El problema de realización de grupos en categorías de flechas

David Méndez, Universidad de Málaga (david.mendez@uma.es)

Conjunto con Cristina Costoya (Universidade da Coruña) y Antonio Viruel (Universidad de Málaga)

Con financiación de los siguientes proyectos: Ministerio de Economía y Competitividad MTM2016-78647-P y MTM2016-79661-P, y Xunta de Galicia EM2013/16.

Resumen

Introducimos una versión generalizada del problema de realización de grupos en categorías de flechas. Proporcionamos una solución a este problema en la categoría de grafos y, cuando nos restringimos a grupos finitos, en la categoría de homotopía de espacios topológicos.

Introducción: El problema

Dada una categoría $\mathcal{C}$, definimos su categoría de flechas $\mathrm{Arr}(\mathcal{C})$:

- Un **objeto** a de $\mathrm{Arr}(\mathcal{C})$ es un morfismo $a\colon A_1 \to A_2$ de $\mathcal{C}$.
- Un **morfismo** $f\colon a \to b$ de $\mathrm{Arr}(\mathcal{C})$ es un par (f_1, f_2) que da lugar a un cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "a"] & B_1 \arrow[d, "b"] \\ A_2 \arrow[r, "f_2"] & B_2. \end{tikzcd}$$

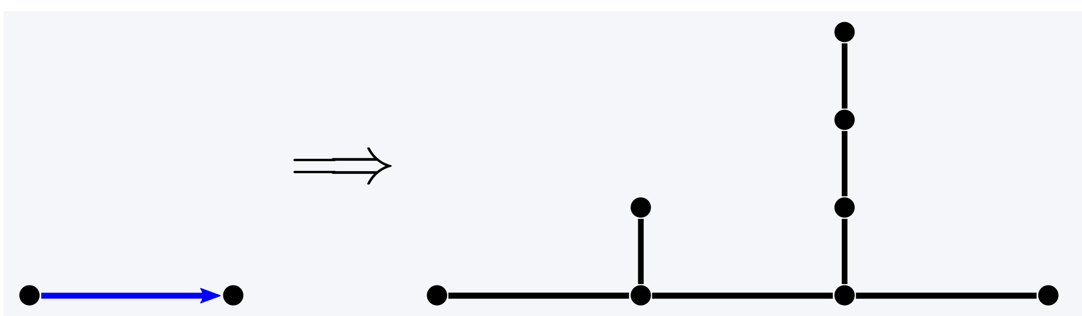
- Un **automorfismo** de $a\colon A_1 \to A_2$ es un par (f_1, f_2) donde $f_1 \in \mathrm{Aut}(A_1)$, $f_2 \in \mathrm{Aut}(A_2)$ y $a \circ f_1 = f_2 \circ b$.

Problema (realización de grupos en la categoría de flechas): Dados grupos $H \leq G_1 \times G_2$, ¿existe $a\colon A_1 \to A_2$ objeto de $\mathrm{Arr}(\mathcal{C})$ tal que $\mathrm{Aut}(A_1) \cong G_1$, $\mathrm{Aut}(A_2) \cong G_2$ y $\mathrm{Aut}(a) \cong H$?

Antecedentes: el problema clásico

Para encontrar una solución a nuestra pregunta hay que resolver el **problema de realización clásico**: Dada una categoría $\mathcal{C}$ y un grupo G, ¿existe $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ tal que $\mathrm{Aut}(X) \cong G$?

- **Categoría de grafos** (*Grafos*):
  - **Propuesto**: König, 1936.
  - **Resuelto para grupos finitos**: Frucht, 1939.
  - **Resuelto en el caso general**: de Groot, 1959.
  - **Método**: Utilizan el *reemplazamiento de flechas* para codificar direcciones y etiquetas de un grafo de Cayley en un grafo simple.



- **Categoría de homotopía de espacios** (*HoTop*):
  - **Propuesto**: Kahn, años 60.
  - **Resuelto para grupos finitos**: Costoya-Viruel, 2014.
  - **Método**: asocian a cada grafo un *modelo algebraico* de un tipo de homotopía racional. Esta asociación es funtorial en una subcategoría de *Grafos* que *no es plena*.

$$\mathcal{M}_{\mathcal{G}} = (\underbrace{\Lambda(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, z)}_{\text{homotópicamente rígida}} \otimes \overbrace{\Lambda(x_v, z_v}^{\text{generadores asociados a vértices}} \mid v \in V(\mathcal{G})), \underbrace{d}_{\text{codifica grafo}})$$

Objetivo y metodología

- **Objetivo**: resolver el problema de realización en las categorías de flechas de *Grafos* y *HoTop*.
- **Metodología**: análoga a la del problema clásico.
  1. Resolver el problema en grafos dirigidos y etiquetados.
  2. Trasladar la solución a grafos simples mediante reemplazamiento de flechas.
  3. Construir un funtor de grafos a espacios racionales que permita llevar la solución a *HoTop*.

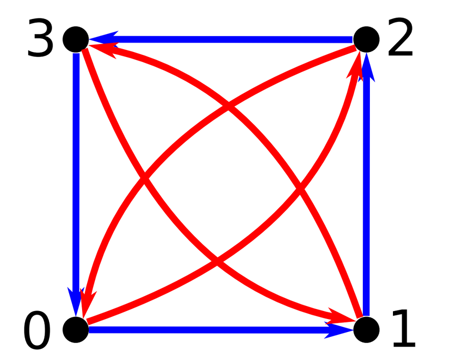
De grupos a grafos

1. **Los subgrupos del producto**. Sea $H \leq G_1 \times G_2$. Sean $\pi_j\colon G_1 \times G_2 \to G_j$ e $i_j\colon G_j \to G_1 \times G_2$.
   - $\pi_1(H) \leq G_1$ es el grupo de las *primeras componentes* de elementos de H. Análogo con $\pi_2(H)$.
   - $i_1^{-1}(H) \leq G_1$ es el grupo de elementos $g_1 \in G_1$ tales que $(g_1, e_{G_2}) \in H$. Análogo con $i_2^{-1}(H)$.
   - Si $(g_1, g_2), (g_1', g_2) \in H$ comparten segunda componente, $[g_1] = [g_1'] \in \pi_1(H)/i_1^{-1}(H)$. Está bien definida la aplicación $\varphi\colon \pi_1(H)/i_1^{-1}(H) \to \pi_2(H)/i_2^{-1}(H)$ que lleva $[g_1]$ a $[g_2]$ tal que $(g_1, g_2) \in H$.

   Lema (Goursat): La aplicación $\varphi\colon \pi_1(H)/i_1^{-1}(H) \to \pi_2(H)/i_2^{-1}(H)$ es un isomorfismo de grupos, y
   $$H = \{(g_1, g_2) \in \pi_1(H) \times \pi_2(H) \mid \varphi[g_1] = [g_2]\}.$$

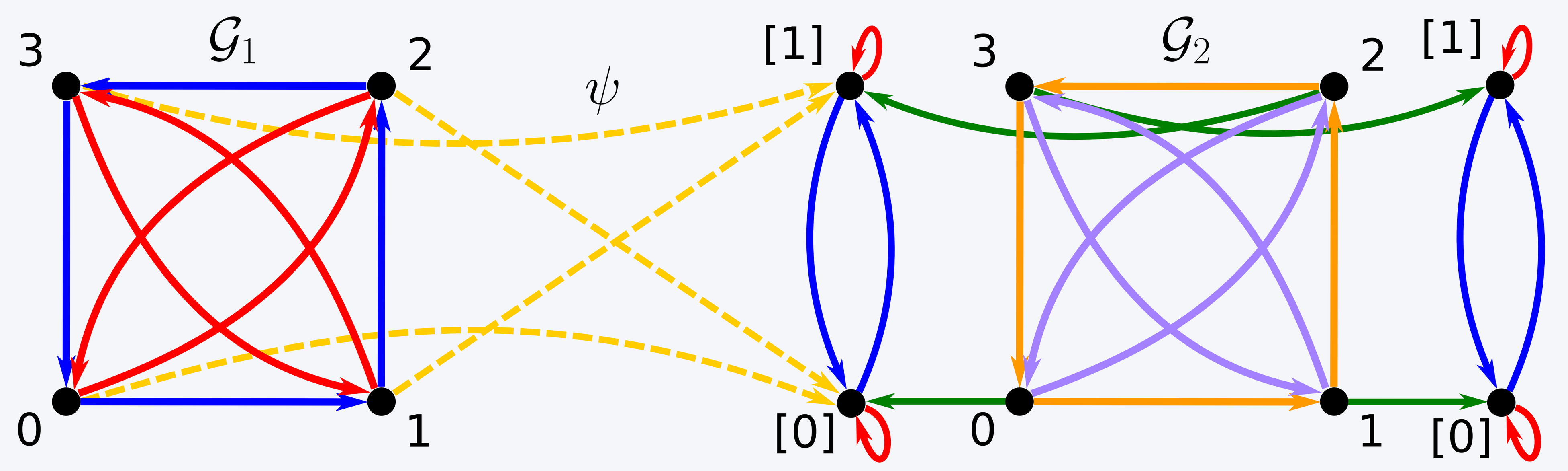
2. **El punto de partida: grafos de Cayley**. Sea G un grupo, R un conjunto de generadores de G. El ***grafo de color de Cayley*** de G asociado a R es un grafo **dirigido** y **coloreado** $\mathrm{Cay}(G, R)$ con:
   - **Vértices**: uno por cada elemento de G.
   - **Aristas**: una arista etiquetada $r \in R$ entre g y rg, para todo $g \in G$.

   Proposición: Si G grupo con R conjunto de generadores, $\mathrm{Aut}(\mathrm{Cay}(G, R)) \cong G$.

   Ejemplo: $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_4, \{1, 2\})$

3. **Los grafos que resuelven el problema**: Sean $H \leq G_1 \times G_2$. Construimos $\psi\colon \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$:
   - $\mathcal{G}_1 = \mathrm{Cay}(G_1, R)$, con R elegido según las clases laterales de $G_1/i_1^{-1}(H)$.
   - $\mathcal{G}_2$ se construye a partir de $\mathrm{Cay}(G_2, S)$, con S elegido según las clases laterales de $G_2/\pi_2(H)$:
     - Se construye un grafo $\mathcal{G}_{i_0}$ que representa a las clases laterales de $G_1/i_1^{-1}(H)$.
     - Por cada clase lateral de $G_2/\pi_2(H)$, se añade a $\mathrm{Cay}(G_2, S)$ una copia de $\mathcal{G}_{i_0}$.
     - De cada vértice g_2 de $\mathrm{Cay}(G_2, S)$ sale una única arista con una nueva etiqueta, φ.
     - Esta arista llega a un vértice de la copia de $\mathcal{G}_{i_0}$ que corresponde a la clase de g_2 en $G_2/\pi_2(H)$.
     - El vértice de llegada de la arista se escoge en función de φ (Lema de Goursat).
   - ψ lleva cada vértice de $\mathcal{G}_1$ a su clase en la copia de $\mathcal{G}_{i_0}$ asociada a $\pi_2(H)$.

   Ejemplo: Solución para $G_1 = G_2 = \mathbb{Z}_4$, $H = \langle (1, 2) \rangle \leq G_1 \times G_2$.

   Proposición: $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}_1) \cong G_1$, $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}_2) \cong G_2$ y $\mathrm{Aut}(\psi) \cong H$.

4. **De grafos dirigidos y etiquetados a grafos simples**: Se utiliza el reemplazamiento de flechas.

De grafos a espacios racionales

Definimos un funtor $\mathcal{M}\colon$ *Grafos* $\to$ CDGA (modelos algebraicos de tipos de homotopía racional):

- A $\mathcal{G}$ **grafo sin vértices aislados** se asocia $\mathcal{M}(\mathcal{G}) = (\mathcal{A} \otimes \Lambda(x_v \mid v \in V(\mathcal{G}), z_{(v,w)}, z_{(w,v)} \mid \{v, w\} \in E(\mathcal{G})), d)$:
  - $\mathcal{A} = (\Lambda(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, z), d)$ CDGA *rígida como álgebra* (es decir, $\mathrm{End}(\mathcal{A}) = \{0, 1\}$).
  - Generadores x_v asociados a vértices con $dx_v = 0$.
  - Generadores $z_{(v,w)}$ *asociados a aristas* con $dz_{(v,w)} = x_v^3 + x_v x_w x_2^8 + x_1^{29}$.
- A $\sigma\colon \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ **morfismo de grafos** se asocia $\mathcal{M}(\sigma)\colon \mathcal{M}(\mathcal{G}_1) \to \mathcal{M}(\mathcal{G}_2)$:
  - $\mathcal{M}(\sigma)$ es la identidad en la parte rígida, es decir, $\mathcal{M}(\sigma)(w) = w$, para $w \in \{x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, z\}$.
  - $\mathcal{M}(\sigma)(x_v) = x_{\sigma(v)}$, para todo $v \in V(\mathcal{G}_1)$, y $\mathcal{M}(\sigma)(z_{(v,w)}) = z_{(\sigma(v),\sigma(w))}$, para todo $\{v, w\} \in E(\mathcal{G}_1)$.

Proposición: Dados grafos $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ sin vértices aislados, $\mathrm{Hom}(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2) = \mathrm{Hom}(\mathcal{M}(\mathcal{G}_1), \mathcal{M}(\mathcal{G}_2)) - \{0\}$.

Resultados

Del desarrollo anterior obtenemos los siguientes resultados. Denotemos, para $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{H}o\mathcal{T}op)$, $\mathrm{Aut}(X) = \mathcal{E}(X)$ el *grupo de auto-equivalencias de homotopía de* X.

- **Teorema**: Dados grupos $H \leq G_1 \times G_2$, existe un morfismo de CDGAs $\varphi\colon M_1 \to M_2$ tal que $\mathrm{Aut}(M_i) \cong G_i$ y $\mathrm{Aut}(\varphi) \cong H$. Si además G_1 y G_2 son finitos, existe una aplicación continua entre espacios topológicos $f\colon X_1 \to X_2$ tal que $\mathcal{E}(X_i) \cong G_i$ y $\mathcal{E}(f) \cong H$.
- **Teorema**: Sea $\mathcal{C}$ una categoría pequeña y concreta. Existe un funtor $F\colon \mathcal{C} \to$ CDGA tal que $\mathrm{Hom}(A, B) = \mathrm{Hom}(F(A), F(B)) - \{0\}$, para todo $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Si además $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ es numerable y $\mathrm{Hom}(A, B)$ es finito para todo $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, existe un funtor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{H}o\mathcal{T}op$ tal que $\mathrm{Hom}(A, B) = [F(A), F(B)] - \{0\}$, para todo $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

Dado M un monoide, sea M^0 el monoide obtenido al añadir a M un *elemento cero*.

- **Corolario**: Para todo monoide M existe una CDGA A tal que $\mathrm{End}(A) \cong M^0$. Si además M es finito, existe un espacio topológico X tal que $[X, X] \cong M^0$.