ESTIMULTALENTMATEMÀTIC

Fundació Catalunya - La Pedrera

Fundació Privada CELLEX

ESTALMAT-Catalunya és un projecte de

feemcat

Medidas, conmensurabilidades e inconmensurabilidades

Marta Berini & Carles Romero

Estalmat Catalunya

Medina del Campo, 12 de abril de 2013

¿De qué se trata?

• Materiales no experimentados en el marco de **EsTalMat**, junto con otros de actividades sí realizadas en ese ámbito.

• Un conjunto de materiales, más o menos coherente, que pretende dar sugerencias para la preparación de actividades concretas.

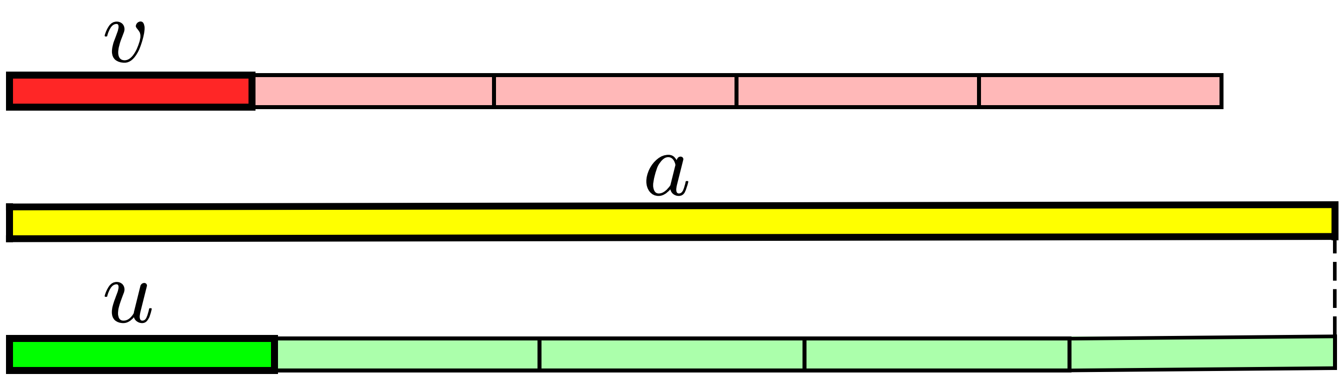
• Una aproximación a los conceptos de **conmensurabilidad** e **inconmensurabilidad** y *racionalidad* e *irracionalidad*, por vías geométricas y visuales, mas que por las vías aritméticas al uso.

• Una reflexión, que se nos antoja muy necesaria, acerca del concepto y acción de **medir**.

• Todo ello en el seno del **mito pitagórico**.

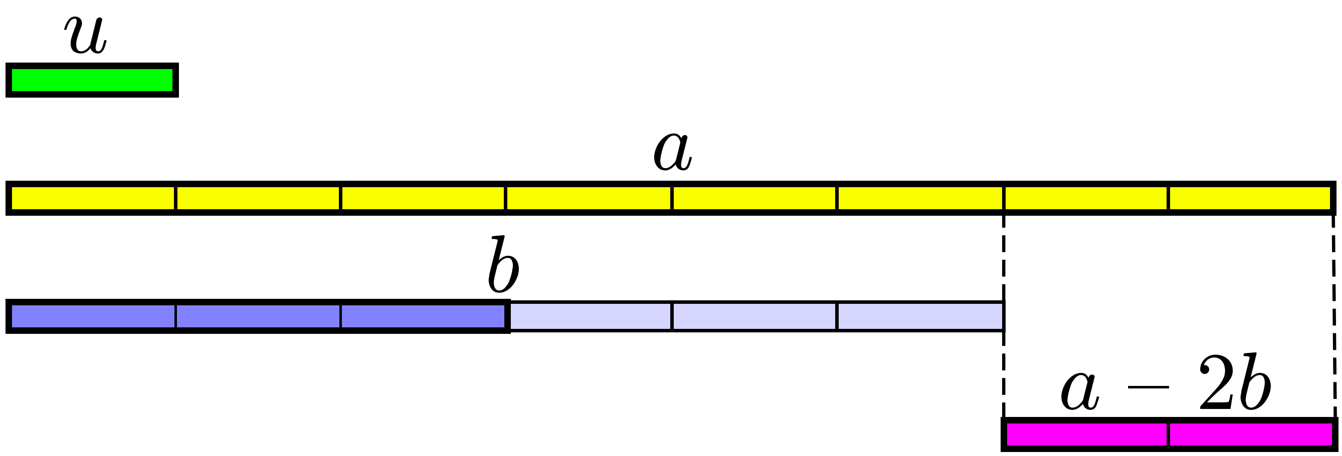
I.-Medir, en el sentido griego

Una magnitud mide a otra magnitud si la segunda es un número entero de veces la primera



- La magnitud v **no mide** a la magnitud a.
- La magnitud u **sí mide** a la magnitud a.

Dos magnitudes se dicen conmensurables si hay otra magnitud que mide a las dos simultáneamente



• Las magnitudes a y b son **conmensurables** porque u es una medida común a ambas.

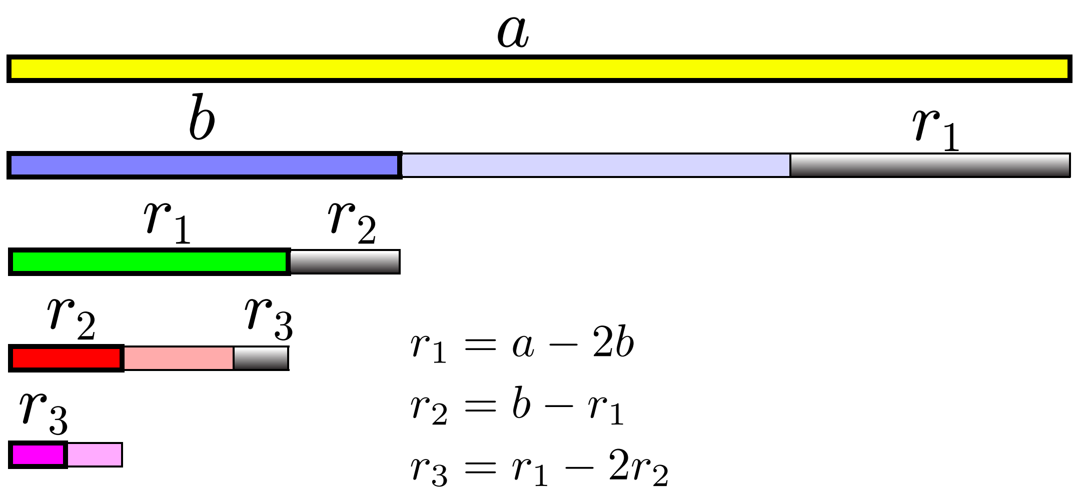
• Si u es una medida común a las magnitudes a y b, también es medida común a las magnitudes b y $a - nb$, $n \in \mathbb{Z}$, $a - nb < b$.

• Las magnitudes a y b son **conmensurables** si, y sólo si, la razón entre ambas es un cociente de números enteros:

$$\left.\begin{array}{r} a = m \cdot u \\ b = n \cdot u \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{a}{b} = \frac{m \cdot u}{n \cdot u} = \frac{m}{n}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n} \Longrightarrow \begin{cases} a = m \cdot \dfrac{b}{n} \\ b = n \cdot \dfrac{b}{n} \end{cases} \qquad u = \frac{b}{n}$$

El algoritmo de Euclides permite encontrar una magnitud que mide a otras dos simultáneamente, si es que esa medida común existe



$$r_1 = a - 2b$$
$$r_2 = b - r_1$$
$$r_3 = r_1 - 2r_2$$

De $r_2 = 2r_3$ resulta:

$$r_1 = 2r_2 + r_3 = 5r_3$$
$$b = r_1 + r_2 = 7r_3$$
$$a = 2b + r_1 = 19r_3$$

y r_3 **mide** a a y a b simultáneamente.

Observación de un hecho crucial: el proceso es **finito**

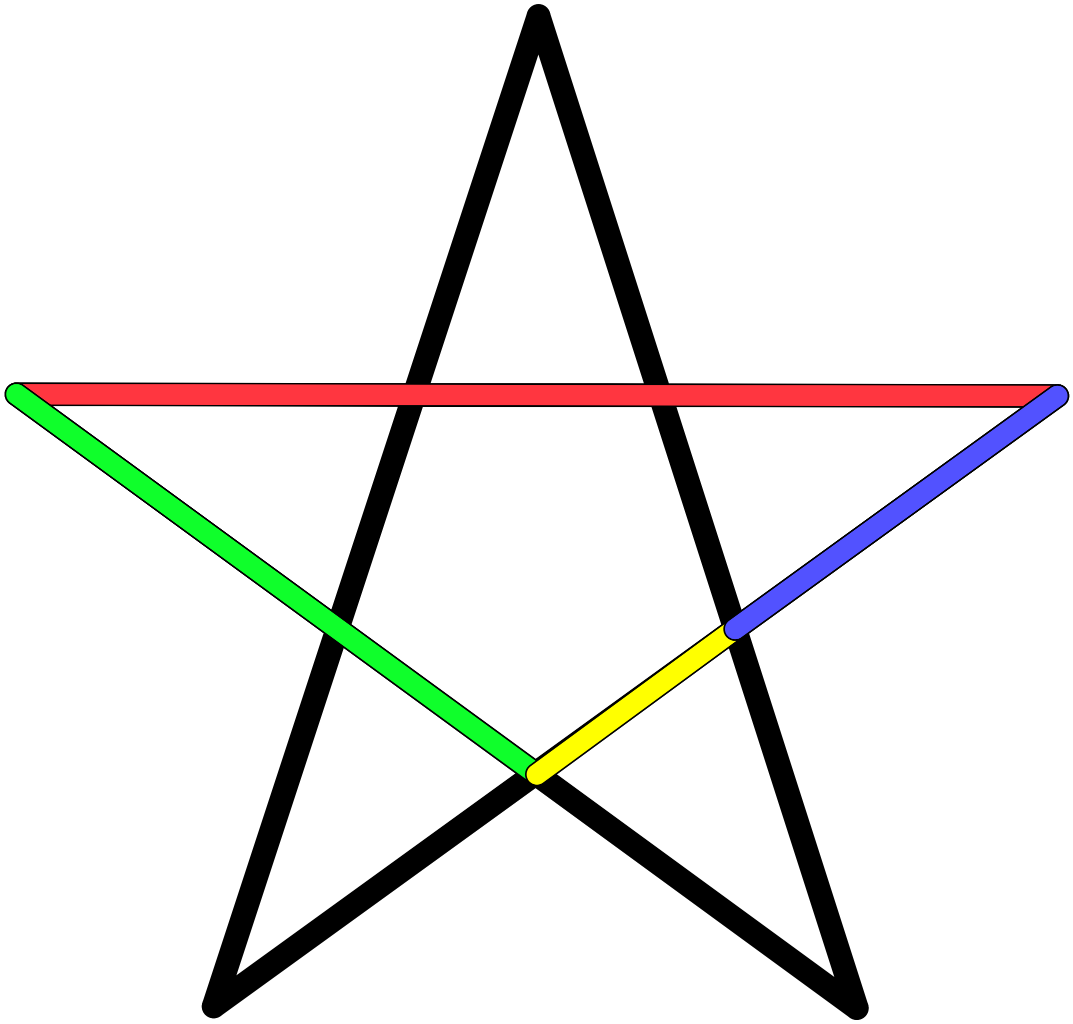
II.-El mito pitagórico

• Dadas dos magnitudes a y b, ¿hay siempre alguna otra magnitud d que las mida exactamente?

• **Pitágoras** y los pitagóricos creían que sí. ¡Ésta era la base de su filosofía!

Hippasus $(I\pi\pi\alpha\sigma o\sigma)$ de Metaponto, siglo V a. C.
presunto mártir de la inconmensurabilidad

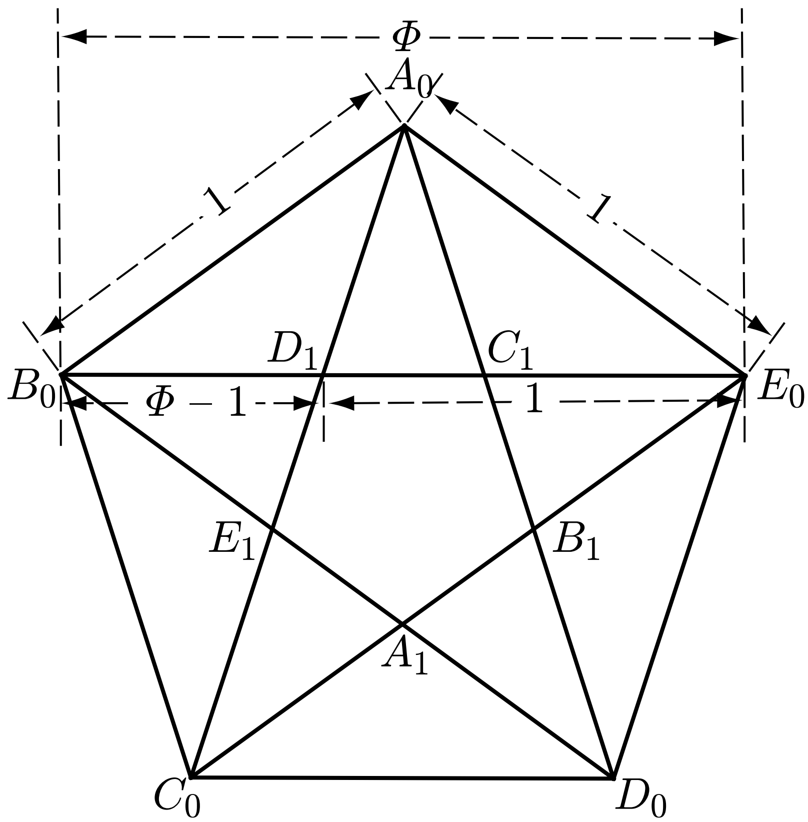
El **pentagrama**, símbolo que usaban los pitagóricos para reconocerse. Contiene la semilla de la destrucción de la base de la filosofía pitagórica.



El **pentagrama**, con los segmentos a los que dirigimos nuestra atención

III.-La sección áurea

El lado de un pentágono regular y una diagonal ¿son conmensurables?



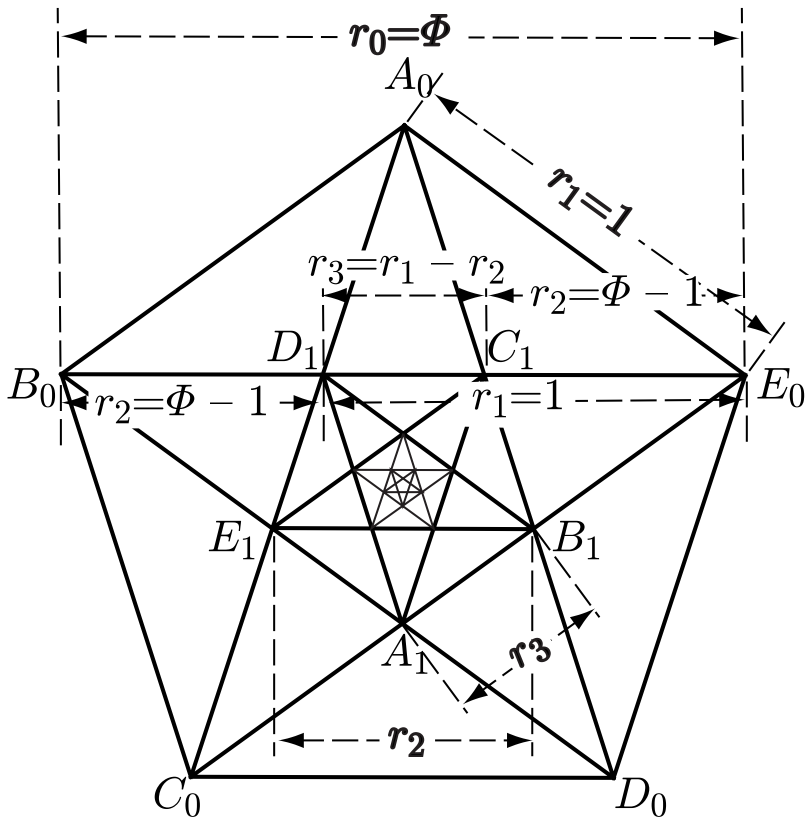
- Los triángulos $B_0A_0E_0$ y $A_0E_0D_1$ son isósceles
- Los triángulos $B_0A_0E_0$ y $A_0D_1B_0$ son semejantes

$$\frac{\Phi}{1} = \frac{1}{\Phi - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi^2 - \Phi - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

1 y $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ¿son **conmensurables**?



• r_0 es la diagonal B_0E_O del pentágono; r_1 es el lado A_0E_0

• El triángulo $A_0E_0D_1$ es isósceles:

$$D_1E_0 = A_0E_0 = r_1$$

• $r_2 = B_0D_1$ es el residuo de la división de r_0 entre r_1 (el cociente es 1)

• $r_3 = D_1C_1$ es el residuo de la división de r_1 entre r_2 (el cociente es 1)

• $B_0E_1B_1D_1$ es un paralelogramo; por lo tanto, para la **diagonal** E_1B_1,

$$E_1B_1 = B_0D_1 = r_2$$

• A_1B_1 y D_1C_1 son **lados** del pentágono $A_1B_1C_1D_1E_1$:

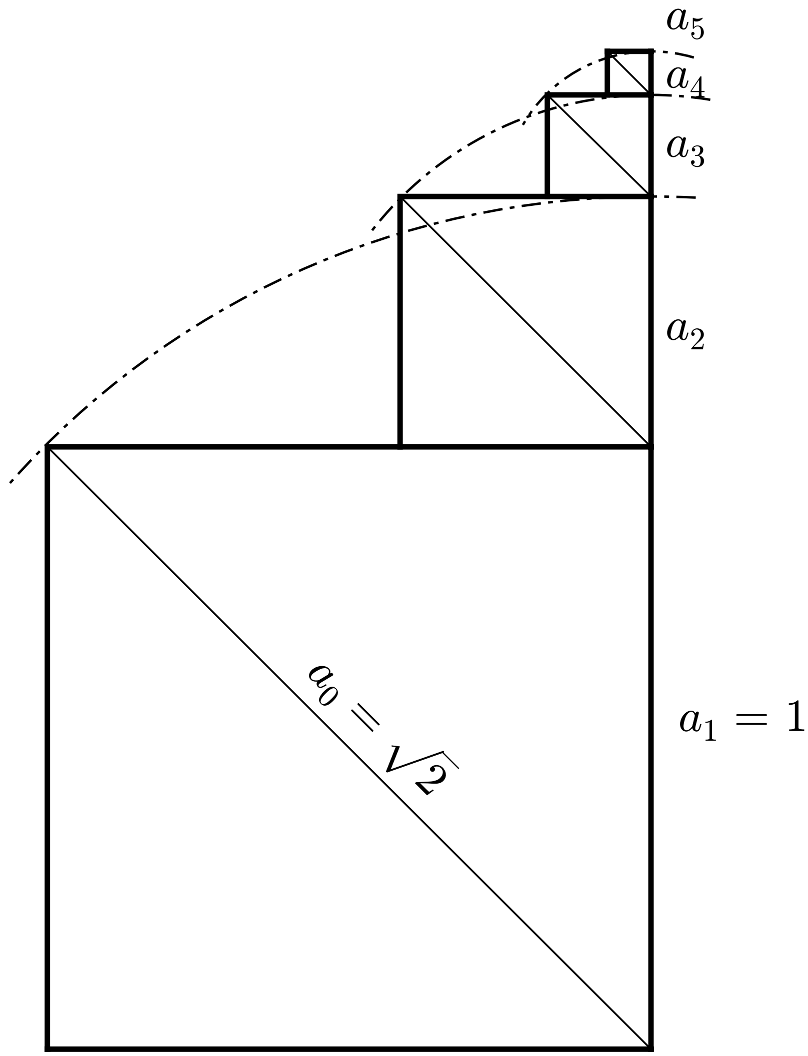
$$A_1B_1 = D_1C_1 = r_3$$

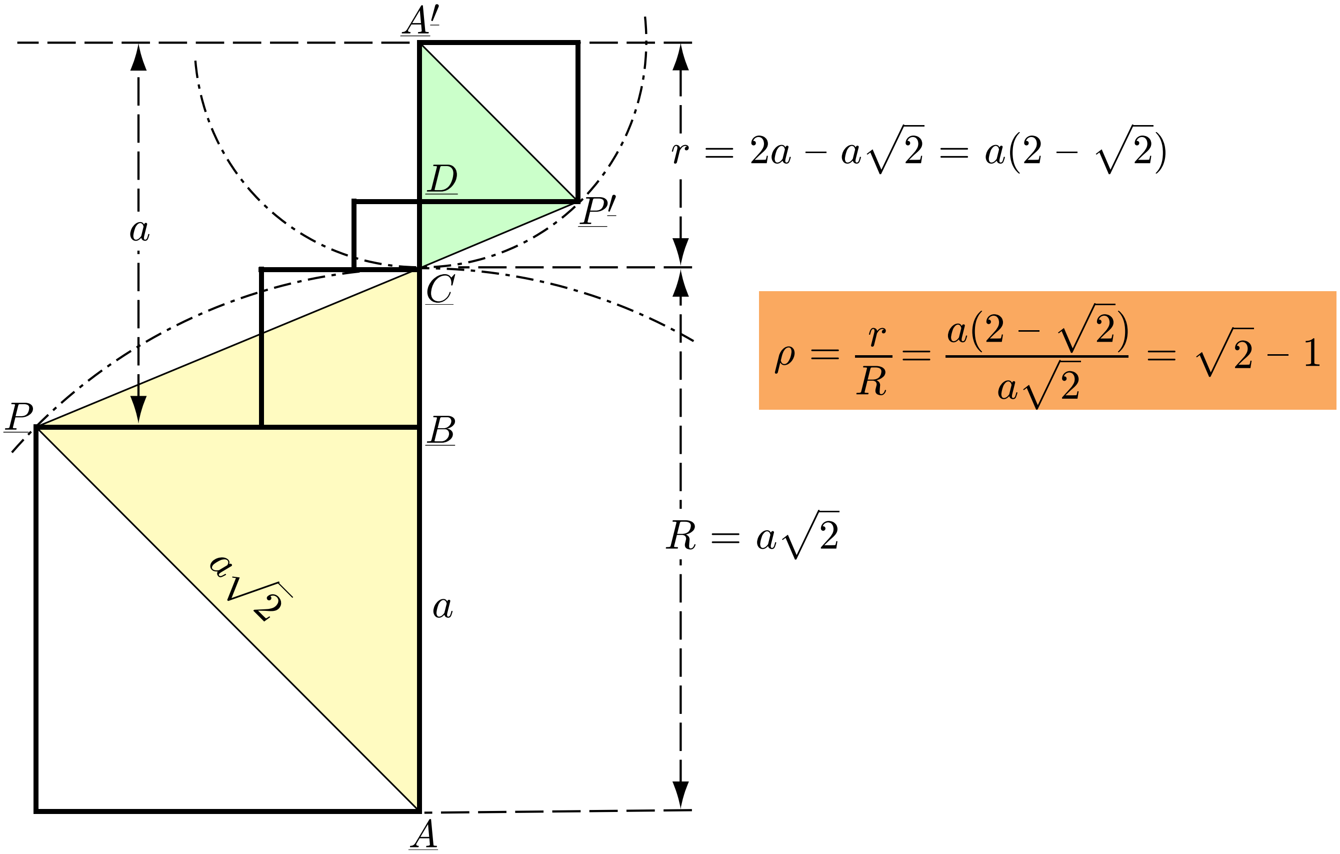
Una unidad de medida común a la diagonal y al lado del pentágono $A_0B_0C_0D_0E_0$ también es una unidad de medida común a la diagonal y al lado del pentágono $A_1B_1C_1D_1E_1$ y a las diagonales y lados respectivos de todos los pentágonos sucesivos. El proceso no tiene fin, así que

$$1 \text{ y } \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ son, efectivamente, } \textbf{inconmensurables}$$

IV.-El caso de la raíz cuadrada de 2

El lado de un cuadrado y una diagonal ¿son conmensurables?





Los triángulos $\triangle CAP$ y $\triangle CA'P'$ son isósceles con $\widehat{CAP} = \widehat{CA'P'} = 45°$ y, por lo tanto, son semejantes. La razón de semejanza es $\rho = \sqrt{2} - 1$. Resulta

$$A'D = \rho AB = a\left(\sqrt{2} - 1\right) = a\sqrt{2} - a = AC - AB = BC$$

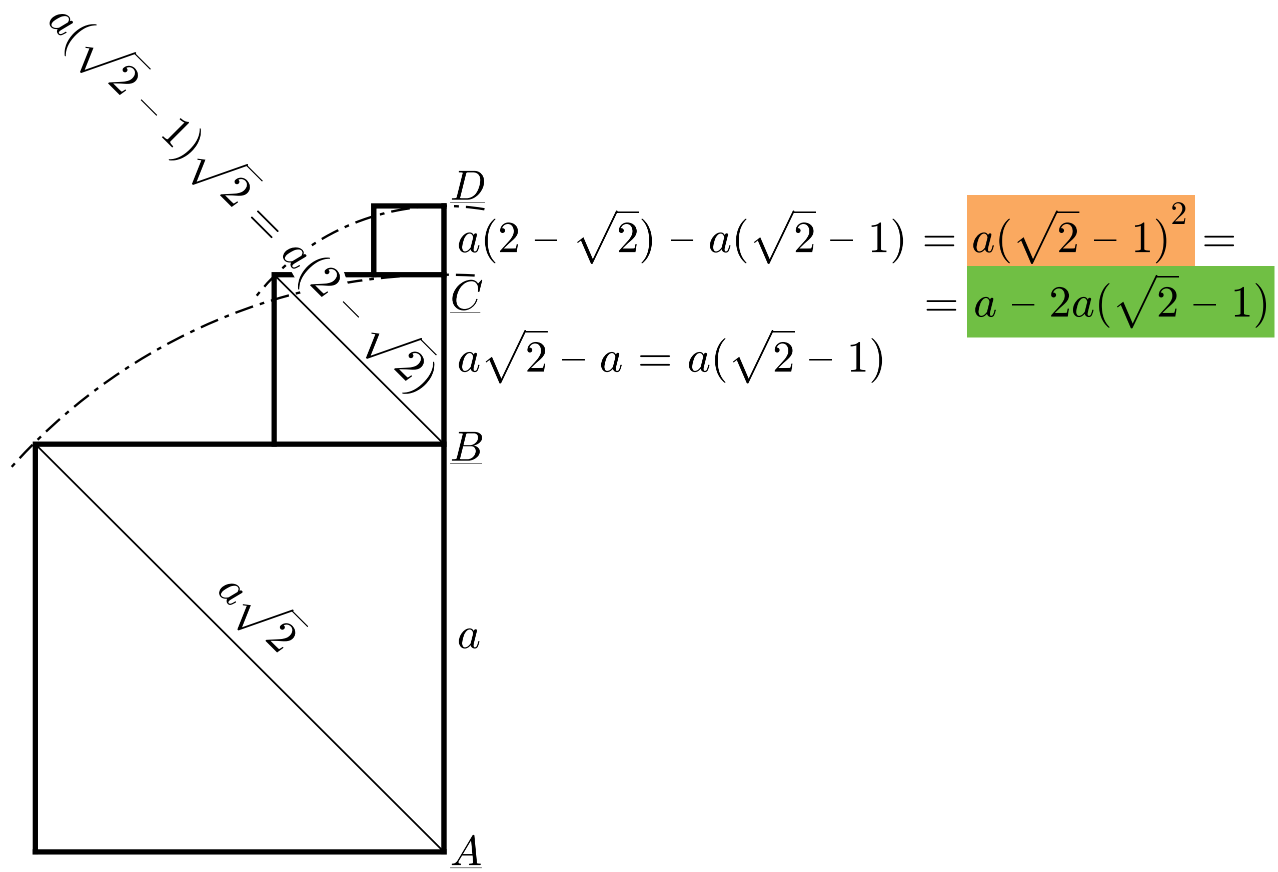
En consecuencia

$$\begin{aligned} CD &= a - BC - A'D = a - 2BC \\ BC &= \rho AB = \rho a \\ CD &= \rho BC = \rho^2 a \end{aligned}$$

• Los segmentos AB, BC y CD están en progresión geométrica de razón $\sqrt{2} - 1$.

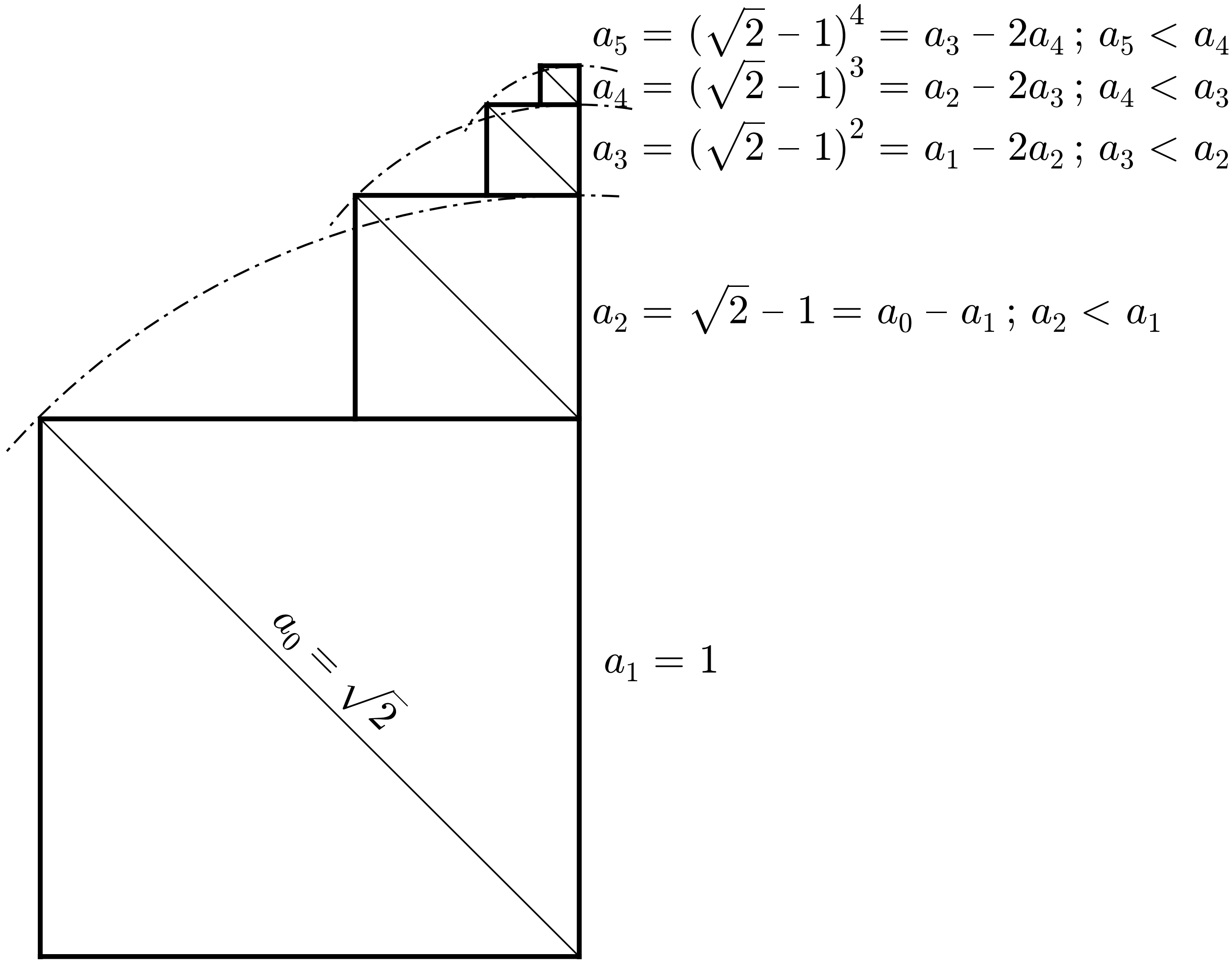
• El segmento CD es el residuo de la división de AB entre BC (el cociente es 2).

Alio modo:



- Los segmentos AB, BC y CD están en progresión geométrica de razón $\rho = \sqrt{2} - 1$.

- El segmento CD es el residuo de la división de AB entre BC (el cociente es 2).



• Una unidad de medida común a a_{i-1} y a_i también lo es a a_i y a_{i+1}.

• $a_i = \left(\sqrt{2} - 1\right)^{i-1} > 0$ siempre.

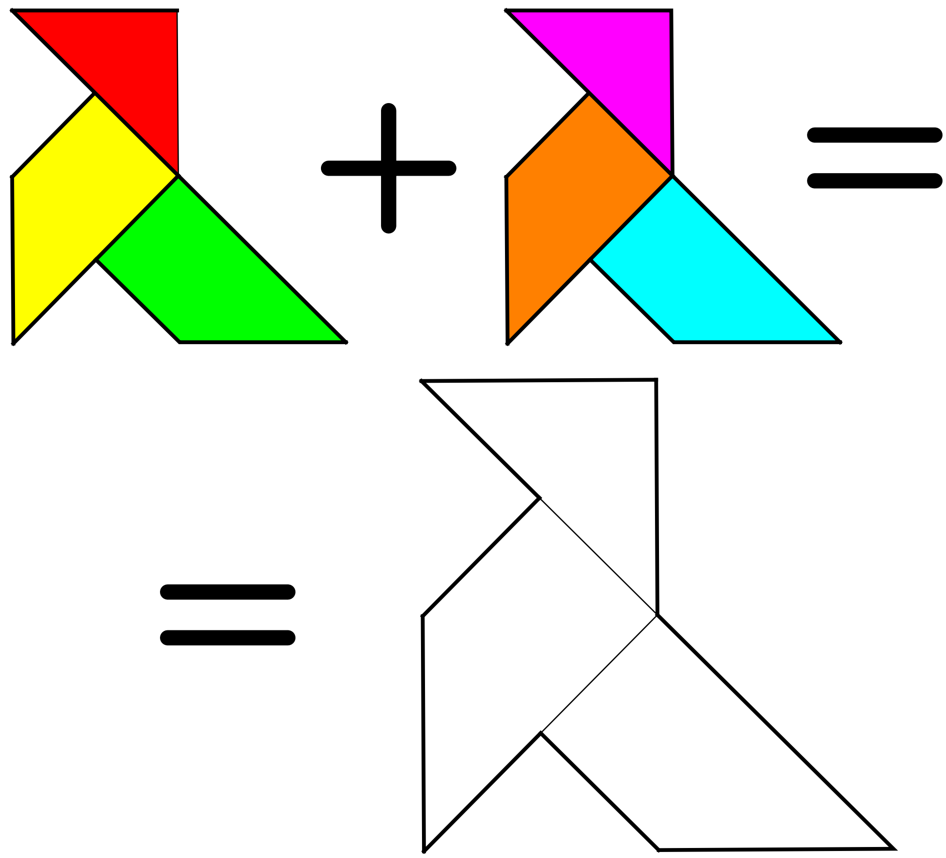
El proceso no tiene fin, no hay una medida común a 1 y $\sqrt{2}$ que son, por lo tanto, **inconmensurables**.

V.-Problemas y actividades

Actividad:

Extender el razonamiento hecho para $\sqrt{2}$ a $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{17}$ y, en general, a irracionales de la forma $\sqrt{1+n^2}$, con $n \in \mathbb{N}$.

Problema 1: Las pajaritas:



¿Cómo construir una sola pajarita, a partir de las seis piezas de dos pajaritas iguales más pequeñas?

Problema 2:

Queremos tapar una ventana cuadrada, el cristal de la cual tiene una superfície de 2 m^2 y, para ello, disponemos de un trozo rectangular de tela de 2 m $\times$ 1 m.

• ¿Cómo hay que cortar la tela y unir después estas partes para cubrir la ventana exactamente?

• ¿Cuál es el número mínimo de cortes que hay que hacer?

Problema 3:

Dos atletas corren, a la misma velocidad, 4 m/s, por dos circuitos diferentes: uno, sigue el perímetro de un cuadrado de 50 m de lado, dando vueltas indefinidamente, y el otro sigue la diagonal del mismo cuadrado, yendo y regresando indefinidamente. En un cierto momento, ambos salen del mismo punto, uno de los vértices del cuadrado. ¿Cuanto tiempo tardarán en volverse a encontrar en alguno de los vértices del cuadrado?

Problema 4:

En el problema 2 hemos conseguido encontrar una longitud que corresponde a $\sqrt{2}$. Por lo tanto, el hecho de que se trata de un número irracional, no impide que podamos construirlo con regla y compás, una vez que se ha dado el segmento unidad. ¿Cómo construirías $\sqrt{3}$ con regla y compás ? ¿Y $\sqrt{17}$? Propón un método que sirva para construir la raíz cuadrada de n.

Problema 5. La media aritmética y la media geométrica:

• Dados dos segmentos de longitudes respectivas a y b, ¿sabrías encontrar geométricamente su media aritmética $\frac{a+b}{2}$? ¿Y su media geométrica $\sqrt{ab}$?

• Demuestra geométricamente que la media aritmética de a y b siempre es mayor o igual que la media geométrica de a y b:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

¿Qué debe ocurrir para que las dos medias sean iguales?

Problema 6:

Dado un segmento a, queremos construir construir el segmento $\sqrt{a}$ con regla y compás. ¿Cómo podremos hacerlo?

Problema 7. Método babilónico de aproximación de raíces cuadradas:

Encontrar la raíz de un número N consiste en encontrar el lado de un cuadrado de N unidades cuadradas de superfície.

Dados dos números diferentes, X_1 y X_2, que cumplan $X_1 \times X_2 = N$ tenemos un rectángulo de superfície N. Necesariamente, uno de los números es mayor que la raíz cuadrada de N y el otro es menor que esa raíz.

Ahora, partiendo de este rectángulo, podemos construir una sucesión de rectángulos de área N, de modo que cada uno de ellos tenga una forma "más cuadrada" que el anterior. Para obtener uno de los lados del segundo rectángulo, calcularemos la media aritmética de los lados del primero y después repetiremos este proceso. De este modo, los lados de los rectángulos que vamos obteniendo son aproximaciones cada vez mejores al valor de la raíz que buscamos.

• Encuentra una aproximación de $\sqrt{20}$ mediante este método: Parte de un rectángulo de área 20 y construye una sucesión de rectángulos, todos de área 20, cada vez més "más cuadrados". Haz lo mismo para encontrar la raíz cuadrada de 13.