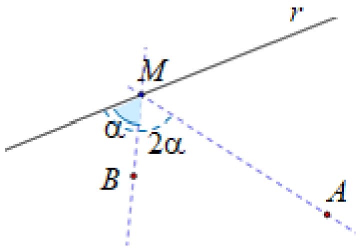
Punto

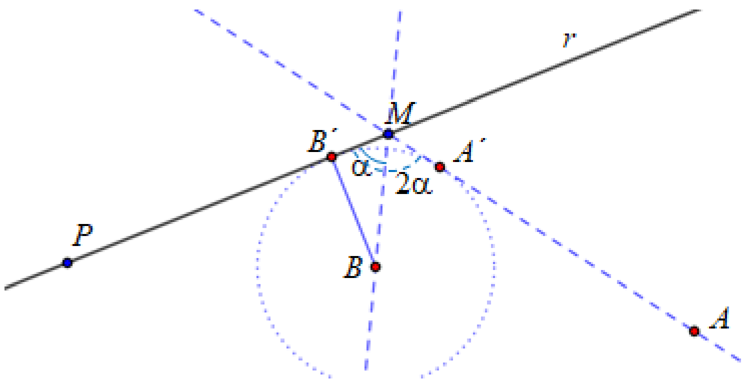
Este problema se ha obtenido de los materiales facilitados por la Real Sociedad Matemática Española para la preparación de las olimpiadas matemáticas:
http://www.olimpiadamatematica.es/platea.pntic.mec.es/_csanchez/olimpmat.htm.

Problema
En el plano, dada una recta *r* y dos puntos *A* y *B* exteriores a la recta, y en el mismo semiplano, se pide determinar un punto *M* de la recta, tal que el ángulo de *r* con *AM* sea doble del de *r* con *BM*.



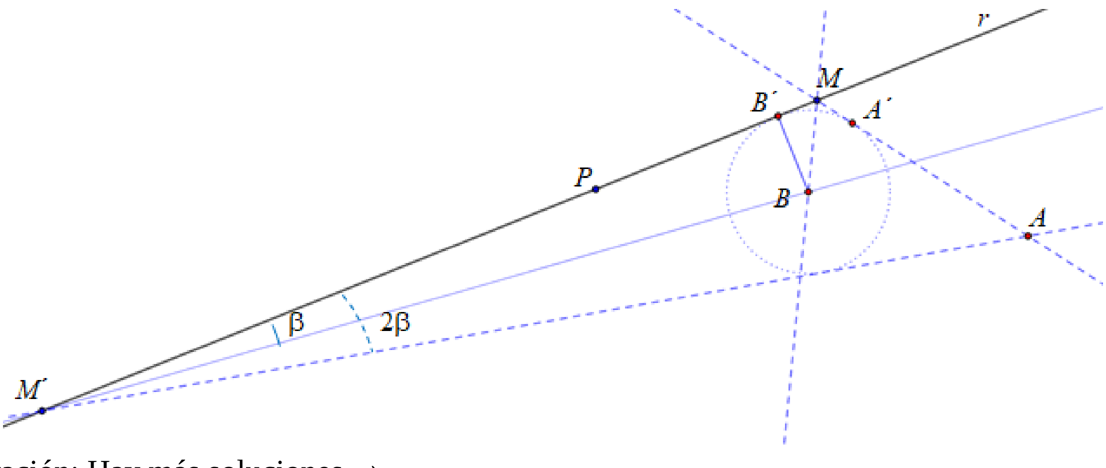
Solución:

Si *P* es el punto marcado en la recta, el ángulo de *r* con *AM* es $PMA = 2\alpha$; el ángulo de *r* con *BM* es $PMB = \alpha$. Por tanto, el punto *M* es el vértice de un ángulo cuya bisectriz es la recta *MB*.



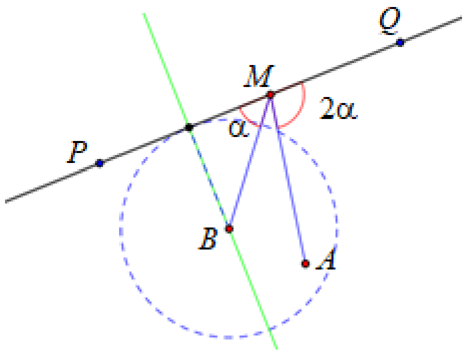
Como *B* es la bisectriz, entonces debe equidistar de los lados del ángulo PMA.
La distancia de *B* a la recta *r* (al lado *PM*) es *BB´*, siendo *B´* la proyección de *B* sobre *r*.
El punto del lado *MA* que está a la misma distancia de *B* debe pertenecer a una circunferencia de radio *BB´*, con centro en *B*. Ese punto *A´* se encuentra trazando la tangente a la circunferencia desde *A*. El punto *M* es el de corte de la prolongación de la tangente *AA´* con *r*.

Segunda opción
La otra tangente a la circunferencia desde *A* proporciona otro punto *M´* que también cumple la condición exigida: $PM´A = 2\beta$; $PM´B = \beta$.



Observación: Hay más soluciones →

La solución que se ha dado no siempre puede encontrarse. Piénsese, por ejemplo, en el supuesto de que el punto *A* quede dentro de la circunferencia con centro en *B*.
En este caso puede encontrarse un punto *M* que cumple la condición requerida, siendo el ángulo de *r* con *AM*, $QMA = 2\alpha$; y el ángulo de *r* con *BM*, $PMB = \alpha$.



El inconveniente que se me presenta es que no he conseguido el procedimiento para encontrar este punto *M*.

Si algún lector o lectora lo encuentra, le ruego que me lo cuente. Gracias.