Revisão

Números Complexos

Definição

Um número complexo é uma expressão da forma

$$z = a + i\,b \tag{0.1}$$

onde a e b são reais e i é a *unidade imaginária*, definida como

$$i^2 = -1 \quad \text{ou} \quad i = \sqrt{-1} \tag{0.2}$$

Os reais a e b são respectivamente a *parte real* e a *parte imaginária* do número complexo z, simbolizadas como:

Os reais a e b são respectivamente a *parte real* e a *parte imaginária* do número complexo z, simbolizadas como:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(z) = a \\ \operatorname{Im}(z) = b \end{cases} \tag{0.3}$$

Exemplo:

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}(-3{,}5 + 2i) = -3{,}5 \\ &\operatorname{Im}(-3{,}5 + 2i) = 2 \end{aligned}$$

Plano complexo

Um número complexo pode ser representado por um ponto ou por um vetor de posição em um sistema de coordenadas cartesianas chamado "plano complexo", com a parte real correspondendo à abscissa e a parte imaginária à ordenada, conforme mostrado na figura abaixo.

A representação de um complexo $z = a + i\,b$ através de suas partes real e imaginária é denominada *forma cartesiana* ou retangular do número complexo.

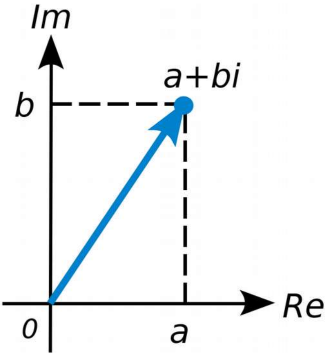


Figura 0.1 - Plano complexo, mostrando a representação do número complexo

$z = a + i\,b$.

Operações elementares

Soma e subtração

A soma e a subtração de números complexos são efetuadas respectivamente somando e subtraindo as partes reais e as partes imaginárias das parcelas:

$$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d) \tag{0.4}$$

$$(a+ib)-(c+id)=(a-c)+i(b+d) \tag{0.5}$$

Exemplo 1

$$(3+5i)+(8-2i)=(3+8)+(5-2)i=11+3i$$

$$(4-7i)-(3+8i)=(4-3)+(-7-8)i=1-15i$$

Multiplicação e divisão

A multiplicação é efetuada utilizando a propriedade distributiva da multiplicação e a definição da unidade imaginária *i* segundo (0.2):

$$(a+ib)(c+id)=(ac-bd)+i(bc+ad) \tag{0.6}$$

A divisão é dada por:

$$\frac{(a+ib)}{(c+id)}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)+i\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right) \tag{0.7}$$

Exemplo 2

$$(3+5i)(8-2i)=(3\times 8+2\times 5)+(5\times 8-2\times 3)i=34+34i$$

$$\frac{(3+8i)}{(4-7i)}=\left(\frac{3\times 4-8\times 7}{4^2+7^2}\right)+\left(\frac{8\times 4+3\times 7}{4^2+7^2}\right)i=-\frac{44}{65}+\frac{53}{65}i$$

A multiplicação e a divisão podem ser efetuadas de maneira bem mais simples usando a forma polar para a representação dos complexos, como é mostrado mais abaixo.

Comparação

O conjunto dos complexos não admite relação de ordem, isto é, dados dois números complexos, não se pode dizer qual deles é maior ou menor que o outro. Pode-se apenas verificar a igualdade ou a desigualdade.

Dois complexos são iguais se e somente se suas partes reais são iguais e as partes imaginárias também são iguais:

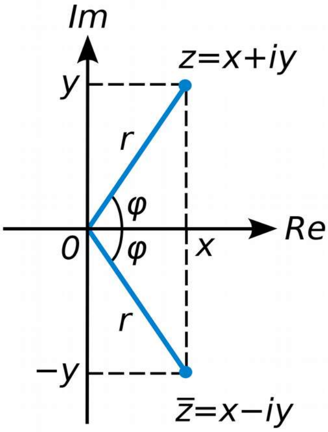
$$(a+ib)=(c+id) \iff a=c \text{ e } b=d \tag{0.8}$$

Em particular, um complexo é igual a zero se e somente se suas partes real e imaginária são ambas iguais a zero.

$$(a+ib)=0 \iff a=0 \text{ e } b=0 \tag{0.9}$$

Conjugação

Dado um complexo $z = x + i\,y$, o *complexo conjugado* de z é igual a $x - i\,y$ sendo representado por $\bar{z}$ ou z^*. No plano complexo, $\bar{z}$ é a "reflexão" de z em relação ao eixo real.



A conjugação é simétrica, isto é, se $\bar{z}$ é o complexo conjugado de z, então z é o complexo conjugado de $\bar{z}$: $z=\bar{\bar{z}}$.

É usual dizer que z e $\bar{z}$ são um par complexo conjugado.

A conjugação pode ser usada para obter as partes real e imaginária de um complexo:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(z) &= \frac{1}{2}(z+\bar{z}) \\ \mathrm{Im}(z) &= \frac{1}{2i}(z-\bar{z}) \end{aligned} \tag{0.10}$$

A conjugação é distributiva em relação às operações aritméticas:

$$\begin{aligned} \overline{z \pm w} &= \bar{z} \pm \bar{w} \\ \overline{z\,w} &= \bar{z}\,\bar{w} \\ \overline{z/w} &= \bar{z}/\bar{w} \end{aligned} \tag{0.11}$$

Se $z = x + i\,y$ então, de acordo com a regra (0.6), o produto de z por $\bar{z}$ vale $z\,\bar{z} = x^2 + y^2$.

A quantidade $\sqrt{x^2 + y^2}$ é chamada de *módulo* ou *valor absoluto* do complexo $z = x + i\,y$:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{0.12}$$

Desse modo:

$$z\,\bar{z} = |z|^2 \tag{0.13}$$

Usando (0.13), o inverso de um complexo z é dado por

$$\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Portanto a divisão de dois complexos pode ser escrita como:

$$\frac{w}{z}=w\,\frac{1}{z}=\frac{w\,\bar{z}}{|z|^2}$$

donde resulta a regra da divisão (0.7).

Forma polar

O ponto *P* que representa um número complexo $z = x + i\,y$ no plano complexo pode ser expresso tanto em coordenadas cartesianas $x = \mathrm{Re}(z),\; y = \mathrm{Im}(z)$ como em coordenadas polares $r,\, \varphi$, conforme mostrado na figura abaixo, onde r é a distância de *P* à origem *O*, e φ é o ângulo do segmento $\overline{OP}$ com o eixo real, crescente no sentido anti-horário.

O ângulo φ é chamado *argumento* do número complexo *z*, sendo simbolizado como

$$\varphi = \arg(z) \tag{0.14}$$

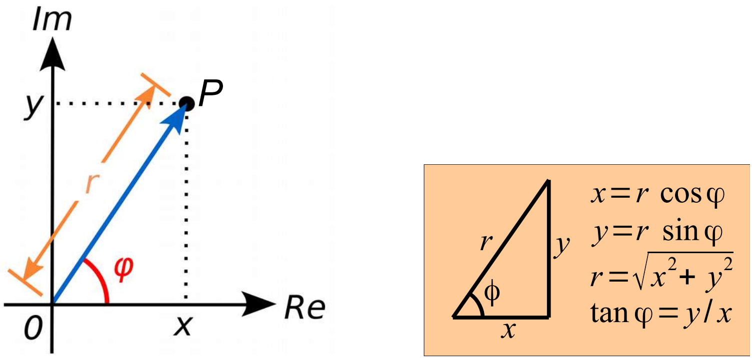
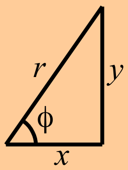


Figura 0.2 - Relação entre as formas cartesiana e polar para a representação de números complexos.

Do triângulo retângulo formado por x, y, r, conforme a figura, tem-se que



$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\tan\varphi = y/x$$

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned} \tag{0.15}$$

onde, de acordo com (0.12), tem-se que $r = |z|$.

Substituindo x, y, dados por (0.15) na forma cartesiana $z = x + i\,y$ vem:

$$z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) \tag{0.16}$$

Fazendo uso da fórmula de Euler $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ tem-se a chamada *forma polar* dos números complexos:

$$z = r\, e^{i\varphi} \tag{0.17}$$

onde $r = |z|$ e $\varphi = \arg(z)$.

As expressões (0.15) permitem converter a forma polar para a forma cartesiana.

$$\begin{gathered} x = r \cos\varphi \\ y = r \sin\varphi \\ r = \sqrt{x^2 + y^2} \end{gathered}$$

As relações inversas, que permitem passar da forma cartesiana para a forma polar, são:

$$\begin{gathered} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\phi = y/x \end{gathered} \tag{0.18}$$

onde o argumento φ deve ser calculado levando em conta o quadrante correto:

$$\varphi=\begin{cases}\arctan(y/x) & \text{se } x>0\\ \arctan(y/x)\pm\pi & \text{se } x<0\\ \pi/2 & \text{se } x=0 \text{ e } y>0\\ -\pi/2 & \text{se } x=0 \text{ e } y<0\\ \text{indeterminado} & \text{se } x=0 \text{ e } y=0\end{cases} \tag{0.19}$$

É fácil ver que $e^{i\varphi}=e^{i(\varphi+2k\pi)}$ onde k é um inteiro. Disso decorre que um número complexo dado na forma polar (0.17) não se altera se somarmos ou subtrairmos um múltiplo inteiro de 2π radianos ao seu argumento.

Assim, por exemplo, $2e^{i\frac{\pi}{6}}$, $2e^{i\frac{13\pi}{6}}$, $2e^{-i\frac{23\pi}{6}}$ representam o mesmo número complexo.

Qualquer que seja o valor do argumento φ, o mesmo pode ser reduzido ao intervalo $[-\pi, +\pi]$.

Em outras palavras, sempre existe um inteiro *k*, tal que $\Phi = \varphi + 2k\pi$ de modo que $-\pi \leq \Phi < \pi$.

O valor Φ assim calculado é chamado *valor principal* do argumento, simbolizado por

$$\Phi = \mathrm{Arg}(z)$$

Exemplo 3

(a) Exprimir $z = -3 + 3\sqrt{3}i$ na forma polar:

$$|z| = \sqrt{(-3)^2 + (3\sqrt{3})^2} = 6$$

$$\arg(z) = \varphi = \arctan(-\sqrt{3}) + \pi = \frac{2\pi}{3}$$, usando (0.19)

Então: $z = 6e^{i\frac{2\pi}{3}}$

(b) Exprimir $z = 5e^{-3i}$ na forma cartesiana:

Usando (0.15): $z = 5\cos(-3) + 5i\sin(-3)$

$z \approx -4{,}95 - 0{,}71\,i$

(c) Calcular o valor principal do argumento de

$$z_1 = 6\,e^{i\frac{1024\pi}{3}} \quad \text{e} \quad z_2 = 7\,e^{i\frac{265\pi}{4}}$$

$$\operatorname{Arg}(z_1) = -\frac{2}{3}\pi \qquad \operatorname{Arg}(z_2) = \frac{1}{4}\pi$$

Operações elementares usando a forma polar

A soma e a subtração de complexos são mais facilmente efetuadas na forma cartesiana, ao passo que as operações de multiplicação, divisão, potenciação e radiciação são mais facilmente efetuadas em forma polar.

Comparação

Dois complexos em forma polar $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ e $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ são iguais se e somente se são satisfeitas ambas as condições:

$$\begin{cases} r_1 = r_2 \text{ ou seja, } |z_1| = |z_2| \\ \text{Existe } k \text{ inteiro tal que } \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi \end{cases} \qquad (0.20)$$

Conjugação

Dado o complexo em forma polar $z = r\,e^{i\varphi}$ então seu complexo conjugado é

$$\bar{z} = r\,e^{-i\varphi} \tag{0.21}$$

Ou seja, para obter o complexo conjugado, basta trocar o sinal do argumento.

Multiplicação e divisão

Dados os complexos em forma polar $z_1 = r_1\,e^{i\varphi_1}$ e $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ então:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \tag{0.22}$$

Ou seja, o módulo do produto é igual ao produto dos módulos e o argumento do produto é igual à soma dos argumentos.

Dados os complexos em forma polar $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ e $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ então:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \tag{0.23}$$

Ou seja, o módulo da razão é igual à razão dos módulos e o argumento da razão é igual à diferença dos argumentos.

Em particular, dado o complexo em forma polar $z = r e^{i\varphi}$ então seu inverso é

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\varphi} \tag{0.24}$$

Potenciação

Dado o complexo em forma polar $z=r\,e^{i\varphi}$ então z elevado a n (inteiro positivo ou negativo) é

$$z^n=\left(r\,e^{i\varphi}\right)^n$$

$$z^n=\left(r\,e^{i\varphi}\right)^n=r^n\,e^{in\varphi} \tag{0.25}$$

Ou seja, o módulo é elevado à n-ésima potência e o argumento é multiplicado por n.

Radiciação

Dizer que *z* é a raiz n-*ésima* de z_0, ou seja,

$$z = \sqrt[n]{z_0} \tag{0.26}$$

significa que *z* é solução da equação

$$z^n = z_0 \tag{0.27}$$

Para resolver (0.27), representa-se os complexos *z* e z_0 na forma polar $z = r e^{i\varphi}$ $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$. Aplicando a regra da potenciação (0.25) à equação (0.27), tem-se:

$$r^n e^{i n\varphi} = r_0 e^{i(\varphi_0 + 2k\pi)} \quad k \text{ inteiro} \tag{0.28}$$

De acordo com o critério de igualdade (0.20), para que (0.28) e portanto (0.27), sejam satisfeitas, deve-se ter:

$$\begin{cases} r^n = r_0 \\ n\varphi = \varphi_0 + 2k\pi \end{cases} \quad \text{donde} \quad \begin{cases} r = \sqrt[n]{r_0} \\ \varphi = \dfrac{\varphi_0}{n} + \dfrac{2k\pi}{n} \end{cases}$$

o que fornece *n* valores para a raiz n-esima.