



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

Homología Persistente en el Análisis Topológico de Datos

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

Bruno Martínez Warnholtz



**DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Emilio Esteban Lluís Puebla
2015**

1. Datos del alumno

Martínez

Warnholtz

Bruno

55 54 90 92

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Matemáticas

412145164

2. Datos del tutor

Dr

Luis

Puebla

Emilio Esteban

3. Datos del sinodal 1

Dr

San Agustín

Chi

Rodolfo

4. Datos del sinodal 2.

Dra

Tomé

Arreola

Bertha María

5. Datos del sinodal 3.

M en C

Turcio

Cuevas

Luis Jesús

6. Datos del sinodal 4.

Mat

Ocampo

Márquez

José Gabriel

Índice General

Agradecimientos.	1
Introducción.	2
Capítulo I: Categorías.	4
I.1 Categorías y funtores.	5
I.2 Morfismos y objetos especiales .	11
Capítulo II: Homología simplicial.	21
II.1 Complejos de cadena.	23
II.2 Homología simplicial.	33
Capítulo III: Filtraciones.	42
III.1 Complejos de Čech.	43
III.2 Complejos de Vietoris-Rips.	49
III.3 Filtraciones.	54
Capítulo IV: Persistencia.	55
IV.1 Homología persistente.	57
IV.2 Módulos de persistencia.	65
Capítulo V: Módulos graduados.	74
Bibliografía y Referencias	82

Agradecimientos.

"Me pregunto si las estrellas se iluminan con el fin de que algún día,
cada uno pueda encontrar la suya."

El Principito.

He encontrado muchas estrellas en esta vida,
una tras otra me enseñan y me han dado dicha.

Ha habido estrellas que me guían,
me llenan de deseos y me iluminan.

Agradezco a mis abuelos,
creadores del barco
sobre el que viajamos.
Por su sabiduría y cariño.

Agradezco a Jose Luis,
compañero de vuelo,
amigo y maestro.

Y sobre todo
agradezco a mis padres,
Patricia y Efrén,
por inventarme y mostrarme
los miles de colores de la vida,
y a mi hermana
por el tiempo que hemos compartido
y el que falta por compartir.

Introducción

A cada instante se generan una gran cantidad de datos; los cuales al estar bien estructurados facilitan el análisis y comprensión de los mismos. Como seres humanos procesamos y analizamos datos cada momento, dándoles forma, buscando tomar decisiones con ellos y transformándolos. Somos más información que física; procesamos información y somos información procesada en todo momento.

Tenemos datos en finanzas, en imágenes, en la biología, en los procesos mentales, en la física y desde que se inventó la computadora tenemos la habilidad de guardar y procesar a mayor velocidad aún más datos.

Los datos los podemos considerar como una nube de información, esa nube tiene una estructura y los datos se transforman y cambian, pero lo que intentamos capturar en cada momento es la estructura general que tenemos.

La topología es una herramienta que se ajusta a las necesidades para capturar la estructura de los datos. En topología podemos deformar objetos y trabajar con estructuras menos rígidas. Entender la topología de los datos no es un trabajo sencillo y para ello se necesita de herramientas matemáticas, de teoremas y objetos que nos permitan hallar esta estructura.

En esta tesis utilizamos la homología persistente como herramienta principal para hallar las características en distintas dimensiones de la topología sobre la que suponemos que tenemos los datos. Supondremos que los datos están en un espacio euclidiano y que tenemos una cantidad finita de ellos. En particular, el objetivo es entender el espacio topológico X sobre el que se distribuye un conjunto de datos S finito, así que los datos serán la guía para construir una triangulación que dé información del espacio topológico sobre el que se supone están muestreados los datos

Una vez que entendemos lo que es la homología persistente y la información que esta nos proporciona, se le da estructura de módulo graduado. La unicidad de la caracterización de la homología persistente de grado k como módulo graduado nos permite trabajar con una topología acorde a

nuestros datos y representar las características de las mismas en forma de un diagrama, al que se le llama diagrama de barras.

Al capturar la topología lo que es nuestra nube de datos se sigue desarrollando la teoría, se crean métricas y se justifica el uso de estadística y probabilidad sobre estas estructuras. Esta es una gran y muy innovadora forma de analizar los datos que sean de interés.

Esta idea inició en los años setenta cuando Gunnar Carlsson, Harlan Sexton, y Benjamin Mann desarrollaron la teoría inicial sobre el análisis topológico al encontrarse en el doctorado de matemáticas en Stanford. A partir de entonces estuvieron 30 años desarrollándolo y hoy en día se cuenta con grandes matemáticos que siguen trabajando en esta teoría tanto matemática como computacionalmente.

La matemática evoluciona constantemente y solemos conocerla en la carrera de forma trabajada y bien estructurada, pero cada concepto es en inicio una idea que se va construyendo y es importante entender eso, por esto decidí agregar un contexto histórico a los conceptos que se introducen en cada capítulo, siendo el contexto histórico de la homología persistente en el análisis topológico de datos aún muy reciente (aproximadamente 15 años).

El objetivo de esta tesis es obtener la estructura de la homología y ver en ella las características de la topología sobre la que se tiene una muestra de datos S .

Una vez que se estudia la estructura de la homología persistente diversos artículos se especializan, analizan los algoritmos computacionales que se requieren y se extienden conceptos que se definen en esta tesis. Por lo tanto, en esta tesis agrupo los temas en los que los artículos confluyen y los estructuro de forma que se pueda usar como texto introductorio al Análisis Topológico de Datos para un alumno de licenciatura que esté interesado en estudiar la homología persistente y sus aplicaciones al Análisis Topológico de Datos.

Además de explicar y desarrollar la parte teorica necesaria para obtener una estructura de la homología persistente, complemento cada capítulo con una introducción en la que se explica el surgimiento histórico de los conceptos más importantes. Los datos y la evolución historica de los

conceptos los obtuve del libro de Jean Dieudonné titulado ".^A History of Algebraic and Differential Topology, 1900-1960".

En el capítulo I se estudia el concepto de *Categoría*. Las categorías son la herramienta que utilizaremos constantemente para estudiar las relaciones entre la topología y los datos. Para el primer capítulo me basé en el trabajo de Emilio E. Lluís Puebla ".^Algebra Homológica, Cohomología de Grupos y K-Teoría Algebraica Clásica" el trabajo de Peter Freyd titulado ".^Abelian Categories, An Introduction to the Theory of Functors".

El capítulo II estudia el concepto de *Homología*. Homología es el concepto que nos da información sobre la estructura de la topología de los datos. Para el segundo capítulo utilicé principalmente el trabajo de Emilio E. Lluís Puebla que menciono anteriormente y las notas de David R. Wilkins del Trinity College en Dublin. Estos dos capítulos ofrecen la herramienta suficiente para iniciar lo que es el estudio de la homología persistente y su uso en el Análisis Topológico de Datos.

El capítulo III estudia las filtraciones con las cuales se construyen los objetos matemáticos a los que aplicamos la homología. Para este capítulo utilicé el artículo de Afra Zomorodian y Carlsson Gunnar titulado "Computing Persistent Homology" que fue publicado en 2005 en el periódico matemático *Discrete & Computational Geometry*. Para el cuarto capítulo también utilicé el artículo de Frédéric Chazal, Vin De Silva, Marc Glisse y Oudot Steve titulado "The Structure And Stability Of Persistence Module" publicado en Marzo del 2013. Las imágenes de los ejemplos en los que construyo filtraciones en este capítulo los hice utilizando GeoGebra y los ejemplos 3.5, 3.6 y 3.12 los hice de manera que sean ilustrativos para entender las definiciones dadas en el capítulo, también demostré las proposiciones 3.4 y 3.6.

El capítulo IV analiza la persistencia de características que obtenemos de los capítulos anteriores. En el cuarto capítulo utilicé principalmente el artículo de Afra Zomorodian y Carlsson Gunnar que utilicé en el tercer capítulo y el artículo de Herbert Edelsbrunner y John Harer titulado "Persistent Homology - A survey". El ejemplo 4.4 lo construí para ejemplificar los diagramas y que se entiendan las definiciones hechas en este capítulo. Para definir los conceptos desde un punto de vista categórico utilicé el artículo de Peter Bubenik y Johnathan A. Scott titulado "Categorification of Persistent Homology" que se encuentra en internet en la

librería de la universidad de Cornell (arXiv:1205.3669), éste último artículo se publicará en *Discrete & Computational Geometry* y fue revisado por última vez en enero del 2014.

En el quinto y último capítulo se le da estructura a la homología persistente vista en el cuarto capítulo. Este capítulo se basa en el artículo de Kairui Glen Wang titulado "The Basic Theory of Persistent Homology" publicado en Agosto del 2013 por la universidad de Chicago.

Parte I

Categorías

En 1945, en una extensión de su artículo titulado "General theory of natural equivalences" (1942), Eilenberg y Mac Lane designaron un tipo de objeto matemático al que llamarón categoría. Una categoría está formada por objetos que tienen una estructura en común, posteriormente se le asoció a cada par de objetos X, Y en la categoría una relación a la que se le denomina morfismo. A la colección de morfismos se le denota $Mor(X, Y)$.

Los objetos denominados categorías, son un gran aporte a la matemática, pues permiten entender cada objeto como un objeto de una estructura más grande; por ejemplo, un grupo como un elemento de la categoría de grupos. Además el concepto de morfismo puede generalizarse y aplicarse a objetos en estas estructuras, es decir, para dos categorías C, D se define una relación entre ellas a la que se le denomina funtor.

El concepto de categoría facilitó trabajar con relaciones entre objetos distintos en la matemática. Un ejemplo de esto lo podemos ver en la proposición de Mac Lane y Eilenberg, quienes demuestran que los complejos de cadena son una categoría y que existe un funtor entre ellos y la categoría de grupos (Capítulo II).

En 1957 A. Grothendiek, en su artículo titulado *Sur quelques points d'algebré homologique (Algunos puntos sobre álgebra homológica)*, notó que había ciertas categorías con una estructura común y fácil de manejar, a estas categorías les denominó categorías abelianas. Las categorías abelianas son aquellas que, además de tener objetos como núcleo y conúcleo, sus morfismos tienen estructura de grupo abeliano.

A partir de entonces las categorías, como herramienta y como objeto de estudio, han sido importantes al estudiar la relación de objetos matemáticos.

I.1 Categorías y funtores.

1.1 Definición[LL.] Una *categoría* \mathbf{C} consta de:

- (i) Una clase de objetos X, Y, Z , denotada $Obj(\mathbf{C})$.
- (ii) Para cada par de objetos $X, Y \in Obj(\mathbf{C})$, un conjunto $\mathbf{C}(X, Y)$, también denotado $Hom_{\mathbf{C}}(X, Y)$, cuyos elementos se llaman morfismos de X en Y , denotados con $f : X \longrightarrow Y$.
- (iii) Para cada terna de objetos X, Y, Z de $Obj(\mathbf{C})$, una ley de composición

$$\begin{aligned} " \circ " : Hom_{\mathbf{C}}(X, Y) \times Hom_{\mathbf{C}}(Y, Z) &\longrightarrow Hom_{\mathbf{C}}(X, Z) \\ (f, g) &\longmapsto \circ(f, g) = g \circ f = gf \end{aligned}$$

que satisface los siguientes axiomas:

- (a) $Hom_{\mathbf{C}}(X, Y) = Hom_{\mathbf{C}}(X', Y') \iff X = X', Y = Y'$.
- (b) Si $f : X \longrightarrow X', g : X' \longrightarrow X''$ y $h : X'' \longrightarrow X'''$, entonces $h(gf) = (hg)f$. (Asociatividad)
- (c) Para todo objeto $X \in Obj(\mathbf{C})$ existe un morfismo $1_X : X \longrightarrow X$ tal que para cualesquiera $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Z \longrightarrow X$, se tiene que $f1_X = f$ y $1_Xg = g$.

En $Hom_{\mathbf{C}}(X, Y)$ se denomina a X el *dominio* y a Y el *codominio* de f . Además se dice que un morfismo $f : X \longrightarrow Y$ es *invertible* si existe un morfismo $g : Y \longrightarrow X$ tal que $gf = 1_X$ y $fg = 1_Y$. Cuando existe un morfismo $f : X \longrightarrow Y$ invertible se dice que X y Y son *isomorfos*, y se denota $X \cong Y$.

Notemos que la clase de objetos no necesariamente debe ser un conjunto; cuando la clase de objetos es un conjunto la categoría la denominamos *categoría pequeña*.

Cuando no haya confusión entre objetos y morfismos se denota a X objeto de \mathbf{C} como $X \in \mathbf{C}$

1.2 Ejemplo. Sea Λ un anillo conmutativo con $1 \neq 0$. Denotaremos con ${}_{\Lambda}Mod$ los Λ -módulos izquierdos. Los objetos en ${}_{\Lambda}Mod$ son los Λ -módulos. Para cada par de objetos ${}_{\Lambda}M, {}_{\Lambda}N \in {}_{\Lambda}Mod$, los morfismos son los homomorfismos de Λ -módulos, los cuales son los homomorfismos de grupos abelianos M tales que $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ para todo $\alpha \in \Lambda$ y para todo $x \in M$. ${}_{\Lambda}Mod$ es una categoría, ya que los homomorfismos de Λ -módulos cumplen los axiomas (a),(b) y (c). [Ll].

1.3 Definición. Sean \mathbf{C} y \mathbf{C}' categorías. Un *functor covariante* $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}'$ es una regla que asocia:

- (i) Objetos $X \in \mathbf{C}$ en objetos $X' \in \mathbf{C}'$ denotado $F(X)$.
- (ii) A cada morfismo $f : X \rightarrow Y \in Hom_{\mathbf{C}}(X, Y)$ un morfismo.

$$F(f) : F(X) \rightarrow F(Y) \in Hom_{\mathbf{C}'}(F(X), F(Y))$$

que satisface las siguientes condiciones:

- (a) $F(1_X) = 1_{FX}$.
- (b) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

1.4 Definición. Sean \mathbf{C} y \mathbf{C}' categorías. Un *functor contravariante* $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}'$ es una regla que asocia:

- (i) objetos $X \in \mathbf{C}$ en objetos $X' \in \mathbf{C}'$ denotado $F(X)$
- (ii) a cada morfismo $f : X \rightarrow Y \in Hom_{\mathbf{C}}(X, Y)$ un morfismo

$$F(f) : F(Y) \rightarrow F(X) \in Hom_{\mathbf{C}'}(F(Y), F(X))$$

que satisface las siguientes condiciones:

- (a) $F(1_X) = 1_{FX}$.
- (b) $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.

Cuando no hay confusión se puede denotar $F(X)$ como FX y $F(f)$ como Ff .

1.5 Ejemplo. Sea Λ un anillo conmutativo con $1 \neq 0$. Sea ${}_{\Lambda}Mod$ la categoría de los Λ -módulos izquierdos y Ab la categoría de los grupos abelianos.

Dado $X \in {}_{\Lambda}Mod$ se define el funtor $Hom_{\Lambda}(X, _) : {}_{\Lambda}Mod \longrightarrow Ab$ como:

- (i) $Hom_{\Lambda}(X, _)(Y) = Hom_{\Lambda}(X, Y)$ para todo $Y \in {}_{\Lambda}Mod$.
- (ii) $Hom_{\Lambda}(X, _)(f) = f \circ g \in Hom_{\Lambda}(X, Y')$ para cada $f : Y \longrightarrow Y'$ morfismo de Λ -módulos y $g : X \longrightarrow Y \in Hom_{\Lambda}(X, Y)$. Entonces:

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & Hom_{\Lambda}(X, Y) \\ \downarrow f & & \downarrow Hom_{\Lambda}(X, f) \\ Y' & \longrightarrow & Hom_{\Lambda}(X, Y') \end{array}$$

Sean $k : Y \longrightarrow Y'$ y $k' : Y \longrightarrow Y''$, entonces se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} (X \xrightarrow{f} Y') & \in & Hom_{\Lambda}(X, Y') \\ \parallel & \downarrow k & \downarrow Hom_{\Lambda}(X, k) \\ (X \xrightarrow{g} Y) & \in & Hom_{\Lambda}(X, Y) \\ \parallel & \downarrow k' & \downarrow Hom_{\Lambda}(X, k') \\ (X \xrightarrow{h} Y'') & \in & Hom_{\Lambda}(X, Y'') \end{array}$$

En el diagrama se ve que $Hom_{\Lambda}(X, _)(1_Y) = 1_{Hom_{\Lambda}(X, Y)}$ y $Hom_{\Lambda}(X, _)(f \circ g) = Hom_{\Lambda}(X, _)(f) \circ Hom_{\Lambda}(X, _)(g)$. Por lo tanto $Hom_{\Lambda}(X, _)$ es un funtor covariante.

1.6 Ejemplo. Sea Λ un anillo conmutativo con $1 \neq 0$. Sea ${}_{\Lambda}Mod$ la categoría de los Λ -módulos izquierdos y Ab la categoría de los grupos abelianos.

Dado un $Y \in {}_{\Lambda}Mod$ se define el funtor $Hom_{\Lambda}(_, Y) : {}_{\Lambda}Mod \longrightarrow Ab$ como:

- (i) $Hom_{\Lambda}(_, Y)(X) = Hom_{\Lambda}(X, Y)$ para todo $X \in {}_{\Lambda}Mod$.

- (ii) $Hom_{\Lambda}(_, Y)(f) = g \circ f \in Hom_R(X', Y)$ para cada $f : X \rightarrow X'$ morfismo de Λ -módulos y $g : X' \rightarrow Y \in Hom_{\Lambda}(X', Y)$. Entonces:

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Hom_{\Lambda}(X, Y) \\ \downarrow f & & \uparrow Hom_{\Lambda}(f, Y) \\ X' & \longrightarrow & Hom_{\Lambda}(X', Y) \end{array}$$

Sean $k : X' \rightarrow X$ y $k' : X'' \rightarrow X$, entonces se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} (X' \xrightarrow{f} Y) \in Hom_{\Lambda}(X', Y) & & \\ \downarrow k & \parallel & \uparrow Hom_{\Lambda}(k, Y) \\ (X \xrightarrow{g} Y) \in Hom_{\Lambda}(X, Y) & & \\ \downarrow k' & \parallel & \uparrow Hom_{\Lambda}(k', Y) \\ (X'' \xrightarrow{h} Y) \in Hom_{\Lambda}(X'', Y) & & \end{array}$$

En el diagrama se observa que $Hom_{\Lambda}(_, Y)(1_X) = 1_{Hom_{\Lambda}(X, Y)}$ y $Hom_{\Lambda}(_, Y)(f \circ g) = Hom_{\Lambda}(_, Y)(g) \circ Hom_{\Lambda}(_, Y)(f)$. Por lo tanto $Hom_{\Lambda}(_, Y)$ es un funtor contravariante.

1.7 Definición. Sea \mathbf{C} una categoría. La *categoría opuesta*, denotada \mathbf{C}^{op} , consta de $Obj(\mathbf{C}^{op}) = Obj(\mathbf{C})$ y $Hom_{\mathbf{C}^{op}}(X, Y) = Hom_{\mathbf{C}}(Y, X)$.

Notemos que la composición $\bar{g} \circ \bar{f}$ en la categoría opuesta \mathbf{C}^{op} es de la forma $X \xrightarrow{\bar{f}} Y \xrightarrow{\bar{g}} Z \implies X \xrightarrow{\bar{g} \circ \bar{f}} Z$, entonces en \mathbf{C} es $X \xleftarrow{g} Y \xleftarrow{f} Z \implies X \xleftarrow{f \circ g} Z$. Por lo tanto por definición $\bar{g} \circ \bar{f} = \overline{(f \circ g)}$.

1.8 Definición. Sean \mathbf{C} y \mathbf{D} categorías y sean $F, G : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ funtores covariantes. Una *transformación natural* $\varphi : F \implies G$ consiste de una familia de morfismos $\{\varphi_X\}_{X \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}}}$ en la que:

- (i) $\varphi_X : FX \rightarrow GX$ para cada $X \in \mathbf{C}$

(ii) Para cada morfismo $f : X \longrightarrow Y \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} X & FX & \xrightarrow{\varphi_X} & GX & \\ f \downarrow & Ff \downarrow & & \downarrow Gf & \\ Y & FY & \xrightarrow{\varphi_Y} & GY & \end{array}$$

es decir, $Gf \circ \varphi_X = \varphi_Y \circ Ff$.

En el caso de un functor contravariante la conmutatividad se obtiene en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} X & FX & \xrightarrow{\varphi_X} & GX & \\ f \downarrow & Ff \uparrow & & \uparrow Gf & \\ Y & FY & \xrightarrow{\varphi_Y} & GY & \end{array}$$

es decir, $\varphi_X \circ Ff = Gf \circ \varphi_Y$.

Denotamos la transformación natural con $\varphi = \{\varphi_X \mid X \in \text{Obj}(\mathbf{C})\}$.

1.9 Definición. Sea \mathbf{C} una categoría y \mathbf{D} una categoría pequeña. El diagrama en \mathbf{D} indizado por \mathbf{C} , denotado $\mathbf{C}^{\mathbf{D}}$, consiste en

- (i) $\text{Obj}(\mathbf{C}^{\mathbf{D}}) = \{F : \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{C} \mid F \text{ es functor}\}$
- (ii) $\text{Hom}_{\mathbf{C}^{\mathbf{D}}}(F, G)$ son las transformaciones naturales $\varphi : F \longrightarrow G$, donde F, G son dos funtores de \mathbf{D} en \mathbf{C} .

1.10 Ejemplo. Un diagrama \mathbf{F} en una categoría \mathbf{D} indizada por (\mathbb{Z}^+, \leq) es una secuencia de morfismos:

$$F(1) \longrightarrow F(2) \longrightarrow F(3) \longrightarrow \dots$$

Si \mathbf{D} es la categoría de espacios vectoriales, entonces cada $F(n)$ es un espacio vectorial y los morfismos son transformaciones lineales.

1.11 Definición. Sean \mathbf{C}, \mathbf{D} dos categorías. Sean $F, G : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ funtores y $\varphi = \{\varphi_x\}_{X \in \mathbf{C}} : F \Rightarrow G$ una transformación natural. φ es un *isomorfismo de funtores* si existe una transformación natural $\psi : G \Rightarrow F$ tal que $\psi\varphi = 1_F$ y $\varphi\psi = 1_G$, donde $\psi\varphi = \{\psi_x \varphi_x\}_{X \in \mathbf{C}}$.

En el siguiente diagrama observamos que la composición está bien definida.

$$\begin{array}{ccccc} X & FX & \xrightarrow{\varphi_X} & GX & \xrightarrow{\psi_X} & FX \\ f \downarrow & Ff \downarrow & & Gf \downarrow & & Ff \downarrow \\ Y & FY & \xrightarrow{\varphi_Y} & GY & \xrightarrow{\psi_Y} & FY \end{array}$$

Ambas partes del diagrama conmutan, por lo tanto para cada $X \in \mathbf{C}$ y $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ la composición $\psi\varphi$ conmuta. Entonces $\psi\varphi$ es una transformación natural que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} X & FX & \xrightarrow{\psi\varphi_X} & FX & \\ f \downarrow & Ff \downarrow & & \downarrow Gf & \\ Y & FY & \xrightarrow{\psi\varphi_Y} & FY & \end{array}$$

El caso contravariante es análogo, salvo que la conmutatividad se obtiene con las flechas de $FY \rightarrow FX$.

1.12 Teorema. $\varphi = \{\varphi_X\}_{X \in \mathbf{C}} : F \rightarrow G$ es un isomorfismo funtorial si y sólo si φ_X es un isomorfismo para cada $X \in \mathbf{C}$.

Demostración.

\Rightarrow) $\forall X \in \mathbf{C} \ \psi_X \varphi_X = 1_{FX} \Rightarrow \varphi_X$ es isomorfismo.

\Leftarrow) Sea φ_X un isomorfismo $\forall X \in \mathbf{C}$. Definimos $\psi = \{\varphi_X^{-1}\}_{X \in \mathbf{C}}$ y tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} X & GX & \xrightarrow{\varphi_X^{-1}} & FX & \xrightarrow{\varphi_X} & GX \\ f \downarrow & Gf \downarrow & & Ff \downarrow & & Gf \downarrow \\ Y & GY & \xrightarrow{\varphi_Y^{-1}} & FY & \xrightarrow{\varphi_Y} & GY \end{array}$$

Por ser φ transformación natural $Gf \circ \varphi_X = \varphi_Y \circ Ff$, entonces:

$$Gf \circ \varphi_X \circ \psi_X = Gf \circ \varphi_X \circ \varphi_X^{-1} = Gf \circ 1_{GX} = 1_{GX} \circ Gf = \varphi_Y \circ \varphi_Y^{-1} \circ Gf = \varphi_Y \circ \psi_Y \circ Gf.$$

Por lo tanto $\varphi\psi = 1_G$. Análogamente obtenemos que $\psi\varphi = 1_F$. Así que φ es un isomorfismo funtorial. \square

I.2 Morfismos y objetos especiales.

1.13 Definición. Sea \mathbf{C} una categoría y $f : A \longrightarrow B$ un morfismo en \mathbf{C} . Se dice que:

- (i) f es un *monomorfismo* si para cada par de morfismos g, h en \mathbf{C} tales que $fg = fh$ tenemos que $g = h$.
- (ii) f es un *epimorfismo* si para cada par de morfismos g, h en \mathbf{C} tales que $gf = hf$ tenemos que $g = h$.
- (iii) f es una *sección* (monomorfismo que se escinde) si existe $f' : B \longrightarrow A$ tal que $f'f = 1_A$.
- (iv) f es una *retracción* (epimorfismo que se escinde) si existe $f' : B \longrightarrow A$ tal que $ff' = 1_B$.

1.14 Definición. Sea P una proposición acerca de objetos, flechas o diagramas en la categoría \mathbf{C} . El *dual de la proposición* interpretada en \mathbf{C} , denotada \bar{P} , es la proposición análoga hecha en \mathbf{C}^{op} .

1.15 Ejemplo. f es epimorfismo es el dual de la proposición $f : A \longrightarrow B$ monomorfismo. f es un monomorfismo si para cada par de morfismos g, h en \mathbf{C} tales que $fg = fh \implies g = h$, el dual de la proposición es que $\bar{f} : B \longrightarrow A$ es monomorfismo en \mathbf{C}^{op} si $\bar{f}\bar{g} = \bar{f}\bar{h} \implies \bar{g} = \bar{h} \forall \bar{g}, \bar{h} \in \mathbf{C}^{op}$. Interpretando esto en \mathbf{C} obtenemos que $g \circ f = h \circ f \implies g = h \forall g, h \in \mathbf{C}$.

1.16 Teorema. Sea \mathbf{C} una categoría.

- (i) Composición de monomorfismos es monomorfismo.
- (ii) Composición de epimorfismos es epimorfismo.
- (iii) Toda sección es monomorfismo.
- (iv) Toda retracción es epimorfismo.
- (v) Si fg es monomorfismo $\implies g$ es monomorfismo.
- (vi) Si fg es epimorfismo $\implies f$ es epimorfismo.

Demostración.

(i) Si $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ son monomorfismos, entonces para cada par de morfismos h, k en \mathbf{C} tales que $fh = fk$, tenemos que $h = k$, y para cada par de morfismos h', k' en \mathbf{C} tales que $gh' = gk'$, $h' = k'$. Por lo tanto para cada par de morfismos h'', k'' en \mathbf{C} tenemos que $gf h'' = gf k'' \implies gh'' = fk''$ y de esto se concluye que $h'' = k''$. \square

(ii) Si $f : A \longrightarrow B, g : B \longrightarrow C$ son epimorfismos, entonces para cada par de morfismos h, k en \mathbf{C} tales que $hf = kf$ tenemos que $h = k$, y para cada par de morfismos h', k' en \mathbf{C} tales que $hg' = kg'$ tenemos que $h' = k'$. Entonces para cada par de morfismos h'', k'' en \mathbf{C} tenemos que $h''gf = k''gf \implies h''f = k''f$. Por lo tanto $h'' = k''$. \square

(iii) Si $f : A \longrightarrow B$ es una sección y g, h son morfismos en \mathbf{C} tales que $fg = fh, \exists f' : B \longrightarrow A$ tal que $f'f = 1_A$, por lo tanto $fg = fh \implies (f'f)g = (f'f)h \implies g = h$. \square

(iv) Si $f : A \longrightarrow B$ es una retracción y g, h son morfismos en \mathbf{C} tales que $gf = hf, \exists f' : B \longrightarrow A$ tal que $ff' = 1_A$, por lo tanto $gf = hf \implies g(ff') = h(ff') \implies g = h$. \square

(v) Si fg es un monomorfismo, sean h_1, h_2 tales que $gh_1 = gh_2 \implies fgh_1 = fgh_2$, y fg es monomorfismo, por lo tanto $h_1 = h_2$. \square

(vi) Si fg es un epimorfismomorfismo, sean h_1, h_2 tales que $h_1f = h_2f \implies h_1fg = h_2fg$, y fg es epimorfismo, por lo tanto $h_1 = h_2$. \square

1.17 Definición. Sea \mathbf{C} una categoría y $X_0 \in \mathbf{C}$. Entonces:

(i) X_0 es un *objeto inicial* si $Hom_{\mathbf{C}}(X_0, X)$ tiene un solo elemento $\forall X \in \mathbf{C}$.

(ii) X_0 es un *objeto final* si $Hom_{\mathbf{C}}(X, X_0)$ tiene un solo elemento $\forall X \in \mathbf{C}$.

(iii) X_0 es un *objeto cero* si es objeto inicial y final.

1.18 Ejemplo. En la categoría de Λ -módulos el módulo trivial es un objeto cero.

1.19 Proposición. Sea \mathbf{C} una categoría con objetos cero, entonces cualesquiera dos objetos cero son isomorfos.

Demostración. Supongamos que X, X' son objetos cero de \mathbf{C} y que $Hom_{\mathbf{C}}(X, X') = \{\alpha\}$ y $Hom_{\mathbf{C}}(X', X) = \{\beta\}$. Entonces $\alpha\beta \in Hom_{\mathbf{C}}(X', X') = \{1_{X'}\}$ y $\beta\alpha \in Hom_{\mathbf{C}}(X, X) = \{1_X\}$. \square

1.20 Definición. Sea \mathbf{C} una categoría con objeto cero X_0 y $Y, Y' \in \mathbf{C}$. El *morfismo cero* de Y a Y' es la composición: $Y \longrightarrow X_0 \longrightarrow Y'$. A este objeto se le denota con 0 .

1.21 Definición. Sea \mathbf{C} una categoría y $Y, X, X' \in \mathbf{C}$. Entonces:

(i) X' es *subobjeto* de X si existe $i : X' \longrightarrow X$ monomorfismo.

(ii) Y es un *objeto cociente* de X si existe $p : X \longrightarrow Y$ epimorfismo.

1.22 Definición. Sea $f : A \longrightarrow B$ un morfismo en una categoría con objeto cero. Un *núcleo de f* es una pareja (K, u) en la que $K \in \mathbf{C}$, $u : K \longrightarrow A$ es un morfismo tal que $f \circ u = 0$ y se satisface la siguiente propiedad universal: Si (K', u') con $K' \in \mathbf{C}$ y $u' : K' \longrightarrow A$ tal que $f \circ u' = 0$, entonces $\exists!$ morfismo $\alpha : K' \longrightarrow K$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow{u} & A & \xrightarrow{f} & B \\ \exists! \alpha \uparrow & \nearrow_{u'} & & & \\ K' & & & & \end{array}$$

Se dice que \mathbf{C} tiene núcleos si cada morfismo en \mathbf{C} tiene un núcleo.

1.23 Proposición. Sea \mathbf{C} una categoría con objeto cero y que tiene núcleos. Entonces dos núcleos de cualquier morfismo son isomorfos.

Demostración. Sea $f : A \longrightarrow B$ un morfismo en \mathbf{C} y supongamos que (K, u) y (K', u') son núcleos de f , entonces, por la propiedad universal del núcleo (K, u) , tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow{u} & A & \xrightarrow{f} & B \\ \exists! \alpha \uparrow & \nearrow_{u'} & & & \\ K' & & & & \end{array}$$

y por la propiedad universal del núcleo (K', u') , tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow{u} & A & \xrightarrow{f} & B \\ \exists! \beta \downarrow & \nearrow_{u'} & & & \\ K' & & & & \end{array}$$

por lo tanto tenemos que como α, β son únicos $\alpha \circ \beta = 1_K$ y $\beta \circ \alpha = 1_{K'}$. \square

Como el núcleo de un morfismo es único se denota con $(\text{Ker}(f), u)$.

1.24 Proposición. Si (K, u) es núcleo de $f : A \longrightarrow B$, entonces u es monomorfismo.

Demostración. Supongamos que $uh = ug \implies fuh = fug = 0$. Consideremos los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow{u} & A & \xrightarrow{f} & B \\ \alpha \uparrow & \nearrow_{ug} & & & \\ X & & & & \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow{u} & A & \xrightarrow{f} & B \\ \uparrow_{\beta} & \nearrow_{uh} & & & \\ X & & & & \end{array}$$

Notemos que α, β son únicos, pues el núcleo es único. Así que, como $K = \ker(f) \exists! \alpha$ y $\exists! \beta$ tales que $u\alpha = ug, u\beta = uh$. Entonces como g y h también hacen conmutar el diagrama, tenemos que $\alpha = g$ y $\beta = h$. Además α hace que conmute el diagrama de β y viceversa, entonces $u\alpha = u\beta$. Por lo tanto, como α, β son únicos, obtenemos $g = \alpha = \beta = h \implies g = h$. \square

1.25 Definición. Sea \mathbf{C} una categoría con objeto cero y $f : A \longrightarrow B$ un morfismo en \mathbf{C} . Un *conúcleo de f* es una pareja (Z, p) en la que $Z \in \mathcal{C}$ y $p : B \longrightarrow Z$ es un morfismo tal que $pf = 0$ satisfaciendo la siguiente propiedad universal: Si (Z', p') con $Z' \in \mathbf{C}$ y $p' : B \longrightarrow Z'$ tal que $p'f = 0$, entonces $\exists!$ morfismo $\beta : Z \longrightarrow Z'$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{p} & Z \\ & & & p' \searrow & \downarrow \exists! \beta \\ & & & & Z' \end{array}$$

Se dice que una categoría con objeto cero tiene conúcleos si cada morfismo en \mathbf{C} tiene conúcleo.

1.26 Proposición. Sea \mathbf{C} una categoría con objeto cero y que tiene conúcleos. Entonces dos conúcleos de cualquier morfismo son isomorfos.

Demostración. Sea $f : A \longrightarrow B$ un morfismo en \mathbf{C} y supongamos que (Z, p) y (Z', p') son conúcleos de f , entonces, por la propiedad universal del conúcleo (Z, p) , tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{p} & Z \\ & & & p' \searrow & \downarrow \exists! \alpha \\ & & & & Z' \end{array}$$

y por la propiedad universal del conúcleo (Z', p') , tenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{p'} & Z' \\ & & & p \searrow & \downarrow \exists! \beta \\ & & & & Z \end{array}$$

por lo tanto tenemos que como α, β son únicos $\alpha \circ \beta = 1_Z$ y $\beta \circ \alpha = 1_{Z'}$. \square

El conúcleo de un morfismo se denota con $(\text{co ker}(f), p)$.

1.27 Definición Sea \mathbf{C} una categoría, $X \in \mathbf{C}$, $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de objetos de \mathbf{C} y p_i un morfismo en $\mathbf{C} \forall i \in I$. Un *producto de* $\{X_i\}_{i \in I}$ es una pareja $(X, (p_i : X \longrightarrow X_i)_{i \in I})$ que satisface la siguiente propiedad universal: Para cada pareja $(X', (p'_i : X' \longrightarrow X_i)_{i \in I})$ existe un único morfismo $\alpha : X' \longrightarrow X$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\exists! \alpha} & X \\ p'_i \searrow & & \swarrow p_i \\ & X_i & \end{array}$$

Se dice que una categoría tiene producto si cada familia de objetos de \mathbf{C} tiene producto.

No toda categoría tiene producto, pero si lo tiene entonces éste es único salvo isomorfismo.

1.28 Proposición. Si \mathbf{C} es una categoría con producto, entonces los productos de una familia de objetos son isomorfos.

Demostración. Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de objetos en \mathbf{C} y sean $(X, (p_i : X \rightarrow X_i)_{i \in I})$, $(X', (p'_i : X' \rightarrow X_i)_{i \in I})$ dos productos de $\{X_i\}_{i \in I}$. Entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\beta} & X' & \xrightarrow{\alpha} & X \\ p_i & \searrow & \downarrow p'_i & \swarrow & p_i \\ & & X_i & & \end{array}$$

Tenemos el morfismo $1_X : X \rightarrow X$ y los morfismos α, β que son únicos tales que $\alpha\beta : X \rightarrow X$, entonces $\alpha\beta = 1_X$. Por otro lado tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} X' & \xrightarrow{a} & X & \xrightarrow{\beta} & X' \\ p'_i & \searrow & \downarrow p_i & \swarrow & p'_i \\ & & X_i & & \end{array}$$

y por lo tanto, por unicidad y conmutatividad del diagrama, obtenemos que $\beta\alpha = 1_{X'}$. \square

1.29 Definición. Sea \mathbf{C} una categoría, $X \in \mathbf{C}$, $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de objetos de \mathbf{C} y μ_i un morfismo en $\mathbf{C} \forall i \in I$. Un *coproducto* de $\{X_i\}_{i \in I}$ es una pareja $(X, (\mu_i : X_i \rightarrow X)_{i \in I})$ que satisface la siguiente propiedad universal: Para cada pareja $(X', (\mu'_i : X_i \rightarrow X')_{i \in I})$ existe un único morfismo $\alpha : X \rightarrow X'$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\exists! \alpha} & X' \\ \mu_i \swarrow & & \searrow \mu'_i \\ & X_i & \end{array}$$

Se dice que una categoría tiene coproducto si cada familia de objetos de \mathbf{C} tiene producto.

Como sucede con el producto, no toda categoría tiene coproducto, pero si lo tiene, este es único salvo isomorfismo.

1.30 Proposición. Si \mathbf{C} es una categoría con coproducto, entonces los productos de una familia de objetos son isomorfos.

Demostración. Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de objetos en \mathcal{C} y sean $(X, (\mu_i : X_i \longrightarrow X)_{i \in I})$ y $(X', (\mu'_i : X_i \longrightarrow X')_{i \in I})$ dos coproductos de $\{X_i\}_{i \in I}$. Entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\beta} & X' & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \mu_i & \swarrow & \uparrow \mu'_i & \nearrow & \mu_i \\ & & X_i & & \end{array}$$

Tenemos el morfismo $1_X : X \longrightarrow X$ y los morfismos α, β que son únicos tales que $\alpha\beta : X \longrightarrow X$, entonces $\alpha\beta = 1_X$. Por otro lado tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} X' & \xrightarrow{a} & X & \xrightarrow{\beta} & X' \\ \mu'_i & \swarrow & \uparrow \mu_i & \nearrow & \mu'_i \\ & & X_i & & \end{array}$$

y por lo tanto, por unicidad y conmutatividad del diagrama, obtenemos que $\beta\alpha = 1_{X'}$. \square

A los morfismos p_i en el producto se les llama proyecciones y a los morfismos μ_i en el coproducto se les llama inyecciones. Ahora definimos lo que es el producto y el coproducto fibrado.

1.31 Definición[Ll, p78]. Sean $f : X \longrightarrow A$ y $g : Y \longrightarrow A$ morfismos en una categoría \mathcal{C} . El producto fibrado de (f, g) es una pareja de morfismos $\phi : B \longrightarrow X, \gamma : B \longrightarrow Y$ con $f\phi = g\gamma$ tal que, si $\phi' : C \longrightarrow X$ y $\gamma' : C \longrightarrow Y$ son tales que $f\phi' = g\gamma'$, entonces existe un único morfismo $h : C \longrightarrow B$ tal que $\phi' = \phi h$ y $\gamma' = \gamma h$.

$$\begin{array}{ccccc} C & & & & \\ & \searrow^h & & & \\ & & B & \xrightarrow{\phi} & X \\ & & \downarrow \gamma & & \downarrow f \\ & & Y & \xrightarrow{g} & A \end{array}$$

Denotamos con $(B, (\phi, \gamma))$ o simplemente con $B = Y \wedge X$ el producto fibrado de (f, g) .

1.32 Definición[Ll, p78]. Sean $f : A \longrightarrow X$ y $g : A \longrightarrow Y$ morfismos en una categoría \mathbf{C} . El coproducto fibrado de (f, g) es una pareja de morfismos $\phi : X \longrightarrow B, \gamma : Y \longrightarrow B$ con $\phi f = \gamma g$ tal que, si $\phi' : X \longrightarrow C$ y $\gamma' : Y \longrightarrow C$ son tales que $\phi' f = \gamma' g$, entonces existe una única $h : B \longrightarrow C$ tal que $\phi' = h\phi$ y $\gamma' = h\gamma$.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & C & & \\
 & & \swarrow h & & \\
 & B & \xleftarrow{\phi} & X & \\
 & \uparrow \gamma & & \uparrow f & \\
 & Y & \xleftarrow{g} & A &
 \end{array}$$

Denotamos con $(B, (\phi, \gamma))$, o simplemente con $B = Y \vee X$ al producto fibrado de (f, g) .

1.33 Definición. Sea \mathbf{C} una categoría con núcleos y conúcleos y sea $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo en \mathbf{C} . Definimos

- (i) la *Imagen de f* es $im(f) = \ker(\text{co ker}(f))$ y
- (ii) la *coimagen de f* como $coim(f) = \text{co ker}(\ker(f))$

1.34 Definición. Sea \mathbf{A} una categoría. Se dice que \mathbf{A} es *abeliana* si satisface los siguientes axiomas:

- (i) \mathbf{A} tiene objeto cero.
- (ii) Para toda pareja de objetos en A existe un producto y un coproducto.
- (iii) Todo morfismo en A tiene núcleo y conúcleo.
- (iv) Todo monomorfismo es núcleo de un morfismo y todo epimorfismo es conúcleo de un morfismo.

Al tener que \mathbf{A} es una categoría abeliana sabemos que la estructura de dicha categoría se comporta de forma análoga a la de un grupo abeliano.

1.35 Teorema[PF p.36]. Si \mathbf{A} es una categoría abeliana entonces el núcleo y el conúcleo son funciones inversas.

Demostración. Sea $(X' \rightarrow X)$ un monomorfismo. Por el axioma (iv) $(X' \rightarrow X)$ es el núcleo de algún morfismo $(X \rightarrow Y)$. Sea $(X \rightarrow F)$ el conúcleo de $(X' \rightarrow X)$ y sea $(K \rightarrow X)$ el núcleo de $(X \rightarrow F)$. Aplicaremos la definición de núcleo y conúcleo varias veces y en cada paso debemos verificar que cierta composición es el morfismo cero.

Primero notemos que $X' \rightarrow X \rightarrow F = 0$ y existe un morfismo $F \rightarrow Y$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} \ker(X \rightarrow Y) = X' & & & & F = \operatorname{coker}(X' \rightarrow X) \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & X & & \downarrow \\ & \nearrow & & \searrow & \\ \ker(X \rightarrow F) = K & & & & Y \end{array}$$

$X' \rightarrow X \rightarrow F = 0$; entonces existe un morfismo $(X' \rightarrow K)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} X' & \searrow & \\ \downarrow & & X \\ K & \nearrow & \end{array}$$

$K \rightarrow X \rightarrow Y = 0$; por lo que tenemos que existe un morfismo $K \rightarrow X'$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} X' & \searrow & \\ \uparrow & & X \\ K & \nearrow & \end{array}$$

Entonces los subobjetos representados por $X' \rightarrow X$ y $K \rightarrow X$ están contenidos unos en los otros y por lo tanto son isomorfos. $(X' \rightarrow X)$ es el núcleo de $(X \rightarrow F)$. Por lo tanto $\ker(\operatorname{coker}) = \operatorname{Id}$. Dualmente $\operatorname{coker}(\ker) = \operatorname{Id}$. \square

1.36 Teorema [PF p.36]. Sea \mathbf{A} una categoría abeliana. Si un morfismo es epimorfismo y monomorfismo entonces es isomorfismo.

Demostración. Sea $\alpha : X \longrightarrow Y$ monomorfismo y epimorfismo. El conúcleo de α es $p : Y \longrightarrow 0$ e $Id : Y \longrightarrow Y$ es núcleo de $Y \longrightarrow 0$. Por el teorema 1.35 $X \longrightarrow Y$ es también núcleo de $X \longrightarrow 0$. Como el núcleo es único salvo isomorfismo tenemos que X, Y son isomorfos. Por lo tanto existe un morfismo $\beta_1 : Y \longrightarrow X$ tal que $\alpha \circ \beta_1 = Id$.

Por otro lado $0 \longrightarrow X$ es núcleo de $X \xrightarrow{\alpha} Y$ y tanto $X \xrightarrow{\alpha} Y$ como $X \xrightarrow{Id} X$ son conúcleos de $0 \longrightarrow X$. Por lo tanto existe un morfismo $\beta_2 : Y \longrightarrow X$ tal que $\beta_2 \circ \alpha = Id$. Entonces α es isomorfismo. \square

Parte II

Complejos simpliciales y homología simplicial.

La topología algebraica es la rama de la matemática que utiliza objetos algebraicos para estudiar estructuras topológicas. *Analysis Situs (1895)* es la obra en la que Poincaré describe la posición relativa entre objetos como puntos, líneas y superficies. Esta obra fue el nacimiento de la topología algebraica.

En *Analysis Situs* Poincaré es el primero en asociar como invariantes a variedades, objetos topológicos y no números (como se usaba antes, por ejemplo los números de Betti), esto lo logró a través de lo que definió como homología y lo que aun se conoce como grupo fundamental. En un inicio Poincaré utilizó el concepto de homología como una conexión entre subvariedades V_i de una variedad W para obtener información sobre la conectividad de la variedad W . Para lograr esto se consideró una combinación lineal entre las subvariedades V_i , sin embargo no siguió desarrollando la estructura de grupo que se genera de la combinación lineal. Esta estructura de grupo es la que se continuó desarrollando y evolucionó hasta entender la homología como un funtor de el espacio topológico a la categoría de Λ -módulos, en particular consideraremos los \mathbb{Z} -módulos o grupos abelianos. [Di. p18]

W. Mayer, H. Künneth, L. Vietoris, H. Hopf, S. Lefschetz y otros sucesores de Poincaré, trataron las variedades desde un enfoque distinto, lo que hicieron fue encerrar el espacio que se quiere analizar en poliedros cuando esto era posible. A la red de poliedros que cubre el espacio topológico X se le llamo triangulación del espacio X . Hasta 1925 se consideró únicamente la homología de complejos. Los complejos son una pareja (X, T) , en la que X es un espacio compacto y T una triangulación de X . En este capítulo defino formalmente lo que es una triangulación y desarrollo de ella los complejos de cadena. Los complejos de cadena son una estructura algebraica que se construye de la triangulación de un espacio. A los elementos con los que se triangula el espacio se les denomina celdas.

Recordemos que uno de los objetivos de esta tesis es entender el espacio topológico X sobre el que se distribuye un conjunto de datos S finito, así que los datos serán la guía para construir una triangulación que dé información del espacio topológico sobre el que se supone están muestreados los datos.

Al definir un objeto matemático se busca definir relaciones entre los distintos objetos que se consideran. En los complejos de cadena se construyen morfismos, denominados operadores frontera, que relacionan poliedros de distintas dimensiones de la triangulación. Para que estos morfismos estén bien definidos las triangulaciones deben seguir ciertas reglas, entre ellas se pide que los bordes de los objetos, con los que se hará la red que triangulará el espacio, estén bien ordenados, es decir que la intersección de dos celdas sea a su vez un elemento de la triangulación pero de una dimensión menor. En el libro *Topology (1930)*, Lefschetz define triangulación y la estructura que se obtiene de ella, a esta estructura le llama complejo simplicial. [Di. p38]

II.1 Cadenas de complejos

2.1 Definición. Sea V_K un conjunto de vértices. Un n -simplejo es una n -tupla $(v_1 v_2 \dots v_n)$ de elementos del conjunto de vértices.

Notemos que la definición 2.1 concuerda con la idea intuitiva que se describe al inicio de este capítulo, ya que un 0-simplejo orientado es un subconjunto que consta de un elemento; es decir, un punto. Un 1-simplejo orientado es un subconjunto de V_K que consta de dos elementos en los que el orden nos importa, al conjunto de dos elementos lo denotamos $\langle v_i, v_j \rangle$, con $v_i, v_j \in V_K$.

Diremos que un espacio se puede dividir en simplejos si se cumplen las siguientes condiciones:

- (i) Cada punto del espacio pertenece al menos a un simplejo.
- (ii) Cada punto del espacio pertenece a una cantidad finita de simplejos.
- (iii) Dos simplejos distintos (salvo orientación) tienen, o ningún punto en común, o un simplejo de dimensión menor en común.

Cuando podemos dividir un espacio en simplejos, es decir, cuando se puede triangular el espacio, podemos formar en el un complejo simplicial.

2.2 Definición. Un *complejo simplicial* K consiste de un conjunto no vacío de vértices V_K y un conjunto de simplejos S_K tales que:

- (i) Todo vértice de K es un simplejo. (es decir S_K contiene todos los 0-simplejos de V_K).
- (ii) Todo subconjunto no vacío de un simplejo es un simplejo. (es decir, si $s \in S_K$ y $s' \subset s$ es no vacío, entonces $s' \in S_K$).

Si tenemos $s \in S_K$ y $s' \subset s$ diremos que s' es una cara de s .

La siguiente figura es un ejemplo de un complejo simplicial.

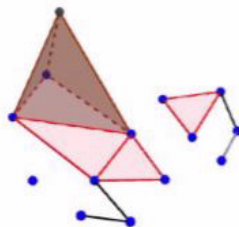


Figura 1.1: Complejo simplicial con: 14 vértices (0-simplejos), 17 aristas (1-simplejos), 7 triángulos (2-simplejos), 1 tetraedro (3-simplejo).

2.3 Definición [WK]. Un *complejo simplicial abstracto* \mathcal{K} es una colección finita de simplejos en los que la cara de cada simplejo $\sigma \in \mathcal{K}$ es también un simplejo en \mathcal{K} .

Ya que los elementos del complejo simplicial son las caras de un simplejo y a su vez son simplejos, la definición 2.3 generaliza el concepto de complejo simplicial. La idea es la misma que en la definición 2.2, pero en este caso las caras de simplejos son elementos de \mathcal{K} abstractos.

2.4 Definición[GM]. Dado $n \geq 0$, el *n-simplejo topológico* es el subespacio

$$\Delta^n = \{(t_0, t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum t_i = 1, t_i \geq 0 \forall i\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

Notemos que todo punto $(t_0, t_1, \dots, t_n) \in \Delta^n$ puede verse como una función:

$$\alpha : V_k \longrightarrow I$$

tal que $\sum \alpha(v_i) = 1$, donde v_i son los vértices del simplejo topológico \mathcal{K} .

2.5 Definición[GM]. Sea \mathcal{K} un complejo simplicial. Definimos al poliedro $|\mathcal{K}|$ del complejo \mathcal{K} , como el conjunto de funciones $\alpha : V_k \rightarrow I$, tales que:

- (i) $\{v | \alpha(v) \neq 0\}$ es un simplejo en \mathcal{K} .
- (ii) $\sum_{v \in V_k} \alpha(v) = 1$.

Además definimos una distancia para el conjunto $|\mathcal{K}|$ de la siguiente forma:

$$d(\alpha, \beta) = \sqrt{\sum (\alpha(v) - \beta(v))^2}$$

y así $|\mathcal{K}|_d$ es un espacio métrico.

2.6 Definición[GM]. Sea σ un simplejo. Definimos $|\sigma| \subset |\mathcal{K}|$ como

$$|\sigma| = \{\alpha \in |\mathcal{K}| \text{ tales que } \alpha(v) = 0 \forall v \notin \sigma\}$$

Notemos que si $\dim(\sigma) = n$, entonces $|\sigma|$ está en biyección con Δ^n , pues una función α que se anula fuera de σ puede ser vista como una $(n+1)$ -tupla $(t_1, t_2, \dots, t_n) \in \Delta^n$. Además con d podemos inducir una topología en $|\sigma|_d$ (que es homeomorfo a Δ^n). A la topología de $|\sigma|$ inducida por la métrica d la denotamos $|\sigma|_d$.

Utilizando la definición 2.4 y la métrica d en Δ^n le damos a $|\mathcal{K}|$ la topología siguiente:

- (i) $A \subset |\mathcal{K}|$ es abierto si, y sólo si, $A \cap |\sigma|_d$ es abierto en $|\sigma|_d$.
- (ii) $A \subset |\mathcal{K}|$ es cerrado si, y sólo si, $A \cap |\sigma|_d$ es cerrado en $|\sigma|_d$.

Denotaremos con $|\mathcal{K}|$ a este espacio topológico y lo llamaremos poliedro de \mathcal{K} .

2.7 Proposición[DW]. Sea \mathcal{K} un complejo simplicial. Entonces \mathcal{K} se puede particionar en subcomplejos $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \dots, \mathcal{K}_r$ ajenos dos a dos, tales que sus poliedros son las componentes conexas del poliedro $|\mathcal{K}|$ de \mathcal{K} .

Demostración. Sean A_1, A_2, \dots, A_r las componentes conexas del poliedro de \mathcal{K} y sea \mathcal{K}_j la colección de todos los simplejos σ de \mathcal{K} tales que $|\sigma| \subset A_j$. Si $\sigma \in \mathcal{K}_j$ entonces también las caras del simplejo σ pertenecen a \mathcal{K}_j . Por lo tanto, $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \dots, \mathcal{K}_r$ son subcomplejos de \mathcal{K} .

Las componentes conexas A_1, A_2, \dots, A_r de $|\mathcal{K}|$ son disjuntas dos a dos, entonces los subcomplejos $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \dots, \mathcal{K}_r$ son ajenos dos a dos. Además, como todo conexo en un espacio topológico está contenido en un componente conexo, si $\sigma \in \mathcal{K} \implies |\sigma| \in K_j$ para algún j , pues σ es conexo. Por lo tanto $\sigma \in \mathcal{K}_j$.

Entonces $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \dots \cup \mathcal{K}_r$ y $|\mathcal{K}| = |\mathcal{K}_1| \cup |\mathcal{K}_2| \cup \dots \cup |\mathcal{K}_r| \square$

2.8 Proposición. El poliedro $|\mathcal{K}|$ de un complejo simplicial \mathcal{K} es un espacio topológico conexo si y sólo si, cualesquiera dos vértices de \mathcal{K} se pueden conectar por un camino de fronteras.

Demostración. Si dos vértices de \mathcal{K} se pueden conectar por un número finito de segmentos entonces $|\mathcal{K}|$ es conexo.

Debemos demostrar que si $|\mathcal{K}|$ es conexo, entonces cualesquiera dos vértices de \mathcal{K} se pueden unir por un camino de fronteras.

Sea v_0 un vértice de \mathcal{K} , basta demostrar que todo vértice de \mathcal{K} puede unirse a v_0 por fronteras. Sea

$$\mathcal{K}_0 = \{\sigma \in \mathcal{K}_k \mid \text{los vértices de } \sigma \text{ se conectan a } v_0 \text{ por fronteras}\}$$

Si $\sigma \in \mathcal{K}_0$, todo vértice de σ puede unirse a v_0 por un camino de fronteras, entonces toda cara de σ es elemento de \mathcal{K}_0 . Por lo tanto \mathcal{K}_0 es un subcomplejo de \mathcal{K} .

Sea $\mathcal{K}_1 = \{v \in V_k \mid v \notin \mathcal{K}_0\}$. \mathcal{K}_1 es subcomplejo de \mathcal{K} , entonces $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 \cup \mathcal{K}_1$ y $\mathcal{K}_0 \cap \mathcal{K}_1 = \emptyset$. Además $|\mathcal{K}| = |\mathcal{K}_0| \cup |\mathcal{K}_1|$ y $|\mathcal{K}_0| \cap |\mathcal{K}_1| = \emptyset$. Pero los poliedros $|\mathcal{K}_0|, |\mathcal{K}_1|$ de $\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_1$ son subconjuntos cerrados de $|\mathcal{K}|$, por lo tanto, por conexidad de $|\mathcal{K}|$, $|\mathcal{K}_0| = \emptyset$ o $|\mathcal{K}_1| = \emptyset \implies |\mathcal{K}_1| = \emptyset$, pues $v_0 \in |\mathcal{K}_0|$.

Por lo tanto $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}$. \square

2.9 Definición. Sea \mathcal{K} un complejo simplicial y X un espacio topológico.

Decimos que X es *triangulable* si existe un homeomorfismo $f : |\mathcal{K}| \longrightarrow X$. Además llamamos a la pareja (\mathcal{K}, f) una *triangulación de X* .

De ahora en adelante denotaremos con Λ a un anillo conmutativo con 1. Para trabajar algebraicamente con los complejos simpliciales generamos un Λ -módulo con los q -simplejos como base para un q fijo.

2.10 Definición. Sea \mathcal{K} un complejo simplicial abstracto y (\mathcal{K}, f) una triangulación del espacio X . Denotaremos por $C_n(X, \mathcal{K})$ al Λ -módulo libre generado por los n -simplejos de \mathcal{K} .

Dado el conjunto $S_{\mathcal{K}}^n$ de n -simplejos, por definición de Λ -módulo libre generado tenemos que $C_n(X, \mathcal{K}) = \{f : S_{\mathcal{K}}^n \rightarrow \Lambda \mid f(\sigma) \neq 0 \text{ para un número finito de } \sigma \in S_{\mathcal{K}}^n\}$. Cuando no haya confusión lo denotaremos como $C_n(X)$.

Por definición de módulo generado por un conjunto podemos ver a los elementos del Λ -módulo libre como sumas formales, es decir: Si $x \in C_n(X)$, entonces $x = \sum r_i \sigma_i = \sum f(\sigma) \sigma$ en las que $r_i \in \Lambda$, $\sigma_i \in \mathcal{K}$ y σ_i un n -simplejo. En este caso:

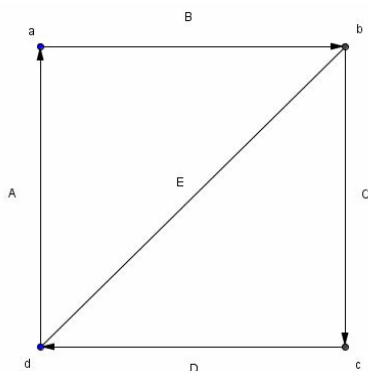
- (i) si $f, g \in C_n(X)$, la suma está definida como $(f + g)(\sigma) = f(\sigma) + g(\sigma)$ con $\sigma \in S_{\mathcal{K}}^n$,
- (ii) el inverso de un $f \in C_n(X)$ es $(-f)(\sigma) = -(f(\sigma))$
- (iii) para $r \in \Lambda$, $f \in C_n(X)$ se define $(rf) \in C_n(X)$ como $(rf)(\sigma) = r(f(\sigma))$, $\forall \sigma \in S_{\mathcal{K}}^n$.

Además el conjunto $\{\delta_\sigma : \sigma \in S_{\mathcal{K}}^n\}$ es una base para $C_n(X)$, en la que:

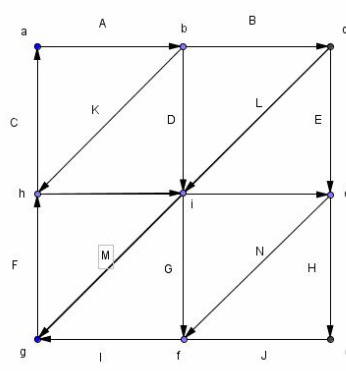
$$\delta_\sigma(x) \begin{cases} 1 & \text{si } x = \sigma \\ 0 & \text{si } x \neq \sigma \end{cases}$$

Notemos que si tomamos $\Lambda = \mathbb{Z}$ obtenemos que $C_n(X, \mathcal{K})$ es un grupo abeliano libre.

2.11 Ejemplo. Para triangular el círculo utilizamos que es homeomorfo a un rectángulo Sean $(\mathcal{K}_1, f), (\mathcal{K}_2, g)$ dos triangulaciones del círculo en \mathbb{R}^2 (figuras 1.2a y 1.2b) y sea $\Lambda = \mathbb{Z}$.



(Figura 1.2a) Triangulación 1 de S .



(Figura 1.2b) Triangulación 2 de S .

Notemos que podemos elegir las orientaciones de los simplejos y seguiremos teniendo un complejo simplicial, sin embargo una vez que elegimos una orientación, esta debe quedarse fija.

En la triangulación \mathcal{K}_1 (figura 1.2a) obtenemos los siguientes \mathbb{Z} -módulos:

- (i) $C_q(S, \mathcal{K}_1) = 0$ para todo $q = 2, \dots$
- (ii) $C_1(S, \mathcal{K}_1) = \bigoplus_{i=1}^5 \mathbb{Z}$
- (iii) $C_0(S, \mathcal{K}_1) = \bigoplus_{i=1}^4 \mathbb{Z}$.

En la triangulación \mathcal{K}_2 (figura 1.2b) obtenemos los siguientes \mathbb{Z} -módulos:

- (i) $C_q(S, \mathcal{K}_2) = 0$ para todo $q = 2, \dots$
- (ii) $C_1(S) = \bigoplus_{i=1}^{16} \mathbb{Z}$
- (iii) $C_0(S) = \bigoplus_{i=1}^9 \mathbb{Z}$.

Observemos en el ejemplo 2.11 que la triangulación de X no es única y que dos triangulaciones $(\mathcal{K}_1, f), (\mathcal{K}_2, g)$ distintas no generan el mismo \mathbb{Z} -módulo. Por lo tanto, los \mathbb{Z} -módulos generados por $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ no son invariantes del espacio topológico X .

2.12 Definición. Sean (\mathcal{K}, f) una triangulación de X y \mathcal{K}_q los q -simplejos de \mathcal{K} . El *operador frontera* $\partial_q : \mathcal{K}_q \rightarrow \mathcal{K}_{q-1}$ se define para cada elemento $\sigma = \langle v_0, v_1, \dots, v_q \rangle \in \mathcal{K}_q$ como:

$$\partial_q(\sigma) = \sum_{i=0}^q (-1)^i \langle v_0, v_1, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_q \rangle$$

donde $\langle v_0, v_1, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_q \rangle$ denota el $(q-1)$ -simplejo obtenido de las caras de $\langle v_0, v_1, \dots, v_q \rangle$ al remover el i -ésimo vértice.

Por ejemplo, consideremos un 2-simplejo $\langle v_0, v_1, v_2 \rangle \in \mathcal{K}_2$, entonces $\partial_2 \langle v_0, v_1, v_2 \rangle = \langle v_0, v_1 \rangle - \langle v_0, v_2 \rangle + \langle v_1, v_2 \rangle$.

Al generar los Λ -módulos $C_q(S, \mathcal{K})$, en donde S es el conjunto de vértices, con los elementos de \mathcal{K}_q como base se extiende la definición 2.12 linealmente y se obtienen morfismos $\partial_q : C_q(S, \mathcal{K}) \rightarrow C_{q-1}(S, \mathcal{K})$. Es decir, si $\sigma_i, \sigma_j \in C_q(S, \mathcal{K})$ y $r \in \Lambda \implies \partial_q(r\sigma_i + \sigma_j) = r\partial_q(\sigma_i) + \partial_q(\sigma_j)$

2.13 Definición[Ll]. Sea $\{C_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ una familia de Λ -módulos y $\{\partial_n : C_n \rightarrow C_{n-1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ una familia de morfismos de Λ -módulos tales que $\partial_n \circ \partial_{n-1} = 0$. Llamaremos *complejo de cadenas sobre Λ* a la pareja $C = \{C_n, \partial_n\}$ y lo escribimos

$$C : \dots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots$$

Dicho de otra manera, un complejo de cadenas es una sucesión semi-exacta descendente con índices en \mathbb{Z} .

2.14 Proposición. La colección de Λ -módulos $\{C_n(X, \mathcal{K})\}_{n \in \mathbb{Z}}$ y los operadores frontera $\{\partial_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, definidos como

$$(i) \quad C_n(X, \mathcal{K}) \begin{cases} C_n(X, \mathcal{K}) & \text{si } n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ 0 & \text{si } n \notin \mathbb{N} \cup \{0\} \end{cases}$$

$$(ii) \quad \partial_n \begin{cases} \partial_n & \text{si } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si } n \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

forman un complejo de cadenas.

Demostración. [WK] Al ser $C_n(X, \mathcal{K})$ el módulo libre generado por \mathcal{K}_n , basta ver que para un n -simplejo

$$\sigma = \langle v_0, v_1, \dots, v_n \rangle \in \mathcal{K}_n$$

se cumple que $\partial_n \circ \partial_{n-1}(\sigma) = 0$ para $n \in \mathbb{N}$. Aplicando el operador frontera a un n -simplejo obtenemos una suma de $(n-1)$ -simplejos.

Lo que queremos demostrar es que al aplicar el operador frontera a esta suma los $(n-2)$ -simplejos se cancelan entre ellos. Denotemos por $\sigma_{i,j}$ al simplejo que obtenemos de σ al remover los vértices i, j , así que al aplicar $\partial_n \circ \partial_{n-1}(\sigma)$ obtenemos una suma de $\sigma_{i,j} \in \mathcal{K}_{n-2}$.

Sin pérdida de generalidad supongamos que $i < j$. Cada $\sigma_{i,j}$ se puede obtener de σ de dos formas:

(i) La primera es eliminar el vértice v_i con el primer operador frontera ∂_n y luego remover el vértice v_j .

(ii) La segunda forma es eliminar primero el vértice v_j y luego remover el vértice v_i .

En el primer caso, como $j < i$, se elimina primero el vértice v_i y nos da un término de $(-1)^i$ en el índice $j-1$. Lo que obtenemos es $(-1)^i \langle v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_j, \dots, v_n \rangle$.

Con el primer operador frontera recorrimos los vértices mayores a $j-1$ una vez a la izquierda, entonces para eliminar el vértice v_j la segunda vez que aplicamos el operador frontera, tenemos que eliminar el término $j-1$. Por lo tanto, al aplicar el operador frontera por segunda vez, obtenemos un término $(-1)^{j-1}$. Entonces al aplicar $\partial_n \circ \partial_{n-1}(\sigma)$ al elemento $\sigma_{i,j}$ tenemos $(-1)^{i+j-1} \sigma_{i,j}$ al aplicar $\partial_n \circ \partial_{n-1}(\sigma)$.

En el segundo caso ∂_n elimina el vértice v_j primero e introduce una constante $(-1)^j$ y, como $i < j$, no recorremos el vértice v_i . Por lo tanto, al aplicar el operador frontera por segunda vez para eliminar el vértice i introducimos otra constante $(-1)^i$. Así que al aplicar $\partial_n \circ \partial_{n-1}(\sigma)$ obtenemos el término $\sigma_{i,j}$ de la siguiente forma $(-1)^{i+j}\sigma_{i,j}$.

Estas son las dos formas en las que podemos obtener la cara $\sigma_{i,j}$ así que finalmente tendremos esta cara de las dos maneras sumadas y esto nos da $(-1)^{i+j-1}\sigma_{i,j} + (-1)^{i+j}\sigma_{i,j} = 0$.

Para el caso en el que $n \notin \mathbb{N}$ el morfismo $\partial_n \circ \partial_{n-1}(\sigma) = 0$ trivialmente. \square

2.15 Definición. Sea $C = \{C_n, \partial_n\}$ un complejo de cadenas. A los elementos del núcleo del morfismo ∂_n se les denomina n -ciclos y se denotan con $\ker(\partial_n) = Z_n$.

2.16 Definición. Sea $C = \{C_n, \partial_n\}$ un complejo de cadenas. A los elementos de la imagen de ∂_n se les denomina $(n-1)$ -fronteras y se denotan con $\text{Im}(\partial_n) = B_{n-1}$.

2.17 Proposición. Sea $C = \{C_n, \partial_n\}$ un complejo de cadenas, entonces $B_n \subseteq Z_n$.

Demostración. Sea $x \in B_n = \text{Im}(\partial_{n+1})$. Existe un $(n+1)$ -simplejo y tal que $\partial_{n+1}(y) = x$. Entonces $0 = \partial_n(\partial_{n+1}(y)) = \partial_n(x)$, pues $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$. Por lo tanto $x \in \ker(\partial_n) = Z_n$. \square

2.18 Definición. Sean $C = \{C_n, \partial_n\}$ y $D = \{D_n, d_n\}$ dos complejos de cadena sobre Λ . Un *morfismo de complejos* $\varphi : C \rightarrow D$ es una familia de morfismos $(\varphi_n : C_n \rightarrow D_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de Λ -módulos tales que $d_n \circ \varphi_n = \varphi_{n-1} \circ \partial_n$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Es decir, que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow \varphi_n & & \downarrow \varphi_{n-1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & D_n & \xrightarrow{d_n} & D_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

2.19 Proposición. Sean $C = \{C_n, \partial_n\}$ y $D = \{D_n, d_n\}$ dos complejos de cadenas sobre Λ y sea $f : C \rightarrow D$ un morfismo de complejos de cadena. Entonces para cada $n \in \mathbb{Z}$:

- (i) $f_n(\ker(\partial_n)) \subseteq \ker(d_n)$
- (ii) $f_n(\text{Im}(\partial_{n+1})) \subseteq \text{Im}(d_{n+1})$

Además estas inclusiones inducen un morfismo $\tilde{f}_n : \frac{\ker(\partial_n)}{\text{Im}(\partial_{n+1})} \rightarrow \frac{\ker(d_n)}{\text{Im}(d_{n+1})}$, dado por $\tilde{f}_n(x + \text{Im}(\partial_{n+1})) = f_n(x) + \text{Im}(d_{n+1})$.

Demostración. Demostremos la primer contención: Sea $x \in \ker(\partial_n) \implies 0 = f_{n-1}(\partial_n(x)) = d_n(f_n(x)) \implies f_n(x) \in \ker(d_n)$.

Ahora demostremos la segunda contención: Sea $y \in \text{Im}(\partial_{n+1})$, entonces sea x tal que $y = \partial_{n+1}(x)$ con $x \in C_{n+1} \implies f_n(y) = f_n(\partial_{n+1}(x)) = d_{n+1}(f_{n+1}(x)) \implies f_n(y) \in \text{Im}(d_{n+1})$.

Sabemos que dados $\ker(\partial_n)$, $\ker(d_n)$ subgrupos normales de $\text{Im}(\partial_{n+1})$, $\text{Im}(d_{n+1})$ respectivamente y un morfismo $f_n : \ker(\partial_n) \rightarrow \ker(d_n)$ tal que $f_n(\text{Im}(\partial_{n+1})) \subseteq \text{Im}(d_{n+1})$, existe un único morfismo $\tilde{f}_n : \frac{\ker(\partial_n)}{\text{Im}(\partial_{n+1})} \rightarrow \frac{\ker(d_n)}{\text{Im}(d_{n+1})}$ tal que $\tilde{f}_n[g] = [f(g)]$ con $g \in \frac{\ker(\partial_n)}{\text{Im}(\partial_{n+1})} \square$

2.20 Definición. Un complejo $C' = \{C'_n, \partial'_n\}$ es un *subcomplejo* de un complejo $C = \{C_n, \partial_n\}$ si existe un monomorfismo $j = (j_n)_{n \in \mathbb{Z}} : C' \rightarrow C$.

2.21 Proposición. Los complejos de cadenas con los morfismos de complejos forman una categoría abeliana.

Demostración. La demostración se hace término a término. Los Λ -módulos tienen la estructura deseada y se cumple lo necesario en la definición 1.34 por la conmutatividad del morfismo entre complejos de cadena.

A la categoría de complejos de cadena la denotaremos como CC .

II.2 Homología simplicial

Cuando Poincaré comenzó a pensar en n -celdas como particiones de un espacio topológico compacto X se hicieron intentos para darle a la homología una estructura algebraica. En 1925 E. Noether observó que las fronteras de las n -cadenas definen un homomorfismo de \mathbb{Z} -módulos tales que $\partial_n \circ \partial_{n-1} = 0$ y con esto formó un \mathbb{Z} -módulo haciendo el cociente $\frac{Z_n}{B_n}$, al que se le llamó módulo de homología de $H_n(X, \mathbb{Z})$, con éste se obtenía información sobre invariantes del espacio sobre el que se está trabajando. Independientemente de E. Noether, en 1926 Vietoris también buscaba una definición de homología para espacios más generales que complejos simpliciales y llegó a la misma definición de homología como el grupo cociente $H_n = \frac{Z_n}{B_n}$.

El definir la homología como un objeto algebraico formado por el cociente permite aplicarla, además de a complejos simpliciales, a complejos de cadena formados por Λ -módulos en general. En *Über Abstrakte Topologie* (1929), Mayer, con apoyo de Vietoris, generalizó la definición de módulo de homología. Mayer consideró la homología para complejos de cadena con módulos libres, finitamente generados sobre un anillo Λ . [Di. 38-39]

En este capítulo definimos el módulo de homología para los complejos de cadena que definimos en la sección anterior y explicamos cómo éste nos da información del espacio topológico que se triangula.

2.22 Definición. Sea $C = \{C_n, \partial_n\}$ un complejo de cadenas. Se define el *módulo de homología de grado (o dimensión) n* de C , $H_n(C)$ como el cociente:

$$H_n(C) = \frac{\ker(\partial_n)}{\text{Im}(\partial_{n+1})}.$$

y para cada morfismo de complejos

$$f = (f_n)_{n \in \mathbb{Z}} : C = \{C_n, \partial_n\} \longrightarrow D = \{D_n, d_n\}$$

se define $H_n(f) = \tilde{f}_n$ con \tilde{f}_n como en la proposición 2.19.

2.23 Definición. Sea C un complejo de cadenas. A la dimensión de $H_n(C)$ se le denomina el n -ésimo número de Betti y se denotará como $\dim(H_n(C)) = \beta_n$.

Los números de Betti fueron llamados así por Henri Poincaré en honor a Enrico Betti y su obra *Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni* (1871). Intuitivamente los números de Betti nos dicen cuantos ciclos de dimensión n tenemos en el espacio topológico sobre el que estamos trabajando.

La definición de *módulo de homología de grado (o dimensión) n* de C utiliza un complejo de cadena $C = \{C_n, \partial_n\}$. Por la proposición 2.14, dada de una triangulación del espacio topológico X , tenemos un complejo de cadenas $C = \{C_n, \partial_n\}$. Sea $C = \{C_n, \partial_n\}$ el complejo de cadenas generado por la triangulación (\mathcal{K}, f) del espacio topológico X . Al *módulo de homología de grado (o dimensión) n* del complejo de cadenas C se le denota $H_n(\mathcal{K})$.

2.24 Teorema. Sean (\mathcal{K}_1, f) y (\mathcal{K}_2, g) dos triangulaciones de un espacio topológico X . Entonces $H_n(\mathcal{K}_1) \cong H_n(\mathcal{K}_2)$ para $n = 0, 1, \dots$

Este teorema nos dice que, si tenemos dos triangulaciones (\mathcal{K}_1, f) y (\mathcal{K}_2, g) de un espacio topológico X , la homología de los complejos de cadenas generados por las triangulaciones de X es un invariante de X . A partir de este punto (\mathcal{K}, f) será una triangulación del espacio topológico X . En [Hi. p120] se demuestra que los grupos de homología son un invariante en poliedros y la generalización para objetos topológicos se trabajan en el capítulo dos del mismo libro.

2.25 Proposición [DW]. Sea \mathcal{K} un complejo simplicial. Si $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \dots \cup \mathcal{K}_r$, con $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \dots, \mathcal{K}_r$ ajenos dos a dos. Entonces

$$H_n(\mathcal{K}) = H_n(\mathcal{K}_1) \oplus H_n(\mathcal{K}_2) \oplus \dots \oplus H_n(\mathcal{K}_r)$$

para todo entero n .

Demostración. Para el caso en el que $n > \dim(\mathcal{K})$ tenemos que $H_n(\mathcal{K}) = 0$.

Sea c una n -cadena de \mathcal{K} , entonces c se puede expresar de forma única como $c = c_1 + c_2 + \dots + c_r$, donde c_j es una n -cadena de \mathcal{K}_j . Por lo tanto,

$$C_n(\mathcal{K}) \cong C_n(\mathcal{K}_1) \oplus C_n(\mathcal{K}_2) \oplus \dots \oplus C_n(\mathcal{K}_r)$$

Sea z un n -ciclo de \mathcal{K} (es decir $\partial_n(z) = 0$). Podemos expresar a z de forma única como $z = z_1 + z_2 + \dots + z_r$ y $\partial_n(z_j) = 0 \forall j$. Por lo tanto,

$$Z_n(\mathcal{K}) \cong Z_n(\mathcal{K}_1) \oplus Z_n(\mathcal{K}_2) \oplus \dots \oplus Z_n(\mathcal{K}_r)$$

Y análogamente

$$B_n(\mathcal{K}) \cong B_n(\mathcal{K}_1) \oplus B_n(\mathcal{K}_2) \oplus \dots \oplus B_n(\mathcal{K}_r)$$

Por lo tanto existe un isomorfismo bien definido

$$\begin{array}{ccc} \psi : H_n(\mathcal{K}_1) \oplus H_n(\mathcal{K}_2) \oplus \dots \oplus H_n(\mathcal{K}_r) & \longrightarrow & H_n(\mathcal{K}) \\ ([z_1], [z_2], \dots, [z_r]) & \longmapsto & [z_1 + z_2 + \dots + z_r] \end{array}$$

donde $[z_j]$ denota la clase de homologías de un n -ciclo de \mathcal{K}_j . \square

Un ciclo para dimensiones $n = 1, 2$ se puede visualizar en un espacio topológico como un agujero en un círculo o el espacio dentro de una esfera. En los siguientes teoremas se analiza la homología de dimensión 0.

2.26 Teorema. Sea \mathcal{K} un complejo simplicial. Si $|\mathcal{K}|$ es conexo, entonces $H_0(\mathcal{K}) \cong \mathbb{Z}$.

Demostración. Sean v_1, v_2, \dots, v_r los vértices de un complejo simplicial \mathcal{K} . Toda 0-cadena de \mathcal{K} puede ser expresada de forma única como una suma de la forma

$$n_1 \langle v_1 \rangle + n_2 \langle v_2 \rangle + \dots + n_r \langle v_r \rangle$$

con $n_i \in \mathbb{Z}$.

Sea $\varepsilon : C_0(\mathcal{K}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ tal que

$$\varepsilon(n_1 \langle v_1 \rangle + n_2 \langle v_2 \rangle + \dots + n_r \langle v_r \rangle) = n_1 + n_2 + \dots + n_r.$$

Si y y z son puntos finales de una frontera de \mathcal{K} , $\varepsilon(\partial_1(\langle y, z \rangle)) = \varepsilon(\langle z \rangle - \langle y \rangle) = 0$. Por lo tanto $\varepsilon \circ \partial_1 = 0 \implies B_0(\mathcal{K}) \subset \ker(\varepsilon)$.

Sean u_0, u_1, \dots, u_m vértices de \mathcal{K} que determinan un camino por fronteras. Entonces

$$\langle u_m \rangle - \langle u_0 \rangle = \partial_1\left(\sum_{j=1}^m \langle u_{j-1}, u_j \rangle\right) \in B_0(\mathcal{K})$$

Como \mathcal{K} es conexo todo par de vértices de \mathcal{K} , cualesquiera dos vértices se pueden unir por un camino de frontera (Proposición 2.12). Entonces deducimos que $\langle z \rangle - \langle y \rangle \in B_0(\mathcal{K}) \forall y, z \in V_K$

Por lo tanto, si $c \in \ker(\varepsilon)$ y $c = \sum_{j=1}^r n_j \langle v_j \rangle$, tenemos que $\sum_{j=1}^r n_j = 0$.

Entonces $c = \sum_{j=2}^r n_j (\langle v_j \rangle - \langle v_1 \rangle)$. Pero $\langle v_j \rangle - \langle v_1 \rangle \in B_0(\mathcal{K})$, entonces $c \in B_0(\mathcal{K})$. Así tenemos que $\ker(\varepsilon) \subset B_0(\mathcal{K})$.

De lo anterior concluimos que $\ker(\varepsilon) = B_0(\mathcal{K})$.

Además $\varepsilon : C_0(\mathcal{K}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ es epimorfismo y su núcleo es $B_0(\mathcal{K})$, entonces, por primer teorema de isomorfismo [Ll p25], existe un isomorfismo de $\frac{C_0(\mathcal{K})}{B_0(\mathcal{K})}$ a \mathbb{Z} .

Como $\partial_0 = 0$ (por definición), $C_0(\mathcal{K}) = Z_0(\mathcal{K})$.

Por lo tanto concluimos que $H_0(\mathcal{K}) = \frac{C_0(\mathcal{K})}{B_0(\mathcal{K})} \cong \mathbb{Z}$. \square

De este teorema y la proposición 2.7 obtenemos el siguiente corolario.

2.27 Corolario. Sea \mathcal{K} un complejo simplicial. Entonces

$$H_0(\mathcal{K}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} \text{ r veces}$$

donde r es el número de componentes conexas de $|\mathcal{K}|$.

Notemos que r es el 0-ésimo número de Betti β_0 .

En la proposición 2.28 se observa que el *módulo de homología de grado* (o *dimensión*) n de C es una aplicación funtorial, esto permite trabajar con ella utilizando las herramientas vistas en la primer parte en el capítulo de Categorías.

2.28 Proposición. La asignación $H_* : CC \longrightarrow Mod_\Lambda$ es funtorial covariante aditiva.

Demostración. Sean $C = \{C_n, \partial_n\}, C' = \{C'_n, \partial'_n\}, C'' = \{C''_n, \partial''_n\}$ complejos de cadenas y sean $C \xrightarrow{f} C' \xrightarrow{g} C''$ morfismos de complejos de cadenas.

Sea $x + \text{Im}(\partial''_{n+1}) \in H_n(C)$, entonces $H_n(g \circ f)(x + \text{Im}(\partial''_{n+1})) = g_n f_n(x) + \text{Im}(\partial''_{n+1})$. Entonces

$$\begin{aligned} & (H_n(g) \circ H_n(f))(x + \text{Im}(\partial''_{n+1})) \\ &= H_n(g)(f_n(x) + \text{Im}(\partial''_{n+1})) \\ &= g_n(f_n(x) + \text{Im}(\partial''_{n+1})) \end{aligned}$$

Ahora veamos que se comporta bien con la identidad:

Sea $H_n(1_C) : H_n(C) \longrightarrow H_n(C)$. Entonces

$$\begin{aligned} & H_n(1_C)(x + \text{Im}(\partial''_{n+1})) \\ &= 1_{C_n}(x) + \text{Im}(\partial''_{n+1}) \\ &= x + \text{Im}(\partial''_{n+1}) \\ \implies & H_n(1_C) = 1_{H_n(C)} \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que es un funtor covariante.

Veamos ahora que el funtor es aditivo:

Sean $f, g \in Hom_{CC}(C, D)$ morfismos de complejos de cadena. Entonces

$$\begin{aligned} & H_n(f + g)(x + \text{Im}(\partial''_{n+1})) \\ &= (f_n + g_n)(x) + \text{Im}(\partial''_{n+1}) \\ &= f_n(x) + g_n(x) + \text{Im}(\partial''_{n+1}) \\ &= f_n(x) + \text{Im}(\partial''_{n+1}) + g_n(x) + \text{Im}(\partial''_{n+1}) \\ &= H_n(f)(x + \text{Im}(\partial''_{n+1})) + H_n(g)(x + \text{Im}(\partial''_{n+1})) \square \end{aligned}$$

Queremos entender que información obtenemos de la homología simplicial sobre los complejos de cadena al tener que sus homologías son homomorfas. Para esto se define el concepto *homotopía*.

2.29 Definición. Sean $C = \{C_n, \partial_n\}$ y $D = \{D_n, d_n\}$ dos complejos de cadenas y $\varphi, \varphi' : C \rightarrow D$ dos morfismos de cadenas. Diremos que φ es *homotópico a φ'* si existe una familia de morfismos de \mathbb{R} -módulos que llamaremos $h = \{h_n : C_n \rightarrow D_{n+1} | n \in \mathbb{Z}\}$ tales que $d_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ \partial_n = \varphi - \varphi'$ para toda $n \in \mathbb{Z}$ en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 C : & \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & \cdots \\
 & & & \varphi'_{n+1} \downarrow \downarrow \varphi_{n+1} & \swarrow h_n & \varphi'_n \downarrow \downarrow \varphi_n & \swarrow h_{n-1} & \varphi'_{n-1} \downarrow \downarrow \varphi_{n-1} & & \\
 D : & \cdots & \longrightarrow & D_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & D_n & \xrightarrow{d_n} & D_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-1}} & \cdots
 \end{array}$$

La familia $h = \{h_n\}$ se llama homotopía de cadenas, y diremos que φ es homotópica a φ' . En símbolos escribiremos $h : \varphi' \sim \varphi : C \rightarrow D$.

2.30 Teorema. Sean $C = \{C_n, \partial_n\}$ y $D = \{D_n, d_n\}$ dos complejos de cadenas. Si $\varphi' \sim \varphi : C \rightarrow D$ entonces $H_*(\varphi) = H_*(\varphi') : H_*(C) \rightarrow H_*(D)$.

Demostración [L11, p.87]. Sea $h : \varphi' \sim \varphi$ la homotopía. Sea $x \in H_n(C)$, $z \in Z_n(C)$, y $p : Z_n(C) \rightarrow H_n(C) = \frac{Z_n(C)}{B_n(C)}$ tal que $p(x) = x$ es la proyección en el cociente.

Entonces

$$\varphi_n(z) - \varphi'_n(z) = (d_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ \partial_n)(z) = (d_{n+1} \circ h_n)(z)$$

pues $\partial_n(z) = 0$ y $z \in Z_n(C)$. Como $(d_{n+1} \circ h_n)(z) \in B_n(D)$, $H_n(\varphi)(z) = H_n(\varphi')(z) \implies H_n(\varphi) = H_n(\varphi') \forall n \in \mathbb{Z}$. \square

En el teorema 2.30 se observa que, en caso de tener morfismos homotópicos, los módulos de homología de C y de D son isomorfos. Sin embargo, en el ejemplo 2.31 se demuestra que el inverso de este teorema es falso.

2.31 Ejemplo Sea $\Lambda = \mathbb{Z}$. Sean $C = \{C_n, \partial_n\}$, $D = \{D_n, d_n\}$ complejos de cadenas y $\varphi, \varphi' : C \rightarrow D$ dos morfismos de cadenas definidos de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 C : & \dots & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{0} & \langle a_1 \rangle & \xrightarrow{\partial_1} & \langle a_0 \rangle & \xrightarrow{0} & 0 & \longrightarrow & \dots \\
 & & & \varphi_2 = 0 \downarrow & & \varphi_1 \downarrow & & \downarrow \varphi_0 = 0 & & & & \\
 D : & \dots & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{0} & \langle t_1 \rangle & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & 0 & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

Denotamos como $\langle a_i \rangle$ al \mathbb{Z} -módulo generado por el elemento a_i . Definimos:

- (i) $C_n = 0$ para $n \in \mathbb{Z} - \{1, 2\}$, $C_1 = \mathbb{Z} = \langle a_1 \rangle$, $C_2 = \mathbb{Z} = \langle a_2 \rangle$ y $\partial_1(a_1) = 2a_0$.
- (ii) $D_n = 0$ para $n \in \mathbb{Z} - \{1\}$, $D_1 = \mathbb{Z} = \langle t_1 \rangle$ y $d_n = 0 \forall n$.
- (iii) $\varphi_1(a_1) = t_1$ y $\varphi' = 0$.

Entonces $\varphi_{n-1} \circ \partial_n = d_n \circ \varphi_n = 0 \forall n \in \mathbb{Z}$. Y al calcular las homología tenemos que $H_n(\varphi) = H_n(0)$ pero $\varphi \approx 0$.

2.32 Ejemplo. En este ejemplo triangulamos el plano proyectivo utilizando la representación topológica del mismo con identificaciones como en la figura 1.3.

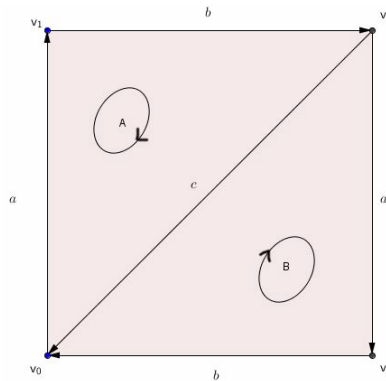


Figura 1: (Figura 1.3) Plano Proyectivo

Utilizamos como anillo \mathbb{Z} , entonces $H_* : CC \rightarrow Mod_{\mathbb{Z}}$ es un funtor covariante de la categoría de complejos de cadena a la categoría de grupos abelianos. Por la identificación en la triangulación del plano proyectivo tenemos dos 0-simplejos, un 1-simplejo y un 2-simplejo, de esto se obtiene el siguiente complejo de cadenas:

$$0 \longrightarrow C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

$$\text{gen}\{A, B\} \qquad \text{gen}\{a, b, c\} \qquad \text{gen}\{x, y\}$$

Ahora calculemos $H_0(P)$ donde P es el plano proyectivo, para ello notemos que $Z_0 = \text{gen}\{x, y\}$, pues ∂_0 es el morfismo 0 (dado que no hay objetos de menor dimensión a 0).

La imagen de los complejos es $B_0 = \text{gen}\{y-x, x-y, 0\}$, por lo tanto $H_0(P) = \frac{Z_0}{B_0} = \frac{\text{gen}\{x, y\}}{\text{gen}\{y-x, x-y, 0\}} \cong \frac{\text{gen}\{x, y\}}{\text{gen}\{y-x\}} \cong \mathbb{Z}$.

Ahora calculemos $H_1(P)$, primero calculemos Z_1 y B_1 y para ello pensemos en todos los 1-simplejos que tenemos en el espacio triangulado:

$$Z_1 = \ker(\partial_1) \implies \begin{aligned} \partial_1(\langle a \rangle) &= y - x \\ \partial_1(\langle b \rangle) &= \langle x - y \rangle \\ \partial_1(\langle c \rangle) &= 0 \end{aligned} \implies Z_1 = \text{gen}\{a + b, 0\}$$

$$B_1 = \text{Im}(\partial_2) \implies \begin{aligned} \partial_2(\langle A \rangle) &= a + b + c \\ \partial_2(\langle B \rangle) &= a + b - c \end{aligned} \implies B_1 = \text{gen}\{a+b+c, a+b-c\}$$

$$\text{Entonces } H_1(P) = \frac{\text{gen}\{a+b, 0\}}{\text{gen}\{a+b+c, a+b-c\}} \cong \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}.$$

Por último calculemos $H_2(P)$:

$Z_2 = \ker(\partial_2) \iff \partial_2(A) = a+b+c$ y $\partial_2(B) = a+b-c$, tenemos que un elemento de $C_2(P)$ se vera de la forma $\alpha A + \beta B$ y al aplicar el operador frontera a este elemento obtendremos: $\partial_2(\alpha A + \beta B) = \alpha \partial_2(A) + \beta \partial_2(B) = \alpha(a+b+c) + \beta(a+b-c) = (\alpha + \beta)(a+b) + (\alpha - \beta)c = 0 \iff \alpha + \beta = 0$ y $\alpha - \beta = 0 \iff \alpha = \beta = 0$, pues elegimos como anillo \mathbb{Z} .

$B_2 = \text{Im}(\partial_3) = 0$, pues no tenemos simplejos de dimensión 3.

$$\text{Entonces } H_2(P) = \frac{Z_2}{B_2} = 0.$$

En el ejemplo 2.32 vemos como la elección del anillo \mathbb{Z} influye en el cálculo de la homología. Al elegir como anillo \mathbb{Z} obtenemos un grupo abeliano finito y éste se descompone en subgrupos libres y subgrupos de torsión. Entonces, utilizando distintos anillos, obtendremos módulos de homología distintos.

Parte III

Filtraciones

Las filtraciones son un método para construir complejos de cadenas a partir de un conjunto de datos S . El conjunto de datos S es el que se quiere analizar y obtener de ellos información acerca del espacio topológico sobre el que se supone que están muestreados.

En este capítulo se estudia la construcción de complejos simpliciales utilizando datos y justificamos el porqué este complejo es útil utilizando el Teorema de Nervio, también llamado Teorema de Čech, que se demuestra en [Bj]. Otra forma de crear un complejo a partir de los datos es utilizando complejos de Vietoris-Rips.

Los complejos de Čech reciben este nombre por Eduard Čech, aunque también fueron desarrollados independientemente por Pavel Aleksandrov. Por otro lado, los complejos de Rips, también llamados complejos Vietoris-Rips, fueron construidos por Leopold Vietoris en *Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen* (1927) intentando extender el concepto de homología simplicial y redescubiertos por Eliyahu Rips en los años ochenta del siglo pasado, quién los utilizó para el estudio de grupos hiperbólicos.

El resto de este capítulo supondremos que tenemos una cantidad finita de datos $S \subset \mathbb{R}^n$. Además supondremos que los datos S están en un espacio topológico X , incluido en un espacio euclidiano Y .

III.1 Complejos de Čech.

3.1 Definición. Sea Y un espacio euclidiano, $X \subset Y$ un espacio topológico y S un conjunto de datos. Una *cubierta abierta* $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ es una colección de abiertos $U_i \subseteq X$ tales que $S \subseteq \cup_i U_i$.

3.2 Definición. Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ una cubierta abierta de S . El nervio $N \subset P(I)$ de \mathcal{U} es tal que:

- (i) $\emptyset \in N$
- (ii) Si $\cap_{j \in J} U_j \neq \emptyset$ para $J \subseteq I$, entonces $J \in N$.

La cubierta de S no es única, sin embargo habrá cubiertas cuyos nervios nos son más útiles, pues de ellas se obtiene mejor información del espacio topológico X . Para obtener información del espacio topológico X se utilizan complejos simpliciales, uno de los complejos simpliciales que se utiliza es el complejo de Čech.

3.3 Definición. Sea X un espacio topológico incluido en $Y \subset \mathbb{R}^n$ y sea $B_\epsilon(x) = \{y \in Y | d(x, y) < \epsilon, x \in S\}$ la bola abierta de radio ϵ centrada en $x \in S$. Dado $S \subset Y$ un conjunto de puntos y $\mathcal{U}_\epsilon = \{B_\epsilon(x) | x \in S, \epsilon \in \mathbb{R}\}$ una cubierta abierta de S , el *complejo de Čech*, denotado $C_\epsilon(S)$, es el nervio de la cubierta \mathcal{U}_ϵ .

3.4 Proposición. El complejo de Čech es un complejo simplicial.

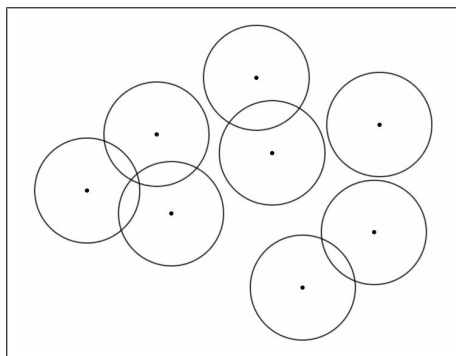
Demostración. Sea $S = \{x_i\}_{i=1}^M \subset Y$ un conjunto finito de datos, $\mathcal{U}_\epsilon = \{B_\epsilon(x) | x \in S, \epsilon \in \mathbb{R}\}$ una cubierta abierta de S , N el nervio de la cubierta \mathcal{U}_ϵ y $\epsilon \in \mathbb{R}$. Si $\sigma = \langle x_1, \dots, x_n \rangle_{n \in \mathbb{N}} \in N$, entonces $\bigcap_{x_i \in \sigma} B_\epsilon(x_i) \neq \emptyset \implies$ Si $\tilde{\sigma}$ es el $n - |J|$ simplejo al que se le quitan los elementos $\{x_j\}_{j \in J}$, $\forall J \in I$, $\bigcap_{x_i \in \tilde{\sigma}} B_\epsilon(x_i) \neq \emptyset$, entonces $\forall J \in I \tilde{\sigma} \in N$. Por lo tanto las caras de σ son elementos en N . \square

Veamos con un ejemplo cómo se construye a partir de un conjunto de datos S un complejo de Čech con un radio r .

3.5 Ejemplo. Supongamos que tenemos un conjunto de datos S en \mathbb{R}^2 . Para cada $x \in S$ tenemos una bola de radio r centrada en x .

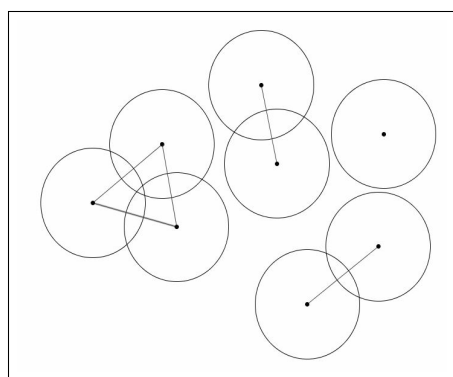


(Figura 3.5.1) Conjunto de datos S

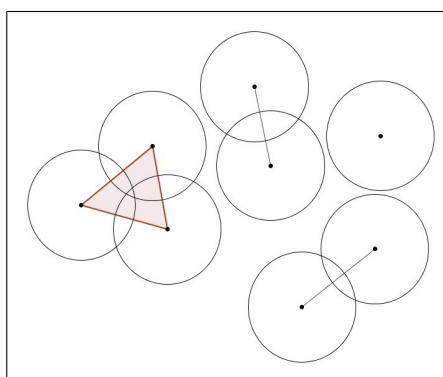


(Figura 3.5.2) Cubriente de los datos S

Al tener una intersección de dos elementos existe un simplejo de dimensión 1 (figura 3.5.3). Cuando 3 bolas se intersectan se construyen los 2-simplejos (figura 3.5.4).



(Figura 3.5.3) 1-simplejos



(Figura 3.5.4) 1 y 2-simplejos

El nervio N de la cubierta $\mathcal{U}_r = \{B_\epsilon(v_j) \mid v_j \in S, r \in \mathbb{R}\}$ es el conjunto de simplejos que se construyen de las intersecciones, este nervio es el complejo de Čech.

Notemos que al agregar los simplejos de dimensión 2, todos los simplejos de dimensión 1 siguen siendo parte del conjunto en el nervio N , por lo que efectivamente las caras de simplejos son también simplejos. El complejo de Čech es el que nos queda en la figura 3.5.4. Tenemos 8 0-simplejos, 5 1-simplejos y 1 2-simplejo.

La cadena de complejos a la que aplicaremos la homología simplicial se construye utilizando los simplejos de N de dimensiones $n = 1, \dots, n$ como generadores de los C_n .

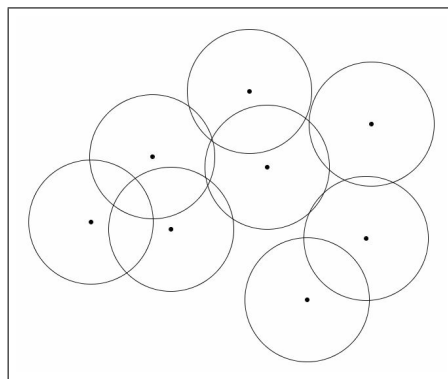
En el ejemplo 3.5 obtenemos un complejo con 4 componentes conexas y un ciclo. Por lo tanto, por el corolario 2.27, $H_0(X) = \mathbb{Z}^4$, y al no tener ciclos $H_i(X) = 0 \forall i = 1, \dots$

Notemos que si el radio r en el ejemplo 3.5 fuera menor, la única intersección de tres bolas desaparecería, por lo tanto no tendríamos el 2-simplejo y tendríamos un ciclo de dimensión 1, por lo que las homologías serían:

- (i) $H_0(X) = \mathbb{Z}^4$
- (ii) $H_1(X) = \mathbb{Z}$.
- (ii) $H_i(X) = 0 \forall i = 2, \dots$

En el ejemplo 3.6 el radio r_0 será mayor al radio r del ejemplo 3.5.

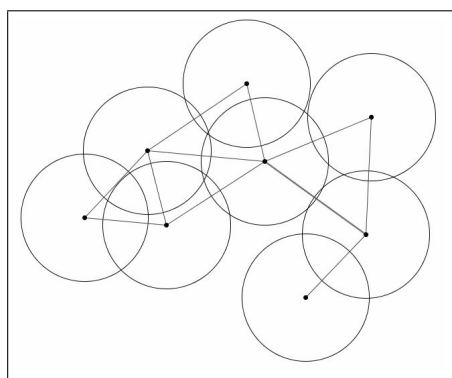
3.6 Ejemplo. Consideremos un conjunto de datos $S = \{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, como en conjunto S en el ejemplo 3.5 y una cubierta $\mathcal{U}_{r_0} = \{B_{r_0}(v_j) \mid v_j \in S, r_0 \in \mathbb{R}\}$ con $r_0 > r$.



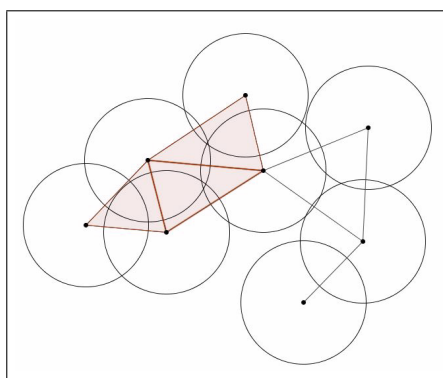
(Figura 3.6.1) $B_{r_0}(v_i)$ de los datos S .

Notemos que $\{v_j\} \in C_{r_0}(S) \forall v_j \in S$, pues $v_j \in B_{r_0}(v_j) \forall j$.

Si $B_{r_0}(v_j) \cap B_{r_0}(v_i) \neq \emptyset \implies \{v_j, v_i\} \in C_{r_0}(S)$. Por lo tanto los 1-simplejos $\{v_j, v_i\}$ se construyen al tener intersecciones de dos bolas (figura 3.6.2). Análogamente los 2-simplejos se construyen de intersecciones entre tres bolas (figura 3.6.3).



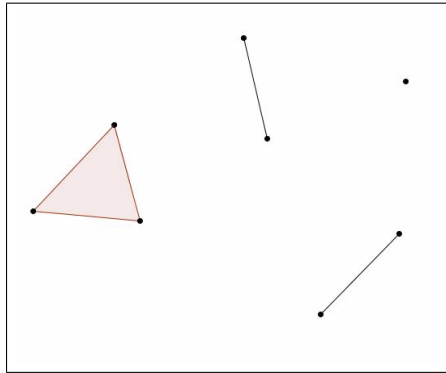
(Figura 3.6.2) 1-Simplejos



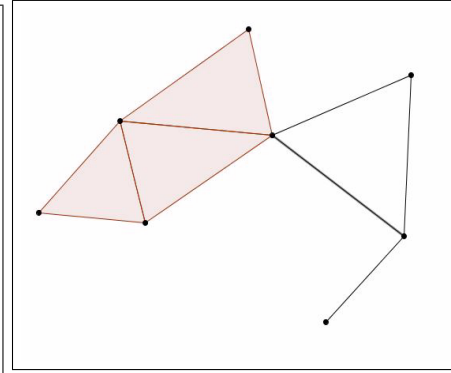
(Figura 3.6.3) 2-simplejos

En este ejemplo hay 8 0-simplejos, 11 1-simplejos y 3 2-simplejos.

En los ejemplos 3.5 y 3.6 se generan dos complejos de Čech distintos con $r < r_0$. (figuras 3.6.4 y 3.6.5).



(Figura 3.6.4) Complejo de Čech utilizando radio r



(Figura 3.6.5) Complejo de Čech utilizando radio r_0

Notemos que el complejo simplicial generado por la cubierta \mathcal{U}_r está contenido en el complejo generado por la cubierta abierta \mathcal{U}_{r_0} . Es decir, los elementos del nervio de la cubierta \mathcal{U}_r son elementos del nervio generado por la cubierta \mathcal{U}_{r_0} .

En el complejo generado por la cubierta abierta \mathcal{U}_r se tienen 4 componentes conexas y en el complejo generado por la cubierta abierta \mathcal{U}_{r_0} hay únicamente una componente conexa. También notemos que en el primer complejo simplicial (Figura 3.6.4) no hay ciclos de dimensión 1 y en el segundo complejo simplicial (Figura 3.6.5) sí tenemos un ciclo de dimensión 1.

Al comparar los complejos simpliciales generados por las cubiertas \mathcal{U}_{r_0} y \mathcal{U}_r se observa que al tener radios distintos las características de los complejos simpliciales que generamos son distintas, estas características se ven reflejadas en el complejo de cadenas generado por cada complejo simplicial y en sus homologías. Esto es fundamental para comprender porqué se utiliza el concepto de filtración para aplicar la homología persistente. La homología persistente nos dirá que características persisten al tener radios distintos; es decir, que características aparecen y que características desaparecen.

3.7 Teorema (Teorema de Čech). Sea \mathcal{U} una cubierta de un espacio topológico compacto X tal que la intersección de una cantidad finita de conjuntos de \mathcal{U} es contraíble y distinta del vacío, entonces X es homotópicamente equivalente al nervio \mathcal{N} de \mathcal{U} .

Notemos que en la construcción del complejo de Čech se utilizan bolas abiertas, estas son conexas y contraíbles. Por lo tanto, por el teorema 3.7, podemos asegurar que al tener una cubierta abierta del espacio X , podemos utilizar el nervio de esta para hacer una aproximación al espacio topológico usando una cubierta con los datos de S como vértices. Además notemos que $C_0(S) = \emptyset$, pues no tenemos ninguna bola que intersekte y que C_∞ es un simplejo de dimensión $(|S| - 1)$, pues todas las bolas se intersectan.

El conjunto S y la elección del radio r determinan un complejo de cadenas de forma única. El objetivo de esta tesis es estudiar el espacio topológico sobre el que se supone que se toma la muestra de datos S , por lo tanto buscamos que la elección del radio r no influya en este análisis. El capítulo de filtraciones (III.4) da la estructura necesaria para que no se deba elegir un radio r para estudiar la topología de los datos S .

III.2 Complejos de Vietoris-Rips.

Al construir el complejo de Čech observamos que al analizar intersecciones de i bolas con $i = 1, \dots, |S|$, y hacer esto para cada bola, la construcción es computacionalmente muy cara. En la construcción de complejos de Rips no se analiza la intersección de cada bola i con las demás, por lo tanto el cómputo es menos complicado y computacionalmente menos caro.

Los complejos de Rips no parten de una cubierta del espacio topológico, estos se construyen creando una gráfica con los datos S . A pesar de ser un algoritmo más sencillo, en el complejo de Rips se generan más simplejos que los simplejos generados en el complejo de Čech.

3.8 Definición [Z]. Sea $S = \{v_i\}_{i=1, \dots, n} \subseteq Y$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}$, llamaremos a $G_\varepsilon = (S, E_\varepsilon)$ la gráfica de ε -vecindades en S , donde

$$E_\varepsilon = \{\{v, u\} \mid d(v, u) \leq \varepsilon, v \neq u \in S\}.$$

3.9 Definición. Sea $G_\varepsilon = (S, E_\varepsilon)$ la gráfica de ε -vecindades en S . Se denomina *cliqué de una gráfica* al subconjunto de vértices que induce una gráfica completa. Un cliqué se denomina *maximal* si no se pueden agregar elementos a la gráfica.

3.10 Definición. Se denomina *complejo de cliqué*, al complejo simplicial cuyos simplejos son los cliqués maximales de la gráfica. Al complejo de cliqué de la gráfica de ε -vecindades se le denomina *complejo de Vietoris-Rips* y se denota $R_\varepsilon(S)$.

Lo que estamos haciendo en la gráfica de vecindades es conectar dos puntos que estén más cercanos que ε . Los simplejos se generan utilizando los cliqués maximales de la gráfica.

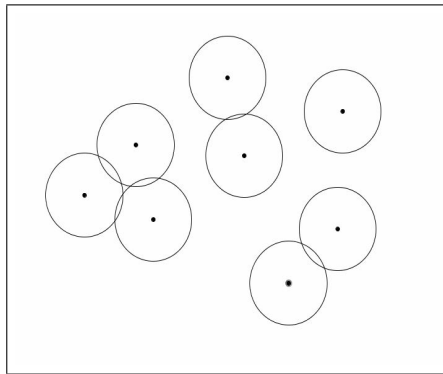
3.11 Proposición. El complejo de Vietoris-Rips es un complejo simplicial.

Demostración. Sean $\varepsilon \in \mathbb{R}$ y $R_\varepsilon(S)$ el complejo de Vietoris-Rips. Sea $\sigma \in R_\varepsilon(S)$, entonces σ es vértice en la gráfica completa de ε -vecindades. Como este complejo es el que tiene los cliqués maximales, la cara de σ es también elemento del cliqué maximal. Por lo tanto la cara de σ es también elemento de $R_\varepsilon(S)$. \square

3.12 Ejemplo. Sea $S \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto de datos $\{v_i\}_{i=1,\dots,n}$. Los vértices $\{v_i\}$ son el centro de bolas de radio r_0 , con estas bolas obtenemos las r_0 -vecindades en S (Figura 3.6.6)

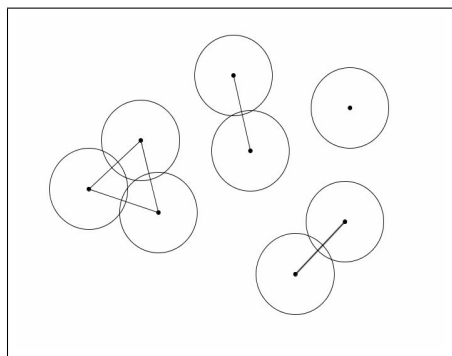


(Figura 3.6.5) Conjunto de datos S .

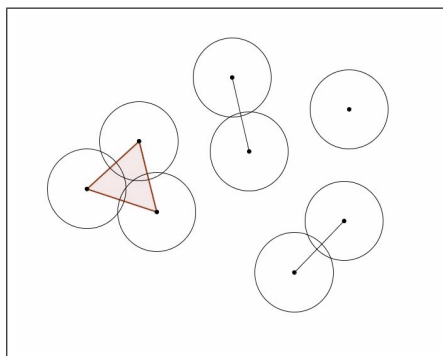


(Figura 3.6.6) $B_{r_0}(v_i)$ de los datos S .

Con las r_0 -vecindades construimos el cliqué maximal (Figuras 3.6.6 y 3.6.7).



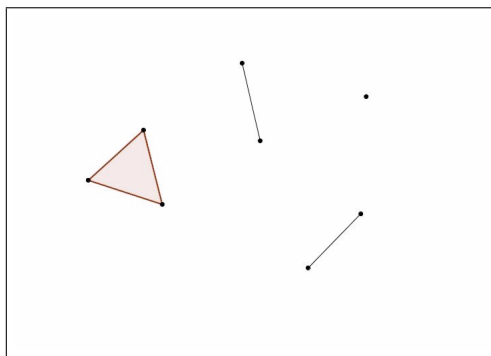
(Figura 3.6.6) 1-simplejos



(Figura 3.6.7) 1 y 2 simplejos.

Notemos que al no tener intersección entre las tres vecindades de los puntos de la izquierda, si construimos un complejo de Čech con este radio, no se genera un 2 simplejo. Al construir el complejo de Vietoris-Rips completamos la gráfica de las r -vecindades de S y obtenemos un complejo de dimensión 2 que no se obtiene en el complejo de Čech.

En este ejemplo tenemos 8 0-simplejos, que son los vértices, 6 1-simplejos que es cuando unimos dos vértices que se intersecten para tener cliques maximales y tenemos 1 2-simplejo, pues al unir los vértices tenemos un clique máximo formado por tres 1-complejos que están lo suficientemente cerca. La estructura que obtenemos finalmente formada por los complejos es la siguiente (Figura 3.6.8):



(Figura3.6.8) Complejos de Rips.

Los complejos de Čech y de Rips son los que estudiaremos para entender la topología sobre la que se encuentran los datos S . Para utilizar el complejo de Vietoris-Rips que es computacionalmente más rápido, debemos ver que este efectivamente nos proporciona información de nuestro espacio topológico X . Gracias al Teorema de Čech podemos aproximar por el complejo de Čech el espacio topológico X utilizando una cubierta con los datos. Lo que haremos a continuación es comparar los complejos de Čech y de Vietoris-Rips para justificar el porqué podemos utilizar también el complejo de Vietoris-Rips.

3.13 Lema. Para un conjunto finito $S \subset \mathbb{R}^n$ y para todo $\epsilon > 0$, tenemos que $C_{\frac{\epsilon}{2}}(S) \subseteq R_{\epsilon}(S) \subseteq C_{\epsilon}(S)$.

Demostración.[CHO] Sea $\sigma = \langle v_0, \dots, v_k \rangle$ un k -simplejo arbitrario de $C_{\frac{\epsilon}{2}}(S)$.

Las bolas de radio $\frac{\epsilon}{2}$ centradas en el vértice $v_i \in \mathbb{R}^n$ tienen una intersección común en \mathbb{R}^n (por definición de complejo de Čech). Sea p un punto en la intersección, entonces $\forall 0 \leq i, j \leq k$, $\|v_i - v_j\| \leq \|v_i - p\| + \|p - v_j\| \leq \frac{2\epsilon}{2} = \epsilon$. Por lo tanto $\sigma \in R_{\epsilon}(S)$.

Sea $\sigma = \langle v_0, \dots, v_k \rangle \in R_{\epsilon}(S)$ un k -simplejo arbitrario, entonces

$$\|v_0 - v_i\| \leq \epsilon \quad \forall i = 0, \dots, k \implies v_0 \in B_{\epsilon}(v_i)$$

Por lo tanto todas las bolas centradas en los vértices v_i tienen intersección distinta del vacío en \mathbb{R}^n .

Por lo tanto $\sigma = \langle v_0, \dots, v_k \rangle \in C_{\epsilon}(S)$.

Entonces tenemos las inclusiones de $C_{\frac{\epsilon}{2}}(S) \subset R_{\epsilon}(S)$ y de $R_{\epsilon}(S) \subset C_{\epsilon}(S)$, que a su vez son monomorfismos de complejos.

De esto se concluye que $C_{\frac{\epsilon}{2}}(S) \subseteq R_{\epsilon}(S) \subseteq C_{\epsilon}(S) \quad \square$

El Lema 3.13 muestra que se pueden acotar complejos de Vietoris-Rips con complejos de Čech, es decir que al tener características topológicas en un complejo de Čech que se mantengan al aumentar el radio, también los complejos de Rips reflejaran esta característica. Análogamente, si hay características que aparecen o desaparecen para algún ϵ en el complejo de Čech, existe un ϵ_0 tal que el complejo Rips también de esta información.

3.14 Corolario. Para un conjunto finito $S \subset \mathbb{R}^n$ y para todo $\varepsilon > 0$, tenemos que $R_\varepsilon(S) \subseteq C_\varepsilon(S) \subseteq R_{2\varepsilon}(S)$.

El Corolario 3.14 muestra que existe una aproximación de complejos de Vietoris-Rips a complejos de Čech. Aunque esta aproximación no sea idéntica es útil, pues al calcular los complejos para distintos radios lo que nos interesa es ver cómo va cambiando la topología. Gracias a este Lema podemos ver que si tenemos una inclusión $R_{\varepsilon_0} \hookrightarrow R_{\varepsilon_1}$ tenemos una propiedad topológica de un complejo de Čech C_{ε_0} cuando $2 \leq \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}$.

III.3 Filtraciones.

Hemos construido complejos de un conjunto de datos $S \subset \mathbb{R}^n$, sin embargo el complejo que construyamos dependerá del ε que elijamos. El ε que elegimos influye en la estructura de los datos que obtenemos, esto vuelve el análisis para un ε fijo muy subjetivo.

Para resolver la subjetividad al elegir ε , lo que se hace es ir haciendo crecer ε . Sabemos que para un $\varepsilon_0 < \varepsilon_1$ tenemos una inclusión de los complejos simpliciales que se generan (es decir, $\mathcal{K}_{\varepsilon_0} \hookrightarrow \mathcal{K}_{\varepsilon_1}$), entonces podemos hacer crecer ε y estudiar cómo cambia la topología con los complejos que se generan para distintos radios. De esta forma se analiza la evolución de la topología y no se considera un ε fijo.

Para tener una idea clara de lo que sucede con los radios y con los complejos utilizamos el complejo de Čech. Para estudiar cómo van cambiando las características de la topología se define el concepto de homología persistente que se describe en la siguiente parte de la tesis. Por el momento estudiamos los objetos de los que se construyen las homologías para el análisis topológico de datos.

3.15 Definición. Dado un complejo simplicial abstracto \mathcal{K} , una filtración es un conjunto ordenado de subcomplejos de \mathcal{K}_i de \mathcal{K} con $i \in I$, e I un conjunto de índices totalmente ordenado, tal que si $i < j$ entonces $\mathcal{K}_i \subseteq \mathcal{K}_j$. El orden total de todos los subcomplejos se llama filtro.

Dado un conjunto de datos $S = \{v_i\}_{i=1, \dots, n}$, se tiene un número finito de intersecciones entre bolas de radio r centradas en los vértices v_i . Por lo tanto tendremos un número finito de simplejos que generan los Λ -módulos del complejo de cadenas. Al aplicarle la homología al complejo de cadenas que se obtiene de los datos obtendremos las características de la topología sobre la que se encuentran los datos. En cada nivel de la filtración $i \in I$ pueden aparecer o desaparecer ciclos. Además para S finito habrá una cantidad a los más numerable de ε 's para los cuales, al aumentar el radio, existe un cambio en la homología simplicial del complejo de cadenas que se genera de los datos. Entonces, si tenemos que el índice de las filtraciones es $I \subset \mathbb{R}$ podemos utilizarlo en realidad como $I \subseteq \mathbb{Z}^+$. Veamos, por ejemplo, que al analizar la homología de grado 0 con un ε muy pequeño, existen tantas componentes conexas como elementos tenemos en S y para un ε suficientemente grande existe una única componente conexa.

Parte IV

Persistencia y homología.

A partir de que se definió el concepto de homología, se continuó el estudio de la misma y se desarrolló un concepto dual llamado cohomología. En las notas de J. Leray (1946) se construye por primera vez la sucesión espectral. No definimos lo que es una secuencia espectral, pero en la construcción de Leray se observan conceptos que si son relevantes para el desarrollo de la homología persistente. Aunque la construcción de Leray tiene un objetivo distinto, en ella se utiliza una secuencia de submódulos de cohomología para un módulo de homología de grado n . Un año después J-L. Kozul utilizó la secuencia de submódulos y definió un cociente entre los ciclos y fronteras de operadores entre los submódulos que cumplen la característica que le pedimos a los operadores frontera de complejos de cadenas. El cociente definido por Kozul es el cociente con el que definimos homología persistente en este capítulo, sin embargo Kozul lo define para otro tipo de objetos algebraicos y el concepto de persistencia aun no existía. Además Kozul da a los módulos y a los n -ciclos estructura de módulo graduado semejante a la estructura que damos a la homología persistente en la última parte de la tesis. [Di. 132-136]

El concepto de persistencia fue utilizado por primera vez en 1990 en el trabajo de Frosini, Ferri y colaboradores suyos en Italia. En su trabajo se estudio el concepto de homología persistente de grado 0. Posteriormente en 1999, Vanessa Robins define persistencia para estudiar teoría fractal y formas. Y en el año 2000 Edelsbrunner, Letscher y Zomorodian introdujeron, independientemente, la homología persistente con un algoritmo para calcularla.

Antes de definir persistencia en el año 2000, en 1994 Edelsbrunner publicó un artículo titulado *An incremental algorithm for Betti numbers of simplicial complexes*, éste fue el inicio de la homología persistente. La homología persistente es la herramienta que se utiliza para el análisis de ciclos de dimensión n que aparecen y desaparecen en los distintos niveles de las filtraciones. Después, en el 2002, Edelsbrunner, Letscher y Zomorodian publicaron un artículo sobre topología persistente y a partir

de ese momento surge el estudio de la persistencia tanto teóricamente como computacionalmente.

Posteriormente, en el 2005, Zomorodian y Carlsson introducen el concepto de módulo de persistencia. En 2007 Cohen-Steiner, H. Edelsbrunner, and J. Harer demuestran el teorema de estabilidad para diagramas de persistencia, el cual justifica hacer estadística a los datos que se suponen sobre un espacio topológico X . El teorema de estabilidad utiliza que pequeñas perturbaciones en los datos inducen pequeñas perturbaciones en la homología persistente que se obtendrá de ellos.

IV.1 Homología persistente.

Dado un complejo de cadenas C , una filtración es un conjunto de subcomplejos ordenados C_i de C indizados positivamente. Además si $i < j$ entonces $C_i \subseteq C_j$. Como trabajamos con un conjunto finito de datos de los que generamos los Λ -módulos de los complejos de cadenas, obtenemos un conjunto de C_i 's finitamente generado.

Se utilizan supra índices para indicar el complejo de la filtración en el que estamos, es decir, se denota con (C^i, ∂^i) al i -ésimo complejo de cadenas. Así mismo, al k -ésimo ciclo se le denota con Z_k^i , la k -ésima frontera con B_k^i y la k -ésima cadena con C_k^i . Al k -ésimo módulo de homología se le denota con H_k^i . Para entender las definiciones e ideas en éste capítulo consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathcal{C}^{i-1} : & \dots & \longrightarrow & C_{k+1}^{i-1} & \xrightarrow{\partial_{k+1}^{i-1}} & C_k^{i-1} & \xrightarrow{\partial_k^{i-1}} & C_{k-1}^{i-1} & \xrightarrow{\partial_{k-1}^{i-1}} & \dots \\
 & \downarrow \subseteq & & \downarrow \subseteq & & \downarrow \subseteq & & \downarrow \subseteq & & \\
 \mathcal{C}^i : & \dots & \longrightarrow & C_{k+1}^i & \xrightarrow{\partial_{k+1}^i} & C_k^i & \xrightarrow{\partial_k^i} & C_{k-1}^i & \xrightarrow{\partial_{k-1}^i} & \dots \\
 & \downarrow \subseteq & & \downarrow \subseteq & & \downarrow \subseteq & & \downarrow \subseteq & & \\
 \mathcal{C}^{i+1} : & \dots & \longrightarrow & C_{k+1}^{i+1} & \xrightarrow{\partial_{k+1}^{i+1}} & C_k^{i+1} & \xrightarrow{\partial_k^{i+1}} & C_{k-1}^{i+1} & \xrightarrow{\partial_{k-1}^{i+1}} & \dots
 \end{array}$$

4.1 Definición. Para todo entero positivo p , la p -persistencia del k -ésimo módulo de homología es:

$$H_k^{i,p} = \frac{Z_k^i}{(B_k^{i+p} \cap Z_k^i)}$$

y el k -ésimo número p -persistente de Betti de C^i , denotado por $\beta_k^{i,p}$, es el rango de $H_k^{i,p}$.

Notemos que como $\mathcal{C}^i \subseteq \mathcal{C}^{i+p}$, entonces $H_k^{i,p}$ está bien definido. Esta contención induce una inclusión de $\mathcal{C}^i \hookrightarrow \mathcal{C}^{i+p}$ y esta es en cada k -ésimo módulo, por lo tanto también tenemos una contención de los elementos en $B_k^i, Z_k^i \subseteq C_k^i \subseteq C_k^{i+p}$.

La fórmula que tenemos es similar a la de la homología simplicial, sin embargo aquí se analizan los ciclos de dimensión k en K^{i+p} creados por el subcomplejo K^i . Estos ciclos existen en todo complejo K_j con $i < j < i + p$.

El rango de $H_k^{i,p}$ nos da el número de clases que estaban en la homología i y que continúan existiendo en la homología $i + p$.

Al tener las inclusiones tenemos también un funtor inducido por la homología $\iota^{i,j} : H_n(C^i) \longrightarrow H_n(C^j)$. que relaciona distintos niveles de la filtración. La persistencia de las clases en la homología se puede definir también como $H_n^{i,j} = \text{Im}(\iota^{i,j})$. Con esta definición se obtienen las clases que provienen de clases anteriores en la filtración. Además de esta definición también se obtiene el número de ciclos de dimensión n que tenemos que ya existían en la filtración j y provienen de algún elemento de la filtración i .

4.2 Definición. Dada una filtración, para $i < j$, definimos la (i, j) -homología persistente de C , denotada $H_*^{i,j}(C)$, como la imagen del homomorfismo inducido por la inclusión $\iota : H_*(C^i) \longrightarrow H_*(C^j)$.

La definición de la forma 4.1 es como definen homología persistente Gunnar Carlson y Afra Zomorodian en "Computing Persistent Homology". La definición 4.2 es la que utilizan Herbert Edelsbrunner y John Harer en "Persistent Homology - A Survey" Afra Zomorodian en "Topological Data Analysis". La primer definición es más cómoda para concluir con el teorema 5.20, que da estructura de módulo graduado a la homología persistente y la definición 4.2 es más cómoda para ilustrar con códigos de barra lo que sucede en las filtraciones.

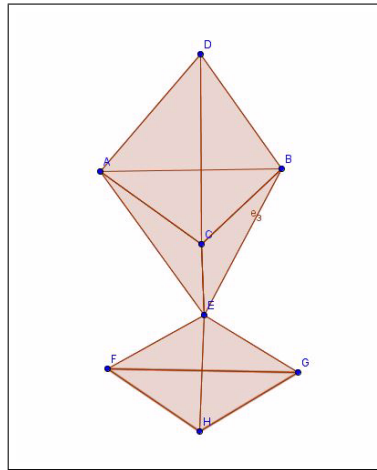
Decimos que una clase γ de nivel n "nace" en el tiempo i si $\gamma \notin H_n^{i-1,i}(C)$ y γ es clase en $H_n^i(C)$. Decimos que la clase de nivel n "muere" en el tiempo $j > i$ si existe una clase β que nace en el tiempo $k < i$ con $\iota^{k,j}(\beta) = \iota^{i,j}(\gamma)$ o que $\iota^{i,j+1}(\gamma) = 0$. Es decir, cuando la imagen de dos clases sea la misma, la clase que persiste es la más antigua. De esta forma tendremos intervalos (i, j) de los que se obtiene información sobre el momento en la filtración en la que nace una clase y el momento en el que muere.

En el ejemplo 4.4 se muestran los intervalos de nacimiento y muerte. Además se ilustra cómo se construye un diagrama llamado código de barras a partir de los intervalos de nacimiento y muerte. Al número de clases que persisten del momento i al momento j y que son linealmente independientes se le llama multiplicidad de (i, j) .

4.3 Definición. La *multiplicidad de grado n* del intervalo (i, j) es $\mu_n^{(i,j)} = \beta_n^{(i,j-1)} - \beta_n^{(i-1,j-1)} - \beta_n^{(i,j)} + \beta_n^{(i,j-1)}$ donde $\beta_n^{(i,j)} = \dim(H_n^{i,j}(C)) = \dim(\iota_n^{i,j} : H_n^i(C) \rightarrow H_n^j(C))$.

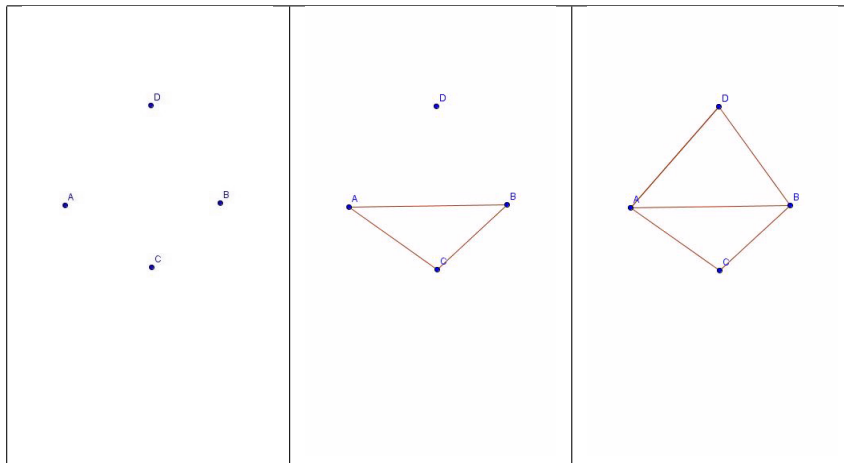
En el siguiente ejemplo creamos una filtración, mostramos los códigos de barras de la misma y calculamos las multiplicidades de cada intervalo.

4.4 Ejemplo. La figura a la que le aplicaremos la filtración es la siguiente:



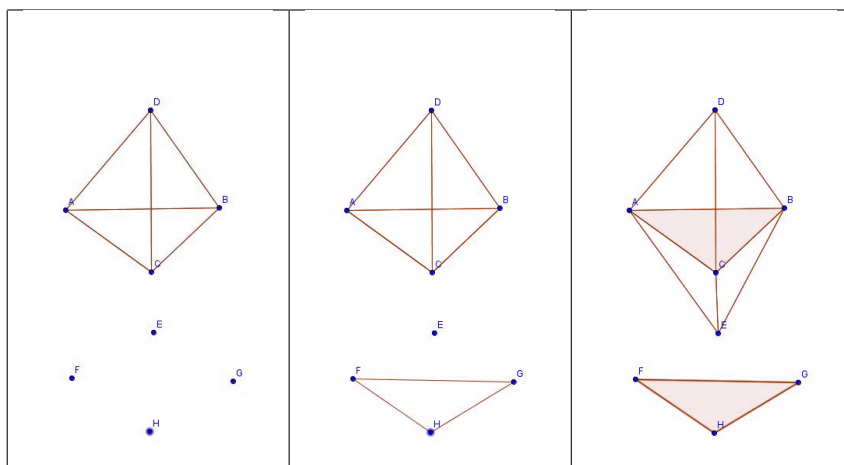
Esta figura consiste de tres tetraedros. Los dos tetraedros de la parte de arriba están rellenos y el de abajo es vacío.

Las siguientes imágenes ilustran como se crea la filtración a este objeto.



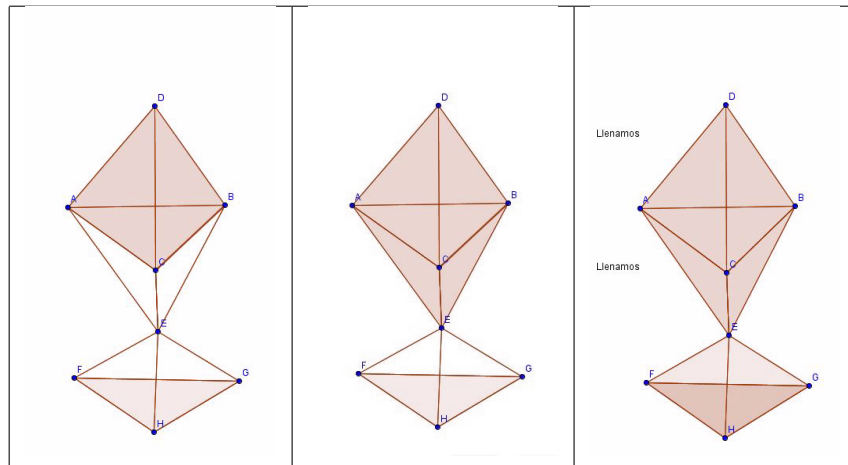
Estas son las filtraciones 0,1 y 2. La primer filtración incluye los vértices $\{A, B, C, D\}$, en la siguiente filtración se agregan los segmentos $\{AB, BC, CD\}$ y en la tercera se agregan los segmentos $\{AD, DB\}$.

Notemos que en esta filtración se tienen 4 componentes conexas al inicio y se finaliza teniendo únicamente una. También empezamos sin ciclos de dimensión 1 y terminamos con dos ciclos de dimensión 1. Las siguientes imágenes muestran las filtraciones 3,4 y 5.



En estos niveles se agregan los vértices $\{E, F, G, H\}$ y el segmento $\{DC\}$, con esto se generan 4 componentes conexas y dos ciclos de dimensión 1. En el cuarto nivel se agregan los segmentos $\{FG, GH, HF\}$, con lo que se genera un nuevo ciclo de dimensión 1.

En la quinta filtración se agregan los triángulos $\{ABD, FGH\}$. La imagen en H_1^5 del ciclo generado por $\{AB, BC, CA\}$ y el generado por $\{FG, GH, HF\}$ tienen como imagen 0 al ya no ser ciclos de dimensión 1, entonces así mueren dos ciclos de dimensión 1. En la quinta filtración también se generan tres nuevos ciclos de dimensión 1 al agregar los segmentos $\{AE, EC, BE\}$.

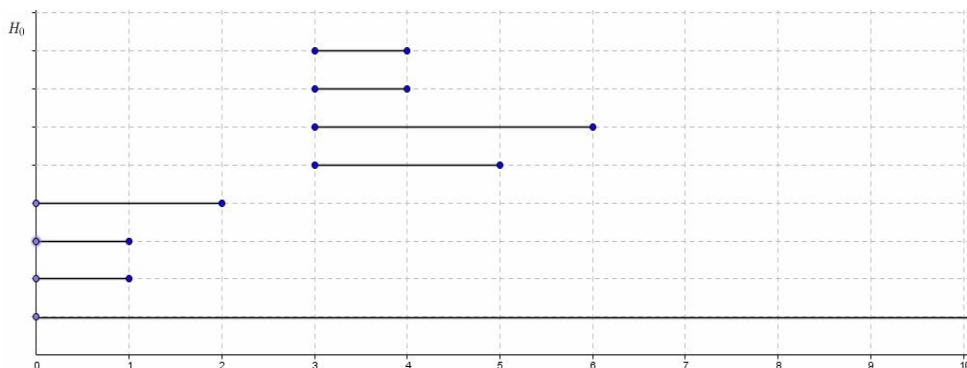


En la sexta filtración se agregan los segmentos $\{HE, GE, EF\}$ generando 3 nuevos ciclos de dimensión 1. Además se agregan los triángulos $\{ACD, CDB, DBA\}$, con estos triángulos se genera un ciclo de dimensión 2 y mueren 3 ciclos de dimensión 3.

En la séptima filtración agregamos los triángulos $\{AEC, ECB, EBA\}$, de esta forma se mueren 3 ciclos de dimensión 1 y nace un ciclo de dimensión 2. Para terminar con la filtración se agrega $\{ABCD, ABCE\}$, con estos tetraedros rellenos mueren dos ciclos de dimensión 2 y se agregan los triángulos $\{FGE, FHE, HGE\}$, con lo que mueren tres ciclos de dimensión 1 y nace un ciclo de dimensión 2.

Con esta información de nacimiento y muerte de clases en distintas filtraciones veamos el diagrama de barras de H_0, H_1 y H_2 .

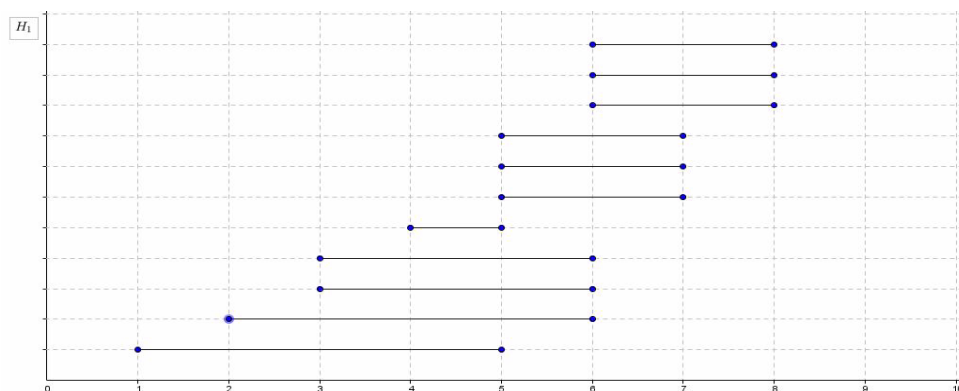
El código de barras de H_0 es el siguiente:



En este código de barras se observan 4 clases en el primer nivel, cada clase corresponde a una componente conexa. En la segunda filtración se unen los segmentos $\{AB, BC, CA\}$, entonces la imagen de tres clases es una clase que representa a la componente conexa formada por $\{AB, BC, CA\}$. D sigue siendo una componente conexa, es decir, una clase en $H_0^2(C)$. Luego, en la segunda filtración la imagen de la clase de D es igual a la imagen de la clase de A . El análisis para las demás filtraciones en análogo.

Notemos que en este diagrama el rango $\beta_0^{i,j}$ de cada inclusión es el número de clases que existen antes de i o que nacen en i y que continúan en j . Para calcular las multiplicidades podemos usar esto, o ver cuántas clases nacen en i y mueren en j . Por lo tanto las multiplicidades son: $\mu_0^{(0,\infty)} = 1$; $\mu_0^{(0,1)} = 2$; $\mu_0^{(0,2)} = 1$; $\mu_0^{(3,4)} = 2$; $\mu_0^{(3,5)} = 1$ y $\mu_0^{(3,6)} = 1$.

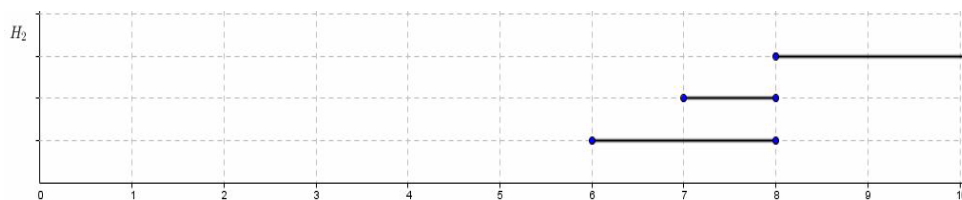
El código de barras de H_1 es el siguiente:



En este código de barras se observan los ciclos que nacen y que mueren en las filtraciones i y j respectivamente. Las multiplicidades se calculan utilizando el código de barras como en el diagrama de H_0 o con la fórmula que se tiene en la definición. Calculemos algunas multiplicidades de la segunda manera. $\beta_1^{(5,6)}$ es el número de ciclos de dimensión 1 que existían antes de 5 y que nacieron en 5 y aun persisten en 6, por lo tanto, como existen 6 ciclos, $\beta_1^{(5,6)} = 6$. Con el mismo razonamiento $\beta_1^{(4,7)} = 0$, $\beta_1^{(5,7)} = 0$ y $\beta_1^{(4,6)} = 3$, por lo tanto $\mu_1^{(5,7)} = 6 - 0 - 3 + 0 = 3$, que concuerda con el número de ciclos que nacen en 5 y mueren en 7.

Entonces $\mu_1^{(5,7)} = 6$; $\mu_1^{(1,5)} = 1$; $\mu_1^{(2,6)} = 1$; $\mu_1^{(3,6)} = 2$; $\mu_1^{(4,5)} = 1$ y $\mu_1^{(6,8)} = 1$.

Finalmente el diagrama de barras de H_2 se ve de la siguiente forma:



En este diagrama vemos reflejado lo que mencionamos sobre los ciclos de dimensión dos al generar la filtración. Tenemos un ciclo que nace en la

sexta filtración y muere en la octava, otro ciclo de dimensión 2 que nace en la séptima filtración y muere en la octava y un ciclo que nace en la octava filtración y persiste hasta el infinito.

En este ejemplo observamos la utilidad del código de barras. Este diagrama ilustra el comportamiento de los datos en la filtración y nos permite calcular rangos y multiplicidades fácilmente.

IV.2 Módulos de persistencia.

4.5 Definición[Ch]. Sea T un conjunto ordenado. Un *módulo de persistencia* V sobre T es una familia indexada de Λ -módulos $\{V_s | s \in T\}$ y una familia doblemente indexada de transformaciones lineales $\{v_s^t : V_s \longrightarrow V_t | s \leq t\}$ tales que $v_r^t \circ v_s^r = v_s^t$ cuando $s \leq r \leq t$. Además $v_t^t = id_{V_t}$. Un módulo de persistencia se denomina *finito* si cada componente del módulo es finitamente generado y existe $m \in T$ tal que las transformaciones v_s^t son isomorfismos si $t \geq m$.

Utilizamos como T los números reales o un subconjunto de ellos.

4.6 Definición. El k -ésimo *módulo de persistencia* H_k es la familia de los k -ésimos módulos de homología H_k^i junto con los morfismos de módulos $\tilde{f}_k^i : H_k^i \longrightarrow H_k^{i+1}$.

El homomorfismo de módulo es el inducido por el funtor al morfismo de las cadenas que generamos a su vez con los simplejos de dimensión k , así que para cada k tenemos una familia de Λ -módulos que están relacionados por morfismos inducidos por la inclusión. Entonces \mathcal{H}_k es un módulo de persistencia, pues

4.7 Proposición. Un módulo de persistencia es un funtor que va de \mathbb{R} (como categoría de la recta real) a la categoría de Λ -módulos.

Demostración. La demostración se basa en ver a \mathbb{R} como la recta real cuyo único morfismo es $s \rightarrow t$ cuando $s \leq t$. La unicidad del morfismo corresponde a que todas las composiciones posibles de $v_{r_0}^t \circ v_{r_1}^{r_0} \circ \dots \circ v_s^{r_n}$ de V_s a V_t son iguales entre ellas y, en particular, son iguales a v_s^t .

4.8 Ejemplo. La homología es un funtor de la categoría de complejo de cadenas sobre un anillo Λ a ${}_{\mathbb{Z}}Mod$. Si $\Lambda = F$ es un campo los Λ -módulos en los complejos de cadena son espacios vectoriales. También construimos filtraciones que generan distintos complejos de cadenas para distintos radios ε . Aplicando a los distintos complejos de cadena el funtor de homología $H_n(_)$ obtenemos $\{H_n(\mathcal{C}^\varepsilon) | \varepsilon \geq 0\}$ y los morfismos de los módulos de persistencia son los inducidos por el funtor $H_n(_)$ a las inclusiones de los complejos de cadena.

En el caso de tener un número finito de datos tendremos un número finito de complejos de cadena \mathcal{C}^ϵ distintos. Entonces, si tenemos los cambios de complejo en los radios $\varepsilon_0 = i_0, \dots, \varepsilon_n = i_n$, toda la información del módulo de persistencia se puede estudiar en un diagrama finito de la forma: $H_n(\mathcal{C}^{i_0}) \longrightarrow H_n(\mathcal{C}^{i_1}) \longrightarrow \dots \longrightarrow H_n(\mathcal{C}^{i_n})$.

A continuación daremos a los módulos de persistencia estructura de categoría.

4.9 Definición. Sean \mathcal{U}, \mathcal{V} dos módulos de persistencia. Un homomorfismo $\phi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ es un conjunto de morfismos $\{\phi_t : U_t \longrightarrow V_t | t \in \mathbb{R}\}$ tal que $\phi_t \circ u_s^t = v_s^t \circ \phi_s$ para todo $s \leq t$. Es decir, que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccc} U_s & \xrightarrow{u_s^t} & U_t \\ \phi_s \downarrow & & \downarrow \phi_t \\ V_s & \xrightarrow{v_s^t} & V_t \end{array}$$

A la categoría de módulos de persistencia la denotaremos como ${}_{\Lambda}Mod^{(\mathbb{R}, \leq)}$. Los objetos en ${}_{\Lambda}Mod^{(\mathbb{R}, \leq)}$ son los módulos de persistencia y los homomorfismos son los definidos en 4.9. Los módulos de persistencia una familia de Λ -módulos y los homomorfismos tales que el diagrama en la definición 4.9 conmute, entonces ${}_{\Lambda}Mod^{(\mathbb{R}, \leq)}$ es una categoría.

4.10 Definición. La *suma directa* $W = U \oplus V$ de dos módulos de persistencia U, V se define como: $W_t = U_t \oplus V_t$, $w_s^t = u_s^t \oplus v_s^t$.

Diremos que un diagrama de persistencia W es *indescomponible* si $W = U \oplus V$ implica que $V = 0$ o $U = 0$.

Dos módulos de persistencia \mathcal{U}, \mathcal{V} serán isomorfos si existen morfismos $\phi \in Hom(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ y $\psi \in Hom(\mathcal{V}, \mathcal{U})$ tales que $\phi\psi = 1_{\mathcal{V}}$ y $\psi\phi = 1_{\mathcal{U}}$. Para analizar la topología generada por datos esta definición de isomorfismo entre módulos graduados es muy rigurosa, ya que en una muestra podemos tener perturbaciones pequeñas en los datos que no son significativas en la muestra pero algebraicamente si es suficiente para que ya no tengamos un isomorfismo. Por lo tanto se define una relación más débil entre módulos de persistencia a la que se le denomina intercalados- δ . La δ nos permite cuantificar la incertidumbre en los datos.

4.11 Definición [Ch. p39]. Sean \mathcal{U}, \mathcal{V} módulos de persistencia sobre \mathbb{R} y sea $\delta \in \mathbb{R}$. Un *homomorfismo de grado δ* es una colección ϕ de mapeos lineales $\phi_t : U_t \longrightarrow V_{t+\delta}$ para todo t tal que cuando $s \leq t$ tenemos que $\phi_t u_s^t = v_{s+\delta}^{t+\delta} \phi_s$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} U_s & \xrightarrow{u_s^t} & U_t \\ \phi_s \downarrow & & \downarrow \phi_t \\ V_{s+\delta} & \xrightarrow{v_{s+\delta}^{t+\delta}} & V_{t+\delta} \end{array}$$

Denotaremos $Hom^\delta(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = \{\text{homomorfismos } \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V} \text{ de grado } \delta\}$ y $End^\delta(\mathcal{V}) = \{\text{homomorfismos } \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V} \text{ de grado } \delta\}$.

Podemos aplicar dos veces homomorfismos de distintos grados y seguiremos teniendo conmutatividad en el diagrama, entonces la composición cumple que:

$$Hom^{\delta_2}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) \times Hom^{\delta_1}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \longrightarrow Hom^{\delta_1 + \delta_2}(\mathcal{U}, \mathcal{W}).$$

El intercalado- δ lo definimos en 4.12 de forma categórica, para ello utilizamos diagramas en la categoría de módulos de persistencia indizados por (\mathbb{R}, \leq) . En (\mathbb{R}, \leq) los objetos son números reales y los morfismos de a a b consisten de un único morfismo si $a \leq b$ y es vacío en otro caso. Para $b \geq 0$, definimos $T_b : (\mathbb{R}, \leq) \longrightarrow (\mathbb{R}, \leq)$ como el funtor dado por $T_b(a) = a + b$ y definimos $\eta_b : Id_{(\mathbb{R}, \leq)} \Longrightarrow T_b$ como la transformación natural dada por $\eta_b(a) : a \leq a + b$. Notemos que $T_b T_c = T_{b+c}$ y $\eta_b \eta_c = \eta_{b+c}$.

4.12 Definición [BS p11]. Dadas las categorías D, F y un funtor $G \in D^{(\mathbb{R}, \leq)}$. Un δ -*intercalado de F, G* consiste de transformaciones naturales $\phi : F \Longrightarrow GT_\delta$ y $\psi : G \Longrightarrow FT_\delta$, i.e:

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{R}, \leq) & \xrightarrow{T_\delta} & (\mathbb{R}, \leq) & \xrightarrow{T_\delta} & (\mathbb{R}, \leq) \\ F \downarrow & \xRightarrow{\phi} & G \downarrow & \xRightarrow{\psi} & F \downarrow \\ D & = & D & = & D \end{array}$$

tales que $(\psi T_\delta)\phi = F\eta_{2\delta}$ y $(\phi T_\delta)\psi = G\eta_{2\delta}$. Si (F, G, ϕ, ψ) es un intercalado- δ decimos que F y G están δ -intercalados.

Notemos que la existencia de las transformaciones naturales ϕ, ψ implica que tenemos el siguiente diagrama conmutativo para todo $a \leq b$.

$F(a) \longrightarrow F(b)$	$F(a) \longrightarrow F(a + 2\delta)$
$\phi(a) \downarrow \qquad \downarrow \phi(b)$	$\phi(a) \searrow \qquad \swarrow \psi(a + \delta)$
$G(a + \delta) \longrightarrow G(a + \delta)$	$G(a + \delta)$
$F(a + \delta) \longrightarrow F(b + \delta)$	$F(a + \delta)$
$\psi(a) \uparrow \qquad \uparrow \psi(b)$	$\psi(a) \nearrow \qquad \searrow \phi(a + \delta)$
$G(a) \longrightarrow G(a)$	$G(a) \longrightarrow G(a + 2\delta)$

Ahora adaptemos esta definición categórica a la categoría de módulos de persistencia.

4.13 Definición. Sea $\delta \geq 0$, dos módulos de persistencia \mathcal{U}, \mathcal{V} se dice que están δ -intercalados si existen morfismos $\phi \in \text{Hom}^\delta(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ y $\psi \in \text{Hom}^\delta(\mathcal{V}, \mathcal{U})$ tales que $\psi\phi = 1_{\mathcal{U}}^{2\delta}$ y $\phi\psi = 1_{\mathcal{V}}^{2\delta}$, es decir que existen morfismos $\phi_t : U_t \longrightarrow V_{t+\delta}$ y $\psi : V_t \longrightarrow U_{t+\delta}$ para todo $s < t$ tales que los siguientes diagramas conmutan:

$U_s \xrightarrow{u_s^t} U_t$	$U_s \xrightarrow{u_s^{s+2\delta}} U_{s+2\delta}$
$\phi_s \downarrow \qquad \downarrow \phi_t$	$\phi_s \searrow \qquad \swarrow \psi_{s+\delta}$
$V_{s+\delta} \xrightarrow{v_{s+\delta}^{t+\delta}} V_{t+\delta}$	$V_{s+\delta}$
$U_{s+\delta} \xrightarrow{u_{s+\delta}^{t+\delta}} U_{t+\delta}$	$U_{s+\delta}$
$\psi_s \uparrow \qquad \uparrow \psi_t$	$\psi_s \nearrow \qquad \searrow \phi_{s+\delta}$
$V_s \xrightarrow{v_s^t} V_t$	$V_s \xrightarrow{v_s^{s+2\delta}} V_{s+2\delta}$

En el ejemplo 4.14 generamos una filtración de un espacio topológico utilizando una función f . Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función (no necesariamente continua). Consideremos los espacios de la forma: $X^t = (X, f)^t = \{x \in X \mid f(x) \leq t\}$ y los morfismos de inclusión: $\{i_s^t : X^s \longrightarrow X^t \mid s \leq t\}$. Estos obedecen la regla de composición $i_s^t \circ i_r^s = i_r^t$ cuando $r \leq s \leq t$ e i_t^t es la identidad en X^t . A estos conjuntos se les llama filtración de subniveles de (X, f) y se denota como \mathbf{X}_{sub}^f . Aplicando el functor de la

p -ésima homología singular con coeficientes en un campo F , que es un funtor del espacio topológico X (triangulando el espacio y obteniendo los complejos de cadena) a espacios vectoriales. Definimos el módulo de persistencia \mathcal{V} como:

$$\begin{aligned} V_t &= H(X^t) \\ v_s^t &= H(i_s^t) : H(X^s) \longrightarrow H(X^t) \end{aligned}$$

El conjunto de las $H(X^t)$ para $t \in \mathbb{R}$ es un módulo de persistencia que se denota como $H(\mathbf{X}_{sub}^f)$.

El siguiente ejemplo es el caso en el que se estableció el teorema de estabilidad por Cohen-Steiner, Edelsbrunner y Harer. Este teorema hace una relación entre las distancias de los conjuntos de datos y las distancias δ de los intercalados que definimos en 4.12. El ejemplo muestra que si tenemos dos funciones f, g que están cerca, entonces los módulos de persistencia obtenidos de la filtración de subniveles serán cercanos".

4.14 Ejemplo [Ch. p41]. Sea X un espacio topológico y sean $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $\|f - g\|_\infty < \delta$. Entonces los módulos de persistencia $H(\mathbf{X}_{sub}^f), H(\mathbf{X}_{sub}^g)$ están δ -intercalados. Tenemos las inclusiones:

$$\begin{aligned} (X, f)^t &\subseteq (X, g)^{t+\delta} \\ (X, g)^t &\subseteq (X, f)^{t+\delta} \end{aligned}$$

para todo t , esto induce los homomorfismos:

$$\begin{aligned} \phi &: H(\mathbf{X}_{sub}^f) \longrightarrow H(\mathbf{X}_{sub}^g) \\ \psi &: H(\mathbf{X}_{sub}^g) \longrightarrow H(\mathbf{X}_{sub}^f) \end{aligned}$$

de grado δ . Como los homomorfismos se inducen funtorialmente por morfismos de inclusión las relaciones de intercalado se satisfacen.

Continuaremos considerando el caso general en el que los δ -intercalados los vemos como transformaciones naturales, pues de esta forma podemos utilizar propiedades que trabajamos en la primer parte.

4.15 Definición. Sean \mathcal{U} y \mathcal{V} dos módulos de persistencia. Si \mathcal{U} y \mathcal{V} están δ -intercalados decimos que $d(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \leq \delta$. Con esto definimos d como:

$$d(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = \inf\{\delta \geq 0 \mid \mathcal{U}, \mathcal{V} \text{ están } \delta\text{-intercalados}\}$$

Si para ningún $\delta \geq 0$ \mathcal{U}, \mathcal{V} están δ -intercalados definimos $d(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = \infty$.

En el teorema 4.17 se demuestra que esta d es una pseudométrica extendida.

No podemos decir que es una métrica ya que puede tomar el valor ∞ y $d(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = 0$ no implica que $\mathcal{U} \cong \mathcal{V}$. Para demostrar esto necesitamos primero demostrar el siguiente Lema, para ello nos es útil pensar en los intercalados como transformaciones naturales.

4.16 Lema [BS p12]. Si los diagramas indexados en (\mathbb{R}, \leq) F, G están δ -intercalados, entonces también están δ' -intercalados para cualquier $\delta' \geq \delta$.

Demostración. Sea $\phi : F \implies GT_\delta$ y $\psi : G \implies FT_\delta$ tales que $(\psi T_\delta)\phi = F\eta_{2\delta}$ y $(\phi T_\delta)\Psi = G\eta_{2\delta}$.

Sean $\delta' \geq \delta$ y $\bar{\delta} = \delta' - \delta$. Existe una transformación natural $\eta_{\bar{\delta}} : Id_{(\mathbb{R}, \leq)} \implies T_{\bar{\delta}}$, entonces $\eta_{\bar{\delta}} T_\delta : T_\delta \implies T_{\bar{\delta}} T_\delta = T_{\delta'}$. Por lo tanto $G\eta_{\bar{\delta}} T_\delta : GT_\delta \implies GT_{\delta'}$.

Definimos $\hat{\phi} = (G\eta_{\bar{\delta}} T_\delta)\phi$.

Por ejemplo para una $\hat{\phi}(a) : F(a) \xrightarrow{\phi(a)} G(a + \delta) \xrightarrow{G\eta_{\bar{\delta}} T_\delta(a)} G(a + \delta')$.

Similarmente definimos $\hat{\psi} = (F\eta_{\bar{\delta}} T_\delta)\Psi$, que aplicado a un a sería $\hat{\psi}(a) : G(a) \xrightarrow{\Psi(a)} F(a + \delta) \xrightarrow{F\eta_{\bar{\delta}} T_\delta} F(a + \delta')$

Entonces podemos ver que $(\hat{\psi}T_{\delta'})\hat{\phi} = F\eta_{2\delta'}$, en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 F(a) & \xrightarrow{F\eta_{2\delta}(a)} & F(a+2\delta) & \xrightarrow{F\eta_{\delta}T_{2\delta}(a)} & F(a+\delta'+\delta) \\
 \phi(a) \searrow & & \nearrow \psi T_{\delta}(a) & & \nearrow \psi T_{\delta'}(a) \\
 & & G(a+\delta) & \xrightarrow{G\eta_{\delta}T_{\delta}(a)} & G(a+\delta')
 \end{array}$$

y también tenemos

$$F(a+\delta'+\delta) \xrightarrow{F\eta_{\delta}T_{\delta+\delta'}(a)} F(a+2\delta')$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 (\hat{\psi}T_{\delta'})\hat{\phi}(a) &= (\hat{\psi}T_{\delta'})(G\eta_{\delta}T_{\delta})\phi(a) = \\
 &= ((F\eta_{\delta}T_{\delta})\psi)T_{\delta'}(G\eta_{\delta}T_{\delta})\phi(a) = \\
 &= (F\eta_{\delta}T_{\delta})(F\eta_{\delta}T_{2\delta}\psi T_{\delta})\phi(a) = \\
 &= (F\eta_{\delta}T_{\delta})(F\eta_{\delta}T_{2\delta})(\psi T_{\delta}\phi)(a) = \\
 &= (F\eta_{\delta}T_{\delta})(F\eta_{\delta}T_{2\delta})F\eta_{2\delta}(a) = \\
 &= F\eta_{2\delta'}(a).
 \end{aligned}$$

Por otro lado tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 G(a) & \xrightarrow{G\eta_{2\delta}(a)} & G(a+2\delta) & \xrightarrow{G\eta_{\delta}T_{2\delta}(a)} & G(a+\delta'+\delta) \\
 \psi(a) \searrow & & \nearrow \phi T_{\delta}(a) & & \nearrow \phi T_{\delta'}(a) \\
 & & F(a+\delta) & \xrightarrow{F\eta_{\delta}T_{\delta}(a)} & F(a+\delta')
 \end{array}$$

Y también tenemos

$$G(a+\delta'+\delta) \xrightarrow{G\eta_{\delta}T_{\delta+\delta'}(a)} G(a+2\delta')$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 (\hat{\phi}T_{\delta'})\hat{\psi}(a) &= (\hat{\phi}T_{\delta'})(F\eta_{\delta}T_{\delta})\psi(a) = \\
 &= ((G\eta_{\delta}T_{\delta})\phi)T_{\delta'}(F\eta_{\delta}T_{\delta})\psi(a) = \\
 &= (G\eta_{\delta}T_{\delta})(G\eta_{\delta}T_{2\delta}\phi T_{\delta})\psi(a) = \\
 &= (G\eta_{\delta}T_{\delta})(G\eta_{\delta}T_{2\delta})(\phi T_{\delta}\psi)(a) = \\
 &= (G\eta_{\delta}T_{\delta})(G\eta_{\delta}T_{2\delta})G\eta_{2\delta}(a) = \\
 &= G\eta_{2\delta'}(a). \quad \square
 \end{aligned}$$

4.17 Teorema. La función d define una pseudométrica extendida en cualquier subconjunto de diagramas en D indizados por (\mathbb{R}, \leq) .

Demostración. [BS. p12] La transformación natural identidad muestra que $d(F, F) = 0$ para todo diagrama F .

Por la simetría de la definición de δ -intercalados tenemos que $d(F, G) = d(G, F)$ para todo diagrama F, G .

Resta por demostrar la desigualdad del triángulo. Consideremos los diagramas F, G, H . Sean $a = d(F, G)$, $b = d(G, H)$ y $\delta > 0$. Entonces por el Lema 4.13 y por definición de ínfimo F, G están $(a + \delta)$ -intercalados y G, H están $(b + \delta)$ -intercalados.

Sean $\phi' : F \Rightarrow GT_{a+\delta}$, $\psi' : G \Rightarrow FT_{a+\delta}$, $\phi'' : G \Rightarrow HT_{b+\delta}$ y $\psi'' : H \Rightarrow GT_{b+\delta}$. las transformaciones naturales de los correspondientes intercalos. Veamos que componer las transformaciones naturales nos dará las transformaciones deseadas para el intercalado de F, H .

Sea $\phi = (\phi''T_{a+\delta})\phi' : F \Rightarrow HT_{b+\delta}T_{a+\delta} = HT_{a+b+2\delta}$ y $\psi = (\psi'T_{b+\delta})\psi'' : H \Rightarrow FT_{a+\delta}T_{b+\delta} = FT_{a+b+2\delta}$.

La primera composición viene del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{R}, \leq) & \xrightarrow{T_{a+\delta}} & (\mathbb{R}, \leq) & \xrightarrow{T_{b+\delta}} & (\mathbb{R}, \leq) \\ F \downarrow & \xRightarrow{\phi'} & G \downarrow & \xRightarrow{\phi''} & H \downarrow \\ D & = & D & = & D \end{array}$$

La segunda composición es similar pero con ψ', ψ'' . Además tenemos también el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc} (\mathbb{R}, \leq) & \xrightarrow{T_{a+\delta}} & (\mathbb{R}, \leq) & \xrightarrow{T_{b+\delta}} & (\mathbb{R}, \leq) & \xrightarrow{T_{b+\delta}} & (\mathbb{R}, \leq) & \xrightarrow{T_{a+\delta}} & (\mathbb{R}, \leq) \\ F \downarrow & \xRightarrow{\phi'} & G \downarrow & \xRightarrow{\phi''} & H \downarrow & \xRightarrow{\psi''} & G \downarrow & \xRightarrow{\psi'} & F \downarrow \\ D & = & D & = & D & = & D & = & D \end{array}$$

De este diagrama obtenemos que $(\psi T_{a+b+2\delta})\phi = F\eta_{s(a+b+2\delta)}$ y similarmente $(\phi T_{a+b+2\delta})\psi = G\eta_{s(a+b+2\delta)}$.

Por lo tanto tenemos que F, G están $(a + b + 2\delta)$ -intercalados para todo $\delta > 0$. Entonces por ser la distancia el ínfimo tenemos que $d(F, H) \leq a + b$. \square

Podemos declarar una equivalencia entre F y G si $d(F, G) = 0$; obteniendo de esto el siguiente Corolario.

4.18 Corolario. Si identificamos los diagramas con δ -intercalados con $\delta = 0$, entonces d es una métrica extendida en el conjunto de clases de equivalencia.

Demostración. Al tomar la clase de equivalencia obtenemos que $d(\hat{F}, \hat{G}) = 0 \iff \hat{F} = \hat{G}$. \square

Aplicando esto a la categoría de módulos de persistencia notemos que los δ -intercalados nos permiten definir una pseudométrica extendida (o aplicando la relación de equivalencia tenemos una métrica extendida) que nos da información sobre que tan cercanos a ser isomorfos son dos módulos de persistencia.

Si tenemos una pequeña perturbación en los datos obtendremos módulos de persistencia distintos, con esta métrica podemos medir qué tan distintos son los módulos de persistencia que obtenemos. Además como los módulos de persistencia los obtenemos de los simplejos generados por los datos y las filtraciones, podemos pensar que si tenemos dos módulos de persistencia generados por datos ligeramente perturbados obtendremos módulos de persistencia con un δ -intercalado con δ pequeño. De hecho, Chazal en el artículo citado [Ch] demuestra esto y le llama Teorema de estabilidad.

La siguiente proposición nos da información sobre lo que le sucede a la métrica de los δ -intercalados al aplicar un funtor. En esta tesis trabajamos con la homología, y al ser la homología un funtor obtenemos información que justifica el uso de la misma en el análisis topológicos de datos, pues se obtiene cierta estabilidad en la métrica.

4.19 Proposición. Sea $F, G : (\mathbb{R}, \leq) \longrightarrow D$ y $H : D \longrightarrow E$. Si F y G están δ -intercalados, entonces también lo están HF y HG . Es decir $d(HF, HG) \leq d(F, G)$.

Demostración. Supongamos que F y G están δ -intercalados.

Sean $\phi : F \Longrightarrow GT_\delta$ y $\psi : G \Longrightarrow FT_\delta$ las transformaciones naturales correspondientes.

Por ser H un functor tenemos que $H\phi : HF \Longrightarrow HGT_\delta$ y $H\psi : HG \Longrightarrow HFT_\delta$, y en el siguiente diagrama vemos que $(H\psi T_\delta)(H\phi) = (HF)\eta_{2\delta}$ y $(H\phi T_\delta)(H\psi) = (HG)\eta_{2\delta}$.

$$\begin{array}{ccccc}
 (\mathbb{R}, \leq) & \xrightarrow{T_\delta} & (\mathbb{R}, \leq) & \xrightarrow{T_\delta} & (\mathbb{R}, \leq) \\
 F \downarrow & \xRightarrow{\phi} & G \downarrow & \xRightarrow{\psi} & F \downarrow \\
 D & = & D & = & D \\
 H \downarrow & & H \downarrow & & H \downarrow \\
 E & = & E & = & E
 \end{array}$$

Por lo tanto HF y HG están δ -intercalados. \square

El hecho de que podamos aplicar funtores y mantener la distancia es importante al trabajar con los módulos de persistencia que se generan con los datos. Al analizar los datos hay funtores que nos dan información sobre los mismo, si sabemos que preservamos una distancia menor a δ al aplicar un functor podemos confiar en la información que obtenemos y aplicarla a los datos.

Parte V

Módulos graduados.

5.1 Definición. Un anillo Λ se denomina *anillo graduado* (o \mathbb{Z} -graduado) si existe una familia $\{\Lambda_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de subanillo Λ tales que:

- (i) $\Lambda = \bigoplus_n \Lambda_n$ (con Λ_n grupos abelianos)
- (ii) $\Lambda_n \cdot \Lambda_m \subseteq \Lambda_{n+m}$ para todo $n, m \in \mathbb{Z}$.

Un anillo graduado Λ se le denomina *anillo no-negativamente graduado* (o \mathbb{N} -graduado) si $\Lambda_n = 0$ para todo $n \leq 0$. A un elemento $x \in \Lambda_n$ distinto de cero se le denomina *elemento homogéneo de Λ de grado n* .

5.2 Definición. Un *morfismo de anillos graduados* es un morfismo de anillos que preserva el grado.

5.3 Proposición. Si $\Lambda = \bigoplus_n \Lambda_n$ es un anillo graduado, entonces Λ_0 es un subanillo de Λ , $1 \in \Lambda_0$ y Λ_n es un Λ_0 -módulo para todo n .

Demostración. $\Lambda_0 \cdot \Lambda_0 \subseteq \Lambda_0$ y Λ_0 es cerrado bajo la suma, entonces Λ_0 es un subanillo de Λ .

Veamos que $1 \in \Lambda_0$: Λ es un anillo, entonces $1 \in \Lambda = \bigoplus_n \Lambda_n$, por lo tanto $1 = \sum_n x_n$ con $x_n \in \Lambda_n$ y $x_i \neq 0$ para una cantidad finita de i . Entonces $x_i = 1 \cdot x_i = (\sum_n x_n) \cdot x_i = \sum_n x_n \cdot x_i$. Además por la propiedad universal de suma directa y al ser Λ un anillo graduado tenemos que al comparar grados $x_i = x_i x_0 \forall i$. Entonces $x_0 = 1 \cdot x_0 = \sum_n x_n x_0 = \sum_n x_n = 1$. Por lo tanto $1 = x_0 \in \Lambda_0$.

$\Lambda_0 \cdot \Lambda_n \subseteq \Lambda_n$ para todo n , por lo tanto Λ_n es un Λ_0 -módulo. \square

5.4 Ejemplo. Todo anillo Λ puede ser visto como un anillo graduado con $\Lambda_0 = \Lambda$ y $\Lambda_n = 0$ para todo $n \neq 0$.

5.5 Ejemplo. Sea Λ un anillo y x_1, \dots, x_q indeterminadas sobre Λ . Para $m = (m_1, \dots, m_q) \in \mathbb{N}^q$, sea $x^m = x_1^{m_1} \dots x_q^{m_q}$. Entonces el anillo de polinomios $S = \Lambda[x_1, \dots, x_q]$ es un anillo graduado en el que $S_n = \{ \sum_{m \in \mathbb{N}^q} r_m x^m \mid r_m \in \Lambda \text{ y } \alpha_1 m_1 + \dots + \alpha_q m_q = n \}$ define la graduación en S . Particularmente podemos ver esto en anillos de polinomios en los que $\Lambda = F$ es un campo. $F[x]$ es un anillo graduado. $F[x] = \bigoplus_{i=0}^{\infty} x^i \cdot F$, donde cada $x^i \cdot F = \{cx^i \mid c \in F\}$. La multiplicación de polinomios obedece la regla en la que el grado del producto de dos monomios es la suma del grado de sus factores.

5.6 Definición. Un *subanillo* S de Λ es un anillo subgraduado si $S = \sum_n (\Lambda_n \cap S)$. Equivalentemente se dice que S es *subanillo graduado* de Λ si para todo $a \in S$ todos los componentes homogéneos de a (como un elemento de Λ) están en S .

5.7 Ejemplo. Sea k un campo, entonces $F[x^2, xy, y^3]$ es un subanillo graduado de $F[x, y]$.

5.8 Definición. Un *ideal graduado* en un anillo graduado Λ es un anillo bilateral $I \subseteq \Lambda$ con $I = \bigoplus_n I_n$ con $I_n = I \cap \Lambda_n$.

5.9 Proposición. Sea I un ideal graduado en un anillo graduado Λ . Entonces $\frac{\Lambda}{I}$ es un anillo graduado en el que cada graduación es $(\frac{\Lambda}{I})_n = (\frac{\Lambda_n + I}{I})$. Además $\frac{\Lambda}{I} = \bigoplus_n \frac{\Lambda_n}{I_n}$.

Demostración. Λ_n e I son grupos abelianos, entonces también lo es $\Lambda_n + I$ y por lo tanto también lo es $(\frac{\Lambda_n + I}{I})$ para todo n . Sea $x_n + i \in \Lambda_n + I$ y $x_m + j \in \Lambda_m + I$, el producto de ambos es $x_n x_m + x_n i + x_m j + ij$ y $x_n i, x_m j, ij \in I$. Como cada factor debe ser cociente con I , el producto también debe ser cociente con I , entonces $x_n x_m + k \in (\frac{\Lambda}{I})_{n+m}$ para algún $k \in I$.

Por el segundo teorema de isomorfismo para anillos $\frac{\Lambda}{I} = \bigoplus_n \frac{(\Lambda_n + I)}{I} \cong \bigoplus_n \frac{\Lambda_n}{(I \cap \Lambda_n)}$ y por definición de ideal graduado $(I \cap \Lambda_n) = I_n$, por lo tanto $\frac{\Lambda}{I} = \bigoplus_n \frac{\Lambda_n}{I_n}$. \square

5.10 Proposición. Un ideal bilateral $I \subseteq \Lambda$ es graduado si y sólo si es generado por elementos homogéneos.

Demostración. Todo ideal graduado es de la forma $I = \bigoplus_n I_n$, así que es generado por $\cup_n I_n$. Pero cada $I_n = I \cap \Lambda_n \subset \Lambda_n$ es un subconjunto de un conjunto de elementos homogéneos, así que I esta generado por elementos homogéneos.

Supongamos que I es generado por un conjunto A de elementos homogéneos. Para demostrar que I es graduado debemos demostrar que $I \subseteq \bigoplus_n (I \cap \Lambda_n)$, pues $\bigoplus_n (I \cap \Lambda_n) \subseteq I$.

Como I es generado por A tenemos que para $u \in I$ $u = \sum_i r_i a_i s_i$ para $r_i, s_i \in \Lambda$ y $a_i \in A$. Como $I \subseteq \Lambda$ tenemos $u = \sum_n u_n$ con $u_n \in \Lambda_n$. Queremos demostrar que $u_n \in I$ (asi $u_n \in I \cap \Lambda_n$).

Para cada término en $u = \sum_i r_i a_i s_i$ sabemos que $r_i = \sum_j r_{i,j}$ y $s_i = \sum_k s_{i,k}$. donde cada $r_{i,j}, s_{i,k}$ es homogéneo. Entonces $u = \sum_i \sum_{j,k} r_{i,j} a_i s_{i,k}$ y cada término en esta suma es homogéneo al ser producto de elementos homogéneos. Entonces u_n es la suma de los términos $r_{i,j} a_i s_{i,k}$ que hacen a u de grado n , así que $u_n \in I$ como se quiere. \square

5.11 Definición. Sea $\Lambda = \bigoplus_n \Lambda_n$ y M un Λ -módulo. Decimos que M es un Λ -módulo graduado por G , con G un conjunto ordenado, si existe una familia de subgrupos $\{M_n\}_{n \in G}$ de M tal que

- (i) $M = \bigoplus_{n \in G} M_n$ (como grupos abelianos)
- (ii) $\Lambda_n \cdot M_m \subseteq M_{n+m}$ para todo $m, n \in G$.

Si $u \in M - \{0\}$ y $u = u_{i_1} + \dots + u_{i_k}$ donde $u_{i_j} \in \Lambda_{i_j} - \{0\}$, entonces u_{i_1}, \dots, u_{i_k} se les denomina componentes homogéneos de u . Consideraremos como $G = \mathbb{R}$ o $G = \mathbb{Z}$.

5.12 Definición. Sea M un Λ -módulo graduado por G y $g \in G$. Definimos M trasladado por g como $M(g) = M$ como Λ -módulos y para $h \in G$ $M(g)_h = M_{g+h}$. como módulo graduado Entonces $M(g) = \bigoplus_{h \in G} M(g)_h$.

A partir de este momento consideramos a $G = \mathbb{Z}$.

5.13 Definición. Sean M, N dos Λ -módulos graduados.

- (i) Un *homomorfismo* $f : M \longrightarrow N$ de Λ -módulos graduados es un homomorfismo de Λ -módulos tal que $f(M_n) \subset N_n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.
- (ii) Un *morfismo* $f : M \longrightarrow N$ de Λ -módulos graduados es un homomorfismo de Λ -módulos de grado 0.

Notemos que en la definición 5.13 no es lo mismo homomorfismo que morfismo de Λ -módulos graduados. Utilizando la definición de morfismo de Λ -módulos graduados obtenemos la categoría de Λ -módulos graduados, a esta categoría la denotamos $\Lambda^{\mathbb{Z}}\text{-mod}$ [KM. p15].

5.14 Definición. Dada una colección $\{M_i | i \in I\}$ de Λ -módulos graduados, definimos la *suma directa* como el Λ -módulo graduado $N = \bigoplus_{i \in I} M_i$ con la graduación $N_r = \bigoplus_i (M_i)_r$.

5.15 Proposición. Si $\{M_i\}_{i \in I}$ es una familia de Λ -módulos graduados entonces $N = \bigoplus_{i \in I} M_i$ es un Λ -módulo graduado.

5.16 Definición. Un Λ -módulo graduado M es un *Λ -módulo graduado libre* si existe una colección de enteros $\{n_i | i \in I\}$ y un isomorfismo

$$\Phi : \bigoplus_{i \in I} \Lambda(n_i) \xrightarrow{\cong} M$$

de Λ -módulos graduados.

5.17 Definición. Una colección de elementos homogéneos $\mathcal{M} = \{m_i \in M | i \in I\}$ es *linealmente independiente* sobre Λ si para toda relación lineal de la forma $\sum_i a_i m_i = 0$, con a_i homogéneo, $a_i = 0$ para todo i .

5.18 Proposición. Sea M un Λ -módulo graduado, entonces M es libre si y sólo si es generado por una colección linealmente independiente de elementos homogéneos.

Demostración. Se sigue de las definiciones 5.17 y 5.16 inmediatamente. \square

5.19 Proposición. Sea F un campo. La categoría de espacios vectoriales indexada en (\mathbb{R}, \leq) (F -módulos persistentes) es isomorfa a la categoría de $F[t]$ -módulos graduados finitos.

Demostración. A cada diagrama $U \in {}_F\text{Mod}^{\mathbb{Z}, \leq}$, podemos asignar un $F[t]$ -módulo graduado finito M , donde para cada $k \in \mathbb{Z}$, $M_k = U(k)$ y para un $a \in M_k$, $t \cdot a = F(k \leq, k+1)(a)$.

Para cada $F[t]$ -módulo graduado finito M , podemos asignar el diagrama $U \in {}_F\text{Mod}^{\mathbb{Z}, \leq}$ dado por $F(k) = M_k$, cuyos morfismos son generador por $F(k \leq k+1)(a) = t \cdot a$ para $a \in F(k)$.

La composición de ambos funtores es igual al funtor identidad. \square

En el capítulo anterior definimos el k -ésimo módulo de persistencia como un módulo de persistencia. El módulo de homología lo obtenemos de complejos de cadenas generados por una cantidad finita de datos y tenemos que cada elemento en el complejo es de tipo finito. Además ya notamos que tenemos una cantidad finita de cambios en la homología, por lo tanto existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\tilde{f}_k^i : H_k^i \longrightarrow H_k^{i+1}$ son isomorfismos para todo $i \geq k$.

Entonces al k -ésimo módulo de persistencia podemos darle estructura de módulo graduado sobre un anillo de polinomio $F[t]$:

$$\mathcal{H}_k = \bigoplus_{i=1}^{\infty} H_k^i$$

donde la acción de t está dada por $t \cdot (\sum_{i=1}^{\infty} m^i) = \sum_{i=1}^{\infty} f_k^i(m^i)$ para cualquier $m^i \in H_k^i$. Es decir, la acción de t traslada el grado en un elemento en uno, por lo tanto la acción del anillo de polinomios conecta las homologías de los distintos complejos en las filtraciones. \square

Con esto obtenemos el teorema central que nos da información sobre la persistencia y estructura del espacio topológico sobre el que están muestreados los datos.

5.20 Teorema. Sea M un $F[t]$ -módulo graduado finito entonces

$$M \cong \bigoplus_{i=1}^{n-m} t^{a_i} F[t] \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^m \frac{t^{b_j} F[t]}{t^{c_j}} \right)$$

Demostración. Sean $\{b_i\}$ los generadores homogéneos del $F[t]$ -módulo. Sea $F[t]^n$ el módulo graduado libre de grado n con la graduación estándar y la base $\{e_i\}$.

Definimos el homomorfismo de módulos $\Phi : F[t]^n \longrightarrow M$ tal que $\Phi(e_i) = b_i$. Como los $\{b_i\}$ generan a M esté es un morfismo suprayectivo

y por el primer teorema de isomorfismo tenemos $\frac{F[t]^n}{\ker(\Phi)} \cong M$. Como $F[t]^n$ es un módulo libre sobre un anillo de ideales principales de rango finito y $\ker(\Phi)$ es un submódulo de $F[t]^n$ tenemos que $\ker(\Phi)$ es libre y de rango $m \leq n$, además existe una base $\{y_i\}$ de $F[t]^n$ tal que $\alpha_1 y_1, \alpha_2 y_2, \dots, \alpha_m y_m$ es una base de $\ker(\Phi)$, con $\alpha_i \in F[t]$.

Tenemos también que (α_i) , donde (α_i) es el ideal generado por α_i , con $1 \leq i \leq m$ son ideales en $F[t]$ y como es un anillo de ideales principales, estos ideales son de la forma t^n .

Ahora definimos un homomorfismo suprayectivo Ψ :

$$\Psi : F[t]y_1 \oplus F[t]y_2 \oplus \dots \oplus F[t]y_n \longrightarrow \frac{t^{\deg(y_1)}F[t]}{(\alpha_1)} \oplus \frac{t^{\deg(y_2)}F[t]}{(\alpha_2)} \oplus \dots \oplus \frac{t^{\deg(y_m)}F[t]}{(\alpha_m)} \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{n-m} t^{\deg(y_{m+i})} F[t] \right)$$

que mapea:

$$\begin{aligned} & (\beta_1 y_1, \beta_2 y_2, \dots, \beta_m y_m) \\ \mapsto & (\beta_1 \bmod(\alpha_1), \beta_2 \bmod(\alpha_2), \dots, \beta_m \bmod(\alpha_m), \beta_{m+1}, \dots, \beta_n). \end{aligned}$$

Notemos que t^n es una n -traslación del grado.

El $\ker(\Psi)$ es $F[t]\alpha_1 y_1 \oplus \dots \oplus F[t]\alpha_m y_m$ que es isomorfo al $\ker(\Phi)$, por lo tanto la imagen de Ψ es isomorfa a M :

$$M \cong \bigoplus_{i=1}^{n-m} t^{\deg(y_{m+i})} F[t] \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^m \frac{t^{\deg(y_j)} F[t]}{(\alpha_j)} \right)$$

Con esto queda demostrado el teorema. \square

5.21 Teorema. Sea F un anillo y \mathcal{H}_k el módulo graduado sobre un anillo de polinomios $F[t]$. Entonces:

$$\mathcal{H}_k \cong \left(\bigoplus_{i=1}^M (t^{a_i}) F[t] \right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^N t^{b_j} \frac{F[t]}{(t^{c_j} F[t])} \right)$$

donde $M, N \in \mathbb{Z}^+$ y a_i, b_j, c_j son potencia enteras de t .

Demostración. El módulo \mathcal{H}_k es un $F[t]$ -módulo finito. Como F es un campo tenemos que $F[t]$ es un anillo de ideales principales, entonces \mathcal{H}_k es módulo graduado finitamente generado sobre un anillo de ideales principales. El teorema estructural para módulos finitamente generados sobre anillos de ideales principales dice que \mathcal{H}_k se puede descomponer en

una suma directa de la parte libre y la parte de torsión y el teorema 5.20 dice esto para módulos graduados.

El componente libre está compuesto de los anillos graduados de la forma $\bigoplus_{i \geq q} t^i \cdot F$, que son isomorfos a los ideales de la forma (t^q) .

Las componentes de la parte de torsión consisten de los anillos graduados, como los de los componentes libres, modulados por sus ideales graduados. Por la proposición 5.9 (ideal bilateral es generado por elementos homogéneos) y 5.10 (sobre la estructura y como está formado un cociente de modulo por un ideal), los ideales graduados son ideales homogéneos de la forma (t^p) .

Entonces tenemos que el teorema estructural nos queda de la forma $\mathcal{H}_k = \left(\bigoplus_{i=1}^M (t^{a_i}) F[t] \right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^N t^{b_j} \frac{F[t]}{(t^{c_j} F[t])} \right)$. \square

Las potencias nos dan información de la persistencia de las propiedades topológicas del k -ésimo módulo de persistencia, que a su vez nos dan información de las características de la topología de las filtraciones. Los enteros a_i y b_j nos dicen el complejo en el que se representa cuando nace un ciclo de dimensión k y los números c_j nos dicen cuando un ciclo, que había aparecido en la filtración b_j , desaparece. La persistencia del agujero que aparece en b_j y desaparece en c_j es $b_j - c_j$, con ésto formalizamos la construcción de los códigos de barras, ya que tenemos una caracterización de los módulos en la que vemos la persistencia, el nacimiento y la muerte de las clases. La parte libre nos da información de ciclos que aparecen en un índice a_i y nunca desaparecen.

El teorema 5.21 y el teorema 5.20 nos da la estructura del módulo graduado que a su vez nos da la estructura del modulo de persistencia y esta nos da características sobre el espacio topológico sobre el que estamos trabajando, pues los valores a_j, b_j y c_j nos proporcionan la información de todos los ciclos de grado k y como van apareciendo y desapareciendo conforme avanzamos en la filtración. Con esta información podemos ver sobre que tipo de topología tenemos los datos.

Además del teorema que caracteriza a los módulos de persistencia definimos los intercalados como una métrica del espacio; con esto se justifica el análisis topológico de datos utilizando los complejos y la homología que se genera, pues utilizando esto y una medida llamada "medida de

Hausdorff" para los datos se demuestra un teorema de estabilidad que permite hacer estadística al acotar el error entre los datos y en los resultados obtenidos por este método.

Bibliografía y Referencias

- [BS] Bubenik, Peter and Scott Jonathan A. *Categorification of persistent homology*. archiv:1205.3669v3 [math.AT]. 8 Jan 2014.
- [BJ] Björner, Anders. *Nerves, Fibers and homotopy groups*. Royal Institute of Technology. Stockholm, Sweden.
- [Ch] Chazal Frédéric, De Silva Vin, Glisse Marc, and Oudot Steve. *The Structure And Stability Of Persistence Modules*. archiv:1207.3674v3 [math.AT]. 20 Mar 2013.
- [DJ] Dieudonné Jean. *A History of Algebraic and Differential Topology, 1900-1960*. Birkhäuser (2009)
- [DW] David R. Wilkins. Trinity Collage Dublin. Lecture notes. <http://www.maths.tcd.ie/~dwilkins/Courses/>
- [EH] Herbert Edelsbrunner and John Harer. *Persistent Homology - A Survey*. Duke University.(2009)
- [EH1] Herbert Edelsbrunner and John Harer. *Computational Topology, An Introduction*. Departments fo Computer Science and Mathematics Duke University (2008), page 169-208.
- [Fr] Fraleigh, John B. *A first Course In Abstract Algebra*. 7th Edition (2003).
- [GM] Gabriel Minian. Universidad de Buenos Aires. <http://mate.dm.uba.ar/~gminian/poliedros.pdf>
- [KM] Madapusi Keerthi. *Commutative Algebra*. University of Chicago. <http://math.uchicago.edu/~keerthi/files/CA.pdf>. (13/03/2015)
- [Ll] Lluís Puebla, Emilio. *Álgebra Homológica, Cohomología de grupos y K-teoría Alegebráica Clásica*. Sociedad Matemática Mexicana (2005).
- [PF] Freyd, Peter. *Abelian Categories, An Introduction to the Theory of Functors*. University of Pennsylvania (1966).
- [RG] R. Ghrist. *Barcodes: The persistent topology of data*. Bulletin of the American Mathematical Society 45 (2008).
- [WK] Kairui Glen Wang. *The basic theory of persisten homology*. University of Chicago. (2012)
- [ZC] Zomorodian, Afra y Carlsson, Gunnar. *Computing Persistent Homology*. Discrete and Computational Geometry 33 (2005).

Lynch Laura. *Graded Rings Reading Course*.

<http://www.math.unl.edu/~s-lynch1/RCNotes%20F07.pdf>

E.G. Minian. *Complejos Simpliciales y Poliedros*.

<http://mate.dm.uba.ar/~gminian/poliedros.pdf>

Aguilar Marcelo y Aquino Octavio Alberto Aguilar. *Notas de Topología Algebraica*.

http://www.oocities.org/octavioalberto.geo/math/topologia_algebraica.pdf

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

Análisis Topológica de Datos para Matemáticas y Aplicaciones.

<http://atd.cimat.mx/es/node/282>. (07/07/2015)

AYASDI. Advanced Analytics & Big Data Analytics.

<http://www.ayasdi.com/company/> (07/07/2015)