Seminario de Espacios de Ramsey
Semana #2

1. Conjuntos equipotentes

Dos conjuntos a, b son **equipotentes** $\Leftrightarrow$ existe una función biyectiva $a \xrightarrow{f} b$. En tal caso, escribimos $a \approx b$. Cuando existe una función f inyectiva, escribimos $a \precsim b$.

El **Conjunto potencia** de a, b se define como $a^b = \{f : b \xrightarrow{f} a\}$; e.d. como el conjunto de todas las funciones de b en a.

Un conjunto a es **finito** $\Leftrightarrow$ $a \approx m$ para algún $m \in \omega$; e **infinito** en caso contrario.

Un conjunto a es **numerable** si es equipotente a algún subconjunto de ω. En particular, cuando $a \approx \omega$ decimos que a es **propiamente numerable** o **numerable infinito**. Muestra que;

(1) La relación $aRb \Leftrightarrow a \approx b$ es una equivalencia entre conjuntos.
(2) Dados a, b muestra que existen conjuntos c, d tales que $c \cap d = \emptyset$, $a \approx c$ y $b \approx d$.
(3) a^b es un conjunto, para cada a, b conjuntos.
(4) Si $a \approx c$, $b \approx d$, entonces $a^b \approx c^d$.
(5) $b \cap c = \emptyset \Rightarrow a^{b \cup c} \approx a^b \times a^c$.
(6) $(a \times b)^c \approx a^c \times b^c$.
(7) $\left(a^b\right)^c \approx a^{b \times c}$.
(8) Para todo conjunto a se tiene $\mathcal{P}(a) \approx 2^a$.
(9) No existe una función sobreyectiva $a \xrightarrow{f} \mathcal{P}(a)$. *Ayuda:* Si tal f existe, considera $b = \{x \in a : x \notin f(x)\}$.
(10) Para todo conjunto a se tiene $a \not\approx \mathcal{P}(a)$.
(11) Si $c \subseteq a$ y $a \precsim c$ entonces $a \approx c$.*Ayuda:*
   (a) Si $a_0 = a \backslash c$, $a_{n+1} = f(a_n)$ para todo $n \in \omega$, y $A = \bigcup_{n \in \omega} a_n$; entonces $f(A) \subseteq A$.
   (b) La función $a \xrightarrow{F} c$ dada por $F(x) = f(x)$ si $x \in A$ y x en caso contrario; es una biyección.
(12) (Schroeder-Bernstein) Si $a \precsim b$ y $b \precsim a$ entonces $a \approx b$.
(13) Si a es finito entonces toda función inyectiva de a en a es biyectiva.
(14) Ningún conjunto finito es equipotente a un subconjunto propio.
(15) Si $b \subset a$ y $b \approx a$ entonces a es infinito.
(16) ω es infinito.
(17) Todo conjunto finito es equipotente a un único número natural.
(18) Si a es finito y $b \subseteq a$ entonces b es finito.
(19) Si a, b son finitos entonces $a \cup b$, $a \times b$ son finitos.
(20) $\mathbb{Z}$ es numerable.
(21) Si a es numerable entonces $a \cup b$, $a \times b$, son numerables.
(22) $\mathbb{Q}$ son numerables.
(23) $[0,1]^\omega$ no es numerable.
(24) 2^{omega} no es numerable.
(25) $\mathbb{R}$ no es numerable. *Ayuda:* $2^\omega \approx [0,1] \approx \mathbb{R}$.

2. Ordinales

Dados dos conjuntos parcialmente ordenados $(a, \leq_a)$, $(b, \leq_b)$; un **morfismo** es cualquier función $a \xrightarrow{\alpha} b$ tal que $x \leq_a y \Leftrightarrow \alpha(x) \leq_b \alpha(y)$ para todo $x, y \in a$. En particular; a, b son **isomorfos** si existe un morfismo α biyectivo. Si $(a, \leq_a)$ y $(b, \leq_b)$ son isomorfos escribimos $a \cong b$ y omitimos los subíndices en el orden $\leq$.

Dado un conjunto parcialmente ordenado $(a, \leq)$; un **segmento inicial** de a es un subconjunto $b \subseteq a$ tal que, para todo $x \in b$, se tiene $y \leq x \Rightarrow y \in b$. Si b es un segmento inicial de a escribimos $b \sqsubseteq a$. Si $(a, \leq)$ es parcialmente ordenado y $x \in a$; el segmento inicial determinado por $x \in a$ es $a_x = \{y \in a : y < x\}$.

Un **ordinal** es un conjunto a tal que

- a es transitivo.
- $(a, \in)$ está bien ordenado.

La familia de todos los conjuntos ordinales la denotamos por On.

(1) Los siguientes son ejemplos de conjuntos parcialmente ordenados $(a, \leq)$ (verificar los axiomas)
   (a) $(\omega, \in)$.

(b) $(\mathcal{P}(a), \subseteq)$ para cualquier conjunto a.
(c) $(\omega, |)$ donde $m|n$ si y solo si m divide a n.
(d) $(\omega \times \omega, R)$ donde $(m,n)R(p,q) \Leftrightarrow (m \in p) \vee [(m = p) \wedge (n \in q)]$ es el orden lexicográfico.
(e) $(\mathbb{Z}, \leq)$ con el orden usual.
(f) $(\mathbb{Q}, \leq)$ con el orden usual.
(g) $(\mathbb{R}, \leq)$ con el orden usual.
(h) (ω, R) donde mRn si y solo si se satisface alguna de las siguientes:
- Ambos m, n son pares y $m \in n$.
- Ambos m, n son impares y $m\imath n$.
- m es par y n es impar.

(2) Decida cuáles de los ejemplos anteriores son órdenes estrictos, totales (lineales), buenos.

(3) Inducción transfinita: Sea $(a, \leq)$ un conjunto bien ordenado, ϕ una fórmula que toma valores en los elementos de a; tal que se satisface la siguiente propiedad: *"Dado $x \in a$, si $\forall y \in a[y < x \Rightarrow \phi(y)]$ entonces $\phi(x)$"*. Entonces $\forall x \in a \phi(x)$.

(4) Del ejercicio anterior, deduzca el principio de inducción fuerte en ω.

(5) Da un ejemplo de un morfismo inyectivo $a \xrightarrow{\alpha} b$ cuya imagen no es un segmento inicial de b.

(6) ¿Es ω isomorfo a $\omega \backslash \{0\}$?.

(7) ¿Es $\mathbb{Z}$ isomorfo a $\mathbb{Z} \backslash \{0\}$?.

(8) ¿Es $\mathbb{Q}$ isomorfo a $\mathbb{Q} \backslash \{0\}$?.

(9) ¿Es $\mathbb{R}$ isomorfo a $\mathbb{R} \backslash \{0\}$?.

(10) Todo segmento inicial propio de $(a \leq)$ es de la forma a_x para algún $x \in a$.

(11) Sea $(a, \leq)$ bien ordenado. Suponga que $b \subseteq a$ y $(a, \leq) \xrightarrow{\alpha} (b, \leq)$ es un isomorfismo. Entonces $x \leq f(x)$ para todo $x \in a$. *Ayuda:* Use inducción transfinita.

(12) Entre cualesquiera dos conjuntos bien ordenados existe a lo sumo un isomorfismo.

(13) Un conjunto bien ordenado no es isomorfo a ninguno de sus segmentos iniciales propios.

(14) Todo conjunto bien ordenado $(a, \leq)$ es isomorfo al conjunto de sus segmentos iniciales propios $S(a) = \{a_x : x \in a,\ a_x \subset a\}$ ordenados por la inclusión $\subseteq$.

(15) † Recursión transfinita: Dado $(a, \leq)$ bien ordenado; para cada función $b^{S(a)} \xrightarrow{g} b$ existe una única función $a \xrightarrow{f} b$ tal que, para todo $x \in a$, se tiene $f(x) = g(f(S(a)))$. *Ayuda*: Use inducción transfinita; recuerde cómo se construye una función de recursión en ω.

(16) † Dados dos conjuntos bien ordenados $(a, \leq)$, $(b, \leq)$; o bien $a \cong b$ o bien uno de ellos es isomorfo a un segmento inicial del otro. *Ayuda*: Use el ejercicio anterior.

(17) Halla dos conjuntos totalmente ordenados, no isomorfos, tales que cada uno de ellos es isomorfo a un segmento inicial del otro.

(18) Da un ejemplo de un conjunto totalmente ordenado $(a, \leq)$ y un isomorfismo $a \xrightarrow{\alpha} a$ tal que $x \neq \alpha(x)$ para todo $x \in a$.

(19) Dado un conjunto $(a, \leq)$ totalmente ordenado; muestra que a está bien ordenado $\Leftrightarrow$ todo segmento inicial propio de a está bien ordenado.

(20) Todo número natural $n \in \omega$ es un ordinal.

(21) ω es un ordinal.

(22) Todo elemento de un ordinal, es un ordinal.

(23) Todo segmento inicial de un ordinal, es un ordinal.

(24) Si a es un ordinal, entonces los segmentos iniciales propios de a son los elementos de a; y el propio a.

(25) Regularidad: Si a es un ordinal entonces $a \notin a$.

(26) Tricotomía: Dados a, b ordinales, solo una de las siguientes posibilidades es cierta: $a \in b$, $b \in a$, $a = b$.

(27) Si a, b son ordinales, entonces $a \leq b$ si y solo si $a \subseteq b$.
(28) Si a es un ordinal entonces el sucesor $a' = a \cup \{a\}$ es el menor ordinal mayor que a.
(29) $\emptyset$ es el menor ordinal.
(30) Si x es un conjunto cuyos elementos son todos ordinales, entonces $a = \cup x$ es un ordinal; y es la menor cota superior de x.
(31) $\in$ es un buen orden en On (¿Es On un conjunto?).
(32) Si a, b son ordinales y $a \xrightarrow{f} b$ es un isomorfismo de conjuntos ordenados (e.d. f es biyectiva y $x \in y \Leftrightarrow f(x) \in f(y)$ para todo $x, y \in a$) entonces $a = b$ y $f = id$ es la identidad.
(33) † Tipos de orden: Para todo conjunto bien ordenado $(x, \leq)$ existe un único isomorfismo de x sobre un ordinal $(a, \in)$. A este ordinal se le llama **tipo** de orden de x; y se escribe $tip(x) = a$.
(34) ω es el primer ordinal infinito.
(35) $\omega_1 = \{x : x \text{ es un ordinal numerable }\}$ es el primer ordinal no numerable.
(36) El principio de inducción transfinita vale en On: Si ϕ es una fórmula que toma valores en los ordinales y satisface la propiedad: *"Dado $x \in On$, si $\forall y \in a[y < x \Rightarrow \phi(y)]$ entonces $\phi(x)$"*. Entonces $\forall x \in On \phi(x)$.
(37) El principio de recursión vale en On: Si Φ es una relación funcional, para todo ordinal a y todo conjunto z; existe una única función función definida en $a = \{b : b < a\}$ tal que $f(0) = z$ y $f(b) = \Phi(f(\restriction b))$.
(38) Si Φ es una relación funcional, z es un conjunto; se puede definir una única relación funcional ϕ tal que $\phi(0) = z$ y $\phi(a) = \Phi(\phi \restriction a)$ para todo ordinal $a \in On$.
(39) Sea a un ordinal; Φ, Ψ relaciones funcionales, z un conjunto. Existe una única función f definida en a; tal que
  - $f(0) = z$.
  - $f(b) = \Phi(f \restriction b)$ si b es un ordinal sucesor.
  - $f(b) = \Psi(f \restriction b)$ si b es un ordinal límite.

3. Aritmética de ordinales

Dados α, β ordinales; sean $(a, \leq_a)$, $(b, \leq_b)$ conjuntos bien ordenados de tipos respectivos α, β; tales que $a \cap b = \emptyset$. Definimos la **suma** $\alpha + \beta$ como el ordinal cuyo tipo es el del buen orden del conjunto $(a \oplus b, \leq)$ donde $a \oplus b = a \cup b$ y $x \leq y$ si y solo si sucede alguna de las siguientes:

- Ambos $x, y \in a$ y $x \leq_a y$.
- Ambos $x, y \in b$ y $x \leq_b y$.
- $x \in a$, $y \in b$.

El conjunto $a \oplus b$ es, en términos de orden, a seguido de b. El **producto** $\alpha\beta$ se define como el ordinal cuyo tipo es el buen orden del conjunto $(a \times b, \leq)$ donde

$$(x, p) \leq (y, q) \;\Leftrightarrow\; (p \leq q) \vee [(p = q) \wedge (x \leq y)]$$

es decir, $\leq$ es el orden lexicográfico (de derecha a izquierda) en $a \times b$.

Una **operación** entre ordinales es una relación funcional en On que a cada ordinal α le asigna otro $T(\alpha) \in On$. Decimos que

- T es **monónona** $\Leftrightarrow \forall \alpha, \beta \in On$ se tiene $\alpha \in \beta \Rightarrow T(\alpha) \in T(\beta)$.
- T es **continua** $\Leftrightarrow \forall \alpha \in On$ ordinal límite, se tiene $T(\alpha) = \cup\{T(\beta) : \beta < \alpha\}$.
- T es **normal** $\Leftrightarrow T$ es monótona y continua.

Si T es una operación entre ordinales y $T(\alpha) = \alpha$; decimos que α es un punto fijo de T.

(1) Si α, β son ordinales entonces $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$ son ordinales.
(2) $\omega 2 = \omega + \omega$.
(3) $2\omega = \omega$.
(4) $1 + \omega = \omega$.
(5) $\omega + 1 \neq \omega$.
(6) El producto y la suma de ordinales no conmutan, y no distribuyen.
(7) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.
(8) $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$.
(9) $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$.
(10) $\alpha 1 = 1\alpha = \alpha$.
(11) $\alpha 0 = 0\alpha = 0$.
(12) $\alpha + 1 = \alpha'$.

(13) Redefina las operaciones de suma y producto de ordinales utilizando funciones de recursión, como se hizo para los números naturales.

(14) Defina la potencia α^{β} de dos ordinales α, β; como sigue:
- $\alpha^{0} = 1$.
- $\alpha^{\beta'} = (\alpha^{\beta})\alpha$.
- $\alpha^{\beta} = \cup\{\alpha^{\gamma} : \gamma < \beta\}$ si β es un ordinal límite.

Entonces $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^{\beta} + \alpha^{\gamma}$; $\left(\alpha^{\beta}\right)^{\gamma} = \alpha^{\beta\gamma}$.

(15) Verifica que $2^{\omega} = \omega$.

(16) $T(\alpha) = \alpha'$ es monótona, pero no es continua.

(17) Si T es continua; entonces T es monótona si $T(\alpha) \in T(\alpha')$ para todo α.

(18) Si T es continua y x es un conjunto no vacío de ordinales; entonces $T(\cup x) = \cup\{T(\alpha) : \alpha \in x\}$.

(19) Dada una operación normal T en On, y $\beta \geq T(0)$; el conjunto $\{\alpha : T(\alpha) \leq \beta\}$ tiene un elemento máximo.

(20) (Teorema del punto fijo): Toda operación normal entre ordinales posee puntos fijos arbitrariamente grandes.

(21) Dado $\alpha \in On$;
- $\beta \mapsto (\alpha + \beta)$ es normal para todo α.
- $\beta \mapsto \alpha\beta$ es normal para todo $\alpha \geq 1$.
- $\beta \mapsto \alpha^{\beta}$ es normal para todo $\alpha \geq 2$.

(22) Halla el primer punto fijo de las operaciones anteriores.

(23) Resta:Si $\alpha \leq \beta$, existe un único ordinal γ tal que $\alpha+\gamma = \beta$; este γ es la **diferencia** de β menos α; solemos escribir $\gamma = \beta - \alpha$.

(24) División: Si $\alpha, \delta \neq 0$ son ordinales, existe un único par de ordinales β, ρ tales que $\alpha = \delta\beta + \rho$, y $\rho \in \delta$.

(25) Logaritmo: Si $\alpha \neq 0$ y $\beta > 1$; existen γ, δ, ρ únicos, tales que $\alpha = (\beta^{\gamma})\delta + \rho$, y $\rho \in \beta^{\gamma}$.

(26) Forma normal de Cantor: Para todo ordinal α existen números naturales $n_1, \ldots, n_k$ y ordinales $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$; tales que $\gamma_k \in \gamma_{k-1} \in \cdots \in \gamma_1$ y $\alpha = \left(\omega_{\gamma_1}\right) n_1 + \cdots + \left(\omega_{\gamma_k}\right) n_k$. Además, esta representación es única.

(27) ω, $\omega+1$, $\omega+\omega$, $\omega\omega$, ω^{ω} son todos equipotentes.

Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia sede Bogotá.

E-mail address: gipadillal@unal.edu.co