RAZONAMIENTO DIGITAL: REPRESENTAR, EXPLORAR Y RESOLVER PROBLEMAS VERBALES CON EL USO DE GEOGEBRA

DIGITAL REASONING: REPRESENTING, EXPLORING AND SOLVING WORD PROBLEMS THROUGH THE USE OF GEOGEBRA

Adrián Gómez-Arciga
Cinvestav-IPN
agomeza@cinvestav.mx

Carmen Olvera-Martínez
Universidad Juárez del Estado de Durango
carmen.olvera@ujed.mx

Daniel A. Aguilar-Magallón
Cinvestav-IPN
aguilarm@cinvestav.mx

William Enrique Poveda Fernández
Cinvestav-IPN
wpoveda@cinvestav.mx

En este estudio se analizan y contrastan acercamientos que futuros profesores de matemáticas de bachillerato muestran al resolver problemas de palabras con el uso de papel y lápiz y, posteriormente, con el uso de un Sistema de Geometría Dinámica (SGD). Se analizan los recursos, representaciones, estrategias y formas de razonamiento matemático que exhiben los participantes cuando utilizan GeoGebra en el proceso de resolución de los problemas. Los resultados muestran que el uso de la herramienta favorece la exploración dinámica de los conceptos involucrados, la formulación de conjeturas y la búsqueda de distintos argumentos para validar la solución.

Palabras clave: Resolución de Problemas, Álgebra y Pensamiento Algebraico, Tecnología

Introducción

Los problemas verbales o de palabras aparecen en los planes y programas de estudio desde el nivel básico y representan un reto para los estudiantes en términos de desarrollar conceptos y estrategias eficientes para resolverlos. Este tipo de problemas, en general, se destacan como una forma de aplicar los contenidos que se estudian a ese nivel con la resolución de problemas situados en contextos de la vida real (Verschaffel, Depaepe, & Van Dooren, 2014). En este sentido, en algunos libros de texto se propone a los estudiantes un camino que se considera es el que debe seguir para resolver los problemas verbales de manera competente: 1) comprender el problema; 2) identificar los datos conocidos y desconocidos; 3) asignar a un dato desconocido la incógnita (generalmente representada con la letra x); 4) expresar los datos desconocidos que restan en términos de la incógnita; 5) formular la ecuación; y, 6) resolver la ecuación y comprobar el resultado (Rees & Sparks, 2005). Sin embargo, cuando un estudiante se enfrenta a la resolución de problemas verbales, la primera fase (comprender el problema) suele carecer de sentido, ya que los enunciados tienden a usar palabras clave como "más" o "la diferencia de" que guían inmediatamente la selección de alguna operación aritmética, fórmula geométrica o expresión algebraica (Verschaffel, Greer, & De Corte, 2000), la cual se resuelve sin contemplar la situación planteada. En este sentido, se identifica una necesidad por promover tareas que involucren problemas verbales donde los estudiantes puedan dar significado a los conceptos u objetos matemáticos involucrados en los problemas. De acuerdo con Santos-Trigo y Reyes-Martínez (2014), el uso coordinado de las tecnologías digitales puede ser un factor fundamental para alcanzar los objetivos deseados en la enseñanza de la matemática, ya que ofrece la posibilidad de representar, explorar, identificar, formular y resolver problemas. Además, Santos-Trigo, Reyes-Martínez y Aguilar-Magallón (2015) resaltan que, "los sistemas escolares en todo

Hodges, T.E., Roy, G. J., & Tyminski, A. M. (Eds.). (2018). *Proceedings of the 40th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Greenville, SC: University of South Carolina & Clemson University.

el mundo se enfrentan a un desafío de incorporar sistemáticamente la utilización coordinada de las tecnologías digitales en las propuestas curriculares y entornos de aprendizaje" (p. 298). ¿En qué medida el uso de un Sistema de Geometría Dinámico (SGD) influye en el desarrollo de recursos, estrategias y formas de razonamiento matemático en los estudiantes cuando resuelven problemas verbales? ¿Qué tipo de razonamiento matemático (representaciones, exploraciones, conjeturas, explicaciones parciales, etc.) caracterizan los acercamientos basado en el uso de tecnologías digitales? Con el objetivo de responder estas preguntas, en este estudio se presenta una ruta donde se incorpora el uso de un SGD en la resolución de problemas verbales y se analizan las formas de razonamiento que los estudiantes desarrollan sobre los conceptos y la manera en que influye en las actividades que caracterizan a la resolución de problemas.

Marco Conceptual

Resolución de problemas y el uso de tecnología digital

Schoenfeld (1985) propuso un marco que explica el comportamiento de los estudiantes en la resolución de problemas. Éste se centra en el domino de conocimiento conceptual y procedimental (recursos), estrategias de búsqueda para el análisis y transformación de problemas que aumenten la probabilidad de encontrar una solución (heurísticas), monitoreo y control de los procesos cognitivos (metacognición) y actitudes y emociones positivas hacia la tarea que se está desarrollando (creencias). No obstante, el marco se diseñó en un ambiente donde las herramientas principales eran el papel y lápiz. Cuando se incorpora el uso de tecnologías digitales en la resolución de problemas, no solo facilita aspectos como representar, buscar patrones o invariantes entre los objetos de un problema, que es esencial para que los estudiantes identifiquen relaciones y planteen conjeturas, sino también simplifica la implementación de estrategias y ayuda a extender el repertorio de heurísticas (Santos-Trigo, 2008).

Con base en estas ideas, Santos-Trigo y Camacho-Machín (2013) propusieron un marco que, además de permitir analizar los procesos que siguen los estudiantes cuando resuelven problemas con el uso de tecnología digital, da la posibilidad de transformar problemas rutinarios en no rutinarios. El marco consta de cuatro episodios: 1) comprensión: identificar los conceptos que se relacionan con el problema y plantear algunas preguntas que orienten la actividad; 2) explorar el problema: valorar diferentes caminos para alcanzar la solución; 3) búsqueda de distintas soluciones: analizar y discriminar los distintos resultados encontrados para proponer una solución argumentada, así como plantear nuevos problemas a partir de dichos resultados; y, 4) integración y reflexiones: discutir en torno a las actividades y resultados obtenidos.

Bajo este enfoque, los modelos dinámicos de los problemas se vuelven importantes para explorar comportamientos matemáticos de una familia de objetos. En este camino, la construcción de un modelo dinámico ofrece una oportunidad para que los estudiantes busquen y exploren relaciones entre los elementos del problema vía el uso de estrategias que involucran el movimiento controlado de objetos, la generación de lugares geométricos, la cuantificación de atributos y la búsqueda de propiedades que validan relaciones y soluciones de los problemas (Santos-Trigo, Reyes-Martínez, & Aguilar-Magallón, 2015).

Metodología

En este estudio participaron ocho estudiantes de un curso de resolución de problemas que forma parte de un programa de Maestría en Educación Matemática. Se trabajó durante diez semanas, una sesión de tres horas por semana. El desarrollo de las sesiones se llevó a cabo en un aula de computo donde cada estudiante tuvo acceso a una computadora con el SGD, GeoGebra, instalado. Durante las primeras dos sesiones, se implementaron tareas que tenían la finalidad de que los estudiantes comenzaran a familiarizarse con GeoGebra, posteriormente, se abordaron diversos problemas (rutinarios y no rutinarios) con el objetivo de que los estudiantes desarrollaran diversas estrategias durante el seguimiento de los episodios planteados por Santos-Trigo y Camacho-Machín (2013). En este reporte se analiza el trabajo de los estudiantes en un problema que se abordó en dos sesiones al final del curso.

El problema

Un grupo de deportistas efectúan un recorrido de 380 km en siete horas durante una expedición de caza. Durante cuatro horas viajan a lo largo de una carretera pavimentada y el resto del tiempo por un camino de herradura. Si la velocidad media en el camino de herradura es de 25 km/h menor que la velocidad media en la carretera, encuéntrese la velocidad media y la distancia recorrida en cada uno de aquellos tramos de camino (Rees & Sparks, 2005, p. 60).

La implementación de la tarea se dividió en dos momentos: (1) primero se les solicitó a los estudiantes resolver el problema solamente con papel y lápiz y, (2) después, se les pidió que lo resolvieran con el uso de GeoGebra. Los datos se recolectaron a través de los reportes escritos, las videograbaciones de las sesiones, archivos de GeoGebra con las construcciones dinámicas que elaboraron los estudiantes y las notas de campo de los investigadores.

Resultados

En esta sección se discuten los recursos, estrategias y formas de razonamiento que exhibieron los estudiantes al resolver el problema: (1) con el uso de papel y lápiz; y, (2) con el uso de GeoGebra. En la Tabla 1 se muestran las principales características de los acercamientos que llevaron a cabo los estudiantes.

Tabla 1: Resultados con el uso de papel y lápiz y con el uso de GeoGebra.

Estudiante	Resultados con el uso de papel y lápiz	Resultados con el uso de GeoGebra (primer modelo)
Felipe	- Plantea un sistema de ecuaciones con ambas velocidades. - Encuentra la solución.	- Representa dinámicamente las condiciones del problema. - Encuentra solución de manera empírica. - Analiza el lugar geométrico que describe el punto (distancia del camino pavimentado, diferencia entre las velocidades) - Justifica algebraicamente la solución encontrada en el modelo dinámico.
Homero	- Diagrama (segmento de recta). - Plantea ecuación en términos de la velocidad del camino pavimentado. - Encuentra la solución.	- Representa dinámicamente la condición de las distancias. - No construye el modelo dinámico de manera individual.
Alfonso	- Plantea ecuación en términos de la velocidad del camino pavimentado. - Muestra dificultades procedimentales. - No encuentra la solución.	- Representa dinámicamente las condiciones del problema. - No presenta un análisis del comportamiento de los objetos matemáticos involucrados.
David	- Diagrama (áreas relacionando tiempo y distancia). - Plantea ecuación a partir del diagrama (interpretación errónea). - No encuentra la solución.	- Representa dinámicamente las condiciones del problema. - Encuentra solución de manera empírica. - Justifica algebraicamente la solución encontrada en el modelo dinámico.
Rocío	- Diagrama (segmento de recta). - Expresa las velocidades en términos de las distancias sin llegar a plantear la ecuación correspondiente.	- Representa dinámicamente las condiciones del problema. - No presenta un análisis del comportamiento de los objetos matemáticos involucrados.

	- No encuentra la solución.	
Raúl	- Diagrama (segmento de recta). - Plantea ecuación (relaciona la suma de las velocidades con la velocidad promedio). - No encuentra la solución (Figura 1).	- Representa dinámicamente las condiciones del problema. - Encuentra solución de manera empírica. - Analiza el lugar geométrico que describe el punto (distancia del camino pavimentado, diferencia entre las velocidades)
Uriel	- Diagrama (segmento de recta). - Plantea ecuación en términos de la distancia recorrida en el camino de herradura. - Muestra dificultades procedimentales. - No encuentra la solución.	- Representa dinámicamente las condiciones del problema. - Encuentra solución de manera empírica. - Justifica algebraicamente la solución encontrada en el modelo dinámico.
César	- No muestra la solución al problema.	- Representa dinámicamente las condiciones del problema. - Encuentra solución de manera empírica.

Se observa que, en los distintos acercamientos con el uso de papel y lápiz, el diagrama es insuficiente en la búsqueda de la solución. En general, cinco de los estudiantes usan esta estrategia (los diagramas son muy similares) y, aunque solo uno de ellos obtuvo la solución correcta, en ningún caso el diagrama aportó un dato relevante para resolver correctamente el problema, por ejemplo, el acercamiento propuesto por Raúl (Figura 1). De los estudiantes restantes, que no hicieron un diagrama, solo uno resolvió correctamente el problema. Al respecto, Schoenfeld (1985) menciona que el uso de heurísticas no garantiza la solución de un problema si no se cuenta con los recursos necesarios, sin embargo, en los problemas verbales parece tener mayor peso el dominio de recursos (procedimientos rutinarios) que los otros aspectos que se consideran en la resolución de problemas. También, se observan dificultades para representar la situación problemática mediante ecuaciones. Por ejemplo, Raúl plantea la igualdad entre la suma de las velocidades y la velocidad promedio, y David plantea la igualdad entre la suma de los productos de tiempos por distancias y distancia total recorrida. Es decir, ambos casos carecieron de sentido.

Respecto a los acercamientos con el uso de GeoGebra, se observa que todos los participantes lograron representar geométricamente las condiciones iniciales que se deben cumplir en el problema: distancias y tiempo (Figura 2). Cinco de los estudiantes encontraron la solución de manera empírica mediante la exploración del modelo dinámico del problema. Únicamente dos participantes realizaron un análisis dinámico del lugar geométrico que describe el punto que relaciona, de manera funcional, la distancia del camino pavimentado y la diferencia entre las velocidades. Por último, la justificación algebraica de la solución encontrada en el modelo dinámico solo fue presentada por tres estudiantes.

El primer modelo dinámico del problema sirvió de plataforma para la construcción de un segundo modelo dinámico basado en recursos, estrategias y formas de razonamiento diferentes a los planteados en el primero. Estos modelos dinámicos se describen en las siguientes secciones.

Hodges, T.E., Roy, G. J., & Tyminski, A. M. (Eds.). (2018). *Proceedings of the 40th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Greenville, SC: University of South Carolina & Clemson University.

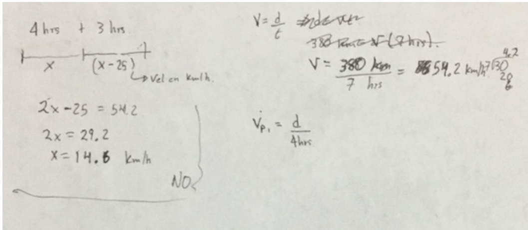


Figura 1. Diagrama y ecuación propuestos por Raúl.

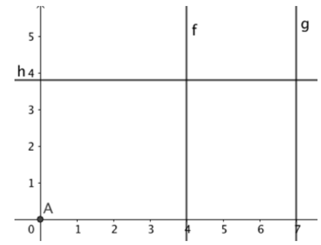


Figura 2. Representación de datos conocidos en el sistema cartesiano.

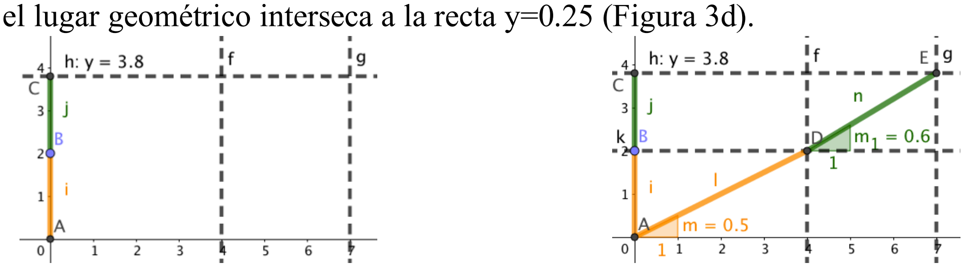
Acercamientos con el uso de un SGD

Cuando los estudiantes comenzaron a resolver el problema con GeoGebra, tuvieron que pensar el problema en términos de propiedades y los comandos de la herramienta. Por ejemplo, se plantearon preguntas como: ¿de qué manera se pueden representar el tiempo, distancia y la velocidad en este ambiente?, ¿cómo se construye un modelo dinámico asociado al problema?, ¿qué estrategias permiten llegar a la solución? Para resolver el problema los estudiantes desarrollaron dos modelos dinámicos, el primero, fue común entre los estudiantes (Figura 3), mientras que el segundo (Figura 4) fue desarrollado con la guía del investigador e implica una solución distinta a la que puede obtenerse en un ambiente donde solo se utiliza papel y lápiz. Ambos modelos se basaron en el uso del sistema cartesiano, donde se representaron las unidades de tiempo en el eje x y en el eje y la distancia recorrida (dividida entre 100 para facilitar la construcción y análisis del modelo dinámico). Las condiciones iniciales del problema: recorrido de 380 km en siete horas, de las cuales cuatro fueron en carretera pavimentada y el resto del tiempo por un camino de herradura, fueron representadas como rectas perpendiculares a los ejes que pasaban por el valor numérico correspondiente al dato conocido (Figura 2).

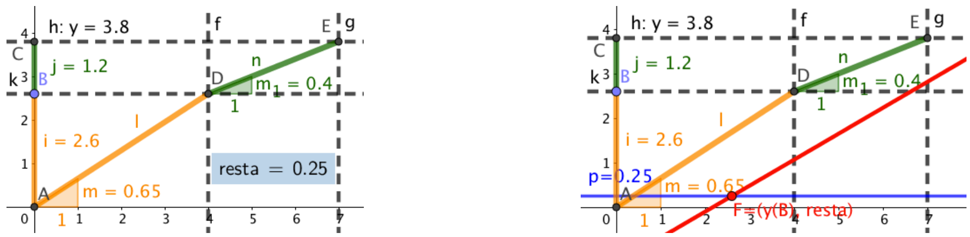
Primer modelo

Este modelo parte de la idea de representar las distancias como segmentos sobre el eje y (Figura 3a) con la finalidad de satisfacer la condición de que sumen 3.8, la cual está relacionada con la distancia total que se recorre. Para lograrlo, un estudiante coloca un punto sobre el eje y y define los segmentos AB y BC como las distancias recorridas en la carretera pavimentada y el camino de herradura, respectivamente. Enseguida, traza una perpendicular sobre el eje y que pasa por B, esta recta está asociada a la distancia del primer tramo del camino, y construye los segmentos AD y DE, en los cuales obtiene las pendientes que interpreta como las velocidades de cada tramo (Figura 3b).

Una vez que cuenta con el modelo dinámico, se enfocó en encontrar la posición del punto B en la que se satisface la condición: la velocidad media en el camino de herradura es de 25 km/h menor que la velocidad media en la carretera, es decir, la diferencia de las pendientes (m-m_1) es 0.25 (Figura 3c). El estudiante encuentre y analiza el lugar geométrico del punto F que relaciona la ordenada del punto B y la resta de las pendientes, e identifica que la solución al problema es cuando el lugar geométrico interseca a la recta y=0.25 (Figura 3d).



a) b)



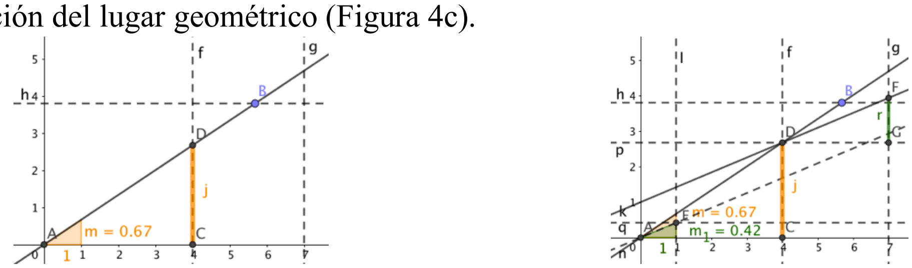
c) d)

Figura 3. Construcción del primer modelo dinámico.

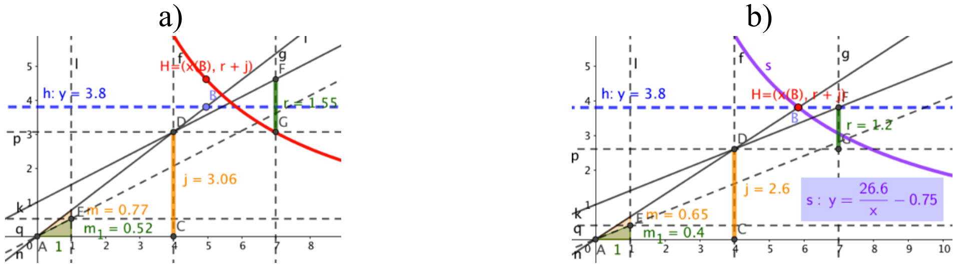
Para justificar el modelo dinámico, los estudiantes representaron algebraicamente la idea desarrollada en GeoGebra. Para encontrar la ecuación del lugar geométrico escribieron la *resta* en términos de la variable (en este caso $y(B)$ que denotaron como x). Luego, expresaron las pendientes como $m = \frac{y(B)}{4} = \frac{x}{4}$ y $m_1 = \frac{3.8-y(B)}{3} = \frac{3.8-x}{3}$. Así, la función que define a la recta es $f(x) = m(x) - m_1(x) = \frac{x}{4} - \frac{3.8-x}{3} = \frac{3x-15.2+4x}{12} = \frac{7x-15.2}{12}$. Para buscar la solución, encontraron la coordenada en x del punto de intersección de $f(x)$ y la recta p (definida como $y = 0.25$), resolvieron la ecuación $\frac{7x-15.2}{12} = 0.25$ y obtuvieron que la solución se obtiene en $x = 2.6$, es decir, 260 km recorridos en el primer tramo. Con este resultado obtienen las demás respuestas.

Segundo modelo

La idea esencial detrás de este modelo fue interpretar las velocidades como pendientes asociadas a rectas. El camino inicial que siguió un estudiante fue definir el punto B sobre la recta h, trazar la recta AB y medir su pendiente (Figura 4a), que está relacionada con la velocidad del primer tramo recorrido. Para representar la velocidad en el segundo tramo del recorrido, el estudiante construyó un triángulo rectángulo con base igual a una unidad y altura igual a $m - 0.25$, lo que le permitió trazar la recta AE cuya pendiente es $m - 0.25$ (Figura 4b). Luego, trazó una recta paralela a la recta AE que pasara por el punto D y una perpendicular al eje y que también pasara D. Así, trazó el segmento FG, el cual está relacionado con la distancia recorrida en el camino de herradura. Posteriormente, analizó el comportamiento del punto H, que relaciona la abscisa del punto B y la suma de las distancias de los recorridos (segmentos r y j) mediante la visualización del lugar geométrico (Figura 4c).



a) b)



c) d)

Figura 4. Construcción del segundo modelo dinámico.

De esta manera, encuentra que la solución es cuando el lugar geométrico se interseca con la recta $y = 3.8$. Con base en estas ideas y exploraciones, el estudiante fue capaz de representar algebraicamente este acercamiento. Representó con x la coordenada de la abscisa del punto B, el cual está asociado a la pendiente m. Para obtener la función debe expresarse a $j + r$ en términos de x, es decir, dado que $m = \frac{3.8}{x}$ y $m = \frac{j}{4}$ entonces al igualar y despejar j se obtiene que $j = \frac{15.2}{x}$. Similarmente, dado que $m_1 = m - .25$ y $m_1 = \frac{r}{3}$ entonces $r = \frac{11.4}{x} - .75$. Así, la función asociada al lugar geométrico descrito por H es $f(x) = \frac{26.6}{x} - .75$. Al igualar la función a 3.8, se tiene que $x = \frac{26.6}{4.55} \approx 5.84$. Cuando se grafica en GeoGebra la función encontrada, es posible corroborar que se los resultados coinciden (Figura 4d).

Discusión de los resultados

Cuando los estudiantes intentan resolver el problema en un ambiente donde solamente cuentan con papel y lápiz, se observa que para llegar a la solución es necesario que posean los recursos que les permitan plantear las ecuaciones adecuadamente y, mediante procedimientos rutinarios, obtener el resultado correcto. Sin embargo, si no logran comprender la situación problemática será difícil que logren plantear la ecuación o modelo matemático que les permita llegar a la solución e incluso implementar la heurística de representar el problema por medio de un diagrama para observar cómo se relacionan los datos del problema.

Cuando se incorporó GeoGebra para resolver el problema, se observó que el nivel de apropiación del SGD y los recursos con los que contaba cada estudiante determinaba el tipo de estrategia que desarrollaban. De manera general, los dos modelos dinámicos que se construyeron involucraron recursos y conceptos matemáticos diferentes, lo que implicó el desarrollo de diferentes formas de razonamiento. Cada uno de los modelos permitió que los estudiantes interpretaran geométricamente las condiciones que se deben cumplir en el problema planteado. Así, el SGD permitió que los estudiantes dieran significado a los conceptos y objetos matemáticos involucrados en el problema y, a través de la exploración de los modelos dinámicos, encontraran la solución sin necesidad de plantear un acercamiento algebraico de manera inicial. En la Tabla 2 se presenta una comparación de las actividades matemáticas que se llevaron a cabo en cada uno de los modelos exhibidos por los estudiantes, con base en los episodios propuestos por Santos-Trigo y Camacho-Machín (2013).

Tabla 2: Comparación de los modelos dinámicos del problema

Episodio	Primer modelo	Segundo modelo
Comprensión	Interpretar las distancias geométricamente como segmentos sobre el eje *y* que sus longitudes sumen 3.8 y representar las velocidades en términos de las distancias.	Interpretar las velocidades geométricamente como pendientes de rectas donde una sea 0.25 unidades menor a la otra y representar las distancias en términos de las velocidades.
Exploración del problema	Buscar para qué longitudes de los segmentos se cumple la condición de las velocidades (pendientes).	Buscar para qué pendientes de las rectas se cumple la condición de las distancias (segmentos).
Búsqueda de distintos acercamientos a la solución	Soluciones empíricas obtenidas por: - Analizar los valores numéricos de los atributos del modelo - Visualizar lugar geométrico (recta) que relaciona la longitud del segmento AB con la diferencia de las pendientes m y m_1 (ver Figura 2d)	Soluciones empíricas obtenidas por: - Analizar los valores numéricos de los atributos del modelo - Visualizar lugar geométrico (hipérbola) que relaciona la abscisa del punto B con la suma de los segmentos j y r (ver Figura 3d) Solución algebraica obtenida por:

	Solución algebraica obtenida por: - Representar el modelo dinámico mediante ecuaciones.	- Representar el modelo dinámico mediante ecuaciones.
Integración y reflexión	Dar sentido a la resta de velocidades respecto a la situación problemática.	Relacionar la pendiente de rectas verticales con la indeterminación de la función.

En la Tabla 2 se puede observar que hay recursos y estrategias que coinciden en cada episodio de ambos modelos con el uso del SGD. En el primer episodio, fue importante el uso del sistema cartesiano para representar los datos del problema geométricamente y para, posteriormente, analizar las relaciones y atributos de la construcción. Lo anterior, implicó aplicar una escala en el eje de las ordenadas para tener la posibilidad de visualizar el modelo con mayor facilidad y explorarlo. También, cobró sentido el concepto de pendiente cuando se interpretó geométricamente la razón de dos cantidades (como es el caso de la velocidad). El episodio de exploración del problema es resultado de implementar la heurística de punto con movimiento controlado que permite el SGD. Es decir, a partir de un punto que se definió sobre una recta o un eje, se construyó un modelo dando la oportunidad de explorar y analizar las relaciones entre los atributos de la construcción. En el tercer episodio, utilizar la herramienta de lugar geométrico es una estrategia esencial para encontrar soluciones geométricas en términos de la covariación de atributos de la configuración dinámica, que conlleva a plantear conjeturas por medio de la observación y, por lo tanto, a buscar argumentos. Por último, el cuarto episodio se centra en el dominio del problema donde se reflexiona sobre el comportamiento y la interpretación del modelo para todos los valores del punto móvil. Por otro lado, se evidencian las diferencias de ambos acercamientos que muestran los conceptos que se enfatizan y los distintos caminos que involucran reflexiones diferentes para interpretar la solución del problema.

La construcción y exploración de los modelos dinámicos permitió que los estudiantes lograran representar algebraicamente el problema al dar seguimiento a los pasos de la construcción. Específicamente en el segundo modelo dinámico, se desarrolló un modelo algebraico que no sería fácil de plantear sin la exploración de la construcción. De esta manera, los estudiantes pudieron interpretar y contextualizar las expresiones algebraicas, y dar sentido a diferentes objetos y conceptos matemáticos como la pendiente.

Conclusiones

El uso del SGD para la resolución de problemas verbales permitió que los estudiantes prestaran más atención a la comprensión del problema para poder construir el modelo dinámico del problema y a la exploración del problema, para analizar el comportamiento de los objetos matemáticos involucrados. La búsqueda de distintos acercamientos a la solución favoreció el desarrollo de diferentes formas de razonamiento, especialmente, se observó un tránsito de lo empírico a lo formal cuando los estudiantes llevaron su solución dinámica a la representación algebraica. Al integrar y reflexionar sobre las estrategias de solución, fue posible analizar, dentro del contexto del problema, estrategias que se identificaron en las exploraciones como la resta de velocidades, además de ideas matemáticas como la indeterminación de una función.

In this study we analyze and contrast approaches that future high school math teachers show when solving word problems with the use of pencil and paper and later, with the use of a Dynamic Geometry System (DGS). The resources, representations, strategies and forms of mathematical reasoning that the participants exhibit when they use GeoGebra in the process of

problem solving are analyzed. The results show that the use of the tool favors the dynamic exploration of the concepts involved, the formulation of conjectures and the search for different arguments to validate the solution.

Keywords: Problem Solving, Algebra and Algebraic Thinking, Technology.

Introduction

Word problems are an important theme in school plans and programs of study from the basic level and represent a challenge for the students in terms of developing concepts and strategies to solve them. This type of problems, in general, stand out as a way of applying the contents that are studied at that level by solving problems situated in real-life contexts (Verschaffel, Depaepe, & Van Dooren, 2014). Likewise, in some textbooks students are encouraged to follow a path that involves the following stages: 1) understand the problem statement; 2) identify known and unknown data; 3) assign the unknown to an unknown data (usually represented by the letter x); 4) expressing the unknown data remaining in terms of the unknown; 5) formulating the equation; and, 6) solving the equation and check the result (Rees & Sparks, 2005). However, when a student is faced with solving word problems, the first phase (understanding the problem) is often meaningless, since statements tend to include keywords such as "more" or "difference" that push them immediately the selection of some arithmetic operation, geometric formula or algebraic expression (Verschaffel, Greer, & De Corte, 2000), that then is solved without making sense of the situation posed. In this way, a need is identified to promote tasks that involve word problems where students can give meaning to the concepts or mathematical objects involved in the problems. According to Santos-Trigo and Reyes-Martínez (2014), the coordinated use of digital technologies can be a fundamental factor in achieving the desired objectives in the teaching of mathematics, since it offers the possibility of representing, exploring, identifying, formulating and solving problems. In addition, Santos-Trigo, Reyes-Martínez and Aguilar-Magallón (2015) highlight that, "school systems throughout the world face a challenge of systematically incorporating the coordinated use of digital technologies in curricular proposals and learning environments " (p. 298). To what extent does the use of a Dynamic Geometry System (DGS) affect the development of resources, strategies and ways of mathematical reasoning in the students, when they solve word problems? What kind of mathematical reasoning (representations, explorations, conjectures, partial explanations, etc.) characterize the approaches based on the use of digital technologies? In order to answer these questions, this study presents a route that incorporates the use of DGS in the word problem solving and discusses the forms of reasoning that students develop about concepts and the way in which it influences the activities that characterize the problem solving.

Conceptual Framework

Problem Solving and the use of digital technology

Schoenfeld (1985) proposed a framework that explains the students´ behavior in problem solving. It focuses on the domain of conceptual and procedural knowledge (resources), search strategies for the analysis and transformation of problems that increase the probability to find a solution (heuristics), monitoring and control of cognitive process (metacognition) and attitudes and positive emotions towards the task that is been developed (beliefs). However, the framework was designed in an environment where the main tools were paper and pencil. When the use of digital technologies is incorporated into problem solving, it not just facilitates aspects such as representing, looking for patterns or invariants among objects of a problem, which is essential for the students to identify the relationships and raise conjectures, but also it simplifies the strategies implementation and helps to extend the heuristics repertoire. (Santos-Trigo, 2008).

Based on these ideas, Santos-Trigo and Camacho-Machín (2013) proposed a framework that besides allowing the analysis of procedures that the students follow when they solve problems with the use the digital technology, it gives the possibility to transform routine problems into non-routine problems. The framework consists of four episodes: 1) understanding: to identify the concepts that relate to the problem and ask some questions that guide the activity 2) explore the problem: to evaluate different ways to find the solution 3) search for different solutions: to analyze and discriminate the different results found to propose an argued solution, as well as to pose new problems from these results 4) integration and reflections: to discuss about the activities and the results obtained.

Under this approach, the dynamic models of the problems become important to explore mathematical behaviors of a family of objects. In this way, the construction of a dynamic model offers an opportunity for the students to search and explore relationships between the elements of the problem through the use of strategies that involve the controlled movement of objects, locus generation, attributes qualifications and the search of properties that allow relationships and solutions to problems. (Santos-Trigo, Reyes-Martínez, & Aguilar-Magallón, 2015).

Methodology

In this study, eight students participated from a problem solving course that is part of a Master´s program in Mathematics Education. It worked for ten weeks, with a session of three hours per week.

The development of the sessions was done in a computer lab where each student had access to a computer with the DGS, GeoGebra, installed. During the first two sessions, tasks aimed at getting the students familiarized with GeoGebra were implemented, after that, various problems (routine and non-routine) were addressed with the aim of having the students develop various strategies during the follow-up of the episodes proposed by Santos-Trigo and Camacho-Machín (2013). In this report it is analyzed the students' work in a problem that was addressed in two sessions at the end of the course.

The Problem

A group of athletes make a 380 km tour in seven hours during a hunting expedition. For four hours they travel along a paved road and the rest of the time by a bridle path. If the average speed in the bridle path is of 25 km/h lower than the average speed on the road, find the average speed and the distance traveled in each of those road sections. (Rees & Sparks, 2005, p. 60).

The implementation of the task was divided in two stages: (1) the students were first asked to solve the problem just with the use of pencil and paper and (2) later, they were asked to solve it with the use of GeoGebra. The data was collected through the written reports, the video recordings of the sessions, GeoGebra archives with the dynamic constructions created by the students and the field notes of the researchers.

Results

In this section are discussed the resources, strategies and ways of thinking that the students showed when they solve the problem: (1) with the use of pencil and paper; and, (2) with the use of GeoGebra. Table 1 shows the main characteristic of the approaches carried out by the students.

Table 1: Results with the use of pencil and paper and with the use of GeoGebra.

Student´s Name:	Results with the use of pencil and paper	Results with the use of GeoGebra (first model)
Felipe	- He proposes a system of equations with both speeds. - He found the solution.	- He represents in a dynamic way the conditions of the problem. - He found the solution in an empiric way. - He analyses the locus that describes the point (paved road distance, difference between speeds) - He justifies algebraically the solution found in the dynamic model.
Homero	- Diagram (line segment). - He proposes an equation in terms of the speed of the paved road. - He found the solution.	- He represents in a dynamic way the conditions of the distances. - He does not create the dynamic model in an individual way.
Alfonso	- He proposes an equation in terms of the speed of the paved road. - He has procedural difficulties. - He does not find the solution.	- He represents in a dynamic way the conditions of the problem. - He does not present an analysis of the behavior of the mathematical objects involved.
David	- Diagram (areas relating time and distance). - He proposes an equation from the diagram (wrong interpretation). - He does not find the solution.	- He represents in a dynamic way the conditions of the problem. - He found the solution in an empiric way. - He justifies algebraically the solution found in the dynamic model.
Rocío	- Diagram (line segment). - She expresses the speeds in terms of the distances without proposing the corresponding equation. - She does not find the solution.	- She represents in a dynamic way the conditions of the problem. - She does not present an analysis of the behavior of the mathematical objects involved.
Raúl	- Diagram (line segment). - He proposes an equation (he relates the sum of the speeds with the average speed) - He does not find the solution (Figure 1)	- He represents in a dynamic way the conditions of the problem. - He found the solution in an empiric way. - He analyses the locus that describes the point (paved road distance, difference between speeds)
Uriel	- Diagram (line segment). - He proposes and equation in terms of the distance traveled in the bridled path. - He has procedural difficulties. - He does not find the solution.	- He represents in a dynamic way the conditions of the problem. - He found the solution in an empiric way. - He justifies algebraically the solution found in the dynamic model.
César	- He does not find the solution.	- He represents in a dynamic way the conditions of the problem. - He found the solution in an empiric way.

It is observed that, in the different approaches with the use of pencil and paper, the diagram is insufficient in the search of the solution. In general, five of the students used this strategy (the diagrams are very similar) and, although just one of them obtained the correct solution, in no case the diagram gave relevant data to solve correctly the problem, see for example, the approach proposed by Raúl (Figure 1). Of the remaining students, who did not make a diagram, just one of them solved correctly the problem. According to that, Schoenfeld (1985) says that the use of heuristics does not guarantee the solution of a problem if the necessary resources are not available, however, in the word problems, the domain of resources (routine procedures) seems to have greater weight than the other aspects that are considered in the problem solving. Also, there are some difficulties as to represent the problematic situation through equations. For example, Raúl proposes the equality among the sum of the speeds and the average speed, and David proposes the equality among the sum of the products of times by distances and the total of distance traveled. In other words, both cases suffered from lack of meaning.

Regarding the approaches with the use of GeoGebra, it is observed that all the participants managed to represent geometrically the initial conditions that must be satisfied in the problem: distances and time (Figure 2). Five of the students found the solution in an empiric way through the exploration of the dynamic model of the problem. Only two participants did a dynamic analysis of the locus that describes the point that relates, in a functional way, the distance of the paved road and the difference between the speeds. Finally, the algebraic justification of the solution found in the dynamic model was only presented by three students.

The first dynamic model of the problem was used as a platform to the construction of a second dynamic model based on resources, strategies and different forms of reasoning to the ones proposed in the first one. These dynamic models are described in the following sections.

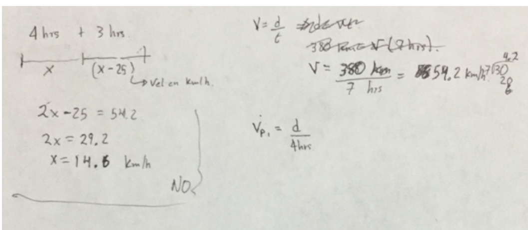


Figure 1. Diagram and equation proposed by Raúl.

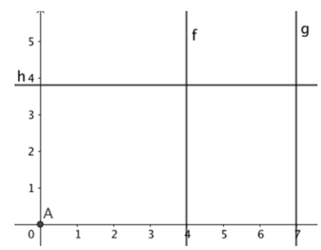


Figure 2. Representation of known data in the cartesian system

Approaches with the use of a Dynamic Geometry System

At the moment that the students started to solve the problem with GeoGebra, they had to think the problem in terms of properties and the commands of the tools. For instance, they asked questions like: In which way the time, the distance and the speed in this environment can be represented? How does a dynamic model related to the problem is constructed? What strategies allow to reach the solution? In order to solve the problem the students developed two dynamic models, the first one, was common among the students (Figure 3), while the second one (Figure 4) was developed with the guide of the researcher and it involves a different solution to the one that can be obtained in an environment where is only used pencil and paper.

Both models were based on the use of a cartesian system, there were represented the time units in the *x*-axis and in the *y*-axis the distance traveled (divided between 100 to facilitate the construction and analysis of the dynamic model). The initial conditions of the problem: 380 km route in seven hours, in which four of them were traveled in a paved road, and the remaining time by a bridle path, were represented as perpendicular lines that pass through the numerical value corresponding to the known data (Figure 2).

First model

This model is based on the idea of representing the distances as segments on the y-axis (Figure 3a) with the objective of satisfying the condition that they sum 3.8, which will be related to the total distance traveled. To achieve this, a student places a point on the y-axis and defines the segments AB and BC as the distances traveled in the paved road and in the bridle path respectively. Then, trace a perpendicular to the y axis that passes by B, this line segment is associated to the distance of the first section of the road, and they build the line segments AD and DE, from which they obtain the slopes that are interpreted as the speed of each section. (Figure 3b).

Once a dynamic model is obtained, they were focused to find the position of the point B in which the condition is satisfied: the average speed in the bridle path is of 25 km/h less than the average speed in the paved road, in other words, the difference of the slopes (m-m_1) is 0.25 (Figure 3c). The student finds and analyses the locus of the point F that relates the ordinate of the point B and the subtraction of slopes, and identifies that the solution to the problem is where the locus intersects the line y=0.25 (Figure 3d).

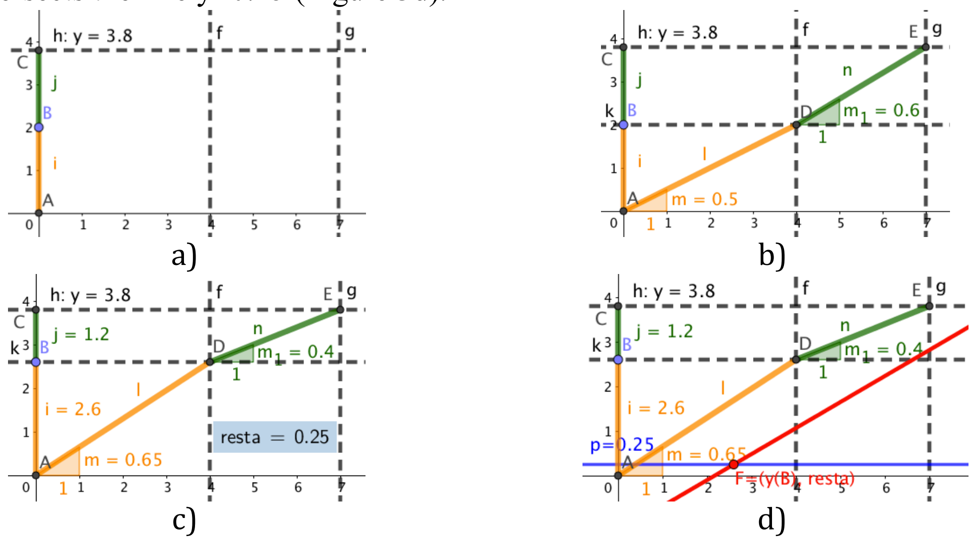


Figure 3. Construction of the first dynamic model

In order to justify the dynamic model, the students represented algebraically the idea developed in GeoGebra. To find the equation of the locus they wrote the subtraction in terms of the variable (in this case $y(B)$ that is denoted as x). Later, they express the slopes as $m = \frac{y(B)}{4} = \frac{x}{4}$ and $m_1 = \frac{3.8-y(B)}{3} = \frac{3.8-x}{3}$. Hence, the function that defines the line is $f(x) = m(x) - m_1(x) = \frac{x}{4} - \frac{3.8-x}{3} = \frac{3x-15.2+4x}{12} = \frac{7x-15.2}{12}$. To look for the solution, they found the coordinate in x of the intersection point of $f(x)$ and the line p (defined as $y = 0.25$), they solved the equation $\frac{7x-15.2}{12} = 0.25$ and got that the solution is obtained in $x = 2.6$, in other words, 260 km were traveled in the first section. With this result they got the others answers.

Second Model

The essential idea of this model was to interpret the speeds as slopes related to straight lines. The initial path that a student followed was to define the point B on the line h, trace the line AB and measure its slope (Figure 4a), which is related to the speed of the first section traveled. To represent the speed in the second section of the travel, the students built a right triangle with a base equal to one unit and height equal to $m - 0.25$, which gave him the opportunity to trace the line AE, its slope is $m - 0.25$ (Figure 4b). After that, he traced a line parallel to the line AE that goes through the point D and a perpendicular to the y-axis that also goes through D. In this way, he traced the segment FG, which is related to the distance traveled in the bridle path. Later on, he analyzed the behaviour of the point H that relates the abscissa of the point B and the sum of the distances of the travels (segments r and j) through the visualization of the locus (Figure 4c)

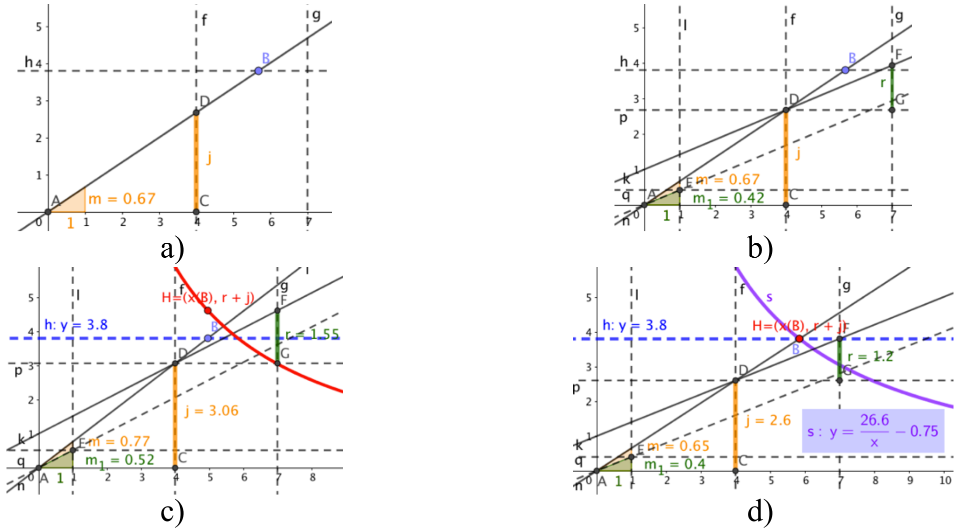


Figure 4. Construction of the second dynamic model.

In this way, he finds that the solution is when the locus intersects the line $y = 3.8$. Based on these ideas and explorations, the students were able to represent this approach algebraically. He represented with *x* the coordinate of the abscissa of the point *B*, which is associated with the slope m. In order to get the function, $j + r$ must be expressed in terms of x, in other words, since $m = \frac{3.8}{x}$ and $m = \frac{j}{4}$ then when equalizing and clearing j we obtain that $j = \frac{15.2}{x}$. Similarly, since $m_1 = m - .25$ and $m_1 = \frac{r}{3}$ we get $\frac{11.4}{x} - .75$. In this way, the function associated to the locus is described by $\frac{11.4}{x} - .75$. At the moment to equalize the function to 3.8, we obtain that $x = \frac{26.6}{4.55} \approx 5.84$. When the function found is plotted in GeoGebra, it is possible to corroborate that the results match (Figure 4d).

Discussion of the Results

When the students try to solve the problem in an environment where they can only use pencil and paper, it is observed that in order to get the solution is necessary that they have the resources that allow them to propose the equations in a correct way and, through routine procedures, to get the correct result. However, if they do not understand the problematic situation it will be difficult for them to manage to propose the equation or mathematical model that allows them to find the solution and even, to implement the heuristic of representing the problem by a diagram to observe how the data of the problem is related.

When GeoGebra was incorporated to solve the problem, it was observed that the level of appropriation of the DGS and the resources that each student could use determined the type of strategy that was developed. In general, the two dynamic models that were built involved different resources and mathematical concepts, which in turn involved the development of different ways of reasoning. Each model allowed the students to interpret geometrically the conditions that must be fulfilled in the problem given. So, the DGS allowed students to give meaning to the concepts and mathematical objects involved in the problems and through the exploration of the dynamic problems, they found the solution without the need to propose an algebraic approach from the beginning.

Table 2 presents a comparison of the mathematical activities that were done in each model showed by the students, based in the episodes proposed by Santos-Trigo and Camacho-Machín (2013).

Table 2: Comparison of the dynamic models of the problem

Episode	First model	Second model
Understanding	To interpret the distances geometrically as segments on the y axis such that all its lengths sum 3.8 and represent the speeds in terms of the distances.	To interpret the speeds geometrically as slopes of straight lines where one is 0.25 less than the other and represent the distances in terms of the speeds.
Exploration of the problem	To search for which lengths of segments does the condition of the speeds is met (slopes).	To search for which slopes of the straight lines does the condition of the distances (segments) is met.
Search of different approaches to the solution	Empiric solutions obtained by: - Analyzing the numeric values to the model attributes. - Visualizing the locus (line) that relates the length of the segment AB with the difference of the slopes m y m_1 (see Figure 2d) Algebraic solution obtained by: - Representing the dynamic model through equations.	Empiric solutions obtained by: - Analyzing the numeric values to the model attributes. - Visualizing the locus (hiperbola) that relates the abscissa of the segment B with the sum of the segments j and r (see Figure 3d) Algebraic solution obtained by: - Representing the dynamic model through equations.
Integration and reflection	To give sense to the subtraction of the speeds related to the problematic situation.	To relate the slope of the vertical line with the indetermination of the function.

In Table 2 it can be observed that there are resources and strategies that match in each episode in both models with the use of the DGS. In the first episode, it was important the use of the Cartesian system to represent the data of the problem geometrically, and after that to analyze the relations and attributes of the construction. The last process, involved the application of a scale on the axis of the ordinates to get the possibility of visualizing easier the model and explore it. Also, the concept of the slope got sense when it was interpreted geometrically as the ratio of two quantities (as in the case of the speed). The episode of the exploration of the problem is the result of implementing the heuristic of the point with controlled movement that allows the DGS. In other words, from a point that was defined on a line or an axis, a model was built giving the opportunity to explore and to analyze the relations between the attributes of the construction. In the third episode, to use the locus tool is an essential strategy to find the geometric solutions of the covariation of the attributes of the dynamic setting, that allows to propose conjectures through the observation and hence, to search arguments. Finally, the fourth episode is focused on the handling of the problem where is analized the behavior and the interpretation of the model for all the values of the free point. On the other hand, the differences between both approaches are pointed out, these shows the emphasized concepts and the different ways that included different reflections in order to interpret the solution of the problem.

The construction and exploration of the dynamic models allowed the students to achieve to represent algebraically the problem by following the steps of the construction. Specifically, in the second model it was developed an algebraic model that will not be easy to propose without the exploration of the construction. In this way, the students could interpret and contextualize the algebraic expressions and give sense to different mathematical concepts and objects as the slope.

Conclusions

The use of DGS for the solution of verbal problems allowed the students to pay more attention to the understanding of the problem in order to build the dynamic model of the problem and the exploration of it, in order to analyze the behavior of the mathematical objects involved. The search for different approaches to the solution promotes the development of different forms of reasoning, especially, it was observed a change from the empiric to the formal when the students carried their dynamic solution to the algebraic representation. By integrating and reflecting about the strategies of the solution, it was possible to analyze in the context of the problem, strategies that were identified in the explorations as the subtraction of the speeds, and also the mathematical ideas as the indetermination of a function.

References

Rees, P. & Sparks, F. (2005). Álgebra. McGraw-Hill/Interamericana.

Santos-Trigo, M. (2008). An inquiry approach to construct instructional trajectories based on the use of digital technology. *EURASIA Journal of Mathematics, Science & Technology Education,* 4(4), 347-357.

Santos-Trigo, M. & Camacho-Machín, M. (2013). Framing the use of computational technology in problem solving approaches. *The Mathematics Enthusiast*, 10(1), 279-302.

Santos-Trigo, M. & Reyes-Martínez, I. (2014). The coordinate use of digital technologies in learning environments. In L. Uden, J. Sinclair, Y. Tao & D. Liberona (Eds.), *Learning Technology for Education in Cloud* (pp. 61-71). Switzerland: Springer.

Santos-Trigo, M., Reyes-Martínez, I., & Aguilar-Magallón, D. (2015). The use of digital technology in extending mathematical problem solving reasoning. In L. Uden, D. Liberona & T. Welzer (Eds.), *Learning Technology for Education in Cloud* (pp. 298-309). Switzerland: Springer.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.

Swetz, F. (2009). Culture and the development of mathematics: a historical perspective. In B. Greer, S. Mukhupadhyay, A. B. Powell y S. Nelson-Barber (Eds.) *Culturally responsive mathematics education* (pp. 11–42). Taylor and Francis, Routledge.

Verschaffel, L., Depaepe, F., & Van Dooren, W. (2014). Word problems in mathematics education. In *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 641-645). Springer Netherlands.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Swets & Zeitlinger, Lisse.