



FACULTAD DE MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

Aspectos Discretos de la Segunda Forma Fundamental de Subvariedades

Realizado por: Antonio Ramírez de Arellano Marrero

V^oB^o y dirigido por:
Dr. Alfonso Carriazo Rubio
Dr. Luis Manuel Fernández Fernández
Sevilla, Junio de 2021

Resumen

En este trabajo estudiamos un tema que conecta elementos de dos áreas de las Matemáticas a priori separadas: estructuras combinatorias de la Matemática Discreta y las subvariedades de la Geometría Diferencial. Para ello, analizamos una serie de artículos en los que se desarrolla la teoría de subvariedades asociadas a grafos. Ampliamos con un nuevo método de representación de subvariedades mediante una estructura combinatoria y estudiamos la forma de la misma además de clasificar subvariedades usándola como herramienta. Finalmente planteamos cómo encontrar una relación entre ambas representaciones.

Abstract

In this work we study a subject which connect elements of two different brunches in Mathematics: combinatorial structures from Discrete Mathematics and submanifolds from Differential Geometry. To do this, we focus on some articles where submanifolds theory asociated with graphs is developed. In addition, we present a new method of submanifolds representation with a combinatorial structure and we study how can them be and we use them to classify submanifolds. Finally, a relation between the two ways of representation is proposed.

Índice general

Introducción	7
1. Preliminares	11
1.1. Geometría Riemanniana	11
1.1.1. Conexión Riemanniana	12
1.2. Subvariedades isométricas	13
1.2.1. La Segunda Forma Fundamental	15
1.2.2. Subvariedades Totalmente Geodésicas	18
1.2.3. Subvariedades Totalmente umbilicales	18
1.3. Geometría casi-Hermítica	19
1.3.1. Subvariedades Slant	20
1.3.2. Subvariedades Bi-slant	23
2. Subvariedades Asociadas a grafos	25
2.1. Representación Gráfica	25
2.2. Subvariedades débilmente asociadas a grafos	31
3. Nueva representación de Subvariedades	41
3.1. Representación Combinatoria	41
3.2. Resultados generales	44
3.2.1. Subvariedades Totalmente Umbilicales	44
3.2.2. Subvariedades Lagrangianas	47
3.2.3. Subvariedades Mínimas	49
3.3. Dimensiones Inferiores	53
3.3.1. Superficies en \widetilde{M}^4	53
3.3.2. Curvas en \mathbb{R}^3	58
3.4. Un nuevo tipo de subvariedad	58

6

ÍNDICE GENERAL

Bibliografía

65

Introducción

El estudio de la Teoría de Subvariedades surgió como extensión natural del estudio clásico de las curvas y superficies en el espacio euclídeo tridimensional, aplicando métodos de cálculo diferencial. Desde principios de siglo XX, esto ha evolucionado en uno de los pilares fundamentales dentro de la geometría diferencial con diversas ramas, entre ellas podemos encontrar las dos que estudiaremos en este trabajo, el estudio de comportamiento de la Segunda Forma Fundamental y la Geometría casi-Hermítica.

El concepto de conexión y curvatura de la Segunda Forma Fundamental aparecieron primero con los trabajos de J. Weingarten, G. Darboux y E. Cartan, pero no fue hasta mediados los sesenta cuando se profundizó en el estudio de la Segunda Forma Fundamental como tensor métrico con el trabajo inicial de P.J. Erard. Años más tarde ya surgieron escritos recopilatorios y más generales de entre los que se encuentra el libro de J.M. Lee [11].

La comprensión del comportamiento de una subvariedad bajo la acción de una estructura casi compleja J de una variedad casi-Hermítica se ha convertido en un tema de investigación interesante. Dentro de este ámbito, las subvariedades complejas y las subvariedades totalmente reales son bien conocidas y fueron generalizadas por B.Y. Chen definiendo las inmersiones slant [6]. Más tarde, N. Papaghiuc introdujo una noción aún más general, las subvariedades semi-slant [13], que también incluye a la clase de subvariedades CR. Por último, A. Carriazo definió una mayor generalización que incluían a todas las anteriores, las subvariedades bi-slant [2]. Además en este mismo artículo, mostró una representación gráfica (mediante grafos), a partir de la estructura casi-compleja de la variedad.

De esta representación podemos encontrar una asociación entre grafos y subvariedades como ya hicieron los autores A. Carriazo y L.M. Fernández en [5], la cual surge del estudio de las superficies slant. Dada una superficie M^2 θ -slant propia en una variedad casi-Hermítica (\widetilde{M}^4, J, g) , Chen demostró que

podemos considerar una referencia local ortonormal especial, la referencia slant adaptada [6], $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de forma que e_1, e_2 son tangentes a M , e_3, e_4 normales a M , y verifican las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} g(Je_1, e_2) &= -g(Je_3, e_4) = \cos \theta, \\ g(Je_1, e_3) &= -g(Je_2, e_4) = -\sin \theta, \\ g(Je_1, e_4) &= g(Je_2, e_3) = 0. \end{aligned}$$

De aquí podemos sacar una representación gráfica del comportamiento de del operador casi-complejo J en M . Definimos pues, un grafo aplicando el siguiente método:

1. Consideremos un vértice por cada campo de la referencia, etiquetado con su subíndice natural.
2. Diremos que la arista $\{i, j\}$ existe si y solamente si $g(JX_i, X_j) \neq 0$.
3. A cada arista le asignamos el peso dado por $g^2(JX_i, X_j)$.
4. Finalmente, para obtener información visual adicional, pondremos los vértices correspondientes a los campos tangentes en una línea inferior imaginaria y a los correspondientes a los campos normales en una línea superior.

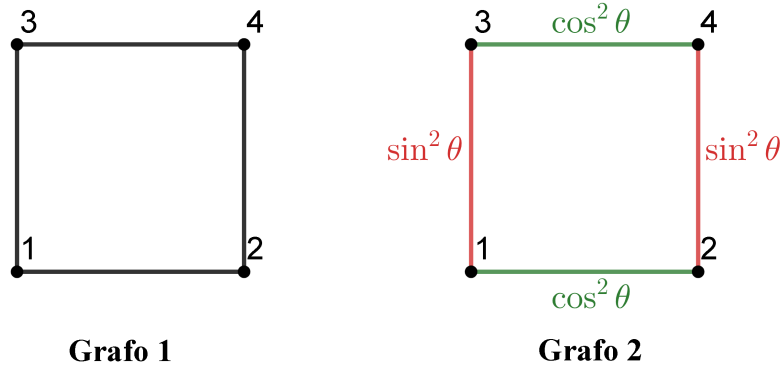


Figura 1: Grafos asociados a una superficie slant

En la Figura 1, el Grafo 1 corresponde al aplicar los pasos 1,2 y 4. Mientras que el Grafo 2 realizamos también el paso 3. Esta diferencia nos da un grafo ponderado y uno que no.

De aquí también surge el estudio de una asociación débil donde los grafos no estén ponderados, como hicieron A. Carriazo, L. M. Fernández y A. Rodríguez-Hidalgo en [4].

Todas estas asociaciones nos construye un puente entre dos áreas de las matemáticas tradicionalmente separadas, la Matemática Discreta y la Geometría Diferencial, convirtiéndose en una útil herramienta para la clasificación de subvariedades.

Viendo todos los buenos resultados y la utilidad que se consiguió con esta relación, cabe preguntarse si se puede buscar relaciones o representaciones parecidas pero con otro tipos de estructuras que no sea la del operador casi-complejo. Esta ya lo hicieron los autores L. Boza, A. Carriazo y L. M. Fernández [3].

En este trabajo, daremos una nueva representación combinatoria a partir del comportamiento de la Segunda Forma Fundamental de la subvariedad respecto de la variedad ambiente. Tomando una superficie como la anterior podemos aplicar el siguiente método:

1. Consideremos un vértice por cada campo de la referencia, etiquetado con su subíndice natural.
2. Para $i, j \in \{1, 2\}$ con $i \leq j$ y $k \in \{3, 4\}$ tenemos que:
 - a) Si $i = j$, diremos que la arista $\{i, k\}$ existe si y solamente si $g(h(X_i, X_i), X_k) \neq 0$.
 - b) Si $i \neq j$, diremos que el triángulo $\{i, j, k\}$ existe si y solamente si $g(h(X_i, X_j), X_k) \neq 0$.
3. A cada arista $\{i, k\}$ le asignamos el peso $g(h(X_i, X_i), X_k) = h_{ii}^k$ y a cada triángulo $\{i, j, k\}$ le asignamos el peso $g(h(X_i, X_j), X_k) = h_{ij}^k$.
4. Finalmente, para obtener información visual adicional, pondremos los vértices correspondientes a los campos tangentes en una línea inferior imaginaria y a los normales en una línea superior.

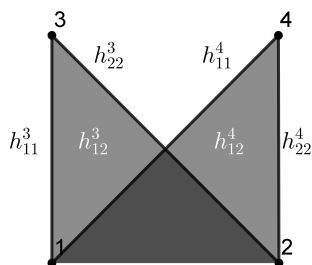


Figura 2: Representación combinatoria de una superficie

A partir de esta representación se conseguirán diversas propiedades que deben cumplir estas estructuras combinatorias para poder representar distintos tipos de subvariedades. Esto nos será también útil para la clasificación de las mismas.

Comenzamos la presente memoria con un capítulo preliminar en el que presentamos conceptos fundamentales de la Teoría de Subvariedades, definiendo distintos tipos de las mismas y centrándonos finalmente en diversos avances de la Geometría Casi-Hermítica.

En el Capítulo 2 continuamos con la asociación entre grafos y bases ortonormales, proporcionando primero la representación gráfica junto con varios ejemplos, además conseguimos propiedades necesarias de los grafos para que puedan estar débilmente asociados a una subvariedad.

Finalmente, en el Capítulo 3, presentamos la nueva forma combinatoria de representación de subvariedades, dando algunos ejemplos visuales en los que podemos comenzar a ver el potencial de la misma, conseguimos algunos resultados generales de esta representación según el tipo de subvariedad además de estudiar casos en dimensiones inferiores. Por último, estudiamos las posibles relaciones entre las dos representaciones. Además definiremos un nuevo tipo de subvariedad que haga de puente entre ambas.

Antes de acabar la introducción, me gustaría agradecer a mis tutores a lo cuales admiro, tanto como docentes como investigadores, el profesor Dr. D. Alfonso Carriazo Rubio y el profesor Dr. D. Luis Manuel Fernández Fernández. Sobretudo por el tiempo y esfuerzo que me han dedicado en el proceso de elaboración de este trabajo. También me gustaría agradecer a mis padres, mi hermana y mi abuela por su apoyo en este duro año que hemos vivido todos.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Geometría Riemanniana

En esta primera sección daremos una breve introducción a la Geometría Riemanniana. Para profundizar en estos conceptos nos remitimos a la referencia [11].

Sea M una variedad diferenciable y sea g un campo de tensores diferenciables de tipo $(0, 2)$ en M :

$$g : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M).$$

Entonces, para cada punto $p \in M$, se tiene la aplicación bilineal

$$g_p : T_p(M) \times T_p(M) \rightarrow \mathbb{R},$$

dada por $g_p(X_p, Y_p) = (g(X, Y))_p$, para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Definición 1.1.1 Sea M una variedad diferenciable y sea g un campo de tensores diferenciable de tipo $(0, 2)$ en M . Se dice que g es **simétrico** si $g_p(u, v) = g_p(v, u)$ para todos $u, v \in T_p(M)$ y para todo $p \in M$. Por otro lado, se dice que g es **definido positivo** si cumple que para todo $u \in T_p(M)$ y para todo $p \in M$:

1. $g_p(u, u) \geq 0$.
2. $g_p(u, u) = 0$ si y solo si $u = 0$.

Definición 1.1.2 Una **variedad Riemanniana** es un par (M, g) donde M es una variedad diferenciable y g es un campo de tensores diferenciable de tipo $(0, 2)$ simétrico y definido positivo. A g se le llama métrica Riemanniana sobre M .

Veamos ahora cómo se puede estudiar esta métrica.

Definición 1.1.3 Sea $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_m))$ un sistema local de coordenadas de una variedad Riemanniana (M, g) . Entonces,

$$g|_U = \sum_{i,j=1}^m g_{ij} dx_i \otimes dx_j, \quad g_{ij} \in \mathbf{F}(U),$$

donde las funciones g_{ij} vienen dadas por

$$g_{ij} = g|_U\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right),$$

que llamaremos **coeficientes métricos** en la carta (U, φ) .

Nota 1.1.4 Bajo las condiciones de la definición anterior, se tiene:

1. $g_{ij} = g_{ji}$, para todo $i, j = 1, \dots, m$ (**simetría**).
2. $g_{ii} > 0$, para todo $i = 1, \dots, m$ y $\det(g_{ij}) > 0$ (**definido positivo**).
3. g_p en cada punto es un producto escalar.

Teorema 1.1.5 *Toda variedad diferenciable M , T_2 y 2^0N , admite una métrica Riemanniana.*

1.1.1. Conexión Riemanniana

Sea (M, g) una variedad Riemanniana. Se dice que una conexión afín ∇ es **compatible** con g (o que es una conexión métrica con respecto a g) si para toda $\alpha : I \rightarrow M$ curva diferenciable y para todos V, W campos diferenciables de vectores tangentes a M a lo largo de α , se cumple que si V y W son paralelos, entonces $g(t)(V(t), W(t)) = cte.$, para todo $t \in I$.

Teorema 1.1.6 *Sea (M, g) una variedad Riemanniana. Una conexión afín ∇ es compatible con g si y solo si $\nabla g = 0$, es decir, si y sólo si $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.*

Teorema 1.1.7 (Teorema de Levi-Civita). *En una variedad Riemanniana (M, g) existe una única conexión afín ∇ sobre M tal que:*

1. *Es compatible con g , es decir,*

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z),$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

2. *Es simétrica, es decir,*

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X,$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Entonces, ∇ se llama la conexión Riemanniana o conexión de Levi-Civita y viene dada por la siguiente expresión, conocida como fórmula de Koszul:

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X) + g([X, Y], Z), \quad (1.1.1)$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Observación 1.1.8 Sea (M, g) una variedad Riemanniana de dimensión m y sea $\{e_1, \dots, e_m\}$ una referencia local de campos ortonormal. Entonces podemos expresar la conexión,

$$\nabla_X Y = \sum_{i=1}^m g(\nabla_X Y, e_i) e_i. \quad (1.1.2)$$

1.2. Subvariedades isométricas

En esta sección definiremos nociones básicas de la teoría de subvariedades. Para profundizar más en este tema se recomienda el capítulo 8 de [11].

Definición 1.2.1 Sean M, \widetilde{M} dos variedades diferenciales y sea $f : M \rightarrow \widetilde{M}$ una aplicación diferenciable. Se dirá que f es una **inmersión** si para todo $p \in M$, se tiene que $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} \widetilde{M}$ es inyectiva.

Una consecuencia directa es que, si $f : M \rightarrow \widetilde{M}$ es una inmersión, entonces $\dim M \leq \dim \widetilde{M}$. De hecho se tiene que $\dim M = \dim \widetilde{M}$ si y solo si $f(M)$ es un abierto de \widetilde{M} . De aquí en adelante supondremos siempre que $\dim M < \dim \widetilde{M}$.

Nota 1.2.2 Una inmersión no tiene por qué ser inyectiva, lo que se cumple es que localmente sí es inyectiva (como consecuencia del Teorema de la Función Inversa), es decir, para todo $p \in M$ existe un entorno $U \subseteq M$ de p tal que $f|_U$ es inyectiva.

Definición 1.2.3 Una **isometría** entre dos variedades Riemannianas (M, g) y $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ es un difeomorfismo $f : M \rightarrow \widetilde{M}$ tal que $f^*\widetilde{g} = g$. A esta métrica $f^*\widetilde{g}$ se le llama métrica **pullback** vía f .

Definición 1.2.4 Cuando entre dos variedades Riemannianas existe una isometría se dice que son **isométricas**.

Definición 1.2.5 Se dice que dos variedades Riemannianas (M, g) y $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ son **localmente isométricas** si para todo $p \in \widetilde{M}$, existen $U \subseteq M$ abierto, $p \in U$ y $f : U \rightarrow f(U)$ difeomorfismo, siendo $f(U) \subseteq \widetilde{M}$ abierto, que es una isometría.

Observación 1.2.6 Sea $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ una variedad Riemanniana y sea (M, i) una subvariedad regular de \widetilde{M} , donde $M \subseteq \widetilde{M}$ e $i : \widetilde{M} \hookrightarrow M$ es la inclusión. Sea $p \in M$. Entonces, $i_{*p} : T_p(M) \rightarrow T_p(\widetilde{M})$ es un isomorfismo sobre la imagen, con lo que podemos identificar $T_p(M)$ con $i_{*p}T_p(M) \subseteq T_p(\widetilde{M})$ y así lo escribiremos para ahorro de notación.

A partir de ahora, consideraremos en M la métrica Riemanniana i^*g (que muchas veces denotaremos por g salvo por confusión), que se llama **Primera Forma Fundamental de la inmersión** y que convierte a i en una inmersión isométrica. Entonces (M, i^*g) se dirá que es una **subvariedad Riemanniana** o **subvariedad isométrica** de \widetilde{M} .

Sean ∇ y $\widetilde{\nabla}$ las conexiones Riemannianas de g y i^*g respectivamente.

Tomando $p \in M$ y f una inmersión isométrica, está claro que $df_p : T_pM \rightarrow T_{f(p)}\widetilde{M}$ es una isometría lineal sobre su imagen, así que $df_p(T_pM) \subseteq T_{f(p)}\widetilde{M}$ es un subespacio vectorial de misma dimensión que M . Luego podemos considerar el complemento ortogonal de $df_p(T_pM)$ en $T_{f(p)}\widetilde{M}$ con respecto a la

métrica $\tilde{g}_{f(p)}$,

$$T\tilde{M}_{f(p)} = df_p(T_pM) \oplus (df_p(T_pM))^\perp.$$

En ocasiones, identificaremos $T_p\tilde{M} = T_pM \oplus (T_pM)^\perp$.

Definición 1.2.7 Se dice que el espacio $(T_pM)^\perp$ es el **espacio normal** a la inmersión en $p \in M$.

Nota 1.2.8 El espacio vectorial $(T_pM)^\perp$ es de dimensión $\dim(\tilde{M}) - \dim(M)$. A esta dimensión la llamaremos **codimensión** de M .

Así, cualquier campo $X \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$ se puede descomponer en su parte tangente y en su parte normal a la inmersión,

$$X = TX + FX,$$

donde TX es la parte tangente a la inmersión y FX la parte normal a TX .

Definición 1.2.9 Un campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$, se dice que es normal a la inmersión si para todo $p \in M$, $X_{f(p)} \in (T_pM)^\perp$, es decir, al descomponerlo en parte normal y parte tangente tenemos que $TX = 0$ y que $X = FX$.

1.2.1. La Segunda Forma Fundamental

Para fijar la notación, sean $(M, g), (\tilde{M}, \tilde{g})$ dos variedades Riemannianas de dimensión m y \tilde{m} respectivamente, con $f : (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$ una inmersión isométrica. Diremos que ∇ es la conexión de Levi-Civita de (M, g) y $\tilde{\nabla}$ es la conexión de Levi-Civita de (\tilde{M}, \tilde{g}) .

Lema 1.2.10 Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$ campo en M , existe un campo \tilde{X} en \tilde{M} tal que,

$$\tilde{X}_{f(p)} = df_p(X_p), \quad \text{para todo } p \in M.$$

Utilizando la identificación $T_pM \equiv df_p(T_p(M))$, tenemos que $\tilde{X}_{f(p)} = X_p$, para todo $p \in M$. A este campo \tilde{X} se llama **extensión** del campo X .

Nota 1.2.11 El campo \tilde{X} que extiende a X no es único.

Proposición 1.2.12 Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y \tilde{X}, \tilde{Y} sus extensiones correspondientes. Entonces se tiene:

$$\nabla_X Y = (\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}) - (\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y})^\perp.$$

Definición 1.2.13 Se define la **Segunda Forma Fundamental** de la inmersión h como:

$$h(X, Y) := (\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y})^\perp, \quad \text{para todo, } X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

siendo $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$ las extensiones de X, Y respectivamente.

Observación 1.2.14 Usando la Proposición anterior, llegamos a que:

$$h(X, Y) = \tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y} - \nabla_X Y.$$

Observación 1.2.15 La definición anterior no depende de las extensiones de campo elegidas.

Nota 1.2.16 Realmente, podemos expresar ahora la conexión ambiente de la siguiente forma: sea $\{e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_{\tilde{m}}\}$ una referencia local de campos ortonormal. De la igualdad anterior tenemos la **Fórmula de Gauss**,

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y)$$

Igualando esta expresión con (1.1.2) llegamos a que

$$\begin{aligned} \nabla_X Y + h(X, Y) &= \sum_{i=1}^m g(\tilde{\nabla}_X Y, e_i) e_i + \sum_{i=m+1}^{\tilde{m}} g(\tilde{\nabla}_X Y, e_i) e_i \\ &= \nabla_X Y + \sum_{i=m+1}^{\tilde{m}} g(\tilde{\nabla}_X Y, e_i) e_i, \\ h(X, Y) &= \sum_{i=m+1}^{\tilde{m}} g(\tilde{\nabla}_X Y, e_i) e_i. \end{aligned}$$

Llamando ahora $h_{ij}^k = g(h(e_i, e_j), e_k) = g(\tilde{\nabla}_{e_i} e_j, e_k)$ llegamos a la siguiente fórmula,

$$h(e_i, e_j) = \sum_{k=m+1}^{\tilde{m}} h_{ij}^k e_k \quad i, j = 1, \dots, m, \quad (1.2.1)$$

que usaremos más adelante.

Lema 1.2.17 (Ecuación de Weingarten) *Sea M una subvariedad, teniendo los campos $X, Y \in TM$ y $V \in TM^\perp$, se cumple que:*

$$g(\tilde{\nabla}_X V, Y) = -g(V, h(X, Y)). \quad (1.2.2)$$

Definición 1.2.18 Sea M una subvariedad, para cada campo $V \in TM^\perp$ se define el **Operador Forma** A_V como el campo tensorial caracterizado por :

$$g(X, A_V Y) = h(X, Y), \quad \text{para todo } X, Y \in TM.$$

Lema 1.2.19 (Fórmula de Weingarten) *Sea M una subvariedad. Para cada campo normal $V \in TM^\perp$ se cumple la siguiente igualdad:*

$$\tilde{\nabla}_X V = -A_V X + \nabla_X^\perp V,$$

para cualquier campo tangente $X \in TM$.

Nota 1.2.20 Como h es simétrica, A_V es un endomorfismo autoadjunto de TM para cada vector normal V , es decir,

$$g(A_V X, Y) = g(X, A_V Y), \quad \text{para todo, } X, Y \in TM.$$

Además, sabemos que cada matriz inducida por los A_V son matrices simétricas y, por tanto, todos sus autovalores son reales.

Definición 1.2.21 Se dice que una subvariedad M es **austera** [10] si para cada campo normal V , el conjunto de autovalores de A_V es invariante salvo multiplicación por -1 , es decir, son de la forma:

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_p) = (a, -a, b, -b, \dots, c, -c, 0, 0, \dots, 0).$$

Definición 1.2.22 Se define la **Segunda Forma Fundamental evaluada en un punto p** como

$$h_p : T_p M \times T_p M \rightarrow (T_p M)^\perp$$

$$h_p(u, v) := (h(X, Y))_p$$

siendo $X, Y \in \mathfrak{X}$ tal que $X_p = u, Y_p = v$.

Proposición 1.2.23 *La segunda forma fundamental evaluada en $(h(X, Y))_p$ sólo depende de los valores X_p e Y_p . Como consecuencia, para todo $p \in M$ la segunda forma fundamental evaluada en p está bien definida.*

Proposición 1.2.24 *Para todo $p \in M$, $h_p : T_p M \times T_p M \rightarrow (T_p M)^\perp$ es bilineal y simétrica.*

Definición 1.2.25 Sea $\{e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_{\tilde{m}}\}$ una referencia local de campos ortonormal de la variedad ambiente en la que los m primeros campos corresponden al espacio tangente a la subvariedad. Se define la curvatura media de la subvariedad como:

$$H = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m h(e_i, e_i).$$

Definición 1.2.26 Se dice que una subvariedad es **mínima** si su curvatura media es idénticamente nula.

1.2.2. Subvariedades Totalmente Geodésicas

Definición 1.2.27 Llamamos a una subvariedad isométrica M de una variedad Riemanniana (\tilde{M}, \tilde{g}) totalmente geodésica si cualquier geodésica de la subvariedad M con su métrica inducida g es también una geodésica de la variedad ambiente.

Proposición 1.2.28 *Sea una subvariedad Riemanniana (M, g) de una variedad Riemanniana (\tilde{M}, \tilde{g}) . Los siguientes resultados son equivalentes:*

1. (M, g) es totalmente geodésica.
2. La segunda forma fundamental es nula, es decir, $h = 0$.

La demostración de esta proposición la encontramos en [15].

1.2.3. Subvariedades Totalmente umbilicales

Definición 1.2.29 Llamamos a una subvariedad isométrica M de una variedad Riemanniana (\tilde{M}, \tilde{g}) totalmente umbilical si

$$h(X, Y) = g(X, Y) \cdot H, \tag{1.2.3}$$

para todo $X, Y \in T_p(M)$, donde H es la curvatura media de M en \tilde{M} .

Nota 1.2.30 Una subvariedad totalmente umbilical y mínima es una subvariedad totalmente geodésica.

1.3. Geometría casi-Hermítica

La teoría de subvariedades de variedades casi-Hermítica hoy en día es una de las áreas más trabajadas en la Geometría Diferencial y, además, va a ser una herramienta fundamental para esta memoria. Por eso la introducimos aquí además de una serie de resultados útiles para más adelante. Estos conceptos los podemos encontrar en [6].

Definición 1.3.1 Sea \widetilde{M} es una variedad diferenciable de dimensión par con J un campo tensorial del tipo $(1, 1)$ tal que $J^2 = -Id$ (llamado **estructura casi compleja** (\widetilde{M}, J)) y g una métrica Riemanniana sobre \widetilde{M} . Se dice que la terna (\widetilde{M}, J, g) es una **variedad casi-Hermítica** si g es compatible con J , es decir:

$$g(JX, JY) = g(X, Y),$$

para todos $X, Y \in \widetilde{M}$

Nota 1.3.2 De la igualdad anterior deducimos que $g(JX, Y) = -g(X, JY)$ y, por tanto, $g(JX, X) = 0$, para todos $X, Y \in \widetilde{M}$.

Definición 1.3.3 En el caso particular en el que $\widetilde{\nabla}J = 0$, se dirá que la terna (\widetilde{M}, J, g) es una **Variedad de Kaehler**.

Nota 1.3.4 En el caso de las variedades de Kaehler, al tener $\widetilde{\nabla}J = 0$, realmente lo que nos dice es que para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(\widetilde{M})$, $(\widetilde{\nabla}_X J)Y = 0$, es decir que

$$\widetilde{\nabla}_X JY - J\widetilde{\nabla}_X Y = 0, \text{ y, por tanto, } \widetilde{\nabla}_X JY = J\widetilde{\nabla}_X Y, \quad (1.3.1)$$

Esto nos servirá de gran utilidad en las caracterizaciones futuras.

También se pueden diferenciar distintos tipos de subvariedades inmersas en variedades casi-Hermíticas. Uno de ellas es mediante el comportamiento del espacio tangente respecto de la estructura casi compleja J correspondiente.

Nota 1.3.5 Sea M una subvariedad de una variedad casi-hermítica \widetilde{M} y X un campo de vectores tangente a M . Podemos expresar JX de la siguiente forma

$$JX = TX + FX,$$

donde TX es la parte tangente a M y FX la normal a M .

Definición 1.3.6 Sea M una subvariedad de una variedad casi-hermítica \widetilde{M} . Se dirá que M es una **subvariedad totalmente real** si $J(T_p M) \subseteq T_p^\perp M$ para todo punto $p \in M$. Es decir, para cada campo no nulo X , tangente a M en un punto cualquiera p , el ángulo entre JX y $T_p M$ es $\pi/2$.

Definición 1.3.7 Sea M una subvariedad de una variedad casi-hermítica \widetilde{M} . Se dirá que M es una **subvariedad compleja** si $J(T_p M) \subseteq T_p M$ para todo punto $p \in M$. Es decir, para cada vector no nulo X , tangente a M en un punto cualquiera p , el ángulo entre JX y $T_p M$ es cero.

Definición 1.3.8 Se dice que una subvariedad n -dimensional es **Lagrangiana** cuando sea totalmente real y su variedad ambiente sea $2n$ -dimensional y Kaehler.

Nota 1.3.9 Se puede encontrar una referencia local de campos ortonormal para una subvariedad Lagrangiana n -dimensional de la siguiente forma:

$$\mathcal{B} = \{X_1, \dots, X_n, JX_1, \dots, JX_n\}. \quad (1.3.2)$$

Gracias a que es totalmente real sabemos que los campos JX_i son normales a la subvariedad y ortonormales entre sí. A esta referencia la llamaremos **referencia de campos Lagrangiana adaptada**.

Definición 1.3.10 Se dice que una subvariedad M es una subvariedad **Lagrangiana especial** [10] si es Lagrangiana y mínima.

Definición 1.3.11 Se dice que una subvariedad lagrangiana de dimensión n con referencia de campos lagrangiana adaptada es **H-umbilical** [7] si la segunda forma fundamental cumple que

$$\begin{aligned} h(X_1, X_1) &= \lambda JX_1, & h(X_2, X_2) &= \dots = h(X_n, X_n) = \mu JX_1, \\ h(X_1, X_j) &= \mu JX_j, & h(X_j, X_k) &= 0, j \neq k, j, k \in \{1, \dots, n\} \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

para λ, μ dos funciones locales.

1.3.1. Subvariedades Slant

En esta parte veremos algunas fórmulas elementales además de definiciones sobre subvariedades slant en Geometría Compleja. Para más detalle se recomienda utilizar el libro que aparece en la referencia [6].

Sea M una subvariedad de una variedad casi-Hermítica (\widetilde{M}, J, g) y sea g también la métrica inducida en M . Entonces, M se dice que es una **Subvariedad Slant** si para cualquier $p \in M$ y para cada vector no nulo $X_p \in T_pM$, el ángulo $\theta(X_p)$ entre el campo $J_p X_p$ y el espacio tangente T_pM , con $0 \leq \theta(X_p) \leq \pi/2$, es una constante θ llamada **ángulo slant** de la subvariedad. En este caso diremos que M es una subvariedad θ -slant. En particular, está claro que toda una subvariedad compleja (respectivamente, subvariedad totalmente real) es slant con ángulo slant $\theta = 0$ (respectivamente, $\theta = \pi/2$). Si M es una subvariedad θ -slant tal que $\theta \in (0, \pi/2)$, entonces diremos que es una subvariedad slant propia.

Sabemos gracias a la referencia [6] que M es θ -slant si y solamente si

$$T^2X = -\cos^2\theta X \quad (1.3.4)$$

Además más adelante daremos uso a otra caracterización de las subvariedades slant, que podemos encontrar en la referencia [12]:

Lema 1.3.12 *Sea M una subvariedad de una variedad casi-hermítica \widetilde{M} con $\mathcal{B} = \{X_1, \dots, X_m\}$ una referencia local de campos ortonormal de TM . Entonces M es θ -slant si y solamente si*

$$\sum_{i=1}^m g(JX_j, X_i)g(JX_k, X_i) = \delta_{jk} \cos^2\theta$$

para cualesquiera $j, k = 1, \dots, m$.

También el autor en el artículo [8] definió un tipo particular de superficies slant:

Definición 1.3.13 *Sea M una superficie slant en una variedad Kaehler \widetilde{M}^4 . Se dice que M es **slant especial** si, respecto de una referencia ortonormal adaptada $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, los operadores forma de M toman los siguientes valores:*

$$A_{e_3} = \begin{pmatrix} c\lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad A_{e_4} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} \quad (1.3.5)$$

para alguna constante c .

Ahora bien, sea \mathcal{D} [6] una distribución diferenciable sobre M . De forma análoga a la Definición 1.3.7, se dice que \mathcal{D} es complejo (resp. totalmente

real) si $J(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$ (resp. $J(\mathcal{D}) \subseteq T^\perp M$). Por otro lado, diremos que \mathcal{D} es una distribución slant [6] si para cualquier $p \in M$ y para cada $X_p \in \mathcal{D}_p$, $X_p \neq 0$, el ángulo $\theta_{\mathcal{D}}(X_p)$, $0 \leq \theta_{\mathcal{D}}(X_p) \leq \pi/2$, entre $J_p X_p$ y $\theta_{\mathcal{D}}$ es una constante llamada ángulo slant de \mathcal{D} . De hecho, $\theta_{\mathcal{D}}(X_p)$ es el ángulo entre $J_p X_p$ y $(PT)_p X_p$ donde P denota el operador proyección de TM en \mathcal{D} . Encontramos también la siguientes relaciones entre estas nociones (demostradas en la referencia [2]):

Lema 1.3.14 *En las condiciones anteriores, se tiene:*

- \mathcal{D} es una distribución compleja si y solo si es una distribución slant con ángulo slant $\theta_{\mathcal{D}} = 0$.
- \mathcal{D} es una distribución totalmente real si y solo si es una distribución slant con ángulo slant $\theta_{\mathcal{D}} = \pi/2$.

Si \mathcal{D} es una distribución θ -slant, se puede probar también que

$$(PT)^2 X = -\cos^2 \theta X. \quad (1.3.6)$$

A continuación veamos algunos tipos de subvariedades que se puede sacar con este concepto de distribución diferenciable.

Sea \widetilde{M} una variedad Kaehler de dimensión compleja n y M una subvariedad Riemanniana m -dimensional inmersa en \widetilde{M} .

Supongamos ahora que en M tenemos una distribución diferenciable \mathcal{D} de manera que sea consistente con la estructura casi-compleja en \widetilde{M} , es decir, $J(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$. Es más, de forma complementaria, la distribución ortogonal \mathcal{D}^\perp supondremos que es totalmente real, es decir que $J(\mathcal{D}^\perp) \subset (T_p M)^\perp$.

Llamaremos a la distribución \mathcal{D} (respectivamente, \mathcal{D}^\perp) la distribución horizontal (respectivamente, vertical) en M .

Definición 1.3.15 A la subvariedad M dotada con las distribuciones mencionadas arriba $(\mathcal{D}, \mathcal{D}^\perp)$ se llama **subvariedad CR** en \widetilde{M} .

También podemos sacar otro tipo de subvariedad modificando un poco la definición anterior.

Definición 1.3.16 Si \mathcal{D} es una distribución compleja pero esta vez \mathcal{D}^\perp es una distribución slant con ángulo slant $\theta \neq 0$, entonces se dice que M es una **subvariedad semi-slant** [13].

En la siguiente sección introduciremos una generalización de estos tipos de subvariedades ya mencionados como podemos ver en [2].

1.3.2. Subvariedades Bi-slant

Supongamos ahora que existen dos distribuciones ortogonales \mathcal{D}_1 y \mathcal{D}_2 sobre M tales que $TM = \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2$. En esta situación, denotaremos por P_i al operador proyección de TM sobre \mathcal{D}_i y haremos $T_i = P_i \circ T$, $i = 1, 2$. Se tiene:

- Si \mathcal{D}_1 es una distribución totalmente real y \mathcal{D}_2 es una distribución slant con ángulo slant $\theta \neq \pi/2$, entonces diremos que M es una subvariedad *anti-slant*.
- Si \mathcal{D}_1 es una distribución θ_1 -slant y \mathcal{D}_2 es una distribución θ_2 -slant, entonces diremos que M es una subvariedad bi-slant. En tal caso, nos referiremos a los ángulos usando la notación (θ_1, θ_2) .

Veamos con el siguiente teorema cómo están relacionados todos los distintos tipos de subvariedades mencionadas.

Teorema 1.3.17 *Sea M una subvariedad de una variedad casi-hermítica \widetilde{M} .*

- *M es una subvariedad CR si y solo si es bi-slant con $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi/2$.*
- *M es una subvariedad semi-slant si y solo si es bi-slant con $\theta_1 = 0$, $\theta_2 \in (0, \pi/2]$.*
- *Si M es una subvariedad anti-slant entonces es bi-slant con $\theta_1 = \pi/2$, $\theta \in [0, \pi/2)$.*
- *M es una subvariedad semi-slant y anti-slant a la vez si y solo si es slant o CR.*

Pero también se puede ver qué condiciones son suficientes para que una subvariedad bi-slant sea slant. Sea M una subvariedad bi-slant (θ_1, θ_2) de una variedad casi-hermítica \widetilde{M} . Dado un campo tangente X a M , usando la ecuación (1.3.6),

$$\begin{aligned} T^2X = & -\cos^2 \theta_1 P_1 X + P_2 T P_1 T P_1 X + P_1 T P_2 T P_1 X + P_2 T P_2 T P_1 X + \\ & + P_1 T P_1 T P_2 X + P_2 T P_1 T P_2 X + P_1 T P_2 T P_2 X - \cos^2 \theta_2 P_2 X, \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

Si M es una subvariedad θ -slant, como se tiene que dar la igualdad de la ecuación (1.3.4), tenemos entonces que el primer miembro debe ser igual a $-\cos^2 \theta X$. El siguiente teorema nos muestra las condiciones que debe verificar el segundo miembro:

Teorema 1.3.18 *Sea M una subvariedad (θ_1, θ_2) -slant. Dado $\theta \in [0, \pi/2]$, M es θ -slant si y solo si se cumplen las siguientes ecuaciones:*

$$P_2TP_1TP_1X + P_2TP_2TP_1X = 0 \quad (1.3.8)$$

$$P_1TP_1TP_2X + P_1TP_2TP_2X = 0 \quad (1.3.9)$$

$$P_1TP_2TP_1 = (\cos^2 \theta_1 - \cos^2 \theta)P_1 \quad (1.3.10)$$

$$P_1TP_1TP_2 = (\cos^2 \theta_2 - \cos^2 \theta)P_2 \quad (1.3.11)$$

También podemos relacionarlos pidiendo una hipótesis más fuerte:

Teorema 1.3.19 *Sea M una subvariedad bi-slant con $\theta_1 = \theta_2 = \theta$. Entonces M es θ -slant si y solo si*

$$g(JX, Y) = 0 \quad (1.3.12)$$

Para todo $X \in \mathcal{D}_1$ y todo $Y \in \mathcal{D}_2$.

Por último nos cuestionamos si podemos encontrar una subvariedad bi-slant con $\dim \mathcal{D}_1 = d_1 = d_2 = \dim \mathcal{D}_2$ y $\theta_1 \neq \theta_2$ de manera que sea slant. La respuesta es negativa:

Teorema 1.3.20 *Sea M una subvariedad (θ_1, θ_2) bi-slant. Si $d_1 = d_2 \neq 0$ y M es una subvariedad slant, entonces $\theta_1 = \theta_2$.*

Capítulo 2

Subvariedades Asociadas a grafos

En este capítulo introduciremos dos formas distintas de asociar grafos a subvariedades.

2.1. Representación Gráfica

En esta sección introduciremos un procedimiento de representación gráfica [2] para poder comprender mejor las características de una subvariedad M bajo la acción de una estructura casi compleja J . Los pasos son los siguientes:

1. Si denotamos por n (respectivamente, m) a la dimensión de la variedad ambiente \widetilde{M} (respectivamente, a la subvariedad M), entonces elegimos una referencia local de campos ortonormal $\mathcal{B} = \{X_1, \dots, X_n\}$, de manera que X_1, \dots, X_m son tangentes a M y X_{m+1}, \dots, X_n son normales a M .
2. Consideremos un vértice por cada campo de \mathcal{B} , etiquetado con su subíndice natural.
3. Diremos que la arista $\{i, j\}$ existe si y solamente si $g(JX_i, X_j) \neq 0$.
4. A cada arista le asignamos el peso dado por $g^2(JX_i, X_j)$.
5. Finalmente, para obtener información visual adicional, pondremos los vértices correspondientes a los campos tangentes en una línea inferior

imaginaria y a los correspondientes a los campos normales en una línea superior.

Nota 2.1.1 Gracias a las propiedades de la estructura casi compleja, sabemos que es antisimétrica con la métrica de la variedad. Es decir, $g(JX, Y) = -g(X, JY)$ para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(\widetilde{M})$, así que $g^2(JX, Y) = g^2(X, JY)$, para cada $X, Y \in \mathfrak{X}(\widetilde{M})$.

Veamos ejemplos para comprender mejor el procedimiento.

Ejemplo 2.1.2 Sea \mathbf{R}^8 . Para cualesquiera $\theta_1, \theta_2 \in [0, \pi/2]$, sea M la subvariedad dada por:

$$\varphi_1(u, v, w, s) = (u \cos \theta_1, u \sin \theta_1, w \cos \theta_2, w \sin \theta_2, v, 0, s, 0).$$

Elegimos la siguiente referencia ortonormal

$$X_1 = \cos \theta_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \sin \theta_1 \frac{\partial}{\partial x_2}, X_2 = \frac{\partial}{\partial y_1}, X_3 = \cos \theta_2 \frac{\partial}{\partial x_3} + \sin \theta_2 \frac{\partial}{\partial x_4}, X_4 = \frac{\partial}{\partial y_3}$$

$$X_5 = \frac{\partial}{\partial y_2}, X_6 = \sin \theta_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - \cos \theta_1 \frac{\partial}{\partial x_2}, X_7 = \frac{\partial}{\partial y_4}, X_8 = \sin \theta_2 \frac{\partial}{\partial x_3} - \cos \theta_2 \frac{\partial}{\partial x_4}$$

Procedamos a los cálculos de los $g(JX_i, X_j)$ con $i < j$:

$$\begin{aligned} g(JX_1, X_2) &= g\left(\cos \theta_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \sin \theta_1 \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial y_1}\right) = \cos \theta_1 \\ g(JX_1, X_5) &= g\left(\cos \theta_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \sin \theta_1 \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial y_2}\right) = \sin \theta_1 \\ g(JX_2, X_6) &= g\left(-\frac{\partial}{\partial x_1} \sin \theta_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - \cos \theta_1 \frac{\partial}{\partial x_2}\right) = -\sin \theta_1 \\ g(JX_3, X_4) &= g\left(\cos \theta_2 \frac{\partial}{\partial y_3} + \sin \theta_2 \frac{\partial}{\partial y_4}, \frac{\partial}{\partial y_3}\right) = \cos \theta_2 \\ g(JX_3, X_7) &= g\left(\cos \theta_2 \frac{\partial}{\partial y_3} + \sin \theta_2 \frac{\partial}{\partial y_4}, \frac{\partial}{\partial y_4}\right) = \sin \theta_2 \\ g(JX_4, X_8) &= g\left(-\frac{\partial}{\partial x_3} \sin \theta_2 \frac{\partial}{\partial x_3} - \cos \theta_2 \frac{\partial}{\partial x_4}\right) = -\sin \theta_2 \\ g(JX_5, X_6) &= g\left(-\frac{\partial}{\partial x_2} \sin \theta_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - \cos \theta_1 \frac{\partial}{\partial x_2}\right) = \cos \theta_1 \\ g(JX_7, X_8) &= g\left(-\frac{\partial}{\partial x_4} \sin \theta_2 \frac{\partial}{\partial x_3} - \cos \theta_2 \frac{\partial}{\partial x_4}\right) = \cos \theta_2 \end{aligned}$$

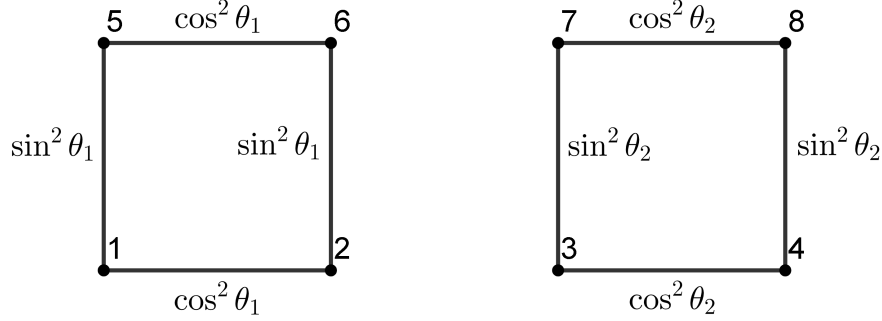


Figura 2.1: Ejemplo 2.1.2

El resto son trivialmente nulos, así que visualmente la representación nos queda la de la Figura 2.1.

Con esta visualización, rápidamente nos damos cuenta de que fijando $\mathcal{D}_1 = \text{Span}\{X_1, X_2\}$, $\mathcal{D}_2 = \text{Span}\{X_3, X_4\}$ tenemos que M es una subvariedad (θ_1, θ_2) bi-slant tal que $g(JX, Y) = 0$ para cualquier $X \in \mathcal{D}_1$ y cualquier $Y \in \mathcal{D}_2$. Es más, si $\theta_1 = \theta_2 = \theta$, entonces M es θ -slant.

Veamos que haciendo un pequeño cambio en la carta φ_1 , obtenemos un ejemplo totalmente distinto.

Ejemplo 2.1.3 Para cualquier $\alpha \in [0, \pi/2]$, elegimos $\theta \in (0, \pi/2]$ de manera que $\cos \theta = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{2}}$. Sea M la subvariedad de \mathbb{R}^8 dado por:

$$\varphi_2(u, v, w, s) = (u \cos \alpha, u \sin \alpha, w \cos \theta, w \sin \theta, v, 0, s, v).$$

Usando la referencia ortonormal:

$$\begin{aligned} X_1 &= \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x_1} + \sin \alpha \frac{\partial}{\partial x_2}, & X_5 &= \frac{\partial}{\partial y_2}, \\ X_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial y_4} \right), & X_6 &= \sin \alpha \frac{\partial}{\partial x_1} - \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x_2}, \\ X_3 &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial x_3} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial x_4}, & X_7 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial y_1} - \frac{\partial}{\partial y_4} \right), \\ X_4 &= \frac{\partial}{\partial y_3}, & X_8 &= \sin \theta \frac{\partial}{\partial x_3} - \cos \theta \frac{\partial}{\partial x_4}, \end{aligned}$$

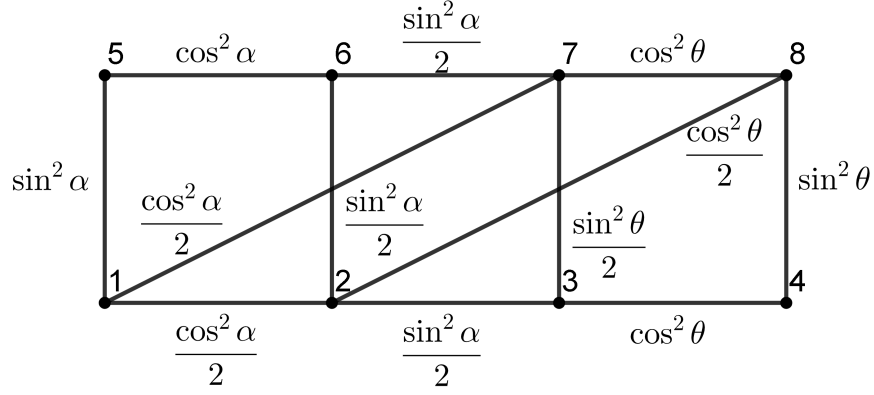


Figura 2.2: Ejemplo 2.1.3

Fijando $\mathcal{D}_1 = \text{Span}\{X_1, X_2\}$, $\mathcal{D}_2 = \text{Span}\{X_3, X_4\}$. Entonces, M es una subvariedad (θ, θ) bislant pero no es una subvariedad slant.

$$\begin{aligned}
X_1 &= \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_3} + \\
&\quad + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_4}, \\
X_2 &= \frac{\partial}{\partial y_1}, X_3 = \frac{\partial}{\partial y_3}, \\
X_4 &= -\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_3} + \\
&\quad + \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_4}, \\
X_5 &= \cos \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + \sin \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y_4}, X_6 = -\sin \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_2}, \\
X_7 &= -\sin \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_3} + \cos \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_4}, X_8 = -\sin \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + \cos \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y_4}
\end{aligned}$$

Obtenemos la siguiente representación gráfica de la Figura. (2.3)

Usando esa referencia local, obtenemos dos ejemplos:

Ejemplo 2.1.4 Fijando $\mathcal{D}_1 = \text{Span}\{X_1, X_2\}$, $\mathcal{D} = \text{Span}\{X_3, X_4\}$. Entonces, una subvariedad integral $\mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2$ es a la misma vez subvariedad (θ, θ) -bislant con $\cos^2 \theta = \cos^2 \alpha_1 \cos^2 \alpha_2$ y una subvariedad α_1 -slant de dimensión 4.

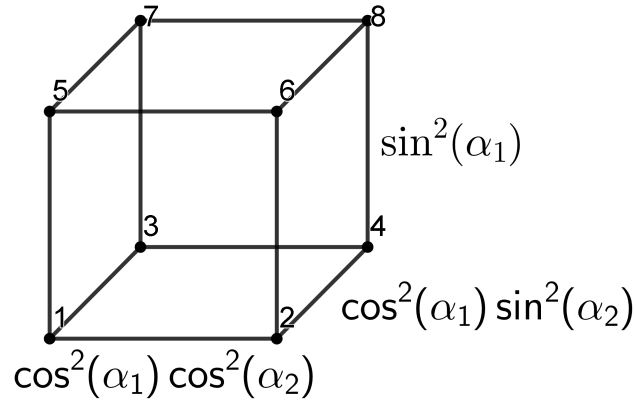


Figura 2.3: Representación Cúbica

Ejemplo 2.1.5 Fijado $\mathcal{D}_1 = \text{Span}\{X_1, X_2\}$, $\mathcal{D}_2 = \text{Span}\{X_6, X_8\}$. Si $\alpha_2 \neq \pi/4$, entonces la subvariedad integral de $\mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2$ es una subvariedad (θ_1, θ_2) -bislant con $\theta_1 \neq \theta_2$ tales que $\cos^2 \theta_1 = \cos^2 \alpha_1 \cos^2 \alpha_2$ y $\cos^2 \theta_2 = \cos^2 \alpha_1 \sin^2 \alpha_2$, pero no es una subvariedad slant.

De este método de representación se puede sacar una asociación entre grafos y subvariedades como se hizo en el artículo de la referencia [5]:

Sea M^m una variedad Riemanniana inmersa en una variedad casi-hermítica (\widetilde{M}^n, J, g) . Sea $\mathcal{B} = \{X_1, \dots, X_n\}$ una referencia local ortonormal definida en un entorno U de un punto $p \in M$. Entonces, para cualquier $q \in U$, definimos el grafo $G_{\mathcal{B},q}$ dado por los vértices $\{1, \dots, n\}$ de forma que cada arista $\{i, j\}$ existe si y solamente si $g_q(J_q X_{iq}, X_{jq}) \neq 0$, con peso $g_q^2(J_q X_{iq}, X_{jq})$.

Ahora sí podemos introducir esta idea de asociación entre subvariedades y grafos.

Definición 2.1.6 Sea M^m una subvariedad de una variedad casi-hermítica (\widetilde{M}^n, J, g) y sea G el grafo ponderado con vértices $\{1, \dots, n\}$. Se dirá entonces que M está asociado con G si para cualquier $p \in M$ existe un entorno $U(p)$ y una referencia local ortonormal $\mathcal{B} = \{X_1, \dots, X_n\}$ en U satisfaciendo las siguientes condiciones:

1. $\{X_1, \dots, X_m\}$ son tangentes a M y $\{X_{m+1}, \dots, X_n\}$ son normales a M .
2. Para cualquier $q \in U$, el grafo $G_{\mathcal{B},q}$ es isomorfo a G .

Ejemplo 2.1.7 Volviendo al Ejemplo 2.1.2, obtenemos el grafo asociado que podemos ver en la Figura 2.1, cogiendo el subgrafo con vértices $\{1, 2, 5, 6\}$, se demuestra fácilmente que las superficies complejas y totalmente real están asociadas con el mismo grafo, eliminando las aristas cuando $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$, respectivamente. Esta situación se puede llegar a generalizar a subvariedades slant con dimensión arbitraria considerando una referencia “adaptada” general. Luego, vemos que en general, una subvariedad θ -slant está asociada con el grafo que podemos ver en la Figura 2.5.

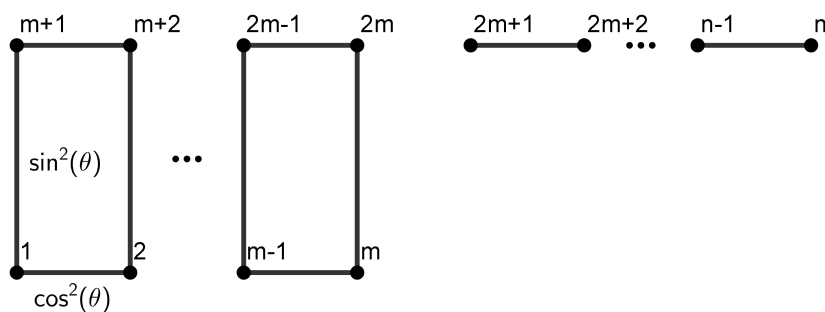


Figura 2.4: Subvariedades Slant

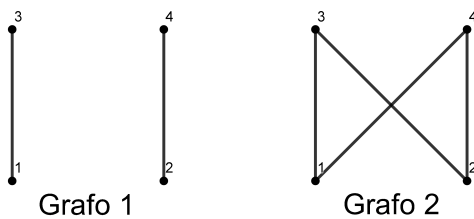


Figura 2.5: Superficie totalmente real

Nota 2.1.8 La definición anterior depende de la referencia local ortonormal

escogida. Por ejemplo, si consideramos una superficie totalmente real M^2 en una variedad casi-hermítica \widetilde{M}^4 , está asociado con el grafo 1 de la Figura 2.5. De hecho, sólo haría falta considerar la referencia local ortonormal $\{X_1, X_2, JX_3, JX_4\}$ en un entorno de cada punto. Sin embargo, podemos tomar la siguiente referencia

$$\{\sqrt{2}/2(X_1 + X_2), \sqrt{2}/2(X_1 - X_2), JX_1, JX_2\}$$

y, por tanto, M está asociada al grafo 2 de la Figura 2.5.

Aún dependiendo de la referencia local, en el artículo [5] los autores consiguieron sacar una serie de asociaciones y características de los mismos. No obstante, en la siguiente sección veremos cómo estudiarlo exigiendo una asociación más débil.

2.2. Subvariedades débilmente asociadas a grafos

Tal y como hicieron los autores en el artículo [4], en esta sección estudiaremos qué ocurre si al procedimiento de representación anterior eliminamos el paso 4, es decir, trabajaremos con grafos no ponderados (aristas sin peso) y veremos qué información podemos sacar de esta “asociación débil” con las subvariedades casi-hermíticas.

Veamos en qué concepto de grafos va estar basada esta asociación. Para una mayor profundidad en teoría de grafos se recomienda la lectura de la referencia [9].

Definición 2.2.1 Sean G y G' dos grafos ponderados. Se dice que son débilmente isomorfos si existe una aplicación entre ellos que sea una correspondencia biunívoca entre sus vértices y además preserva la adyacencia. Si además preserva los pesos de las aristas se dice que son **isomorfos**.

Ahora veamos la asociación en concreto. Esta definición será prácticamente análoga a la Definición 2.1.6.

Definición 2.2.2 Sea G un grafo ponderado con vértices $\{1, \dots, n\}$. Entonces diremos que M está *asociado* (resp., *débilmente asociado*) con G si para cualquier $P \in M$ existe un entorno $U(p)$ y una referencia local ortonormal $\mathcal{B} = \{X_1, \dots, X_n\}$ en U satisfaciendo las siguientes condiciones:

1. $\{X_1, \dots, X_n\}$ son tangentes a M y $\{X_{n+1}, \dots, X_n\}$ son normales a M .
2. Para cualquier $q \in U$, el grafo $G_{\mathcal{B},q}$ es isomorfo (resp. débilmente isomorfo) a G .

Nota 2.2.3 Tal y como pasaba en la definición anterior, la asociación depende de la referencia ortonormal elegida. Para solucionar esto encontramos una relación de equivalencia natural en la clase de grafos asociados con subvariedades como se puede ver en [5]:

Definición 2.2.4 Dos grafos G y G' se dicen equivalentes, si para cualquier subvariedad M asociada con G , M está asociada con G' y para cualquier subvariedad M' asociada a G' , M' está asociada con G .

Vayamos ahora con algunos resultados que podemos conseguir en a partir de esa asociación débil.

Teorema 2.2.5 *Dada una subvariedad M de una variedad casi-hermítica, existe un una subvariedad abierta de M la cual está débilmente asociada a un grafo.*

Demostración: Sea M^m una subvariedad de una variedad casi-hermítica (\widetilde{M}^n, J, g) y $\mathcal{B} = \{X_1, \dots, X_n\}$ una referencia local de campos ortonormal definida en un abierto U de forma que los m primeros campos son tangentes a M y los $n - m$ restantes normales a M . Llamemos $f_{ij} = g(JX_i, X_j)$, con $i < j$. Es directo demostrar que f_{ij} es una función diferenciable en U .

Recordemos que en nuestro grafo para que la arista $\{i, j\}$ exista, debemos tener que $f_{ij} \neq 0$, así que para demostrar que está bien definida en el abierto necesitamos que $f_{ij} \equiv 0$, o bien $f_{ij}(q) \neq 0$, para todo punto q del abierto.

Fijando ahora los índices $\{(i, j) | i, j = 1, \dots, n, i < j\} = \{(i_1, j_1), \dots, (i_r, j_r)\}$, donde $i_r = n - 1$ y $j_r = n$. Estos están bien elegidos puesto que, para $i = j$ tenemos que $f_{ii} = g(JX_i, X_i) = 0$ y además, si $i \neq j$ sabemos también que $f_{ij} = -f_{ji}$. Vayamos con el proceso de construcción del abierto:

Llamamos $U_0 = U$. Para cada $k = 1, \dots, r$, si $f_{i_k j_k} = 0$ en U_{k-1} , entonces fijamos $U_k = U_{k-1}$. En caso contrario, existe un punto $p \in U_{k-1}$ tal que $f_{i_k j_k}(p) \neq 0$. Aplicando propiedades de continuidad, sabemos que existe U_p entorno abierto de p de forma que $U_p \subseteq U_{k-1}$ y tal que $f_{i_k j_k}(q) \neq 0$, para cualquier $q \in U_p$. Hacemos ahora $U_k = U_p$. Repitiendo este paso llegaremos a que, o bien $f_{ij}(q) = 0$, o bien $f_{ij}(q) \neq 0$ para todo $q \in U_r$.

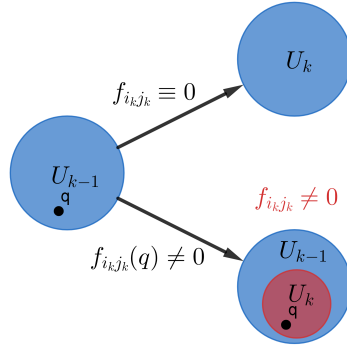


Figura 2.6: Proceso de construcción del abierto U_r .

Concluimos que, si podemos construir los grafos $\mathcal{G}_{\mathcal{B},p}$ para cualquier $p \in U_r$, todos ellos son débilmente isomorfos con los demás, finalmente llegamos a que la subvariedad abierta U_r está débilmente asociada con estos grafos. \square

Aunque este resultado es importante, puesto que nos asegura la asociación en cualquier subvariedad de manera local, en esta sección estudiaremos la asociación de forma global. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 2.2.6 Observando la Figura 2.5 del Ejemplo 2.17, nos damos cuenta de que realmente, el grafo 1 es equivalente al grafo 2 gracias al cambio de referencia que hicimos en la Nota 2.1.8.

Aunque en el artículo [5] no se consideraba una asociación débil, de aquí se pueden sacar información para encontrar asociaciones débiles, puesto que, una subvariedad está asociada a un grafo implica directamente que estará débilmente asociada a un grafo.

Vayamos ahora con algunos resultados generales:

Lema 2.2.7 *Sea M una subvariedad asociada con un grafo G . Entonces la suma de los pesos de las aristas incidentes con cada vértice de G es igual a 1.*

Demostración: Esta demostración es directa gracias a la compatibilidad de la métrica y la estructura casi compleja en una variedad casi-hermítica. \square

Lema 2.2.8 *Sea M una subvariedad asociada con un grafo G . Entonces G no tiene vértices aislados.*

Demostración: Puesto que $J^2 = -Id$ en una variedad casi-hermítica, concluimos que $JX \neq 0$ para todo vector no nulo X , así que llegamos al resultado. \square

Proposición 2.2.9 *Sea M una subvariedad asociada con un grafo G . Entonces G no tiene triángulos aislados.*

Demostración: Supongamos que G contiene un triángulo aislado con vértices k_1, k_2, k_3 . Sea A la matriz con componentes $(g(JX_i, X_j))$, donde $\{X_1, \dots, X_n\}$ es una referencia dada por la asociación entre M y G . Entonces, como $J^2 = -Id$, llegamos a que $A^2 = (a_{ij}) = -I$ donde I es la matriz identidad. En particular

$$a_{k_1 k_2} = 0 = \sum_{i=1}^n g(JX_{k_1}, X_i)g(JX_i, X_{k_2}) = g(JX_{k_1}, X_{k_3})g(JX_{k_3}, X_{k_2}).$$

Esto nos lleva a una contradicción puesto que no tendríamos al menos una arista del triángulo. \square

Proposición 2.2.10 *Sea M una subvariedad asociada con un grafo G . Si existe un v vértice de G de grado 1, entonces la componente conexa que contiene a v en G es un K_2 .*

Demostración: Sea $p \in M$, consideremos la referencia $\{X_1, \dots, X_n\}$ en un entorno de p dado por la definición de asociación entre M y G . Podemos suponer que el vértice i tiene grado 1 y es adyacente a j con $j \neq i$. Usando ahora el Lema 2.2.7 sabemos que el peso de la arista $\{i, j\}$ es 1. Por tanto, no hay más vértices adyacentes a j , como queríamos demostrar. \square

Teorema 2.2.11 *Una subvariedad está asociada con un bosque si y solamente si es una subvariedad CR. En tal caso, cada árbol es un K_2 .*

Demostración: Supongamos que una subvariedad M está asociada al bosque G . En virtud de la Proposición 2.2.10, cada componente de G tiene que ser un K_2 puesto que cada árbol tiene vértices de grado 1. Entonces podemos suponer que tenemos el grafo que podemos ver en la Figura 2.7, reordenando la referencia local ortonormal si fuese necesario, donde $d_1 + d_2 = m$. Ahora, dado $p \in M$, podemos definir $\mathcal{D}_1 = \text{Span}(X_1, \dots, X_{d_1})$ y $\mathcal{D}_2 = \text{Span}(X_{d_1+1}, \dots, X_{d_1+d_2})$ en un entorno de p . Se sigue que \mathcal{D}_1 y \mathcal{D}_2 son dos distribuciones diferenciables bien definidas en M de forma que

$TM = \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2$. Es más, \mathcal{D}_1 (resp., \mathcal{D}_2) es una distribución compleja (resp., totalmente real) y, por tanto, M es una subvariedad CR.

La implicación contraria se consigue simplemente desarrollando el método de representación. \square

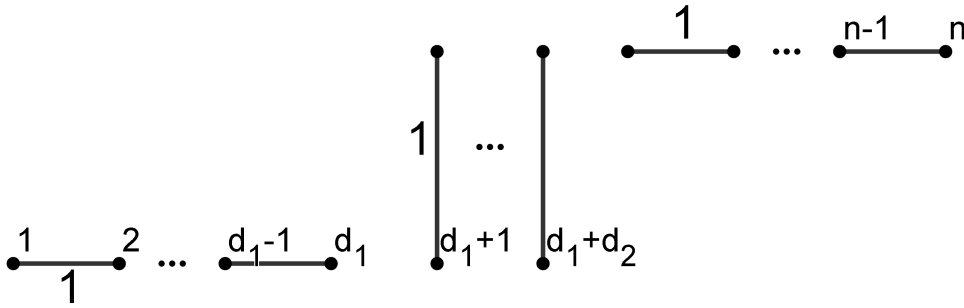


Figura 2.7: Subvariedad CR.

Teorema 2.2.12 *Sea M^2 una superficie inmersa isométricamente en una variedad casi-hermítica. Entonces, M es slant si y solamente si existe un grafo G de manera que M está asociado a G .*

Demostración: Sabemos ya que una superficie slant está asociada con un grafo. Para la implicación contraria, supongamos que una superficie M está asociada con un grafo G . Sea i, j los vértices tangentes de G . Si esos vértices no son adyacentes, entonces tenemos que es una superficie totalmente real. Ahora, supongamos que i y j son adyacentes. Si no, hay otros vértices adyacentes a i o j ; entonces el peso de $\{i, j\}$ de ser 1 y M es una subvariedad compleja. En otro caso, llamemos μ al peso de $\{i, j\}$, con $0 < \mu < 1$. En este caso, tenemos que $P^2 = -\mu Id$, así que M es una subvariedad slant con ángulo slant θ de forma que $\cos^2 \theta = \mu$. \square

Lema 2.2.13 *Sea i un vértice de G de grado 2 y llamemos j, k a los vértices adyacentes. Entonces j y k no pueden ser vértices adyacentes. Es más, si existe otro vértice l , diferente a i y k , tal que l es adyacente a j , entonces l también es adyacente a k .*

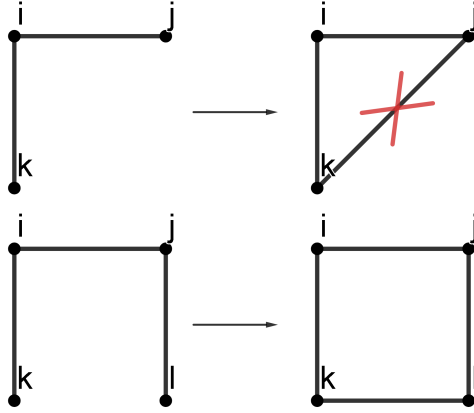


Figura 2.8: Representación del Lema 2.2.13.

Demostración: Primero, de $A^2 = (a_{rs}) = -Id$ conseguimos que, al ser $i \neq j$, sacamos:

$$a_{ij} = \sum_{h=1}^n g(JX_i, X_h)g(JX_h, X_j) = 0.$$

Ahora, si $h \neq j, k$ entonces, $g(JX_k, X_j) = 0$, es decir, los vértices j y k no son adyacentes.

Por otro lado, como $i \neq l$, análogamente tenemos que

$$a_{il} = \sum_{h=1}^n g(JX_i, X_h)g(JX_h, X_l) = 0.$$

Usando que $g(JX_i, X_h) = 0$ ($h \neq j, k$) una vez más, obtenemos:

$$g(JX_i, X_j)g(JX_j, X_l) + g(JX_i, X_k)g(JX_k, X_l) = 0.$$

Así que, si k y l no son vértices adyacentes, entonces $g(JX_k, X_l) = 0$ y por tanto, $g(JX_i, X_j)g(JX_j, X_l) = 0$, que es absurdo puesto que $g(JX_i, X_j) \neq 0$ y $g(JX_j, X_l) \neq 0$. \square

Nota 2.2.14 Este lema generaliza la Proposición 2.2.9, es decir, si existe un triángulo en un grafo débilmente asociado a una subvariedad, entonces todos sus vértices deben tener un grado mayor o igual que 3.

Lema 2.2.15 *Sea i un vértice de G de grado 3 y llamemos j, k, l a los vértices adyacentes. Se cumple que:*

1. *Si j, k son adyacentes, entonces l es adyacente a ambos.*
2. *Si existe otro vértice h , diferente a i, k, l que sea adyacente a j , entonces h también es adyacente a k o l .*

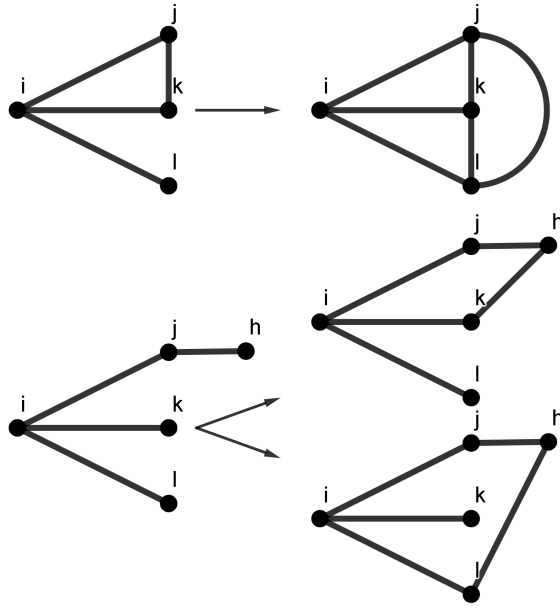


Figura 2.9: Representación del Lema 2.2.15.

Demostración: Primero, de $A^2 = (a_{rs}) = -Id$, como $i \neq j$, tenemos que

$$a_{ij} = \sum_{h=1}^n g(JX_i, X_h)g(JX_h, X_j) = 0.$$

Pero sabemos que $g(JX_i, X_k) = 0$ si $h \neq j, k, l$ y, a partir, de la igualdad anterior,

$$g(JX_i, X_k)g(JX_k, X_j) + g(JX_i, X_l)g(JX_l, X_j) = 0.$$

Como consecuencia, deducimos que los vértices j y l deberían ser adyacentes porque, en caso contrario, llegaríamos a que $g(JX_l, X_j) = 0$ y, por tanto,

$g(JX_i, X_k)g(JX_k, X_j) = 0$, lo cual es una contradicción. De forma similar conseguimos también que los vértices k y l son también adyacentes usando la siguiente igualdad

$$a_{ik} = \sum_{h=1}^n g(JX_i, X_h)g(JX_h, X_k) = 0.$$

Por otra parte, para probar la segunda parte del lema usaremos de nuevo que $A^2 = -Id$ y como $i \neq h$, llegamos a que

$$a_{ih} = \sum_{s=1}^n g(JX_i, X_s)g(JX_s, X_h) = 0.$$

A continuación, como i es de grado 3, tenemos que j, k, l son sus vértices adyacentes, de esta última igualdad vemos que

$$g(JX_i, X_j)g(JX_j, X_h) + g(JX_i, X_k)g(JX_k, X_h) + g(JX_i, X_l)g(JX_l, X_h) = 0.$$

Si suponemos que $g(JX_k, X_h) = 0$ y $g(JX_l, X_h) = 0$, entonces

$$g(JX_i, X_j)g(JX_j, X_h) = 0,$$

lo cual es una contradicción. \square

El primer punto de este lema nos viene a decir que, si tenemos un triángulo en el grafo asociado a una subvariedad y uno de sus vértices es de grado 3, entonces el triángulo está en un tetraedro.

Ahora veamos una generalización de estos dos lemas anteriores con vértices de cualquier grado.

Proposición 2.2.16 *Sea i un vértice de G de grado $t \geq 3$ y j_1, \dots, j_t sus vértices adyacentes. Si dos de esos vértices, j_r y j_s , $1 \leq r, s \leq t$, son adyacentes, entonces j_r (respectivamente j_s) es también adyacente a un vértice distinto $j_{r'}$ (respectivamente $j_{s'}$).*

Demostración: Como $i \neq j$, usando que $A^2 = (a_{kh}) = -Id$, tenemos que

$$a_{ij_r} = \sum_{h=1}^n g(JX_i, X_h)g(JX_h, X_{j_r}) = 0. \quad (2.2.1)$$

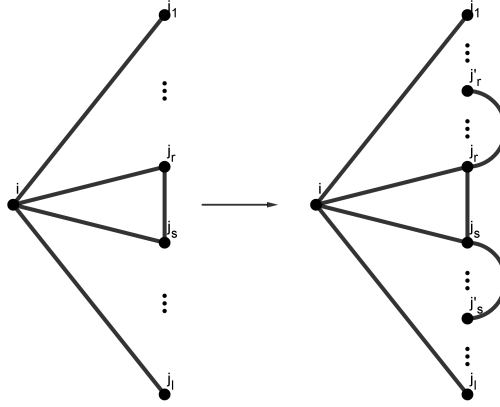


Figura 2.10: Representación de la Proposición 2.2.16.

Si suponemos que, a excepción del vértice j_s , ninguno de los vértices j_k , $1 \leq k \leq t$, es adyacente a j_r , entonces (2.2.1) se reduce a

$$g(JX_i, X_{j_s})g(JX_{j_s}, X_{j_r}) = 0,$$

lo cual es una contradicción. De forma análoga, usando el elemento a_{ij_s} , deducimos el mismo resultado para el vértice j_s .

Ahora hemos conseguido que, en las condiciones de la proposición anterior, los vértices j_r y j_s se encuentran, al menos, en dos triángulos con vértices i, j_r, j_s o bien $i, j_r, j_{r'}$, $1 \leq r' \leq t$, y $r' \neq r$, o $i, j_s, j_{s'}$, $1 \leq s' \leq t$ y $s' \neq s$, respectivamente. Si además $r' = s'$ entonces tenemos que el triángulo i, j_r, j_s se encuentra en el tetraedro determinado por los vértices $i, j_r, j_s, j_{r'}$. \square

Proposición 2.2.17 *Sea i un vértice de G con grado $t \geq 2$ y j_1, \dots, j_t sus vértices adyacentes. Si existe otro vértice h , diferente al resto, tal que este sea adyacente a cualquiera de los vértices j_r , $1 \leq r \leq t$, entonces h es adyacente, al menos, a otro de los vértices $j_k, 1 \leq k \leq t$ con $k \neq r$.*

Demostración: Como $i \neq h$, usando una vez más que $A^2 = -Id$, tenemos que

$$a_{ih} = \sum_{s=1}^n g(JX_i, X_s)g(JX_s, X_h) = 0. \tag{2.2.2}$$

Supongamos que ninguno de los vértices adyacentes a i , excepto para los vértices j_r , es adyacente a h , esto es que, $g(JX_{j_l}, X_h) = 0$, $1 \leq l \leq t, l \neq r$.

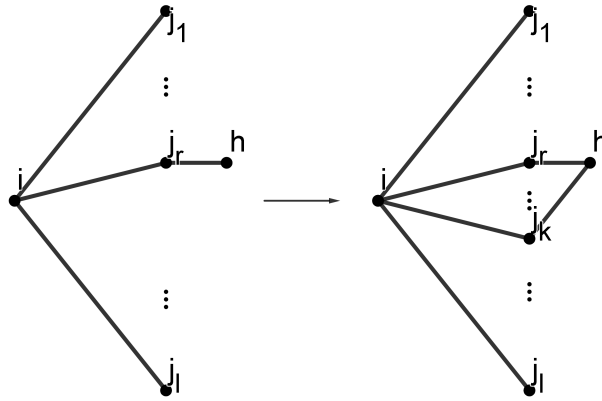


Figura 2.11: Representación de la Proposición 2.2.17

Entonces,

$$g(JX_i, X_{j_r})g(JX_{j_r}, X_h) \neq 0,$$

lo cual es una contradicción con (2.2.2). \square

A partir de estos resultados, los autores de [4] consiguieron clasificar diferentes familias relevantes de grafos dando referencias locales de cada uno en caso de dimensión 4 y 6.

Por ejemplo, llegaron a conseguir los 3 grafos que pueden asociarse con subvariedades de dimensión 4:

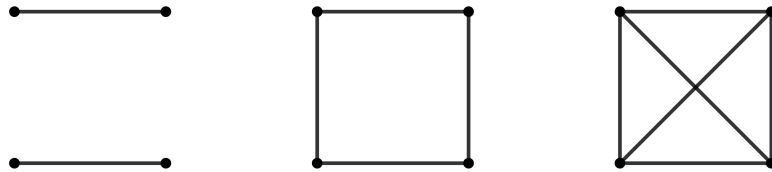


Figura 2.12: Grafos asociados a subvariedades de dimensión 4.

Capítulo 3

Nueva representación de Subvariedades

Tal y cómo hemos visto en los preliminares, comparar cómo actúa la conexión de Levi-Civita de una subvariedad M con la conexión de la variedad ambiente \widetilde{M} estará basado en la Segunda Forma Fundamental. Además, esta nos aporta una forma de caracterizar a las subvariedades según el comportamiento de la misma (subvariedades mínimas, totalmente umbilicales, totalmente geodésicas, etc.). Por ello, en este capítulo estudiaremos cómo obtener información de la Segunda Forma Fundamental mediante una representación parecida a la del capítulo anterior.

3.1. Representación Combinatoria

En esta sección daremos un nuevo procedimiento para la representación de subvariedades mediante una estructura combinatoria, además acompañaremos este procedimiento con algunos ejemplos. Sea M^m una subvariedad de una variedad ambiente \widetilde{M}^n . Los pasos son los siguientes:

1. Elegimos una referencia local de campos ortonormal $\mathcal{B} = \{X_1, \dots, X_m\}$ de manera que X_1, \dots, X_m son tangentes a M y X_{m+1}, \dots, X_n son normales a M .
2. Consideremos un vértice por cada campo de \mathcal{B} , etiquetado con su subíndice natural.
3. Para $i, j \in \{1, \dots, m\}$ con $i \leq j$ y $k \in \{m+1, \dots, n\}$ tenemos que:

- a) Si $i = j$, diremos que la arista $\{i, k\}$ existe si y solamente si $g(h(X_i, X_i), X_k) \neq 0$.
- b) Si $i \neq j$, diremos que el triángulo $\{i, j, k\}$ existe si y solamente si $g(h(X_i, X_j), X_k) \neq 0$.
4. A cada arista $\{i, k\}$ le asignamos el peso $g(h(X_i, X_i), X_k)$ y a cada triángulo $\{i, j, k\}$ le asignamos el peso $g(h(X_i, X_j), X_k)$.
5. Finalmente, para obtener información visual adicional, pondremos los vértices correspondientes a los campos tangentes en una línea inferior imaginaria y a los normales en una línea superior.

Nota 3.1.1 La representación está bien definida.

Sólo haría falta comprobar que cada triángulo $\{i, j, k\}$ es igual que el $\{j, i, k\}$. Gracias a que la segunda forma fundamental es simétrica, tenemos que $h(X_i, X_j) = h(X_j, X_i)$, para todos X_i, X_j tangentes, luego

$$g(h(X_i, X_j), X_k) = g(h(X_j, X_i), X_k),$$

con X_k un vector normal a la subvariedad.

Nota 3.1.2 Tal y como demostramos en (1.2.1), conociendo los coeficientes h_{ij}^k (que van a ser los pesos en la representación) tenemos definida completamente la segunda forma fundamental.

A partir de ahora, por ahorro en la notación trabajaremos con los coeficientes h_{ij}^k tal y como están definidos en (1.2.1). Además en muchas de la representaciones usaremos el mismo color para las estructuras con mismo peso (aristas o triángulos).

Veamos algunos ejemplos visuales:

Ejemplo 3.1.3 Sea M^2 una subvariedad totalmente umbilical de \widetilde{M}^4 con curvatura media no nula H , tomemos un sistema de referencia de campos ortonormal $\mathcal{B} = \{X_1, X_2, \frac{H}{|H|} = X_3, X_4\}$ de forma que X_1 y X_2 son tangentes a la variedad, H el vector curvatura media y X_4 ortonormal al resto. Como la subvariedad es totalmente umbilical, la segunda forma fundamental nos resulta:

$$\begin{aligned} h(X_1, X_1) &= g(X_1, X_1)H = H = |H|X_3, \\ h(X_2, X_2) &= g(X_2, X_2)H = H = |H|X_3, \\ h(X_1, X_2) &= g(X_1, X_2)H = 0, \end{aligned}$$

así que tenemos la siguiente representación que podemos ver en la Figura 3.1. Pero claro, esta representación depende del sistema de referencia elegido,

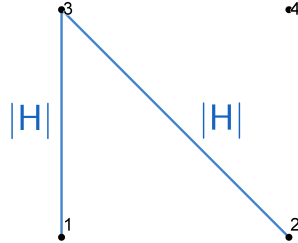


Figura 3.1: Ejemplo 3.1.3

puesto que si ahora consideramos la referencia local ortonormal $\mathcal{B}' = \{Y_1 = X_1, Y_2 = X_2, Y_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(X_3 + X_4), Y_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}(X_3 - X_4)\}$, la segunda forma fundamental nos queda:

$$\begin{aligned}
 h(Y_1, Y_1) &= g(Y_1, Y_1)H = H = \frac{\sqrt{2}}{2}|H|Y_3 + \frac{\sqrt{2}}{2}|H|Y_4, \\
 h(Y_2, Y_2) &= g(Y_2, Y_2)H = H = \frac{\sqrt{2}}{2}|H|Y_3 + \frac{\sqrt{2}}{2}|H|Y_4, \\
 h(Y_1, Y_2) &= g(Y_1, Y_2)H = 0,
 \end{aligned}$$

así que su representación resulta:

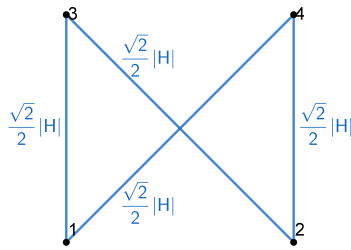


Figura 3.2: Ejemplo 3.1.3 con el cambio de referencia

Nota 3.1.4 La representación depende del sistema de referencia local elegido.

Ejemplo 3.1.5 Veamos qué ocurre si empezamos por la visualización. Sea M^2 una superficie de \widetilde{M}^4 con sistema de referencia local de campos ortonormal $\mathcal{B} = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ cuya representación es la que podemos observar en la Figura 3.3.

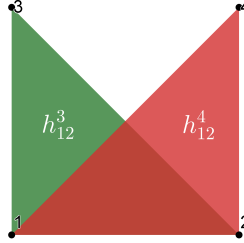


Figura 3.3: Ejemplo 3.1.5

Simplemente con la representación ya podemos afirmar que se trata de una subvariedad mínima puesto que

$$h(X_i, X_i) = h_{ii}^3 X_3 + h_{ii}^4 X_4, \quad \text{para } i = 1, 2,$$

los cuales sabemos que se anulan puesto que las aristas no están en la representación, luego el vector curvatura media resulta:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 h(X_i, X_i) = 0$$

y, por tanto, M es mínima.

3.2. Resultados generales

En esta sección demostraremos algunos resultados y características que podemos conseguir con la representación de distintos tipos de subvariedades de forma más general.

3.2.1. Subvariedades Totalmente Umbilicales

En esta subsección veremos que resulta muy sencillo identificar subvariedades totalmente umbilicales a partir de esta representación.

Proposición 3.2.1 *Toda subvariedad totalmente umbilical no posee triángulos en su representación, independientemente de la referencia ortonormal elegida.*

Demostración: Sea M^m una subvariedad totalmente umbilical de \widetilde{M}^n , sea una referencia local ortonormal $\mathcal{B} = \{X_1, \dots, X_n\}$ con los primeros m campos tangentes. Al ser totalmente umbilical tenemos que

$$h(X, Y) = g(X, Y)H, \quad \text{para todos } X, Y \text{ tangentes a } M,$$

en particular, $h(X_i, X_j) = g(X_i, X_j)H = \delta_{ij}H$ para todo $i, j \in \{1, \dots, m\}$, luego no tenemos triángulos en la representación puesto que $h(X_i, X_j) = 0$ para todo $i \neq j$. \square

Nota 3.2.2 El recíproco de la proposición anterior no es cierto en general. Un ejemplo podría ser una superficie M^2 en \widetilde{M}^4 de la siguiente forma:

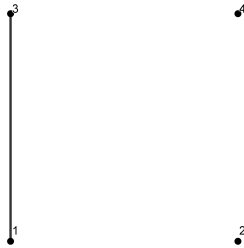


Figura 3.4: Superficie sin triángulos en su representación.

Sea $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ una referencia ortonormal de la superficie en la que los dos primeros campos son tangentes a M y los otros dos normales. Sea la segunda forma fundamental de la superficie:

$$h(e_1, e_1) = ae_3, \quad h(e_1, e_2) = 0 = h(e_2, e_2).$$

Viendo la representación de la superficie de la Figura 3.4, se observa directamente que no posee triángulos en su representación. No obstante, calculando la curvatura media llegamos a que $H = \frac{1}{2}(ae_3)$, por tanto $h(e_2, e_2) = 0 \neq \frac{1}{2}ae_3 = g(e_2, e_2)H = H$, así que la superficie no es totalmente umbilical.

Veamos que realmente podemos conseguir una relación aún más fuerte que la anterior con este tipo de subvariedades.

Teorema 3.2.3 *Una subvariedad es totalmente umbilical si y solamente si existe una referencia local ortonormal cuya representación respecto a esa referencia es:*

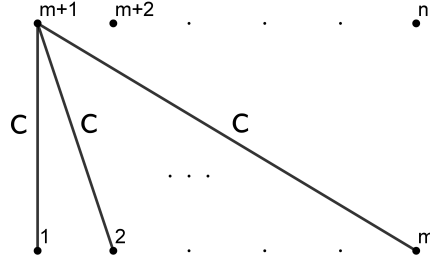


Figura 3.5: Subvariedad totalmente umbilical con curvatura media H .

Demostración: Para el caso en que la subvariedad sea mínima el resultado es trivial, puesto que la representación sería sólo con los vértices (caso $H = 0$). Supongamos a partir de ahora que $H \neq 0$.

Sea M una subvariedad totalmente umbilical de \widetilde{M} , entonces sabemos que existe una referencia local de campos ortonormal $\mathcal{B} = \{X_1, \dots, X_m, X_{m+1} = \frac{H}{|H|}, \dots, X_n\}$ de forma que X_1, \dots, X_m son tangentes a la subvariedad y el resto normales a la misma. Respecto a esta base, la segunda forma fundamental resulta:

$$h(X_i, X_j) = g(X_i, X_j)H = \delta_{ij}H = \delta_{ij}|H|X_{m+1}, \text{ para todos } i, j = 1, \dots, m.$$

Por tanto, existe una referencia local de campos ortonormal cuya representación es la que queríamos demostrar.

Recíprocamente, sea M una subvariedad de \widetilde{M} la cual posee una referencia local de campos ortonormal en la que la representación es como en la figura (3.6), es decir, $h_{ii}^{m+1} = C$, para todo $i \in \{1, \dots, m\}$ y $h_{ij}^k = 0$ en caso contrario, o sea, $h_{ij}^{m+1} = \delta_{ij}C$. En consecuencia la curvatura media resulta

$$H = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m h(X_i, X_i) = \frac{m}{m}CX_{m+1} = CX_{m+1},$$

así que llegamos a que $|H| = C$. Ahora veamos que, efectivamente, la subvariedad es totalmente umbilical:

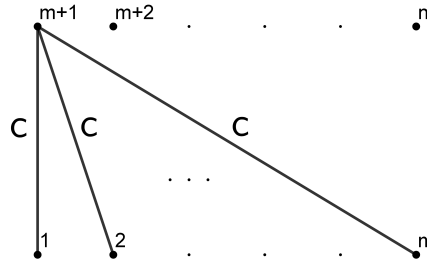


Figura 3.6: Subvariedad con C constante positiva

- Si $i \neq j$, tenemos que

$$h(X_i, X_j) = 0 = g(X_i, X_j)H.$$

- Si $i = j$, tenemos que

$$h(X_i, X_i) = h_{ii}^{m+1} X_{m+1} = C X_{m+1} = H = 1 \cdot H = g(X_i, X_i)H.$$

Así que efectivamente, la subvariedad es totalmente umbilical. \square

3.2.2. Subvariedades Lagrangianas

En esta subsección trabajaremos qué propiedades podemos conseguir de este tipo de subvariedades para la representación.

Definición 3.2.4 Llamaremos **representación lagrangiana** de una subvariedad lagrangiana M^m a la representación de M^m con la referencia de campos lagrangiana adaptada que vimos en la Definición 1.3.2.

Lema 3.2.5 *Toda representación lagrangiana cumple que*

$$h_{ij}^{k'} = h_{ik}^{j'} = h_{jk}^{i'}$$

para $i, j, k \in \{1, \dots, m\}$ y con $i \leq j$.

Demostración: Sea $h_{ij}^{k'}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
 h_{ij}^{k'} &= g(h(X_i, X_j), X_{k'}) = \\
 &= g(\tilde{\nabla}_{X_i} X_j, JX_k) = \\
 &= -g(J\tilde{\nabla}_{X_i} X_j, X_k) = \\
 &= -g(\tilde{\nabla}_{X_i} JX_j, X_k) = \\
 &= g(JX_j, \tilde{\nabla}_{X_i} X_k) = \\
 &= h_{ik}^{j'},
 \end{aligned}$$

gracias a que estamos en una variedad de Kaehler y aplicando la antisimetría del operador casi complejo J .

Usando ahora que la segunda forma fundamental es simétrica tenemos que

$$h_{ij}^{k'} = h_{ik}^{j'} = h_{ki}^{j'} = h_{kj}^{i'} = h_{jk}^{i'}$$

como queríamos demostrar. \square

Corolario 3.2.6 *Si en la representación lagrangiana no hay triángulos, entonces sólo posee aristas paralelas.*

Demostración: Supongamos que la representación no tiene triángulos, es decir, $h_{ij}^{k'} = 0$, para todo i distinto de j . Aplicando el Lema anterior tenemos que $0 = h_{ik}^{i'} = h_{ii}^{k'}$, así que las únicas aristas que pueden ser no nulas son las de la forma $h_{ii}^{i'}$, las cuales en la representación son aristas paralelas. \square

Es conocido el resultado de que una subvariedad lagrangiana y totalmente umbilical es totalmente geodésica. Veamos a continuación una nueva versión de la demostración mediante este método de representación:

Teorema 3.2.7 *Sea M^m una subvariedad lagrangiana y totalmente umbilical, entonces es una subvariedad totalmente geodésica.*

Demostración: Sea una la referencia de campos lagrangiana adaptada $\mathcal{B} = \{X_1, \dots, X_m, X_{1'} = JX_1, \dots, X_{m'} = JX_m\}$ y supongamos que M no es totalmente geodésica, es decir, existen X_i, X_j tangentes a M tales que $h(X_i, X_j)$ es no nulo. Por tanto, existe al menos un $k \in \{1, \dots, m\}$ de forma que $h_{ij}^{k'}$ es distinto de cero. Gracias al Lema 3.2.1, sabemos que la subvariedad no tiene triángulos en su representación y aplicando ahora el Corolario 3.2.6 llegamos a que sólo hay rectas paralelas.

Entonces el vector curvatura media queda de la forma:

$$H = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m h(X_i, X_i) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m h_{ii}' X_{i'}.$$

Aplicando ahora que la subvariedad es totalmente umbilical, sabemos que $h(e_i, e_i) = g(e_i e_i)H$, luego

$$h(e_1, e_1) = h_{11}' e_{1'} = g(e_1, e_1)H = H,$$

igualando coordenada a coordenada sacamos que $h_{ii}' = 0$, para cualquier i distinto de 1. Pero claro, análogamente tenemos que

$$h(e_2, e_2) = h_{22}' e_{2'} = g(e_2, e_2)H = H.$$

Por tanto, $h_{11}' = 0$, concluimos que la subvariedad es totalmente geodésica. \square

3.2.3. Subvariedades Mínimas

En esta sección estudiaremos algunas propiedades que pueden tener las subvariedades mínimas con el sistema de representación.

Proposición 3.2.8 *Una subvariedad M es mínima si y solamente si toda representación cumple que los pesos de las aristas incidentes a cada vértice de los campos normales a la subvariedad suman 0.*

Demostración: Por definición, una subvariedad es mínima si y solamente si el vector curvatura media es idénticamente nulo, es decir,

$$0 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m h(X_i, X_i) = \frac{1}{m} \sum_{k=m+1}^{m+n} \left(\sum_{i=1}^m h_{ii}^k \right) X_k.$$

Por tanto, $\sum_{i=1}^m h_{ii}^k = 0$ para todo k . Esto quiere decir que en cualquier referencia local de campos ortonormal, nuestra representación cumple que para cada vértice k la suma de los pesos de sus aristas incidentes es nula. \square

Corolario 3.2.9 *Si la representación sólo tiene triángulos, la subvariedad es mínima.*

donde e_i, e_j son campos tangentes de la base ortonormal, concluimos entonces que $A_{ae_{m+1}} = aA_{e_{m+1}}$, luego sus autovalores son $a\mu_1, -a\mu_1, \dots, -a\mu_{m_1}$. Por tanto, cualquier campo normal a la subvariedad cumple la condición de austeridad. \square

3.3. Dimensiones Inferiores

En esta sección daremos algunos resultados de la representación al trabajar en superficies y curvas.

3.3.1. Superficies en \widetilde{M}^4

En esta subsección representaremos algunas de las superficies más características en la teoría de subvariedades.

Comencemos con las superficies lagrangianas. Usando la referencia de campos lagrangiana adaptada, tenemos que gracias al Lema 3.2.5:

$$h_{12}^{1'} = h_{11}^{2'}, \quad h_{12}^{2'} = h_{22}^{1'}$$

y, por tanto, su representación es como podemos ver en la Figura 3.8.

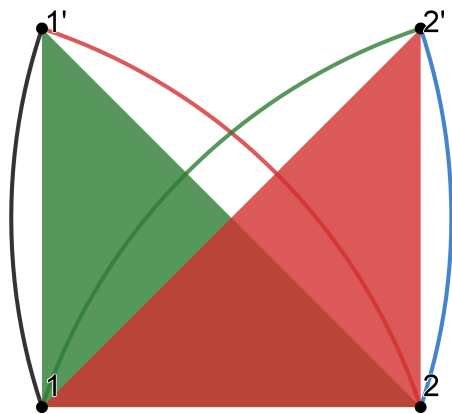


Figura 3.8: Superficies lagrangianas.

Si pensamos ahora en superficies mínimas, para una referencia local de campos ortonormal $\mathcal{B} = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ con X_1, X_2 tangentes a la superficie

y X_3, X_4 normales, sabemos que deben cumplir que $0 = H = \frac{1}{2}(h(X_1, X_1) + h(X_2, X_2))$. Desglosando esta suma tenemos que:

$$\begin{aligned} 0 &= h(X_1, X_1) + h(X_2, X_2) = \\ &= h_{11}^3 X_3 + h_{11}^4 X_4 + h_{22}^3 X_3 + h_{22}^4 X_4 = \\ &= (h_{11}^3 + h_{22}^3) X_3 + (h_{11}^4 + h_{22}^4) X_4. \end{aligned}$$

En consecuencia, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} h_{11}^3 + h_{22}^3 = 0 \\ h_{11}^4 + h_{22}^4 = 0 \end{cases}$$

Concluimos que $h_{11}^3 = -h_{22}^3$ y $h_{11}^4 = -h_{22}^4$ y, por tanto, su representación es la que podemos ver en la Figura 3.9.

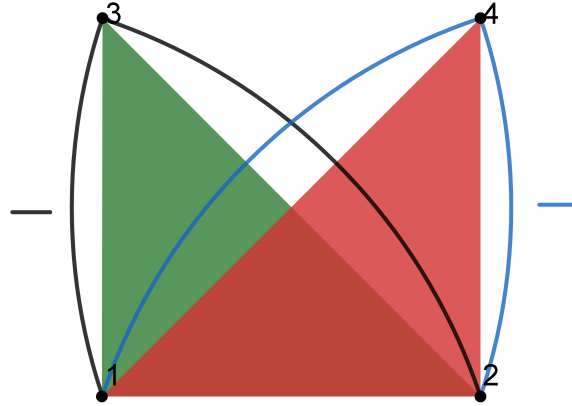


Figura 3.9: Superficies mínimas.

Así que, en la representación de una superficie Lagrangiana especial (Lagrangiana y mínima), combinando los resultados anteriores llegamos a que

$$\begin{aligned} -h_{11}^{1'} &= h_{22}^{1'} = h_{12}^{2'}, \\ -h_{22}^{2'} &= h_{11}^{2'} = h_{12}^{1'}, \end{aligned}$$

que tendrá la representación que podemos ver en la Figura 3.10.

Veamos ahora las superficies lagrangianas H-umbilicales. Particularizando las ecuaciones (1.3.3) para esta dimensión tenemos,

$$\begin{aligned} h_{11}^{1'} &= \lambda, & h_{11}^{2'} &= 0, \\ h_{12}^{1'} &= 0, & h_{12}^{2'} &= \mu, \\ h_{2,2}^{1'} &= \mu, & h_{2,2}^{2'} &= 0, \end{aligned}$$

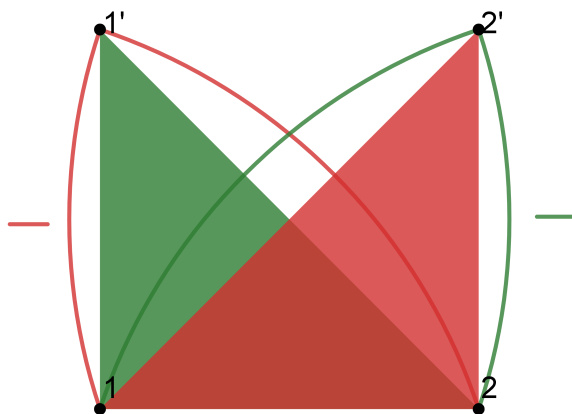


Figura 3.10: Superficies Lagrangianas especiales.

luego la representación resulta lo que podemos observar en la Figura 3.11.

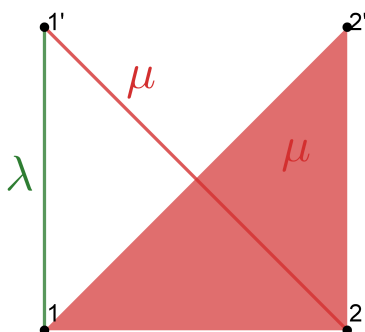


Figura 3.11: Superficies lagrangianas H-umbilicales.

A continuación veamos lo sencillas que salen las representaciones de las superficies totalmente umbilicales.

Gracias al Teorema 3.2.3 sabemos que existe una referencia local de campos ortonormales de forma que la representación sea la mostrada en la Figura 3.12.

Sigamos con una superficie slant cuyos operadores forma cumplen una condición que ya vimos en el Capítulo 1: Las superficies slant especiales.

Tomando $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_3\}$ una referencia ortonormal que cumpla la condición (1.3.5), obtenemos la representación de la Figura 3.13.

Veamos ahora un ejemplo clásico de subvariedad austera (que podemos

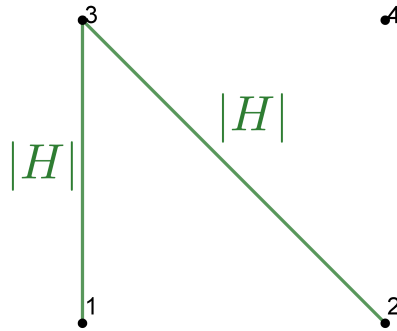


Figura 3.12: Superficies totalmente umbilicales.

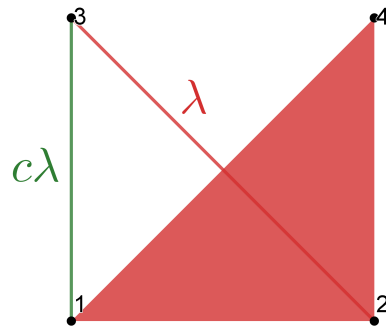


Figura 3.13: Superficies slant especiales.

ver en el artículo [16]).

Ejemplo 3.3.1 El toro de Clifford es una subvariedad austera. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dado por

$$f(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \theta, \sin \theta, \cos \phi, \sin \phi), \quad (\theta, \phi) \in \mathbb{R}^2.$$

La aplicación f es una inmersión de \mathbb{R}^2 en la esfera unidad $S^3(1) \subset \mathbb{R}^4$, donde la imagen $f(\mathbb{R}^2)$ es el “toro plano”. Los vectores

$$\begin{aligned} e_1 &= (-\sin \theta, \cos \theta, 0, 0) \\ e_2 &= (0, 0, -\sin \phi, \cos \phi) \end{aligned}$$

forman una base ortonormal del espacio tangente $T_{f(\theta, \phi)} \text{Im} f$ y los vectores

normales

$$e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \theta, \sin \theta, \cos \varphi, \sin \varphi)$$

$$e_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos \theta, -\sin \theta, \cos \varphi, \sin \varphi)$$

forman una base ortonormal del espacio normal. Los operadores forma vendrán dados por las matrices A_{e_3} y A_{e_4} que con respecto a la base $\{e_1, e_2\}$ resultan

$$A_{e_3} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad A_{e_4} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Como podemos observar, $T_{f(\theta, \varphi)} \text{Im}f \oplus \mathbb{R}_{e_4} = T_{f(\theta, \varphi)} S^3(1)$ y $T_{f(\theta, \varphi)} S^3(1) \oplus \mathbb{R}_{e_3} = T_{f(\theta, \varphi)} E^4$. Los autovalores son $\frac{1}{\sqrt{2}}$ y $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ y, por tanto, el toro de Clifford es una subvariedad austera de la esfera unidad $S^3(1)$.

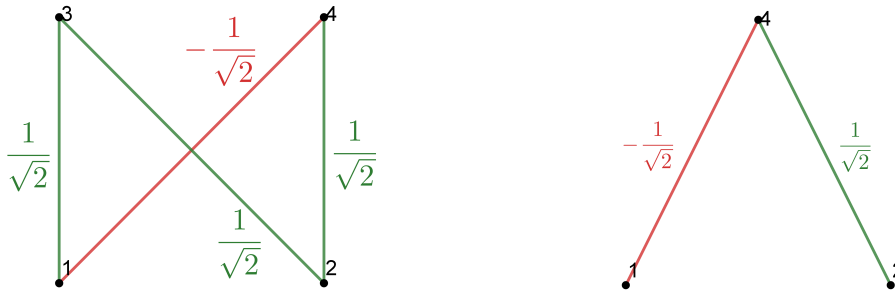
Veamos su representación según esta base,

$$h(e_1, e_1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}e_3 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_4,$$

$$h(e_2, e_2) = -\frac{1}{\sqrt{2}}e_3 - \frac{1}{\sqrt{2}}e_4,$$

$$h(e_1, e_2) = 0.$$

Así que la representación resulta la que podemos ver en la Figura 3.14.



(a) Representación del toro de Clifford como subvariedad de \mathbb{R}^4 .

(b) Representación del toro de Clifford como subvariedad de $S^3(1)$.

Figura 3.14: Representaciones del toro de Clifford.

Observamos entonces que la Figura 3.14b cumple las condiciones del Teorema 3.2.11 y, por tanto, es austera como habíamos confirmado ya.

3.3.2. Curvas en \mathbb{R}^3

En esta subsección trabajaremos el comportamiento de la representación de las curvas en \mathbb{R}^3 ayudándonos del triedro de Frenet [14].

A partir de ahora, nuestra referencia para cada curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ será $\{e_1, e_2, e_3\} = \{\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{n}_\alpha, \mathbf{b}_\alpha\}$, donde \mathbf{t}_α es el campo tangente a la curva, \mathbf{n}_α el normal y \mathbf{b}_α el binormal. Estos cumplen las Ecuaciones de Frenet,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{t}}_\alpha = & \kappa_\alpha \mathbf{n}_\alpha \\ \dot{\mathbf{n}}_\alpha = -\kappa_\alpha \mathbf{t}_\alpha & +\tau_\alpha \mathbf{b}_\alpha \\ \dot{\mathbf{b}}_\alpha = & +\tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha \end{cases}$$

Sabiendo que $\tilde{\nabla}_{\mathbf{t}_\alpha} \mathbf{t}_\alpha = \dot{\mathbf{t}}_\alpha = \kappa_\alpha \mathbf{n}_\alpha$, aplicamos ahora la fórmula de Gauss:

$$h(\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{t}_\alpha) = \tilde{\nabla}_{\mathbf{t}_\alpha} \mathbf{t}_\alpha = \kappa_\alpha \mathbf{n}_\alpha.$$

Concluimos pues que la representación de las curvas en \mathbb{R}^3 son de la forma de la Figura 3.15

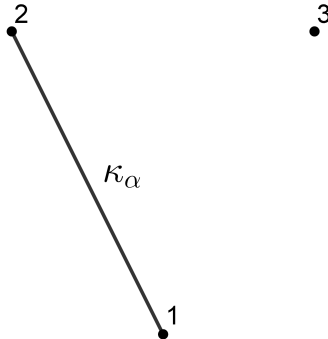


Figura 3.15: Curva en \mathbb{R}^3

3.4. Un nuevo tipo de subvariedad

Una cuestión surge de modo natural, qué relación puede haber entre la representación del Capítulo 2 (que llamaremos rep. 1) y la del Capítulo 3 (que llamaremos rep. 2). En esta sección clasificaremos un nuevo tipo subvariedad relacionando la segunda forma fundamental h y el operador casi-complejo J .

A continuación, estudiaremos que propiedades podemos conseguir a partir de esta relación.

Un ejemplo que podemos observar donde están perfectamente definidas ambas representaciones son las superficies Lagrangianas:

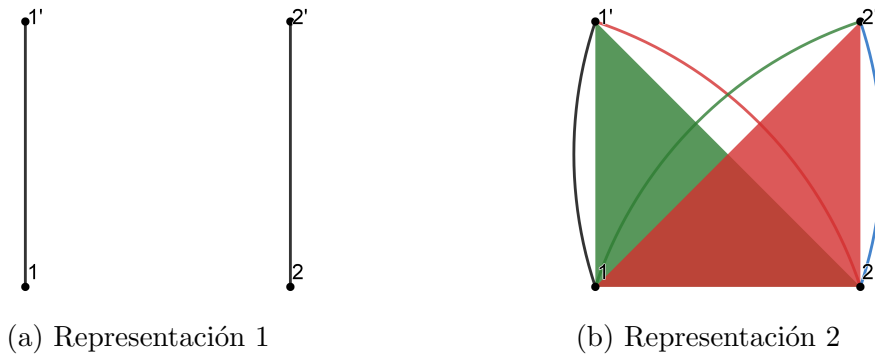


Figura 3.16: Representaciones de una superficie Lagrangiana.

Esto nos da un ejemplo directo de que, para una representación 1 de una subvariedad, puede haber varias representaciones del tipo 2, incluso tomando la misma referencia local, por ejemplo las subvariedades Lagrangianas especiales nos quedan:

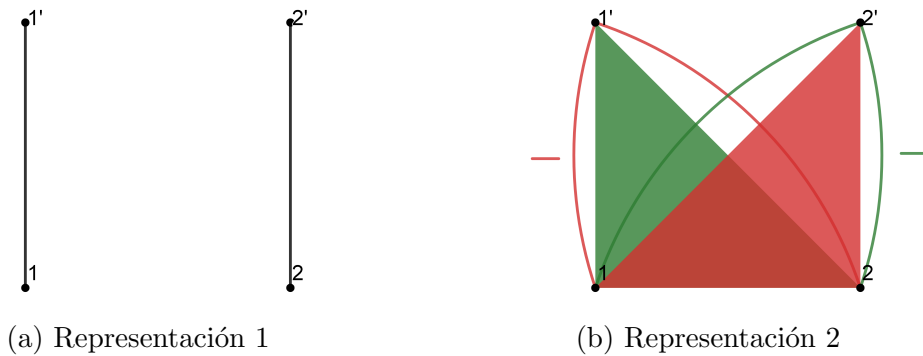


Figura 3.17: Representaciones de una superficie Lagrangiana especial.

Esto es análogo en caso contrario, por ejemplo, si pensamos en una subvariedad totalmente geodésica, cuya representación 2 es la trivial, según el operador casi-complejo J tendremos distintas representaciones del tipo 1.

Definamos, pues, un nuevo tipo de subvariedad que nos consiga enlazar

de alguna forma la Segunda Forma Fundamental y el operador casi-complejo J .

Nota 3.4.1 Para esta sección fijaremos M^m una subvariedad de una variedad casi-hermítica (\widetilde{M}^n, g, J) y elegiremos una referencia local de campos ortonormal $\mathcal{B} = \{X_1, \dots, X_n\}$ de manera que X_1, \dots, X_m son tangentes a M y X_{m+1}, \dots, X_n son normales a M .

Definición 3.4.2 Sea M una subvariedad de una variedad casi-hermítica \widetilde{M} , diremos que es **totalmente casi-compleja** si cumple que

$$g(JX, Y)^2 = g(h(X, Y), h(X, Y)), \quad \text{para cualesquiera } X, Y \in TM.$$

Observación 3.4.3 Las subvariedades totalmente casi-complejas están bien definidas. Gracias a la simetría de la segunda forma fundamental tenemos que $g(h(X, Y), h(X, Y)) = g(h(Y, X), h(Y, X))$, pero claro, el operador J también cumplía que $g(JX, Y) = -g(X, JY)$ y, por tanto, $g(JX, Y)^2 = g(X, JY)^2$. Concluimos entonces que la antisimetría del operador J y la simetría de h se siguen manteniendo.

Lema 3.4.4 *Sea M una subvariedad totalmente casi-compleja. Entonces se tiene que $g(JX, Y) = 0$ si sólo si $h(X, Y) = 0$ para todos campos tangentes $X, Y \in TM$.*

Demostración: Sean los campos $X, Y \in TM$ tales que $g(JX, Y) = 0$. Entonces, como es totalmente casi-compleja tenemos que

$$0 = g(JX, Y)^2 = g(h(X, Y), h(X, Y)) = |h(X, Y)|^2 = 0,$$

y concluimos que $h(X, Y) = 0$.

Supongamos ahora que $h(X, Y) = 0$. Entonces

$$0 = g(0, 0) = g(h(X, Y), h(X, Y)) = g(JX, Y)^2,$$

y, por tanto, $g(JX, Y) = 0$. \square

Proposición 3.4.5 *Toda subvariedad totalmente casi-compleja es una subvariedad mínima.*

Demostración: Sabemos que $g(X, JX) = 0$ para cualquier campo X de la variedad ambiente, en particular tenemos que $g(e_i, Je_i) = 0$, para todo $i \in \{1, \dots, m\}$. Aplicando el Lema 3.4.4 tenemos que $h(e_i, e_i) = 0$, para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, así que la curvatura media resulta:

$$H = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m h(e_i, e_i) = 0.$$

Concluimos entonces que M es una subvariedad mínima. \square

Corolario 3.4.6 *Sea M una subvariedad casi-compleja. Entonces, M es totalmente umbilical si y solo si es totalmente geodésica.*

Demostración: Sabemos que una subvariedad mínima es totalmente umbilical si y solo si es totalmente geodésica. Gracias a la proposición anterior tenemos que M es una subvariedad mínima, por tanto conseguimos el resultado. \square

Proposición 3.4.7 *Sea M una subvariedad totalmente casi-compleja, entonces M es una subvariedad totalmente real si y solamente si es totalmente geodésica.*

Demostración: Supongamos que M es totalmente real, es decir, JX es normal a M para todo campo tangente $X \in TM$; en particular $Je_i \in TM^\perp$, así que $g(Je_i, e_j) = 0$, para todo $i, j \in \{1, \dots, m\}$. Aplicando el Lema 3.4.4 sabemos que $h(e_i, e_j) = 0$ para todo $i, j \in \{1, \dots, m\}$, es decir, la segunda forma fundamental es idénticamente nula, concluimos entonces que M es totalmente geodésica.

Supongamos ahora que M es totalmente geodésica, es decir $h(X, Y) = 0$ para cualesquiera X, Y campos tangentes. Aplicando el Lema 3.4.4 llegamos a que $g(JX, Y) = 0$ para todos X, Y tangentes, dicho de otra forma, para cada campo X tangente, tenemos que JX es normal a cualquier campo tangente Y , es decir, M es una subvariedad totalmente real. \square

Corolario 3.4.8 *Sea M una subvariedad totalmente casi-compleja. Se cumple que si M es una subvariedad Lagrangiana entonces es totalmente geodésica.*

Demostración: Las subvariedades Lagrangianas son un caso especial de subvariedades totalmente reales, por tanto, aplicando la Proposición 3.4.7 llegamos a que es totalmente geodésica. \square

Proposición 3.4.9 *Sea M^2 una superficie totalmente casi compleja inmersa en \widetilde{M}^4 . Entonces M es θ -Slant si y solamente si existe una base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, de forma que $|h(e_1, e_2)| = c \in [0, 1]$. En tal caso, $c^2 = \cos^2 \theta$, donde θ es el ángulo slant.*

Demostración: Supongamos que M es θ -slant. Sabemos que podemos elegir la siguiente referencia local,

$$\{e_1, e_2 = \sec\theta Te_1, e_3 = \operatorname{cosec}\theta Fe_1, e_4 = \operatorname{cosec}\theta Fe_2\},$$

así que tenemos que $g(Je_1, e_2)^2 = \cos^2 \theta$. Como M es totalmente casi compleja, llegamos a que

$$\cos^2 \theta = g(Je_1, e_2)^2 = g(h(e_1, e_2), h(e_1, e_2)) = |h(e_1, e_2)|^2.$$

Supongamos ahora que tenemos una referencia local $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_2, e_4\}$ de forma que $|h(e_1, e_2)| = c \in [0, 1]$. Sabemos gracias a la referencia [6] que una subvariedad es slant si y solo si $T^2X = -\cos^2 \theta X$ para todo campo tangente $X \in TM$. Vamos a probar que, efectivamente, se cumple esta igualdad en nuestro caso.

Como M es una subvariedad totalmente casi-compleja, tenemos entonces que $g(Je_1, e_2)^2 = |h(e_1, e_2)|^2 = c^2$. Centrémonos en el operador T

$$\begin{aligned} g(Te_1, e_1) &= 0, & g(Te_1, e_2) &= \pm c, \\ g(Te_2, e_1) &= \mp c, & g(Te_2, e_2) &= 0, \end{aligned}$$

así que

$$T^2e_1 = \pm cTe_2 = -c^2e_1, \quad T^2e_2 = \mp cTe_1 = -c^2e_2.$$

Generalizando ahora para cualquier campo $X \in TM$, que escribiremos de la forma $X = x_1e_1 + x_2e_2$, tenemos que

$$T^2X = T^2(x_1e_1) + T^2(x_2e_2) = -c^2x_1e_1 - c^2x_2e_2 = -c^2X$$

y, por tanto, como $c \in [0, 1]$, tenemos que $c^2 \in [0, 1]$, así que es una subvariedad θ -slant de forma que $\cos^2 \theta = c^2$, como queríamos demostrar. \square

Nota 3.4.10 La condición que deben cumplir las subvariedades totalmente casi-complejas puede ser demasiado restrictiva. Se plantea una variante en la que se debilita la condición, si para alguna referencia local ortonormal $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$, de M se cumple que

$$g(Je_i, e_j) = g(h(e_i, e_j), h(e_i, e_j)), \quad \text{para cualesquiera } i, j \in \{1, \dots, m\}, i \neq j.$$

De esta condición perderíamos la minimalidad, pero resulta más sencillo encontrar subvariedades más específicas que cumplan la condición, por ejemplo las superficies slant especiales.

Tomando $\lambda = \pm \cos \theta$ en la condición (1.3.5), llegamos que se cumple que $g(Je_1, e_2)^2 = \cos^2 \theta = g(h(e_1, e_2), h(e_1, e_2)) = \lambda^2$.

Otro ejemplo más genérico sería cualquier subvariedad sin triángulos en la representación 2, que estaría relacionada con una subvariedad totalmente real puesto que sería que $g(h(e_i, e_j), h(e_i, e_j)) = 0 = g(Je_i, e_j)^2$ para cada $i \neq j$. Como, además $g(Je_i, e_i) = 0$, para todo i , llegaríamos a que Je_i es normal para todo i .

Bibliografía

- [1] K. Arslan, A. Carriazo, B.-Y. Chen, C. Murathan. On slant submanifolds of neutral Kaehler manifolds. *Taiwanese J. Math.* **14** (2010), 561-584.
- [2] A. Carriazo, Bi-slant inmersions, Proceedings ICRAMS 200 (India) (2000)
- [3] A. Carriazo, L. Boza, L. M. Fernández, Graphs with vector spaces of even dimension: A link with differential geometry, *Linear Algebra Appl.* **437** (2012), 60-76.
- [4] A. Carriazo, L. M. Fernández, A. Rodríguez Hidalgo, Submanifolds weakly associated with graphs, *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.* **119(3)** (2009), 297-318.
- [5] A. Carriazo, L. M. Fernández, Submanifolds associated with graphs, *Proc.Amer.Math.Soc.* **132(11)** (2004), 3327-3336.
- [6] B.Y. Chen, *Geometry of Slant Submanifolds*, Katholieke Universitien Leuven, Leuven, 1990.
- [7] B.Y. Chen, Interaction of Legendre curves and Lagrangian submanifolds, *Israel Journal of Mathematics*, **99(1)** (1997), 69–108.
- [8] B.Y. Chen, On Slant SURfaces, *Taiwanese J. Math.*, **3(2)** (1999), 163-179.
- [9] Reinhard Diestel, *Graph Theory*, Grad. Texts in Math. Heidelberg, New York, 173, 2017.
- [10] R. Harvey, H. Blaine Lawson , Calibrated Geometries, *Acta Math.* 148 (1982), 47–157.

- [11] J.M. Lee, *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*, Grad. Texts in Math. 176, 1997.
- [12] S. Maeda, Y. Ohnita, y S. Udagawa. On slant immersions into Kahler manifolds. *Kodai Math. J* **16** (1993), 205-219.
- [13] N. Papaghiuc. Semi-slant submanifolds of a Kaehlerian manifold. *An. Stiint. Al. I. Cuza. Univ. Iasi.* **40** (1994), 55-61.
- [14] B. O'Neill, *Elementary Differential Geometry*, Pure Appl. Math., Cambridge, (1966).
- [15] B. O'Neill, *Semi-Riemannian geometry. With applications to relativity.*, Pure and Appl. Math., New York, 1983.
- [16] Bogdan D. Suceava, Some theorems on austere submanifolds. *Balkan J. Geom. Appl.* **2(1)** (1997), 109-115.